

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ РАДІОФІЗИКИ, ЕЛЕКТРОНІКИ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ

кафедра фізичної електроніки

До захисту допущено:

«На правах рукопису»

Завідувач кафедри _____ Анатолій ВЕКЛИЧ

«_23_» травня 2023 р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

на тему:

«Стохастична динаміка дисипативної моделі Дюффінга під дією
гармонічної сили»

Виконав:

студент 2-го курсу магістратури
денної форми навчання
спеціальності 105 – Прикладна фізика та наноматеріали
ОП «Прикладна фізика та наноматеріали»
Сікорський Філіпп Костянтинівич _____

Науковий керівник:

д.ф.-м.н., проф. Анісімов Ігор Олексійович _____

Рецензент:

д.ф.-м.н., проф. СЕМЕНОВ Володимир Вікторович _____

Засвідчую, що у цій бакалаврській роботі
немає запозичень з праць інших авторів без
відповідних посилань
Студент _____

Робота допущена до захисту в ЕК рішенням кафедри фізичної електроніки
від «17» травня 2023 р., протокол № 31.

Завідувач кафедри фізичної електроніки,
доктор фіз.-мат. наук, професор
Веклич Анатолій Миколайович _____

Реферат

Магістерська робота вміщує 50 стор., 45 рис.

МОДЕЛЬ ДЮФФІНГА, ФАЗОВИЙ ПОРТРЕТ, ВІДОБРАЖЕННЯ ПУАНКАРЕ, ДИСИПАЦІЯ, АТРАКТОР.

Для моделі Дюффінга-Холмса (дисипативний осцилятор зі кубічною нелінійністю під дією зовнішньої гармонічної сили) аналітично та за допомогою комп'ютерного моделювання досліджено регулярний та стохастичний рух.

Показано утворення періодичних та квазігармонічних атракторів у системі. Проаналізовано рух системи при різних значеннях амплітуди та частоти зовнішньої сили. Показано, як поводить себе система при малих та великих значеннях дисипації. Знайдено і розглянуто три різні сценарії утворення дивних атракторів в системі: утворення дивних атракторів внаслідок стрибків з однієї потенціальної ями в іншу, а також внаслідок перекриття резонансів субгармонік та вищих гармонік частоти зовнішньої сили.

Зміст

| | |
|---|-----------|
| ВСТУП | 4 |
| 1 ОПИС МОДЕЛІ, ОЗНАЧЕНЬ ТА МЕТОДІВ ВИКОРИСТАНІХ В РОБОТІ | 6 |
| 1.1 Обезрозмірення рівняння Дюффінга. Рівняння Уеди | 6 |
| 1.2 Типи рівнянь Дюффінга | 8 |
| 1.3 Гамільтоніан власних коливань системи | 8 |
| 1.4 Методи аналізу використані в роботі | 9 |
| 1.5 Різні типи поведінки моделі Дюффінга | 12 |
| 1.5.1 Періодичний рух | 12 |
| 1.5.2 Стохастичний рух | 13 |
| 1.5.3 Стабільний стан. Атрактори | 13 |
| 1.5.4 Періодичний атрактор | 13 |
| 1.5.5 Квазістохастичний атрактор | 14 |
| 1.5.6 Дивний атрактор | 14 |
| 2 ПОВНИЙ АНАЛІЗ ДИСИПАТИВНОЇ МОДЕЛІ ДЮФФІНГА-ХОЛМСА | 16 |
| 2.1 Резонансні криві | 16 |
| 2.2 Випадок слабкої дисипації | 18 |
| 2.2.1 Консервативна модель | 18 |
| 2.2.2 Введення в систему слабкої дисипації | 20 |
| 2.2.3 Перетворення центрів у фокуси | 21 |
| 2.3 Випадок сильної дисипації | 24 |
| 2.3.1 Регулярний рух всередині малих потенціальних ям | 25 |
| 2.3.2 Утворення дивного атрактора при наближенні до нуля потенціалу | 26 |

| | | |
|-------|---|-----------|
| 2.3.3 | Перехід від дивного атрактора до регулярної динаміки | 28 |
| 2.3.4 | Утворення дивного атрактора внаслідок перекриття нелінійних резонансів | 31 |
| 2.3.5 | Утворення дивних атракторів внаслідок перекриття резонансів вищих гармонік. | 39 |
| 2.3.6 | Зміна положення стохастичних шарів при зміні частоти зовнішньої сили | 43 |
| | ВИСНОВКИ | 46 |
| | СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ | 48 |

ВСТУП

Модель Дюффінга [3] досліджується вже доволі давно. Але попри те, що існує багато літератури на дану тематику, залишилось багато нюансів, що потребують роз'яснення. Усі спроби описати модель Дюффінга є доволі складними для розуміння, і часто описуються лише на конкретних прикладах не даючи інтуїтивного розуміння поведінки моделі. Зазвичай, у літературі досліджується модель Дюффінга одночасно з кубічною, квадратичною нелінійністю та дисипацією. У попередніх роботах (див., наприклад, [9, 10]) ми спробували описати "найпростішу" консервативну модель Дюффінга беручи до уваги лише кубічну нелінійність. У нашій роботі детально описано поведінку системи та природу появи стохастичної динаміки у ній. Наступним логічним кроком є додавання дисипації в модель, що і було зроблено в цій роботі.

Як і для випадку консервативної моделі ми використовуємо обезрозмірене рівняння Дюффінга, відоме у літературі як рівняння Уеди (див. розд. 1.1). Це рівняння доволі докладно проаналізовано самим Уедою (див., наприклад, [13–17]). У [15] він використовував дещо модифікований варіант рівняння - без врахування власних коливань. Для цієї моделі наведено дуже докладний аналіз, з мапою яка показує, який режим відбувається в системі при різних значеннях параметра. У [17] разом зі співавторами Уеда розглянув і модель з врахуванням власних коливань, а саме з від'ємним квадратом частоти власних коливань (адже варіант з додатним квадратом частоти не дає можливості отримати дивний атрактор). Але, система була розглянута не надто детально і без якісного пояснення явища.

У роботі [12] наприклад, дається лише загальний опис моделі Дюффінга, показується випадок з дивним атрактором, але зовсім не розглядається система з від'ємним квадратом частоти власних коливань.

Доволі докладний опис рівняння з від'ємним квадратом частоти на-

ведено Холмсом у [4]. Саме через це, у літературі для моделі Дюффінга з від'ємним квадратом частоти власних коливань зустрічається назва - осцилятор Дюффінга-Холмса (так і будемо називати його у нашій роботі). Але все ж таки, даний аналіз є доволі складним для сприйняття, і не дає загального опису поведінки системи, оснований лише на конкретних прикладах. Саме тому нами й була зроблена спроба, більш докладно проаналізувати дану модель, зокрема зрозуміти механізми виникнення стохастичності. Наостанок наведемо літературу, де досліджувались приклади застосування моделі Дюффінга. У роботі [12] автори наводять приклади застосування різних варіацій моделі Дюффінга (з та без врахування частоти власних коливань). Основним прикладом є сталеві балки на яку діють магніти. В залежності від закріплення з обох чи одного кінця, а також від дії магнітів, ця система описується різними варіаціями моделі Дюффінга. У роботі [11] розроблено електричний контур який є аналогом моделі Дюффінга. Порівняно результати які дає електричний контур з числовими розв'язками рівняння. У роботі [5] наведено цікавий приклад застосування моделі Дюффінга для створення стохастичної нейронної мережі для розв'язку задачі комівояжера. У роботах [1, 8] показано методи застосування квантового варіанту моделі Дюффінга для аналізу квантового хаосу.

Метою даної роботи є дослідження моделі Дюффінга-Холмса, зокрема:

- дослідження різних типів атракторів, що утворюються в системі,
- дослідження сценаріїв появи стохастичної динаміки,
- залежність положення стохастичних шарів від параметрів системи.

Розділ 1

ОПИС МОДЕЛІ, ОЗНАЧЕНЬ ТА МЕТОДІВ ВИКОРИСТАНИХ В РОБОТІ

1.1 Обезрозмірення рівняння Дюффінга. Рівняння Уеди

У даній роботі досліджувалась модель Дюффінга з дисипацією. Ця модель описує дисипативний осцилятор з кубічною нелінійністю під дією зовнішньої гармонічної сили та задається рівнянням:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x + \beta x^3 = f_m \cos pt, \quad (1.1)$$

де x — координата, t — час, δ — параметр дисипації, ω_0 — резонансна частота власних коливань, β — параметр кубічної нелінійності, f_m, p — амплітуда та частота зовнішньої сили. Рівняння (1.1) є доволі складним для аналізу оскільки має 5 параметрів ($\delta, \beta, \omega_0, p, f_m$). Через цей факт, ми вирішили нормалізувати рівняння щоби зменшити кількість параметрів.

Для початку використаємо безрозмірний час:

$$\tau = \omega_0 t; \quad dt^2 = \frac{d\tau^2}{\omega_0^2} \quad (1.2)$$

Тоді (1.1) набуде вигляду:

$$\omega_0^2 \ddot{x} + 2\delta\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f_m \cos \frac{p}{\omega_0} \tau \quad (1.3)$$

Далі, нормалізуємо частоту зовнішньої сили:

$$\Omega = \frac{p}{\omega_0}, \quad (1.4)$$

і поділимо (1.3) на ω_0^2 . Отримаємо:

$$\ddot{x} + \frac{2\delta}{\omega_0} \dot{x} + x + \frac{\beta}{\omega_0^2} x^3 = \frac{f_m}{\omega_0^2} \cos \Omega \tau \quad (1.5)$$

Нормалізуємо координату:

$$\frac{\beta}{\omega_0^2} x^2 = y^2 \Rightarrow x = \frac{y\omega_0}{\sqrt{\beta}} \quad (1.6)$$

Внаслідок чого отримуємо:

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{\beta}} \ddot{y} + \frac{2\delta}{\omega_0} \frac{\omega_0}{\sqrt{\beta}} \dot{y} + \frac{\omega_0}{\sqrt{\beta}} y + \frac{\beta}{\omega_0^2} \frac{\omega_0^3}{\beta^{3/2}} y^3 = \frac{f_m}{\omega_0^2} \cos \Omega \tau \quad (1.7)$$

Поділивши на $\frac{\omega_0}{\sqrt{\beta}}$ виходить:

$$\ddot{y} + \frac{2\delta}{\omega_0} \dot{y} + y + y^3 = \sqrt{\beta} \frac{f_m}{\omega_0^3} \cos \Omega \tau \quad (1.8)$$

Наостанок, нормалізуємо параметр дисипації та амплітуду зовнішньої сили:

$$D = \frac{2\delta}{\omega_0} \quad (1.9)$$

$$F = \frac{f_m \sqrt{\beta}}{\omega_0^3} \quad (1.10)$$

Врешті-решт, отримуємо безрозмірне рівняння Дюффінга:

$$\ddot{y} + D\dot{y} + y + y^3 = F \cos \Omega\tau \quad (1.11)$$

1.2 Типи рівнянь Дюффінга

У літературі зустрічаються різні варіації моделі Дюффінга. В основному вони варіюються за двома параметрами: нелінійність (квадратична, кубічна або обидві), власні коливання (з додатним або від'ємним квадратом частоти власних коливань, або з нульовою частотою). У нашій роботі розглядається модель лише з кубічною нелінійністю. Щодо частоти власних коливань, то для зручності та однозначності, пропонуємо поділити модель Дюффінга на три варіанти, з назвами, які зустрічаються в літературі (ми наводимо безрозмірні рівняння):

- Модель Дюффінга (класична) [3]:

$$\ddot{y} + D\dot{y} + y + y^3 = F \cos \Omega\tau \quad (1.12)$$

- Модель Уеди [14]:

$$\ddot{y} + D\dot{y} + y^3 = F \cos \Omega\tau \quad (1.13)$$

- Модель Дюффінга-Холмса [4]:

$$\ddot{y} + D\dot{y} - y + y^3 = F \cos \Omega\tau \quad (1.14)$$

1.3 Гамільтоніан власних коливань системи

У цьому підрозділі ми дослідимо поведінку гамільтоніана моделі Дюффінга для різних типів описаних у розд. 1.2. Для зручності введемо параметр $\zeta = \{-1, 0, 1\}$, який визначає кожний з трьох типів рівнянь:

$$\ddot{y} + D\dot{y} + \zeta y + y^3 = F \cos \Omega\tau \quad (1.15)$$

Для того щоби визначити гамільтоніан власних коливань системи покладемо зовнішню силу і дисипацію рівними нулю ($F = 0, D = 0$):

$$\ddot{y} + \zeta y + y^3 = 0 \quad (1.16)$$

Далі домножимо на \dot{y} :

$$\ddot{y}\dot{y} + \zeta y\dot{y} + y^3\dot{y} = 0 \quad (1.17)$$

Проінтегруємо:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{\dot{y}^2}{2} + \zeta \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \right] = 0 \quad (1.18)$$

Це означає, що гамільтоніан системи дорівнює:

$$H = \frac{\dot{y}^2}{2} + \zeta \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \quad (1.19)$$

На рис. 1.1–1.3 зображено залежність гамільтоніана від координати та похідної, проекція цієї залежності на площину координата-похідна, та переріз площиною $\dot{y} = 0$ відповідно. Як видно, випадки $\zeta = 0, 1$ відрізняються один від одного лише швидкістю зростання гамільтоніана. Видно, що для випадку $\zeta = 1$ гамільтоніан зростає швидше, що впливає з рівняння. Для випадку ж $\zeta = -1$ вигляд потенціалу значно змінюється. Внаслідок від'ємного квадрата частоти власних коливань у гамільтоніана з'являється два мінімуми замість одного. У цих мінімумах гамільтоніан приймає від'ємні значення, що добре видно на рисунках (від'ємним значенням відповідає червоний колір). Це значно змінює поведінку системи, що буде показано далі. Саме рівняння з $\zeta = -1$ (рівняння Дюффінга-Холмса) буде основним для розгляду в нашій роботі.

1.4 Методи аналізу використані в роботі

Оскільки рівняння Дюффінга (Уеди) є занадто складним для точного аналітичного розв'язку, в роботі використовувались числові методи мови програмування python. Для числового розв'язку рівняння використовувалась функція "scipy.integrate.odeint" мови програмування Python. Функція "scipy.integrate.odeint" використовує метод Рунге-Кутта для інтегрування диференціальних рівнянь [6]. Цей метод використовує наближення, щоб

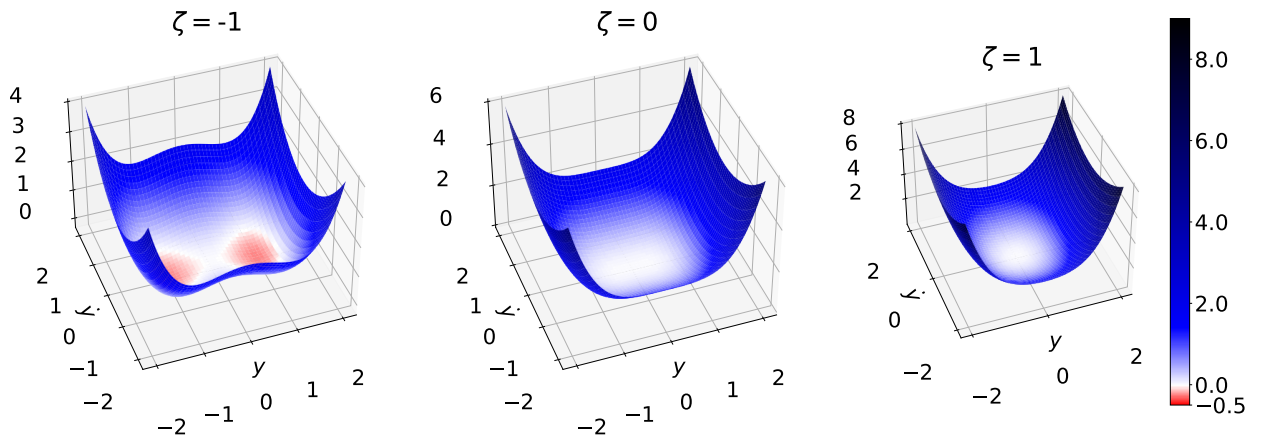


Рис. 1.1: Залежність гамільтоніана від координати та похідної для різних значень параметра ζ . Колір відповідає значенню гамільтоніана. Зокрема, червоний колір відповідає негативним значенням.

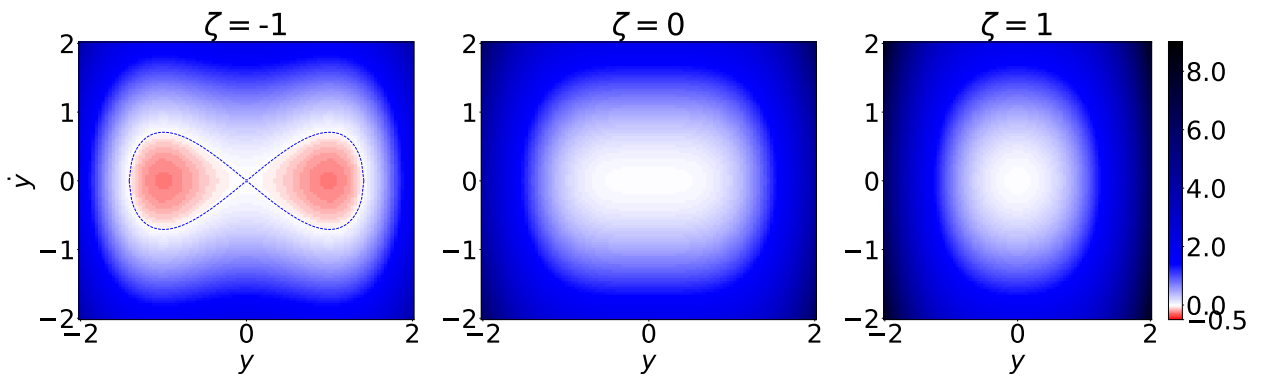


Рис. 1.2: Проекція залежності гамільтоніана зображеної на рис. 1.1 на площину координата-похідна. Колір відповідає значенню гамільтоніана. Зокрема, червоний колір відповідає негативним значенням.

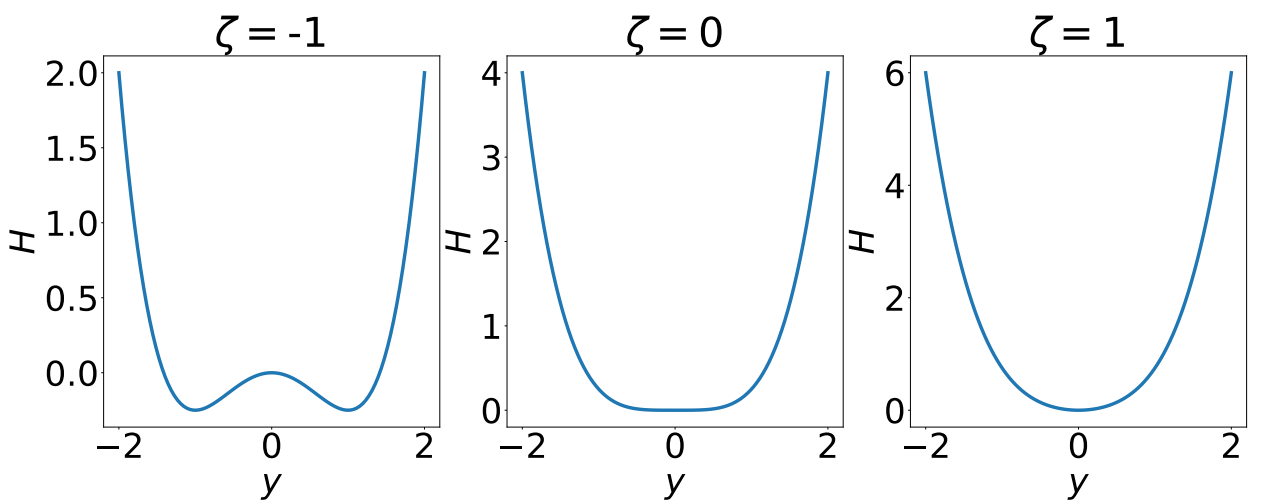


Рис. 1.3: Переріз залежності гамільтоніана зображеної на рис. 1.1 площиною $\dot{y} = 0$

знаходити розв'язок диференціального рівняння на кожному кроці інтегрування. Для кожного кроку метод Рунге-Кутта обчислює кілька значень на основі початкового значення та використовує їх для знаходження більш точного значення функції наступного кроку. Цей процес повторюється, поки не буде досягнуто кінцевого часу інтегрування або досягнуто максимальної кількості ітерацій.

За допомогою цієї функції, ми знаходили залежність координати так похідної від часу з достатньою для нас точністю (яка автоматично визначається функцією 'odeint'). Використовуючи це ми в першу чергу будували тривимірні фазові портрети (залежність похідної та координати від часу), оскільки наша система має півтора ступеня вільності. Також, ми будували так звані відображення Пуанкаре. Відображення Пуанкаре будуються наступним чином:

- Побудова тривимірного фазового портрета;
- Переріз тривимірного фазового портрета для кожного значення часу $\tau = \frac{2\pi n}{\Omega}$, де n — ціле число, таке що $\tau \in [0, \tau_{max}]$, де τ_{max} повний час інтегрування.
- Кожна пара координата-похідна з попереднього пункту наноситься на одну і ту саму площину.

Ще одним методом аналізу поведінки системи є побудова спектрів за допомогою перетворення Фур'є. Для цього використовувалась функція "numru.fft". Ця функція дає змогу знаючи дискретний розподіл по часу, знайти спектр коливань використовуючи метод "Fast Fourier Transform"[2].

Для дисипативної моделі Дюффінга також доцільно використовувати проєкція тривимірного фазового портрета на площину координата-похідна. Якщо рух буде регулярним, то це буде замкнена лінія, в іншому ж випадку — певна площа повністю заповнена точками (якщо взято достатній час інтегрування). Така проєкція фазового портрета далі у роботі буде називатися фазовою площиною.

Також в роботі будувались графіки зміни спектрів при зміні одного з параметрів. На одній осі відкладена спектрова частота, на другій параметр який змінювався, а колір відповідає амплітуді спектра. При цьому початкові умови не змінювались.

Для визначення наявності стохастичної динаміки в системі також розраховувалась експонента Ляпунова [7, 18]. Для розрахунку експоненти Ляпунова числовими методами, розраховувались дві траєкторії руху з двома різними початковими координатами $y_{1,0}$ та $y_{2,0}$ такими що $\delta y_0 = |y_{1,0} - y_{2,0}| \ll 1$ (ми використовували $\delta_y = 0.00001$). Аналізуючи траєкторії знаходилась експонента Ляпунова наступною формулою:

$$\lambda(\tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\delta y(\tau)}{\delta y(0)} \quad (1.20)$$

Причому час τ має бути достатньо великий для точності експоненти Ляпунова. За означенням якщо експонента Ляпунова більше нуля, то рух є стохастичним, якщо ж менше — регулярним. Іншими словами, якщо дві траєкторії що починають рух початкових умов, що знаходяться достатньо близько один до одного, залишаються близькими після певного проміжку часу, то рух на цьому проміжку часу є періодичним, в іншому випадку — стохастичним.

1.5 Різні типи поведінки моделі Дюфінга

При дослідженні системи було виявлено декілька різних типів поведінки системи. За для того, щоби уникнути непорозумінь і бути однозначними, у цьому розділі чітко визначимо усі означення руху в системі.

1.5.1 Періодичний рух

Під періодичним рухом мається на увазі рух частинки, що періодично повторюється з часом. Періодичному руху відповідає дискретний спектр. Умову періодичного руху можна записати наступним чином:

$$\exists T \forall (y, \dot{y}) : y(\tau) = y(\tau + T) \text{ та } \dot{y}(\tau) = \dot{y}(\tau + T). \quad (1.21)$$

На фазовій площині періодичному руху відповідає будь-яка замкнена лінія, а на відображенні Пуанкаре набір точок, що не збільшується з часом. Кількість точок відповідає відношенню періоду руху до періоду зовнішньої сили.

1.5.2 Стохастичний рух

Стохастичний рух є протилежним періодичному. Для нього не існує періоду, з яким координата і похідна повторюються. Це означає, що координата стохастично змінює своє значення в межах певної ділянки на фазовій площині. Спектр при цьому звичайно є неперервним.

1.5.3 Стабільний стан. Атрактори

Під стабільним станом мається на увазі стан системи, що не змінюється з часом. Стабільним станом системи може бути як і стохастичний рух (дивний атрактор розд. 1.5.6) так і періодичний рух системи (розд. 1.5.4). Зазвичай, стабільний стан системи спостерігається не відразу у системі, а починаючи з певного часу τ_{stable} . Узагальнюючи, стабільний стан системи — це такий стан, коли характер руху системи не змінюється на проміжку часу $\tau \in [\tau_{stable}, \infty]$. Стабільним станом системи також називають атрактором. Ще одним визначенням атрактора може бути наступне: Атрактор — множина точок у фазовому просторі, до якої збігаються фазові траєкторії дисипативної системи.

Під час дослідження моделі Дюффінга ми визначили, що в ній існує три типи атракторів.

1.5.4 Періодичний атрактор

Перший тип атрактора відповідає періодичному руху і в літературі має назву "періодичний атрактор"[12]. Характер руху для даного типу атрактора наступний:

- початок руху з заданих початкових умов;
- поступова зміна амплітуди коливань;
- перехід до періодичного стабільного стану;

Спектр коливань для періодичного атрактора, навіть на проміжку часу, де відбувається перехід до стабільного стану є дискретним. Експонента також є від'ємною і під час переходу і для стабільного стану.

1.5.5 Квazістохастичний аттрактор

Квazістохастичний аттрактор є характерним для малих значень параметра дисипації та відрізняється від періодичного аттрактора тим, що під час переходу до періодичного стабільного часу рух є стохастичним. Відповідно, спектр для коливань під час переходу є неперервним, а експонента додатна. Але для стабільного стану рух є періодичним, і експонента від'ємна.

1.5.6 Дивний аттрактор

Дивним аттрактором є такий рух системи, для якого стабільним станом є стохастичний рух. Експонента є додатною й під час переходу і для стабільного стану. У розд. 1.5.6 наведено тип руху в системі (стохастичний чи регулярний) для різних проміжків часу і різних типів аттракторів.

На рис. 1.4 наведено приклади зміни експоненти Ляпунова для різних типів аттракторів, а на рис. 1.5 епюри коливань для двох різних початкових умов: (y_0, \dot{y}_0) та $(y_0 + 0.00001, \dot{y}_0)$. Дослідження сценаріїв утворення дивних аттракторів є головною метою нашої роботи, і буде описано у наступних розділах. Варто також зазначити, що доцільно буде порівнювати саме максимальні значення показника Ляпунова на певних проміжках. Як бачимо, періодичний аттрактор завжди має негативну експоненту Ляпунова на усьому проміжку, і коливання доволі швидко згасають перетворюючись на коливання з постійною амплітудою. Для квazістохастичного аттрактора ми бачимо, що до певного значення часу (τ_{stable} - показано штрихованою помаранчевою лінією) максимальне значення експоненти має позитивні значення (стохастичний рух), а після нього лише негативні (регулярний рух). Відповідну поведінку демонструє й епюра коливань, де видно, що до певного часу дві траєкторії поводять себе стохастично і сильно відрізняються, але після стабілізації вони знову сходяться. Дивний аттрактор же завжди має позитивний показник Ляпунова (негативний тільки на початковій ділянці, коли точки ще не встигли розійтись), а епюри відповідно поводять себе стохастично, і різняться завжди. Варто зазначити, що розділити періодичний та квazістохастичний аттрактор зазвичай буває доволі важко, оскільки час переходу до стабільного стану може бути доволі короткий, через що, наприклад, побудувати спектр з якісною роздільною здатністю неможливо.

| Час | $\tau \in [0, \tau_{stable})$ | $\tau \in [\tau_{stable}, \infty)$ |
|----------------------------|-------------------------------|------------------------------------|
| Періодичний атрактор | Регулярний | Регулярний |
| Квазістохастичний атрактор | Стохастичний | Регулярний |
| Дивний атрактор | Стохастичний | Стохастичний |

Табл. 1.1: Порівняння атракторів

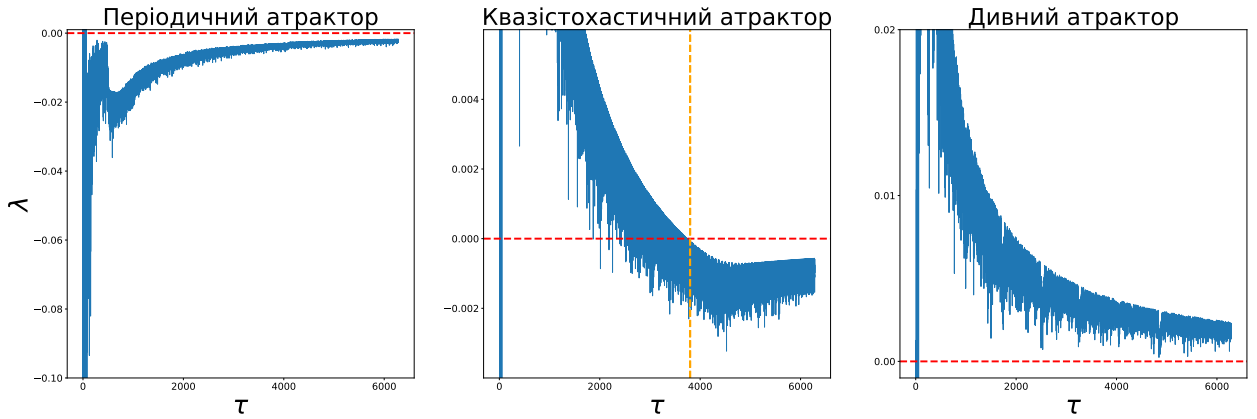


Рис. 1.4: Залежність експоненти Ляпунова від часу для випадку періодичного, квазістохастичного та дивного атракторів.

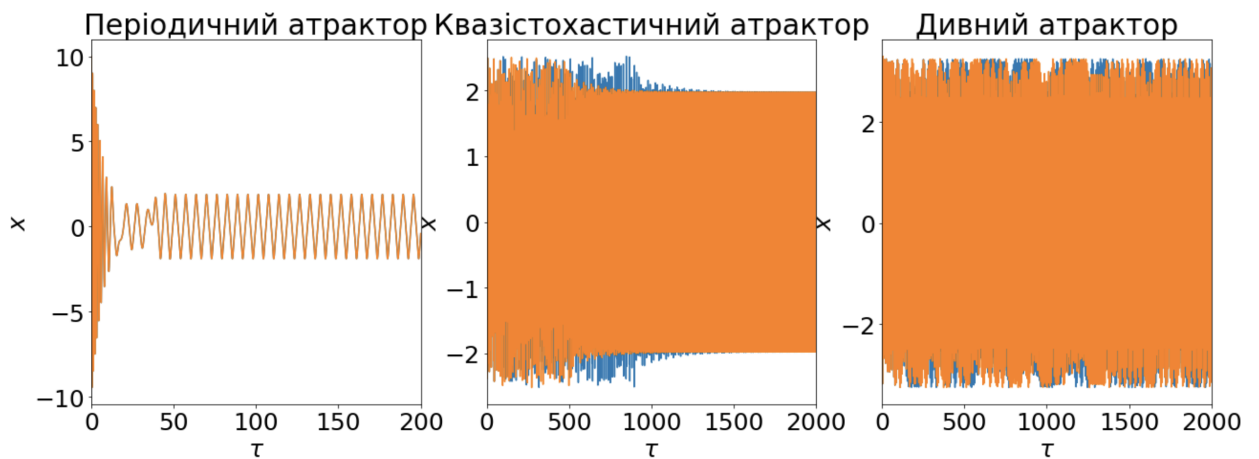


Рис. 1.5: Порівняння максимальних значень показника Ляпунова для випадків періодичного, квазістохастичного та дивного атракторів для двох дуже близьких початкових умов.

Розділ 2

ПОВНИЙ АНАЛІЗ ДИСИПАТИВНОЇ МОДЕЛІ ДЮФФІНГА-ХОЛМСА

У цьому розділі ми спробуємо досягти головної мети нашої роботи, а саме зрозуміти та описати поведінку моделі Дюффінга-Холмса, дослідити які атрактори вона може утворювати, сценарій появи стохастики та параметри які для цього потрібні.

2.1 Резонансні криві

Для початку побудуємо резонансні криві основної гармоніки. Для цього розглянемо рівняння Дюффінга для різних типів (1.15):

$$\ddot{y} + D\dot{y} + \zeta y + y^3 = F \cos \Omega\tau$$

І підставимо розв'язок у вигляді:

$$y = Ae^{i\Omega\tau} + A^*e^{-i\Omega\tau} \quad (2.1)$$

Оскільки ми знаходимо резонансні криві, то нас цікавлять тільки сталі амплітуди коливань ($A \neq f(\tau)$). Підставивши у (1.15), отримуємо:

$$A [-\Omega^2 + iD\Omega + \zeta + 3AA^*] = \frac{F}{2} \quad (2.2)$$

Домноживши на комплексно спряжене обидві частини рівняння і ввівши інтенсивність коливань $I = AA^*$ отримуємо:

$$I [(3I + \zeta - \Omega^2)^2 + D^2\Omega^2] = \frac{F^2}{4} \quad (2.3)$$

Розв'язавши дане рівняння числовим методом можна знайти залежність інтенсивності від частоти зовнішньої сили. Взнявши корінь від інтенсивності отримуємо залежність модуля амплітуди від частоти зовнішньої сили. На рис. 2.1 зображено залежності модуля амплітуди від частоти зовнішньої сили (резонансні криві) для моделі Дюффінга-Холмса. Як видно на лівому рисунку, введення в систему дисипації обмежує максимальну амплітуду коливань. На відміну від консервативного випадку, де амплітуда нескінченно збільшується при збільшенні частоти зовнішньої сили, в дисипативному випадку вона обмежена. На відміну від розмірного рівняння Дюффінга, нахил резонансної кривої не можна змінювати, оскільки коефіцієнт при y^3 внаслідок обезрозмірення не змінюється і дорівнює одиниці. З правого рисунка видно, що при збільшенні амплітуди зовнішньої сили збільшується та амплітуда основного резонансна. На правому рисунку штрихованою лінією також зображено залежність максимальної амплітуди від частоти зовнішньої сили, яку не важко знайти з (2.3) продиференціювавши його по Ω :

$$I_{max} = \frac{2\Omega^2 - D^2 - 2\zeta}{6} \quad (2.4)$$

На рис. 2.2 також зображено резонансні криві для різних моделей (різних значень параметра ζ). Як бачимо, для правого рисунка (випадок великого значення амплітуди зовнішньої сили та параметра дисипації) резонансні криві не сильно змінюються для різних моделей. Причина цього факту в тому, що коли F та D великі, то внесок доданка y у рівняння є малим у порівнянні з іншими, тому моделі майже не відрізняються. Для випадку ж малих амплітуд зовнішньої сили та слабкою дисипації, ми бачимо що ре-

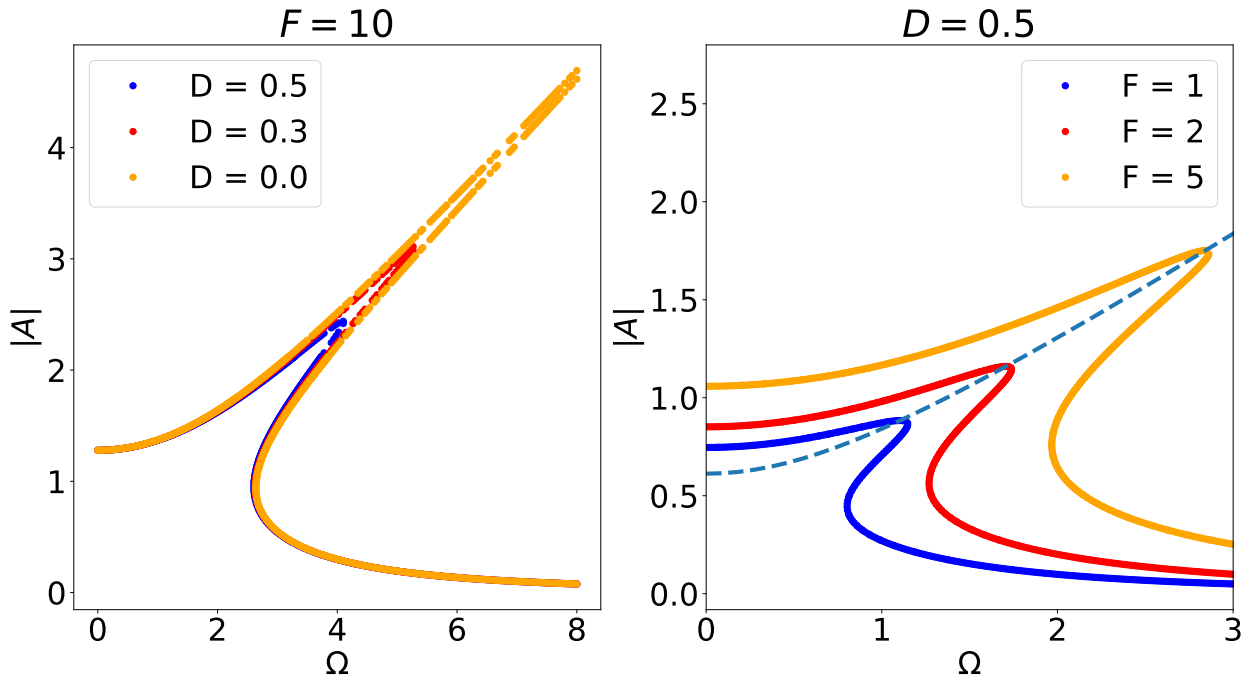


Рис. 2.1: Резонансні криві моделі Дюффінга-Холмса для різних значень параметрів дисипації та амплітуди зовнішньої сили. На лівому рисунку стала амплітуда зовнішньої сили, а на правому — параметр дисипації. Штрихованою лінією показано залежність максимуму модуля амплітуди.

резонансні криві суттєво відрізняються для різних моделей. Зокрема, можна побачити, що для малих частот зовнішньої сили, ми маємо різну кількість резонансів для різних моделей.

2.2 Випадок слабкої дисипації

2.2.1 Консервативна модель

Розпочнемо дослідження моделі Дюффінга-Холмса ($\zeta = -1$) з випадку слабкої дисипації. Але для цього, спочатку розглянемо консервативну модель. У попередніх роботах (див., наприклад, [9]) ми розглядали консервативну модель Дюффінга. Консервативній моделі характерна наступна поведінка. Відображення Пуанкаре для консервативного випадку зазвичай має певну кількість особливих точок типу "центр" та декілька точок типу "сіadlo". Стохастична динаміка відбувається або на ділянках перекриття нелінійних резонансів (між центрами) або біля петлі сепаратисти. Причому навколо центрів є певна область регулярного руху яка називається

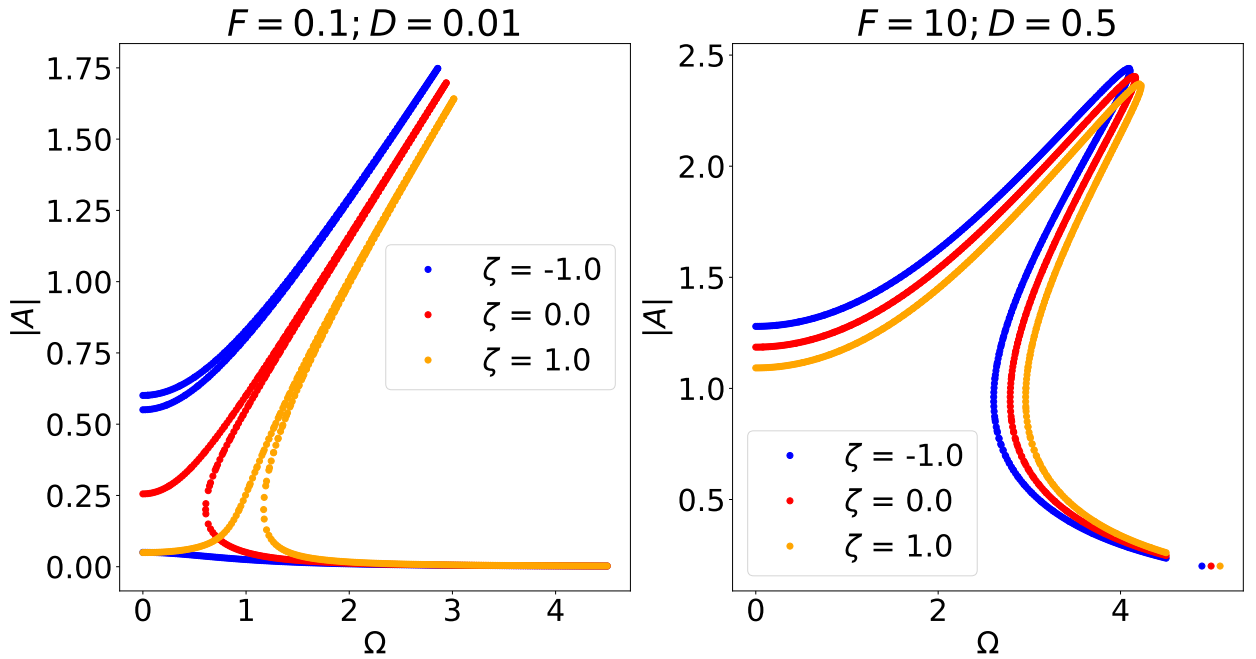


Рис. 2.2: Резонансні криві для різних значень параметра ζ .

"острівцями регулярного руху". Варто зазначити, що для консервативного випадку кінцевий стан системи дуже сильно залежить від початкових умов.

На рис. 2.3 можна побачити зображення Пуанкаре для консервативного випадку. Варто відразу нагадати, що у такому випадку, регулярному відповідатимуть замкнені лінії, а стохастичному — ділянка заповнена стохастично розподіленими точками (якщо збільшити у багато разів час інтегрування, то ця ділянка буде повністю заповнена точками). Ми бачимо три характерних центри, які відповідають основній гармоніці, та острівці регулярного руху навколо них. Система має саме три центри, а не два, через те, що ми розглядаємо модель з подвійною потенціальною ямою. Також, ми бачимо меншого розміру острівці (сірий колір) навколо центрів, що відповідають гармонікам вищих порядків. Варто також зазначити, що таких острівців може бути більше, однак їх важко знайти, і для нашого аналізу достатній лише один випадок. Також, ми бачимо зону стохастики яка знаходиться між основними центрами.

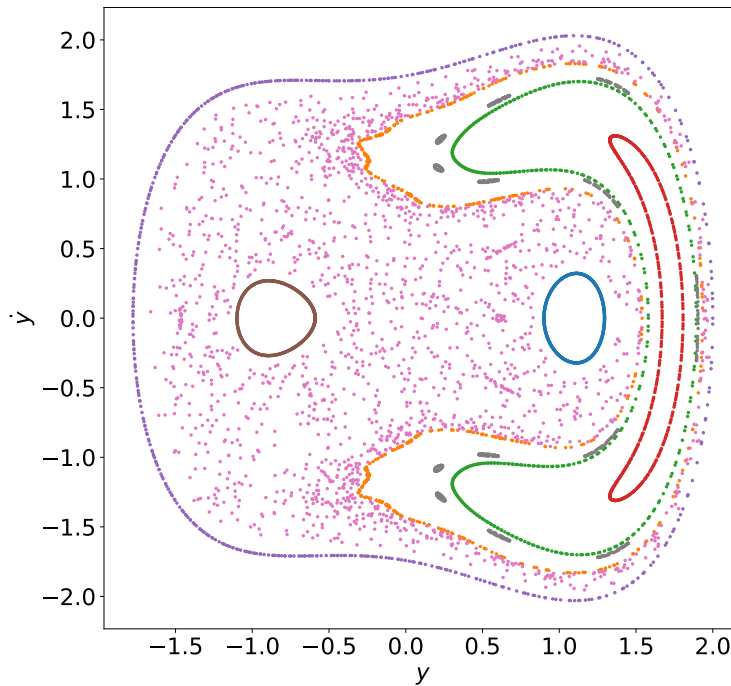


Рис. 2.3: Зображення Пуанкаре для консервативної моделі Дюффінга-Холмса. Різний колір відповідає різним початковим умовам. $F = 0.1$; $D = 0$; $\Omega = 1$.

2.2.2 Введення в систему слабкої дисипації

Тепер розглянемо випадок, коли в системі присутня слабка дисипація - $D = 0.01$. На рис. 2.4 можна побачити проєкцію всього фазового портрета на площину координата-похідна для моделі зі слабкою дисипацією для коливань що встановились. Як вже зазначалось раніше, для дисипативної моделі доцільніше будувати саме повний фазовий портрет, а не відображення Пуанкаре, адже відображення Пуанкаре у цьому випадку, наприклад, буде просто однією точкою (зображено трикутником на рисунку). Варто зазначити, що під коливаннями що встановились, мається на увазі для другої половини часу інтегрування, коли система вже вийшла на стабільний стан. Факт того, що відображення Пуанкаре має лише одну точку у цьому випадку, означає, що коливання мають частоту рівну частоті зовнішньої сили. Як ми бачимо, у системі залишилось лише три стабільні стани (які б початкові умови ми не взяли, врешті-решт система прийде до одного з цих станів). Також, можна побачити, що в системі повністю відсутня стохастика. На рис. 2.2 зображено резонансну криву для випадку $D = 0.01$. Зрозуміло, що для випадку без дисипації ця крива суттєво зміниться лише тим, що не буде обмежена згори. Але для $\Omega = 1$ суттєвих змін не відбудеться.

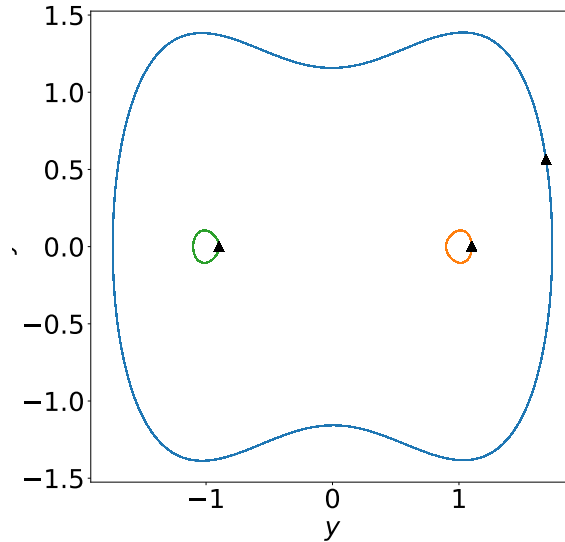


Рис. 2.4: Фазова площина для моделі Дюффінга-Холмса зі слабкою дисипацією. Різний колір відповідає різним початковим умовам. Чорними трикутниками позначені відображення Пуанкаре. $F = 0.1$; $D = 0.01$; $\Omega = 1$.

2.2.3 Перетворення центрів у фокуси

У цьому підрозділі розглянемо більш детально усі три стабільні стани, та порівняємо дисипативну модель з консервативною. На рис. 2.5 зображено порівняння для певних початкових умов. Як бачимо, у цьому випадку, правий малий острівець на відображенні Пуанкаре консервативної моделі перетворився на стабільний фокус. На лівому рисунку можна побачити, як точка поступова притягується до правого фокуса. А на правому рисунку для випадку вже встановлених коливань, можна побачити, що фокус (зелений трикутник) якраз знаходиться близько до попереднього центра. Отже, можна стверджувати що центр з малим острівцем регулярного руху на відображенні Пуанкаре перетворився на стійкий фокус. Резонанси які є центрами для консервативного випадку, і фокусами для дисипативного випадку, мають майже однакові положення, що відповідає резонансним кривим. Також, можна помітити, що початкові умови для дисипативного випадку лежать на ділянці, яка для консервативного випадку лежить в області стохастики. Отже, можна стверджувати, що попередні ділянки стохастики перетворились на квазістохастичні атрактори. Зрозуміло, що аналогічно відбувається і з лівим малим острівцем.

Розглянемо тепер випадок великого острівця. На рис. 2.6 зображено ви-

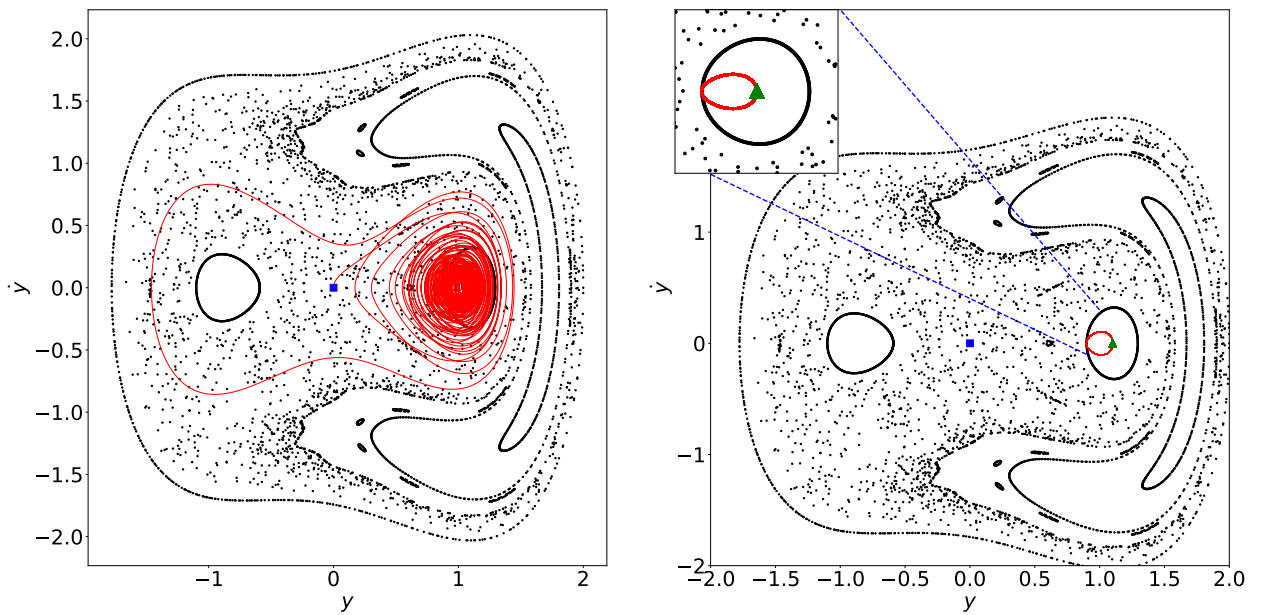


Рис. 2.5: Порівняння дисипативної та консервативної моделі Дюффінга-Холмса ($y_0 = \dot{y}_0 = 0$). Чорним кольором показано відображення Пуанкаре для консервативної моделі (теж саме що і на рис. 2.3). Ліворуч червоним — проекція фазової траєкторії для дисипативної моделі ($D = 0.01$); Праворуч червоним — теж саме для стабільного стану ($\tau > \tau_{stable}$). Зелений трикутник — відображення Пуанкаре для дисипативної моделі. $F = 0.1$; $\Omega = 1$. Ліворуч в кутку правого рисунка збільшена ділянка фазової площини. Синім квадратом позначено початок траєкторії.

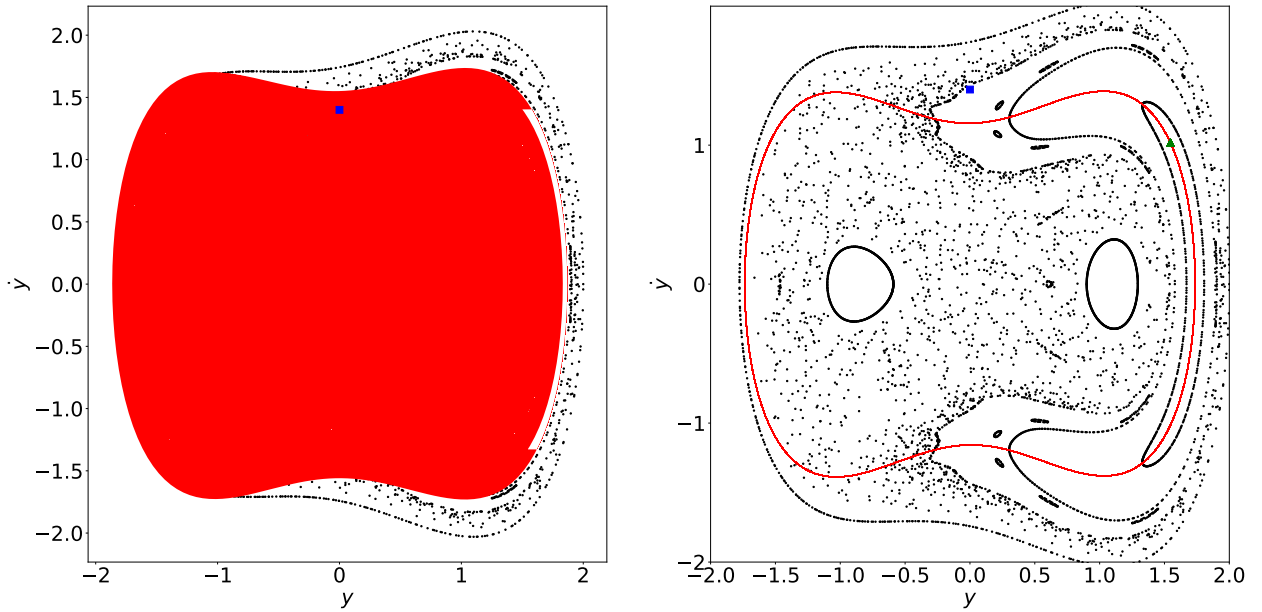


Рис. 2.6: Порівняння дисипативної та консервативної моделі Дюффінга-Холмса для початкових умов ($y_0 = \dot{y}_0 = 0$). Всі позначення аналогічні до рис. 2.5. $D = 0.01$.

падок для траєкторії, що починається з іншої початкової умови, і тепер ми бачимо, що стабільний стан, що у цьому випадку також є сталим фокусом (зелений трикутник), тепер відповідає більшому острівцю. Причому, варто зазначити, що фокус (зелений трикутник) тепер не збігається з попереднім центром, але проєкція фазового портрета проходить через центр. Факт того, що фокус віддалився від попереднього положення центра є властивим для дисипативних моделей. Він пов'язаний з тим, що уявна частина амплітуди тепер не рівна нулю, через що значення похідної в момент часу $\tau = 2\pi n/\Omega$ (що відповідає відображенню Пуанкаре) теж ненульове, тому і відображення Пуанкаре тепер не лежить на вісі $\dot{y} = 0$. На рис. 2.7 показано зміну положення фокуса при зміні параметра дисипації. Видно, що при збільшенні параметра дисипації, фокус поступова віддаляється від центра.

Підсумовуючи, при додаванні до моделі Дюффінга-Холмса слабкої дисипації відбувається наступне:

- Особливі точки консервативної моделі типу центр перетворюються на стабільні фокуси.
- Ділянки, що відповідали острівцям регулярного руху навколо центрів перетворюються на періодичні аттрактори.

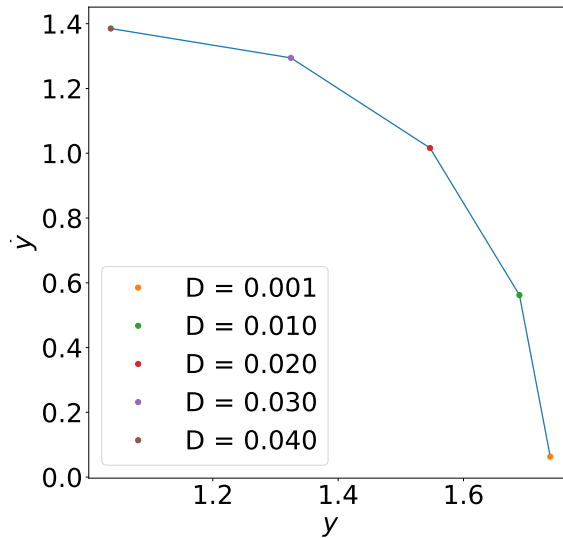


Рис. 2.7: Зміна положення фокуса при зміні параметра дисипації.

- Ділянки, що відповідали стохастичному руху перетворюються на квазістохастичні атрактори.
- Нові стійкі фокуси, що утворилися в системі відповідають суто вимушеним коливанням, які відбуваються на частоті зовнішньої сили. Перехід до усталеного режиму відповідає згасанню вільної компоненти.

2.3 Випадок сильної дисипації

У цьому розділі розглянемо поведінку моделі, коли в системі присутня сильна дисипація. Для цього ми встановимо певне значення параметра дисипації ($D = 0.4$) та частоти зовнішньої сили ($\Omega = 2$), і поступово змінюючи амплітуду зовнішньої сили будемо дивитись як поводить себе система. Для початку побудуємо так званий спектральний графік. У цьому випадку під спектральним графіком мається на увазі такий на якому показується зміна спектра при зміні амплітуди зовнішньої сили. На рис. 2.8 та ??? зображено спектральні графіки для різних ділянок амплітуди зовнішньої сили. По вісі абсцис на них відкладена спектрова частота, а по вісі ординат амплітуда зовнішньої сили. Кольором позначена висота піків спектра. Зазначимо, що усі спектри будувались для одних і тих самих початкових

умов ($y_0 = \dot{y} = 0$). Побудовані спектральні графіки дають змогу дізнатися при яких значеннях амплітуди зовнішньої сили буде регулярна чи стохастична динаміка. Якщо спектр дискретний (є тільки декілька спектральних піків) то динаміка регулярна, якщо неперервний (смуга вздовж осі абсцис майже одного кольору) - стохастична. Дивлячись на спектральні графіки, можна побачити, що при збільшенні амплітуди зовнішньої сили в системі періодично з'являються стохастичні шари. У подальших підрозділах буде розібрано усі сценарії появи стохастики у системі, але для початку розглянемо лише регулярні випадки. На графіках також червонім та синім кольором зліва показано значення показника Ляпунова для відповідних значень амплітуди зовнішньої сили. Синій колір — показник більше нуля, динаміка стохастична; Червоний колір показник менше нуля, динаміка регулярна. Оскільки всі розрахунки зроблені для коливань, що встановились, то фактично наш метод дає змогу розрізнити тільки дивний атрактор від періодичного (квазістохастичного). Щоб розрізнити квазістохастичний атрактор від періодичного, треба інший аналіз.

Розглянемо для початку докладно випадок, коли амплітуда зовнішньої сили менше $F = 3.5$. На рис. 2.8 зображено спектральний графік для цієї ділянки.

2.3.1 Регулярний рух всередині малих потенціальних ям

Можна побачити, що для зовсім малих значень амплітуди зовнішньої сили (до $f \sim 0.7$) ми бачимо суто регулярний рух з частотою зовнішньої ($\Omega = 2$), а також подвоєною і потроєною частотою ($2\Omega, 3\Omega$). На рис. 2.9 зображено фазову площину для різних початкових умов (для коливань що встановились) та спектр коливань. Як видно на фазовій площині для таких параметрів моделі є тільки два стабільні стани, які відповідають двом малим потенціальним ямам. Штрихованою лінією показано положення цих потенціальних ям (лінія відповідає місцям де потенціал рівен нулю). Як бачимо, обидві стабільні стани знаходяться всередині цих ям. На рис. 2.10 показано одну з траєкторій, на якій видно як частинка поступово притягається до одного зі стабільних станів (опускається в одну з потенціальних

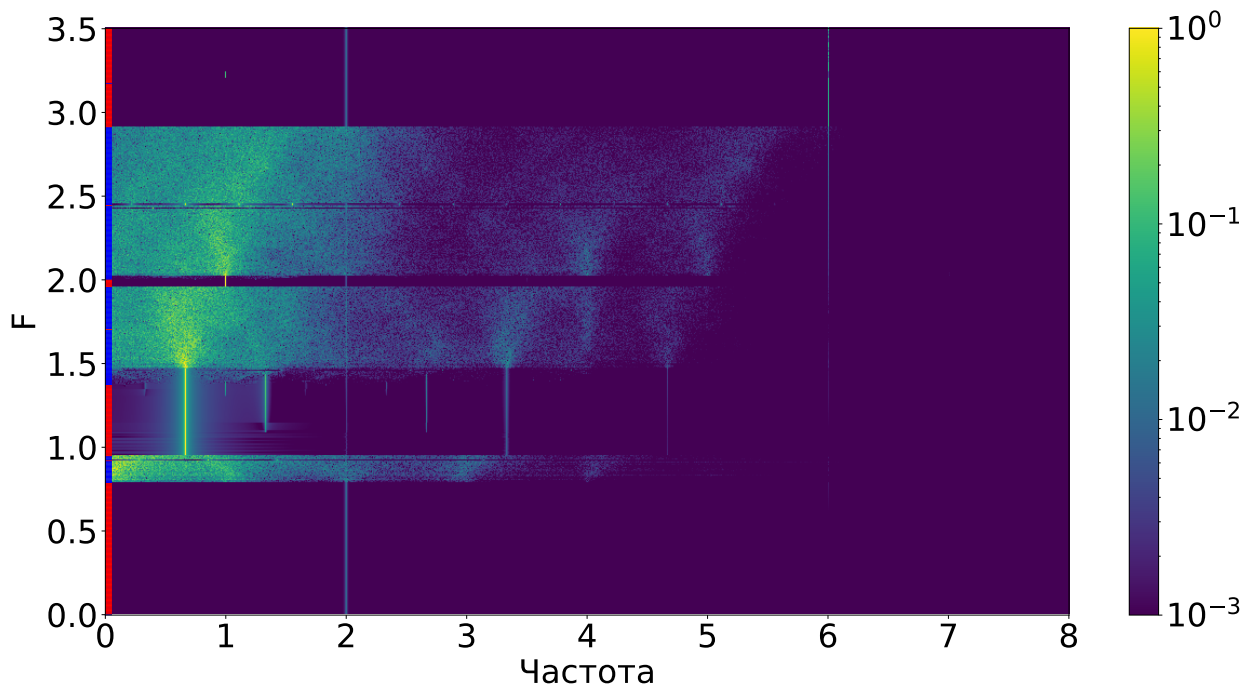


Рис. 2.8: Спектральний графік для ділянки $F = [0, 3.5]$. $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

ям). Зрозуміло, що положення стабільного стану визначається амплітудою зовнішньої сили (при сталих D та Ω), і при її збільшенні точка буде підійматися по потенціальній ямі, що означатиме розширення траєкторії стабільного стану. На рис. 2.11 показано випадок, коли траєкторія стабільного стану максимально наблизилась до нулів малих потенціальних ям. Як бачимо, рух все ще регулярний, а спектр має ті самі піки, що і раніше.

2.3.2 Утворення дивного атрактора при наближенні до нуля потенціалу

На рис. 2.12 показано як поводить себе система при подальшому збільшенні амплітуди зовнішньої сили. Як бачимо, поступово збільшуючи F ми наблизилась до нуля потенціалу. При цьому в системі утворюється дивний аттрактор. Причина його утворення полягає у випадкових стрибках між коливаннями в околах трьох стаціонарних точок: стаціонарна точка типу "сідело" яка знаходиться в точці $y = \dot{y} = 0$, і два центри на дні потенціальних ям. Іншими словами, можна сказати, що частинка стохастично перестрибує з однієї потенціальної ями в іншу, і навпаки. Утворення дивного атрактора відбувається різко, можна побачити що амплітуди на рис. 2.11 та рис. 2.12 відрізняються лише на соті. На рис. 2.13 також окремо показано відобра-

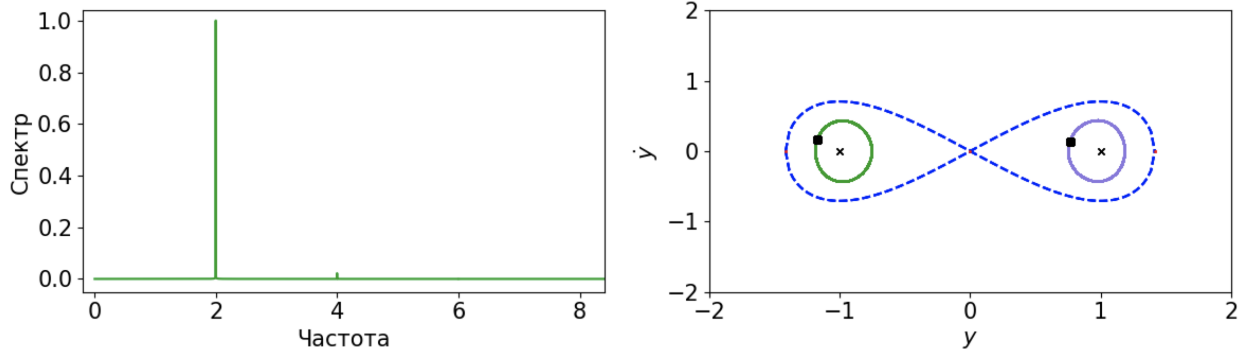


Рис. 2.9: Спектр коливань та фазова площина (коливань що встановились) для різних початкових умов. $F = 0.5$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$. Чорними квадратами показані відображення Пуанкаре. Хрестиками — центри малих потенціальних ям. Синьою штрихованою лінією — нуль потенціалу. На усіх наступних рисунках такі самі позначення.

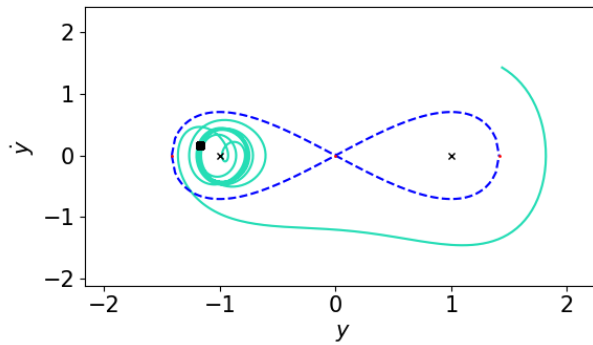


Рис. 2.10: Траєкторія притягання частинки до одного зі стабільних станів. $F = 0.5$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

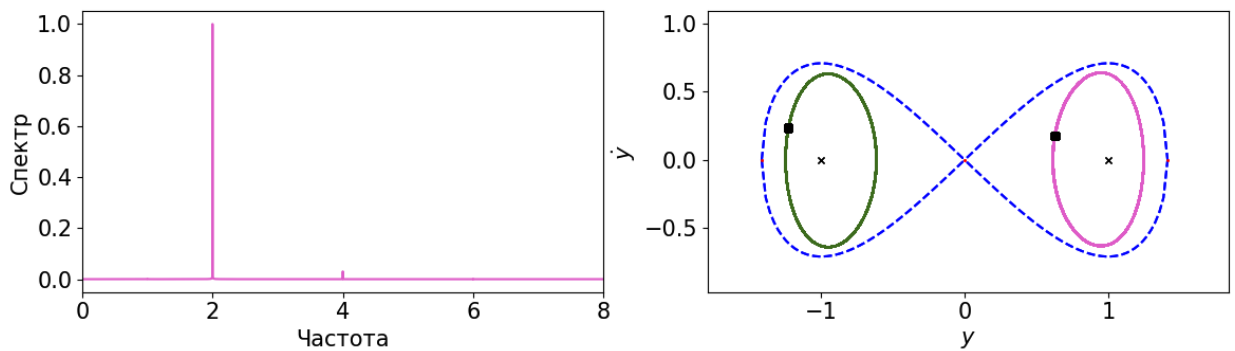


Рис. 2.11: Стабільний стан для випадку близького до нуля потенціалу. $F = 0.785$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

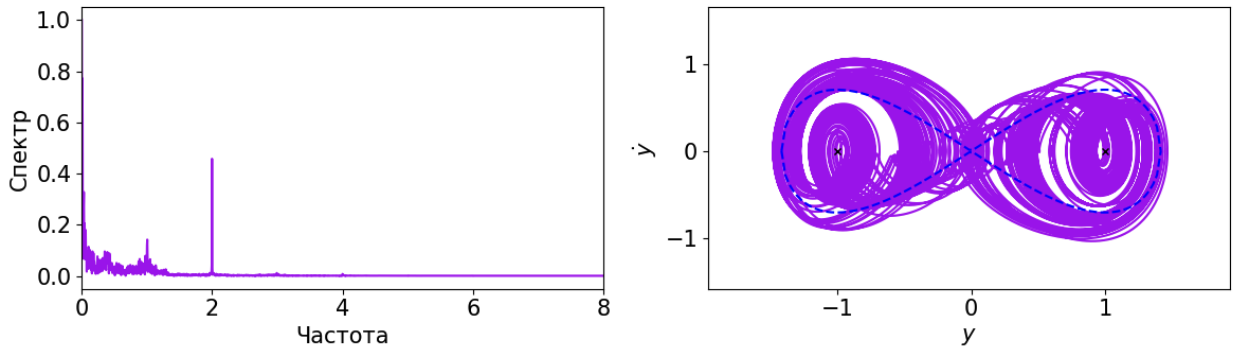


Рис. 2.12: Утворення дивного атрактора поблизу нуля потенціалу. $F = 0.79$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

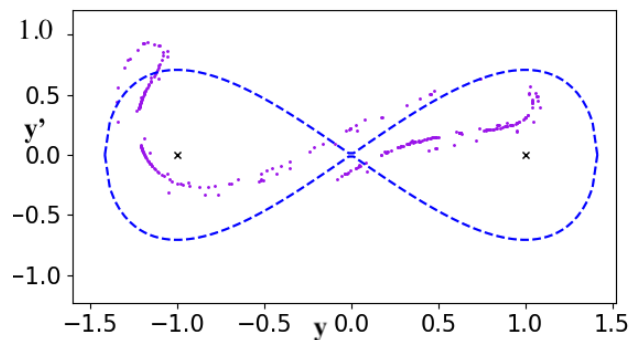


Рис. 2.13: Відображення Пуанкаре для випадку зображеного на рис. 2.12. $F = 0.79$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

ження Пуанкаре для цього випадку. Як бачимо, відображення Пуанкаре з невеликої кількості точок перетворилось на ділянку заповнену великою кількістю точок.

2.3.3 Перехід від дивного атрактора до регулярної динаміки

Поведінка системи залишається подібною на усьому проміжку стохастичного шару: $F \sim [0.79, 0.91]$. При переході системи від стохастичного до регулярного стану можна побачити доволі цікаву картину, як, наприклад для $F = 0.92$ (рис. 2.14 і 2.15). Як можна побачити, при таких умовах в системі співіснують стохастичний і регулярні аттрактори. Тобто в системі починає зникати дивний аттрактор і з'являється регулярний. Цей перехід відбувається теж доволі швидко (як і поява стохастичного шару), але тут нам вдалося отримати випадок умовної сепаратриси (границя між двома станами системи). На який з аттракторів потрапить точка залежить від по-

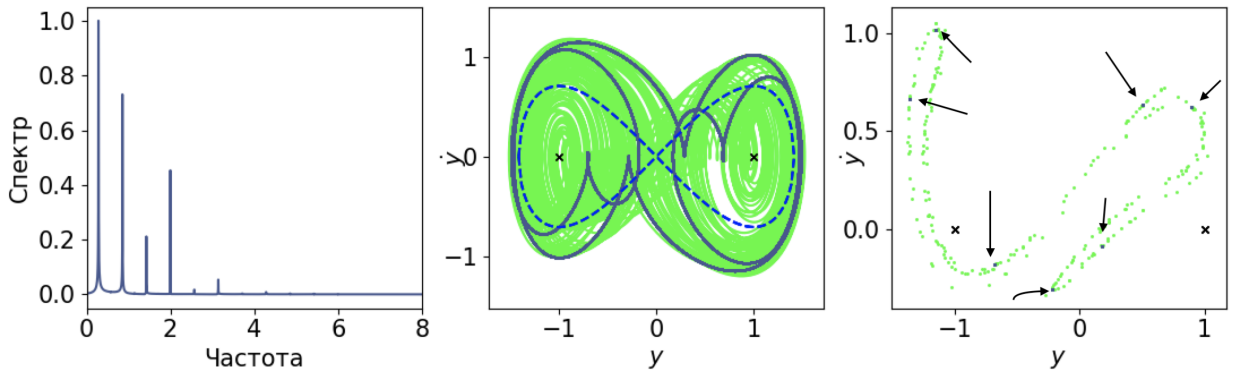


Рис. 2.14: Випадок резонансу вищого порядку $F = 0.92$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$. Праворуч відображення Пуанкаре. По центру фазова площина. Стрілками показані точки відображення Пуанкаре для регулярного випадку. Різний колір відповідає різним початковим умовам. Спектр відповідає регулярному випадку.

чаткових умов. Цікаво, що періодичних атракторів існує декілька навіть при одних і тих самих початкових умовах, (на рис. 2.14 і 2.15 наведені два різні при однакових значеннях параметрів). Періодичний атрактор у даній ситуації явно є резонансом вищого порядку, оскільки на спектрі ми чітко бачимо піки на кратних значеннях частоти зовнішньої сили (на рис. 2.15 наприклад на частоті $1/3\Omega$, що на відображенні Пуанкаре відповідає трьом точкам). Варто зазначити, що отримати такі регулярні траєкторії доволі важко, і вони утворюються лише на певних дуже малих діапазонах зовнішньої сили та початкових умов, що є характерною ознакою сепаратриси між різними станами системи. На рис. 2.16 зображено мапа розподіл стохастичної та регулярної динаміки в залежності від початкових умов. Тобто, якщо взяти початкові умови у "червоній зоні" то точка потрапить на регулярний атрактор, а якщо у "синій зоні" дивний атрактор. Як ми бачимо, у даному випадку, залишилась лише невелика ділянка, яка відповідає стохастичній динаміці. З рис. 2.16 можна зробити наступний висновок про перехід системи зі стохастичного до регулярного руху. Можна припускати, що при збільшенні амплітуди зовнішньої сили ділянка для початкових умов, що призводить до стохастики поступово зменшується, поки повністю не зникає.

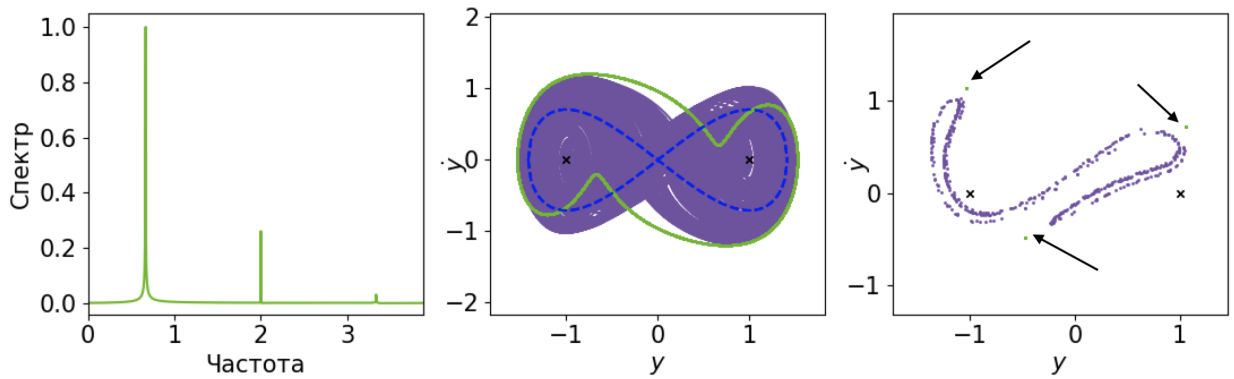


Рис. 2.15: Випадок ще одного резонансу вищого порядку $F = 0.92$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$. Праворуч відображення Пуанкаре. По центру фазова площина. Стрілками показані точки відображення Пуанкаре для регулярного випадку. Різний колір відповідає різним початковим умовам. Спектр відповідає регулярному випадку.

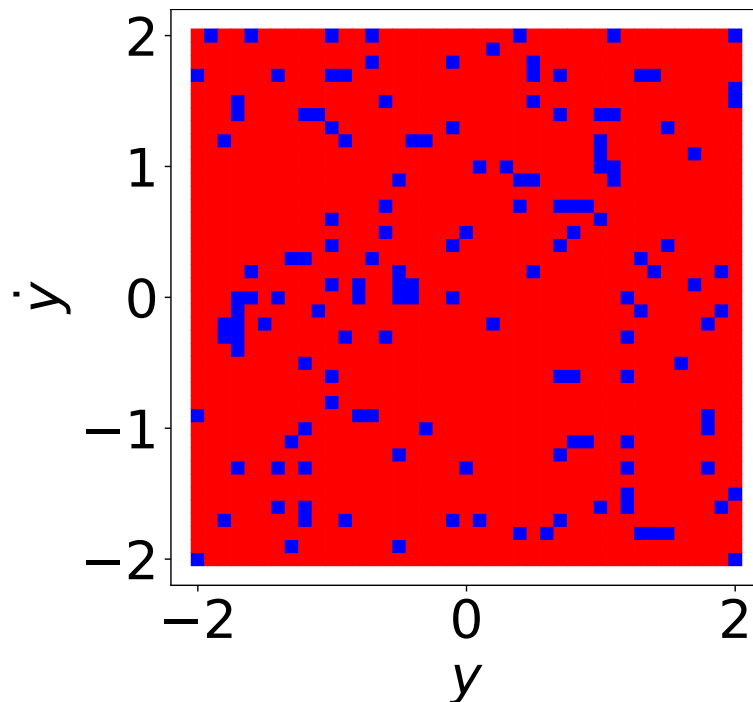


Рис. 2.16: Мапа розподілу стохастичного та регулярного руху для різних початкових умов $F = 0.92$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$. Синій колір — стохастика, червоний — регулярний рух.

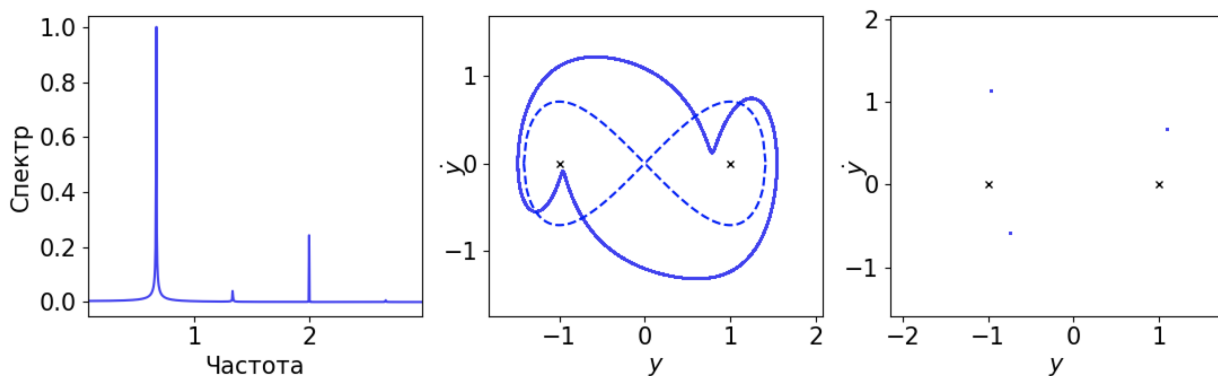


Рис. 2.17: Випадок регулярного руху між двома стохастичними шарами $F = 1.1$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

2.3.4 Утворення дивного атрактора внаслідок перекриття нелінійних резонансів

Перекриття третинної гармоніки з основною

З рис. 2.8 видно, що при подальшому збільшенні амплітуди зовнішньої сили в системі спостерігається регулярний рух, поки ми не переходимо до ще одного стохастичного шару. Варто зазначити, що для регулярного руху (рис. 2.17 ми тепер отримуємо лише один стабільний стан. Також, як бачимо, ми тепер маємо явний резонанс на частоті $1/3\Omega$, появу якого буде пояснено нижче. Коли ми наближаємось до значень амплітуди зовнішньої сили $F \approx 1.4$ у системі починається з'являтися другий стохастичний шар. На відміну від першого шару, цей формується поступово за так званим сценарієм Фейгенбаума. Під сценарієм Фейгенбаума мається на увазі послідовне подвоєння періоду коливань. Як можна побачити на спектральному графіку (рис. 2.8, в спектрі це відповідає появі нових частот рівно посередині між двома попередніми. На фазовому портреті це означатиме розщеплення траєкторій. За сценарієм Фейгенбаума біфуркаційні точки утворюють збіжну послідовність, а стохастика настає при переході через границю цієї послідовності, що ми й бачимо у даному випадку. На рис. 2.19–2.21 зображено відповідний перехід і розщеплення фазових траєкторій.

Якщо ж говорити про причину появи стохастичного шару, то на відміну від попереднього випадку, де це пояснювалось наближенням до нульового потенціалу і перестрибуванням з однієї потенціальної ями в іншу, тут такого не відбувається, адже як можна побачити на рис. 2.17 точка вже вийшла

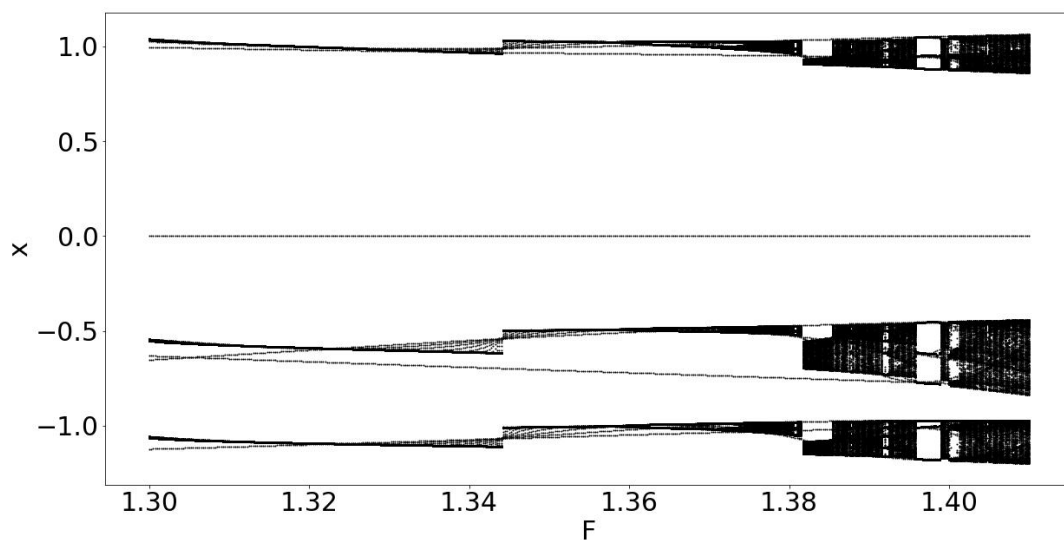


Рис. 2.18: Каскад біфуркацій для $F = [1.2, 1.5]$, $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

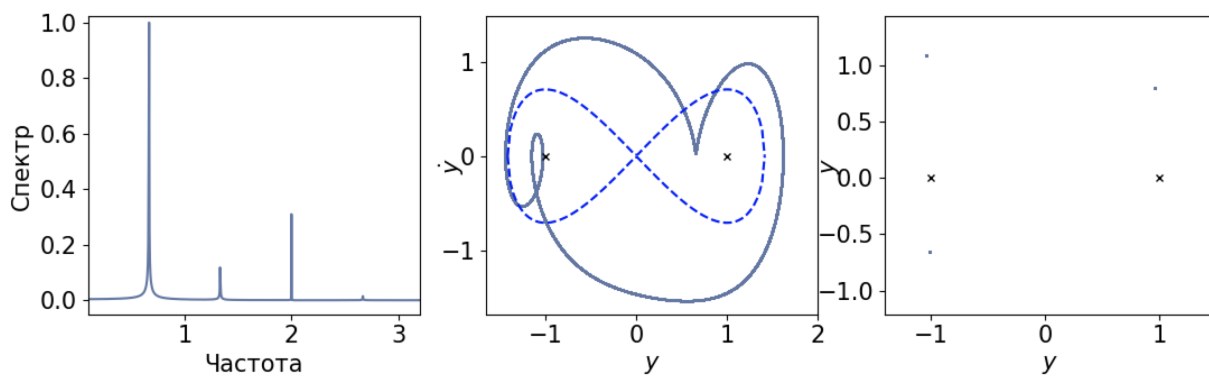


Рис. 2.19: Спектр, фазова площина та відображення Пуанкаре для $F = 1.26$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

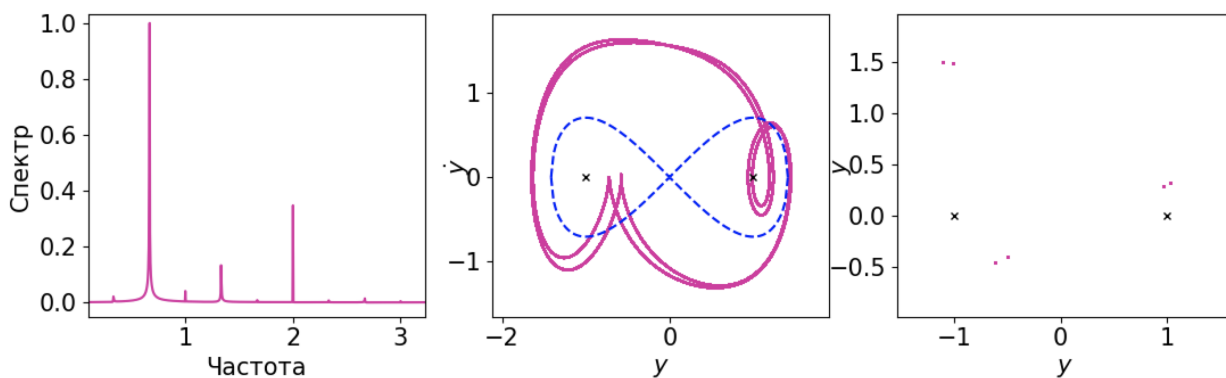


Рис. 2.20: Спектр, фазова площина та відображення Пуанкаре для $F = 1.34$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

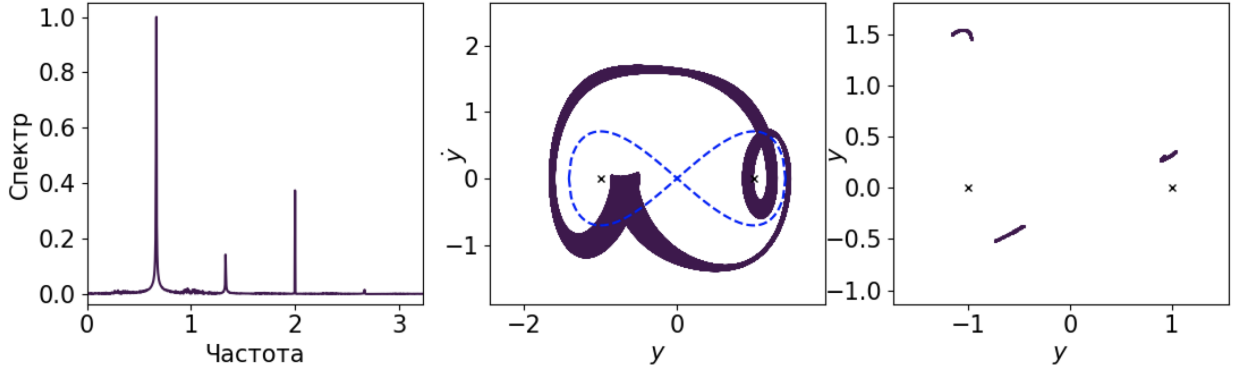


Рис. 2.21: Спектр, фазова площина та відображення Пуанкаре для $F = 1.395$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

за межі двох малих потенціальних ям. Тому причина має бути в іншому. Щоби розібратись, варто побудувати резонансні криві для гармонік вищих порядків. Для цього будемо користуватись методом аналогічним до розд. 2.1, але врахуємо також внесок гармонік з частотами $\Omega/2$ та $\Omega/3$ та постійної складової. тобто підставлятимемо розв'язок у вигляді:

$$y = Ae^{i\Omega\tau} + Be^{i\Omega\tau/2} + De^{i\Omega\tau/3} + \text{к.с.} + C, \quad (2.5)$$

де A, B, D — комплексні амплітуди відповідних гармонік, а C — постійна складова. Підставивши відповідний розв'язок у рівняння Дюффінга-Холмса (розд. 2.1 при $\zeta = -1$), і прирівнявши доданки при експонентах з показниками $(0, \Omega\tau, \Omega\tau/2, \Omega\tau/3)$, можна отримати систему рівнянь для комплексних амплітуд. Далі, варто замінити комплексні амплітуди на відповідні квадратурні компоненти:

$$A = a + ib \quad (2.6)$$

$$B = c + id \quad (2.7)$$

$$D = q + iw \quad (2.8)$$

Підставивши це у попередньо отримані рівняння і прирівнявши дійсні і уявні частини, отримуємо систему з семи рівнянь:

$$6a^2C + 6ac^2 - 6ad^2 + 6b^2C + 12bcd + 6c^2C + C^3 + 6Cd^2 + 6Cq^2 + 6Cw^2 - C = 0$$

$$\begin{aligned}
3a^2b + aD\Omega + 3b^3 + 6bc^2 + 3bC^2 + 6bd^2 + 6bq^2 + 6bw^2 - b\Omega^2 - b + 6cCd + 3q^2w - w^3 &= 0 \\
6a^2c + 6acC + 6b^2c + 6bCd + 3c^3 - \frac{c^2}{4} + 3cC^2 + 3cd^2 + 6cq^2 + 6cw^2 - c - \frac{dD\Omega}{2} &= 0 \\
6a^2d - 6aCd + 6b^2d + 6bcC + 3c^2d - \frac{cd}{4} + \frac{cD\Omega}{2} + 3C^2d + 3d^3 + 6dq^2 + 6dw^2 - d &= 0 \\
6a^2q + 3aq^2 - 3aw^2 + 6b^2q + 6bqw + 6c^2q + 3C^2q + & \\
+ 6d^2q - \frac{Dw\Omega}{3} + 3q^3 + 3qw^2 - \frac{q\Omega^2}{9} - q &= 0 \\
6a^2w - 6aqw + 6b^2w + 3bq^2 - 3bw^2 + 6c^2w + 3C^2w + & \\
+ 6d^2w + \frac{Dq\Omega}{3} + 3q^2w + 3w^3 - \frac{w\Omega^2}{9} - w &= 0 \\
3a^3 + 3ab^2 + 6ac^2 + 3aC^2 + 6ad^2 + 6aq^2 + 6aw^2 - a\Omega^2 - & \\
-a - bD\Omega + 3c^2C - 3Cd^2 - \frac{F}{2} + q^3 - 3qw^2 &= 0
\end{aligned}$$

Зрозуміло, що аналітичну таку систему розв'язати неможливо, тому ми використовували числові методи. Розрахувавши квадратурні компоненти для даних параметрів моделі можна резонансні криві відповідних гармонік, використовуючи:

$$|A| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.9)$$

$$|B| = \sqrt{c^2 + d^2} \quad (2.10)$$

$$|D| = \sqrt{q^2 + w^2} \quad (2.11)$$

Тож, побудуємо певний аналог резонансних кривих, тільки замість звичної частоти як змінного параметра оберемо амплітуду зовнішньої сили, щоби порівняти результат з нашими попередніми розрахунками. На . 2.22 можна побачити відповідні резонансні криві. Помаранчевим кольором на графіках зображені стохастичні ділянки. Можна побачити, що для першого стохастичного шару, ми маємо лише основну гармоніку, що підтверджує наше твердження про те, що цей шар утворюється лише внаслідок перестрибування точки з однієї потенціальної ями в іншу. Для другого ж стохастичного шару, ситуація зовсім інша. Можна побачити, що тут субгармоніки набувають своїх максимальних значень, що дає змогу стверджувати, що другий стохастичний шар утворюється внаслідок перекриття нелінійних резонансів. Для перевірки нашого твердження подивимось на відповідні фазові

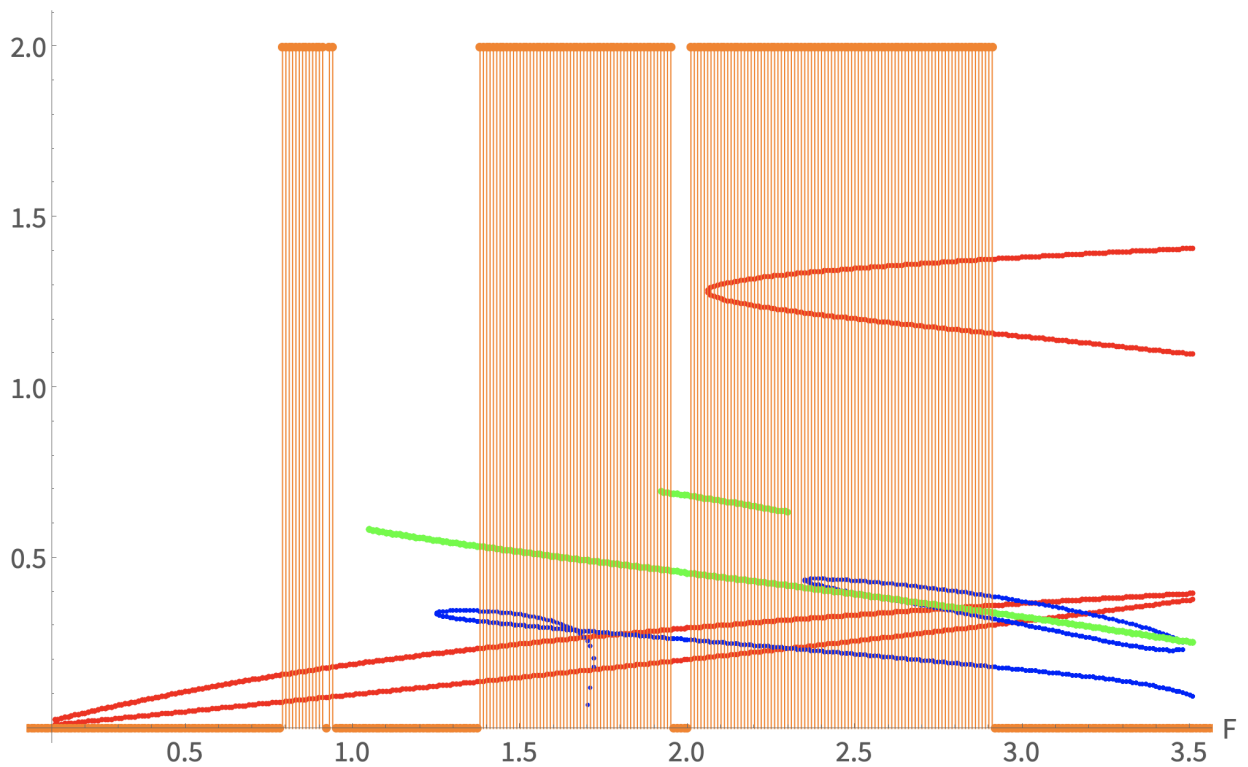


Рис. 2.22: Резонансні криві для основної гармоніки, та гармонік з частотами $\Omega/3$ та $\Omega/2$. $D = 0.4$; $\Omega = 2$. Червоний колір — основна гармоніка, зелений - $1/3\Omega$, синій - $1/2\Omega$. Помаранчевим кольором показані ділянки стохастики.

площини на ділянці другого стохастичного шару. На рис. 2.23 зображено дивний атрактор на якому явно видно внесок субгармоніки на частоті $1/3$ частоти зовнішньої сили. На резонансній кривій, можна побачити, що субгармоніка з частотою $1/3\Omega$ має найбільшу амплітуду серед інших гармонік при таких значеннях параметрів. Також, як бачимо, стохастика починається коли різниця амплітуд приймає певного граничного значення і резонанси перекриваються. До $F \approx 1.4$, ми не бачили стохастичну, бо там амплітуда третинної гармоніки значно перевищувала амплітуду основної. Саме тому на рис. 2.17 ми бачили резонанс на частоті $1/3\Omega$. Якщо далі збільшувати амплітуду зовнішньої сили, то пік на частоті $1/3\Omega$ буде зменшуватися, спектр ставатиме все більш плоским (рис. 2.24), поки ми не дійдемо до певного значення амплітуди зовнішньої сили, де стохастика зникне.

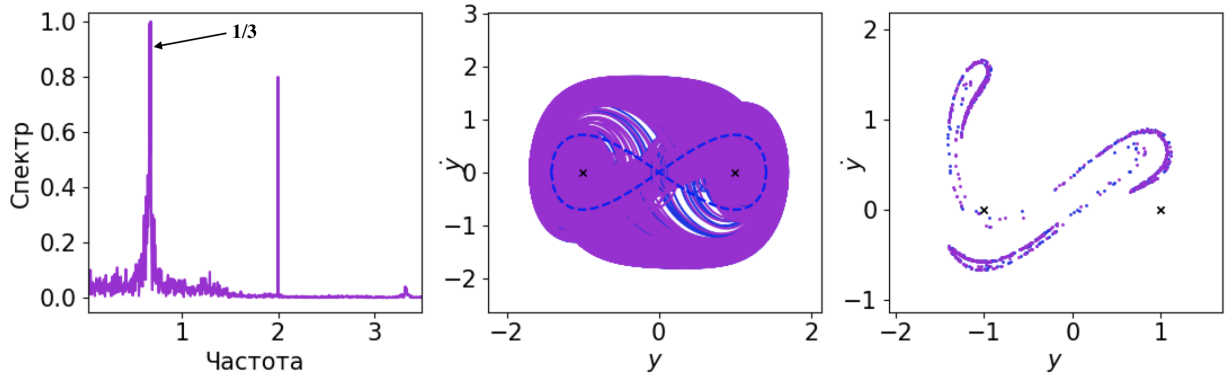


Рис. 2.23: Спектр, фазова площина та відображення Пуанкаре для $F = 1.5$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

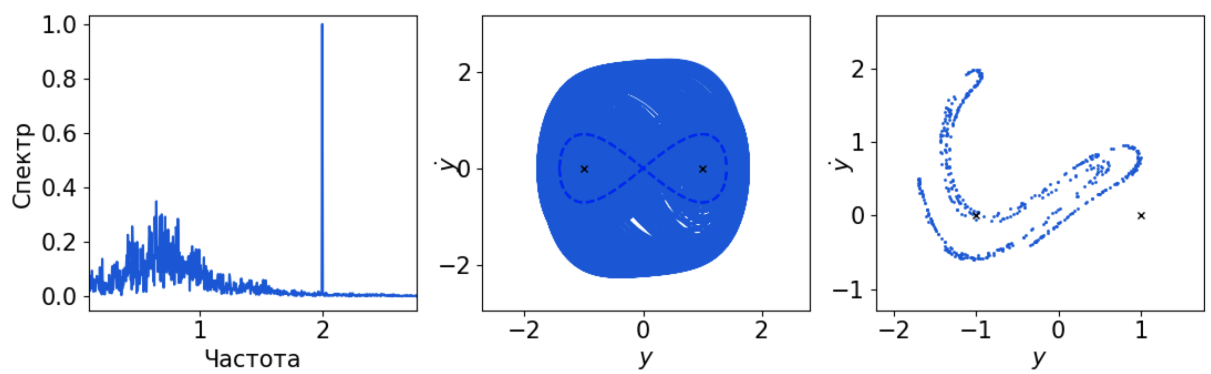


Рис. 2.24: Спектр, фазова площина та відображення Пуанкаре для $F = 1.9$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

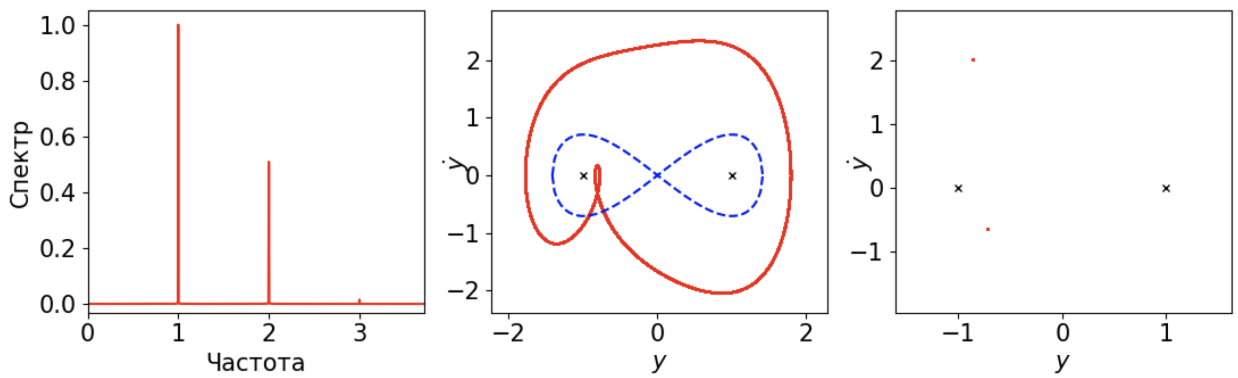


Рис. 2.25: Спектр, фазова площина та відображення Пуанкаре для $F = 1.96$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

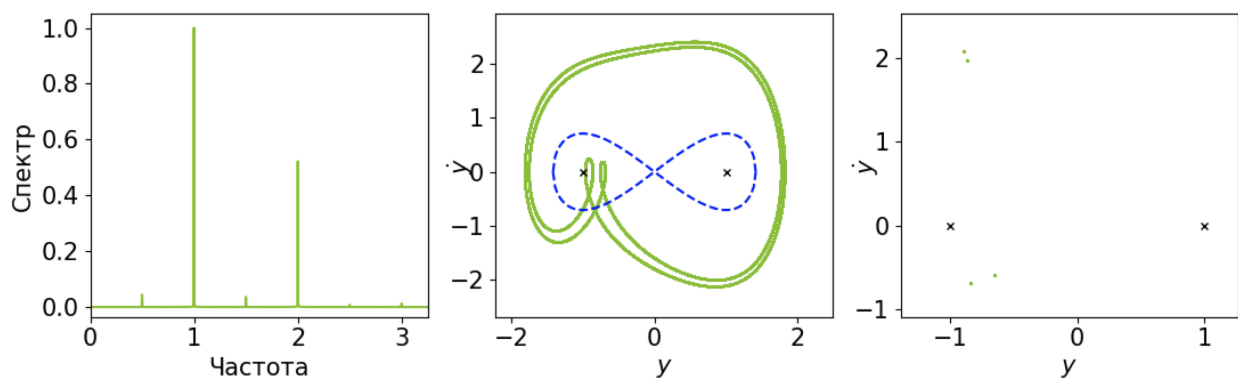


Рис. 2.26: Спектр, фазова площина та відображення Пуанкаре для $F = 1.99$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

Перекриття вторинної гармоніки з основною

Наступним етапом є домінування гармоніки на частоті $1/2\Omega$. На рис. 2.25 зображено відповідний резонанс на цій частоті. Після цього в системі знову буде спостерігатись подвоєння періоду (сценарій Фейгенбаума ??), який приведе до появи третього стохастичного шару, що зображений на рис. 2.27. Якщо ж ще далі збільшувати амплітуду зовнішньої сили (рис. 2.28), то в системі з'являться два стабільні стани — дивний атрактор та періодичний атрактор на частоті зовнішньої сили, оскільки як видно на рис. 2.22 на основній гармоніці з'являється верхня гілка. І після певного граничного значення, де амплітуда нижньої гілки основної гармоніки вже стане більшою за амплітуди вторинної субгармоніки, ми знову будемо бачити регулярний атрактор на основній гармоніці (рис. 2.29, а також невеликий пік на гармоніці 3Ω).

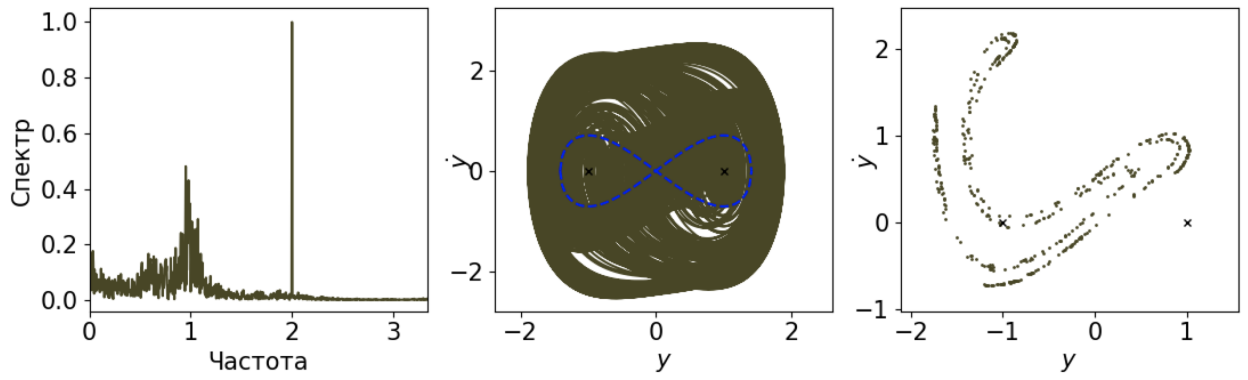


Рис. 2.27: Спектр, фазова площина та відображення Пуанкаре для $F = 2.1$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

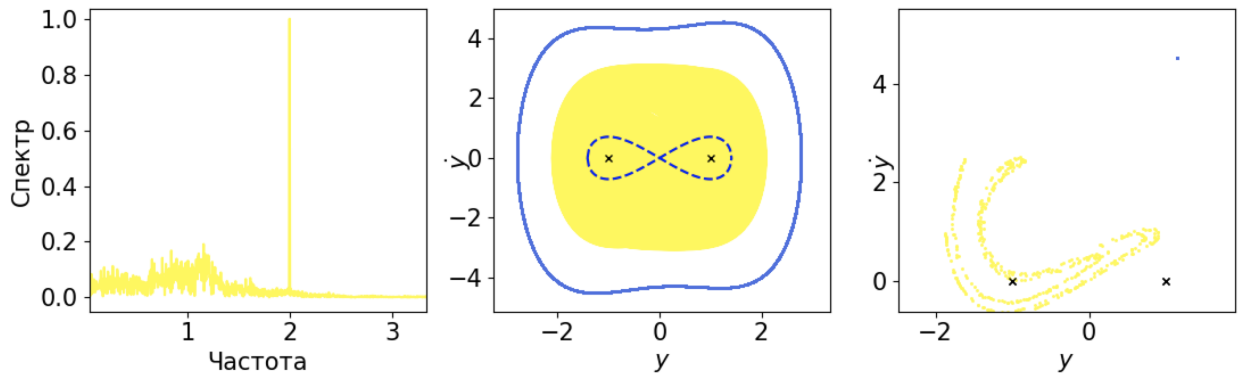


Рис. 2.28: Спектр, фазова площина та відображення Пуанкаре для $F = 2.5$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

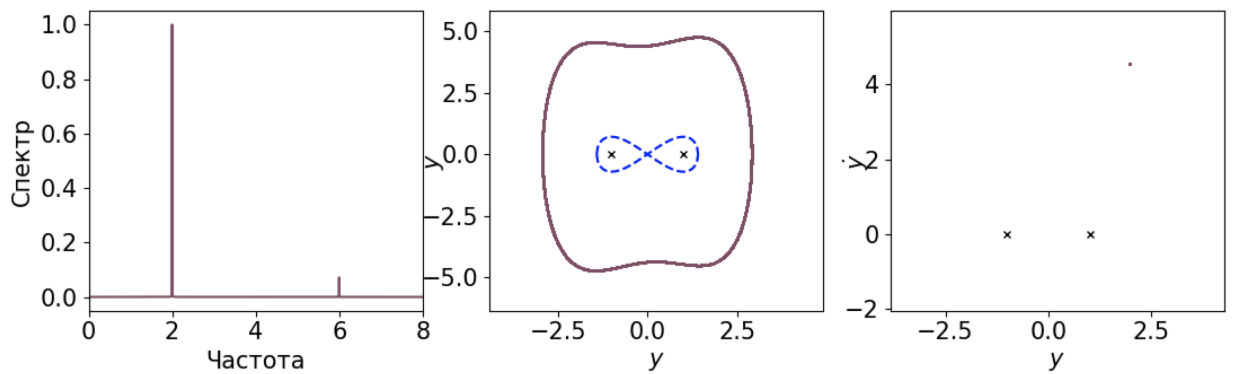


Рис. 2.29: Спектр, фазова площина та відображення Пуанкаре для $F = 3.5$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

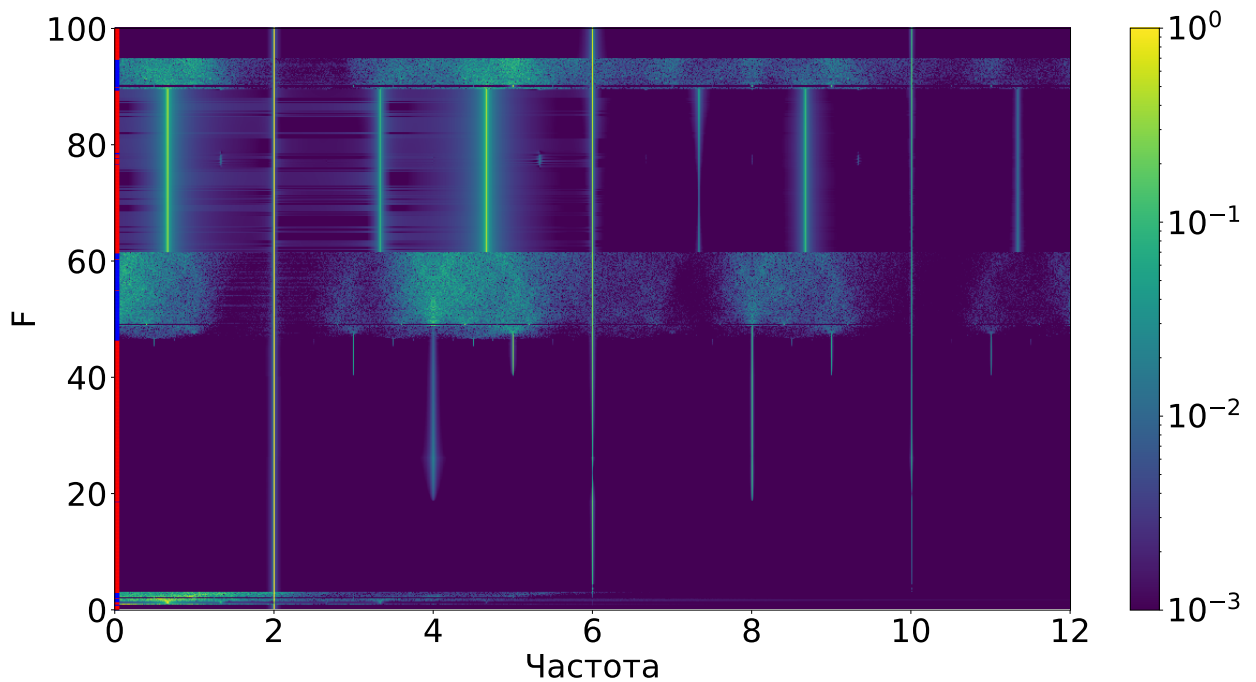


Рис. 2.30: Спектральний графік для ділянки $F = [0, 100]$. $D = 0.4$; $\Omega = 1$.

2.3.5 Утворення дивних атракторів внаслідок перекриття резонансів вищих гармонік.

На рис. 2.30 показано спектральний графік для наступного проміжку амплітуд зовнішньої сили: $F = (0, 100]$. Як бачимо, після третього стохастичного шару є великий проміжок регулярного руху. Система поводить себе аналогічно до випадку рис. 2.29, і має. При переході за певне граничне значення ($F \approx 18.6$) в спектрі з'являється гармоніка з частотою 2Ω і стабільний стан розщеплюється на два симетричні стани. На рис. 2.31–2.33 можна порівняти два випадки для амплітуд трошки менше та більше граничного значення, та значно більше відповідно.

При подальшому збільшенні амплітуди зовнішньої сили ми підходимо до нового стохастичного шару як видно на рис. 2.30. Оскільки ми попередньо бачили появу гармонік вищих порядків, можна припускати, що новий стохастичний шар утворюється внаслідок перекриття резонансу на гармоніці 2Ω з основною гармонікою (рис. 2.36). На спектральних графіках чітко видно, що поява стохастичного шару знову супроводжується подвоєнням періоду коливань. Після цього стохастичного шару з'являється знову регулярна ділянка що відповідає резонансу на частоті $(2 + 1/3)\Omega$ (??, перекриття якого призводить до появи ще одного стохастичного шару (??).

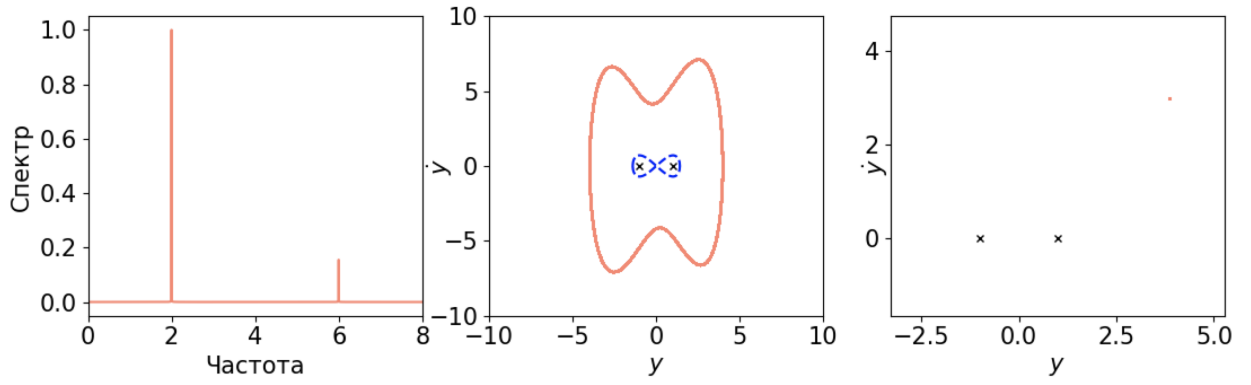


Рис. 2.31: Спектр, фазова площина та відображення Пуанкаре для $F = 18.5$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

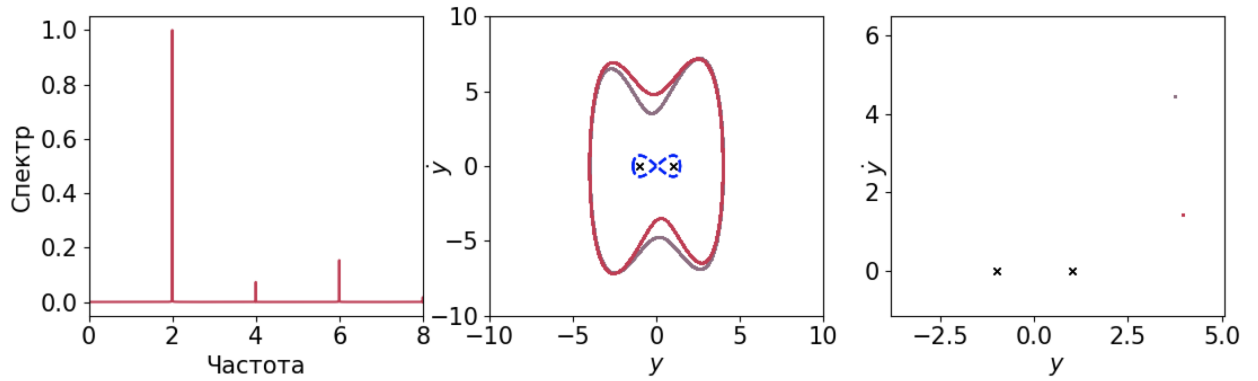


Рис. 2.32: Спектр, фазова площина та відображення Пуанкаре для $F = 18.7$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

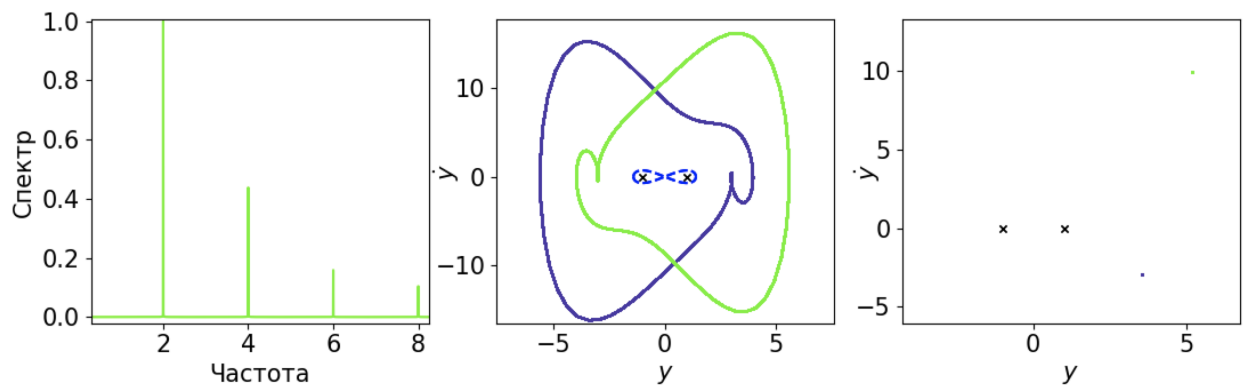


Рис. 2.33: Спектр, фазова площина та відображення Пуанкаре для $F = 40$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

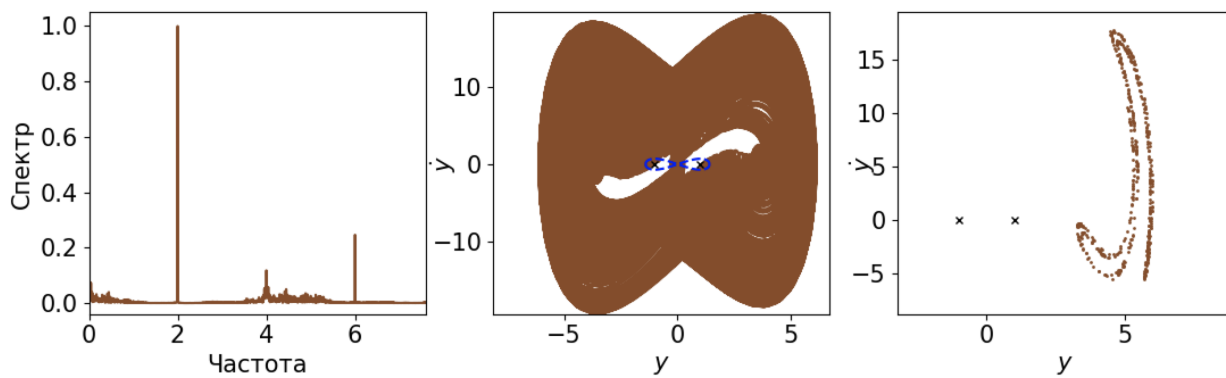


Рис. 2.34: Спектр, фазова площина та відображення Пуанкаре для $F = 50$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

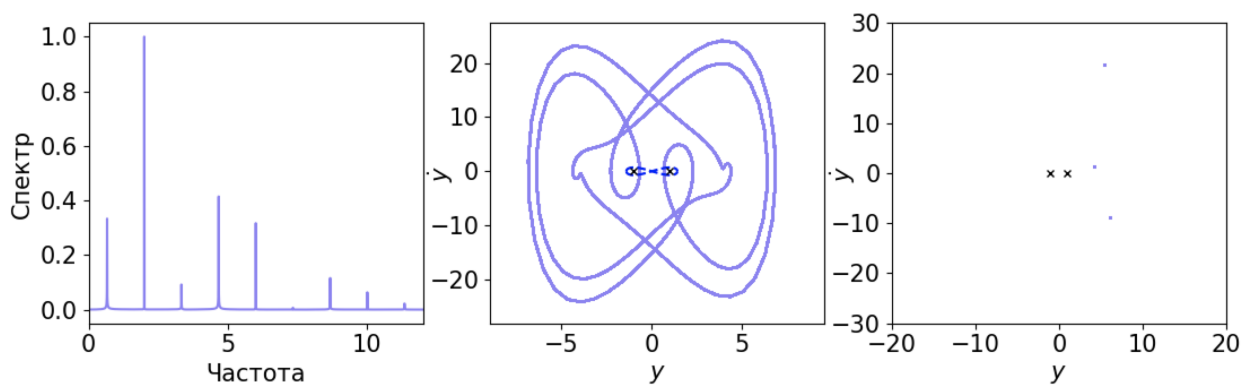


Рис. 2.35: Спектр, фазова площина та відображення Пуанкаре для $F = 70$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

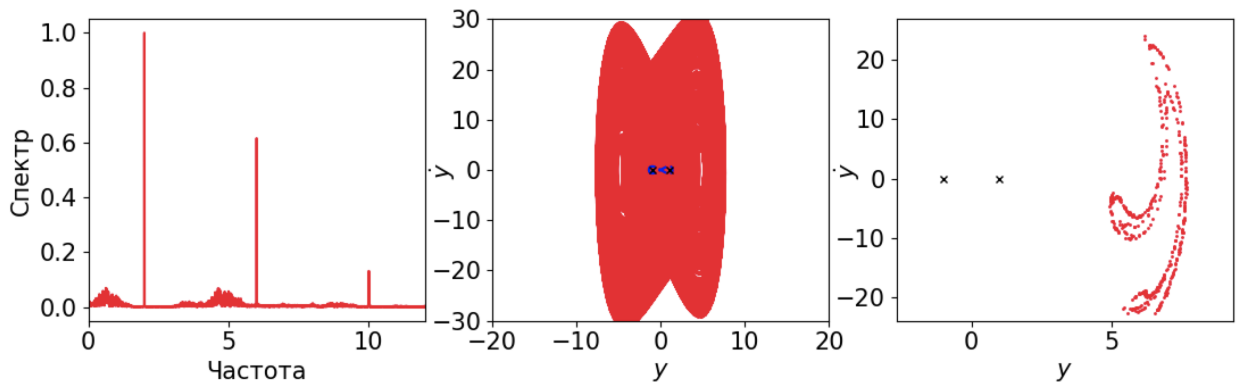


Рис. 2.36: Спектр, фазова площина та відображення Пуанкаре для $F = 91$; $D = 0.4$; $\Omega = 2$.

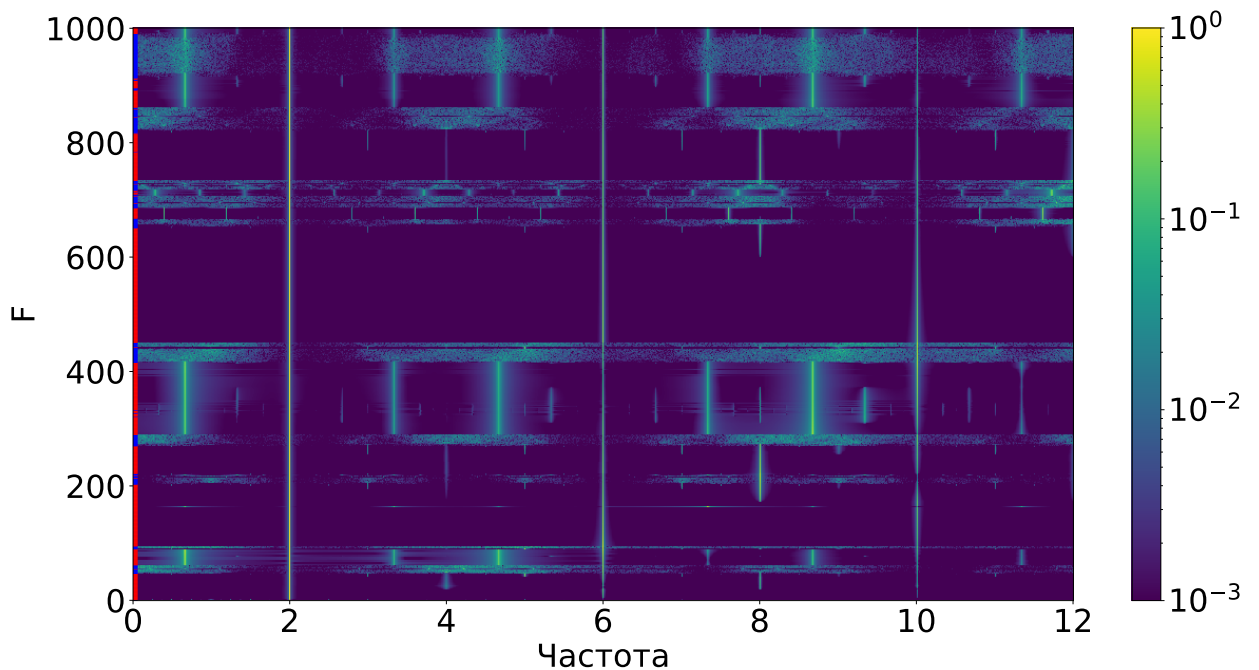


Рис. 2.37: Спектральний графік для ділянки $F = [0, 1000]$. $D = 0.4$; $\Omega = 1$.

Якщо ще далі збільшувати амплітуди зовнішньої сили, то зрозуміло що будуть з'являтися стохастичні шари що відповідають все вищим і вищим гармонікам (як видно на рис. 2.37). Зрозуміло, що поява гармонік вищих порядків не є обмеженою, тому кількість стохастичних шарів необмежена, і вони будуть з'являтися зажди при збільшенні амплітуди зовнішньої сили до нескінченості, тільки буде збільшуватись відстань між ними.

2.3.6 Зміна положення стохастичних шарів при зміні частоти зовнішньої сили

У цьому розділі розглянемо зміну положення стохастичних шарів при зміні частоти зовнішньої сили. На рис. 2.38 наведено мапу зміни положення стохастичних шарів при зміні частоти зовнішньої сили, а на рис. 2.39 також умовно позначено положення різних типів атракторів. Вона будувалась таким самим чином, як і мапа на рис. 2.16 тобто брались різні значення параметрів при одних і тих самих початкових умовах, і розраховувався показник Ляпунова. Як можна побачити, на цій ділянці зміни амплітуди зовнішньої сили, ми бачимо усі три перші стохастичні шари, які розглядались у розділ. 2.3.2 і 2.3.4, положення яких змінюється при зміні частоти зовнішньої сили, зокрема граничні амплітуди збільшуються при збільшенні амплітуди зовнішньої сили. Можна припускати, що вони зростають за кубічним законом, оскільки в системі присутня саме кубічна нелінійність. Також, що варто зазначити, що ми можемо розрізнити ці три шари й при інших значеннях частоти зовнішньої сили, але також видно, що при деяких частотах вони перетинаються. Знизу також видно стохастичний шар, що відповідає вищим гармонікам, його не видно на частоті $\Omega = 2$ на даному графіку, через обмежений проміжок по амплітуді, але видно при менших частотах. Як бачимо, його граничні амплітуди зовнішньої сили навпаки зростають. На рис. 2.40 взято більшу ділянку амплітуди зовнішньої сили. На цьому рисунку добре видно появу гармонік вищих і вищих порядків, також видно як їхні граничні значення амплітуд зростають при збільшенні частоти зовнішньої сили.

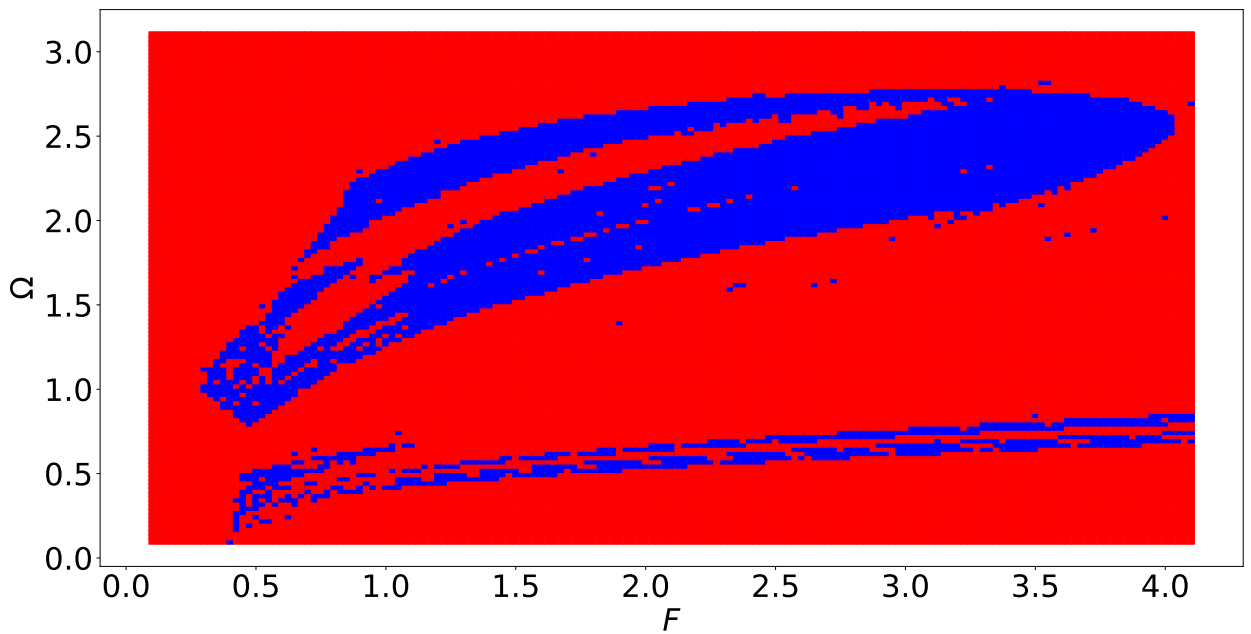


Рис. 2.38: Мапа зміни положення стохастичних шарів при зміні частоти зовнішньої сили. $F = [0.1, 4.1]$; $D = 0.4$. Синій колір — стохастична динаміка, червоний — регулярна.

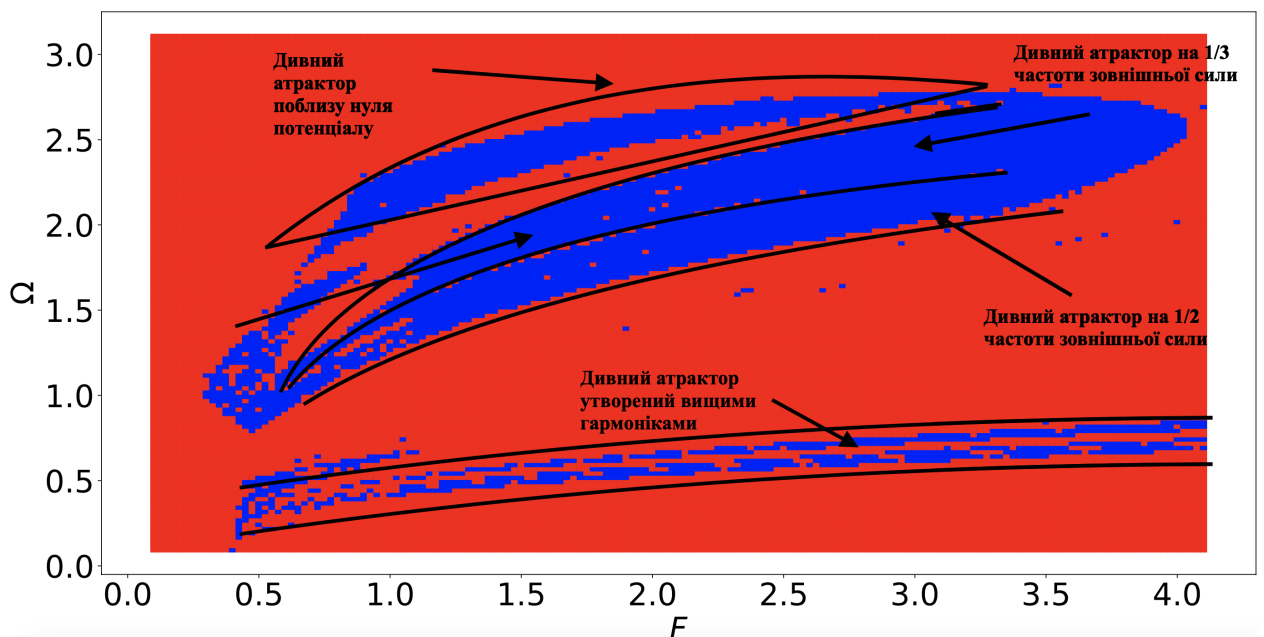


Рис. 2.39: Умовне положення різних типів аттракторів. $D = 0.4$. Синій колір — стохастична динаміка, червоний — регулярна.

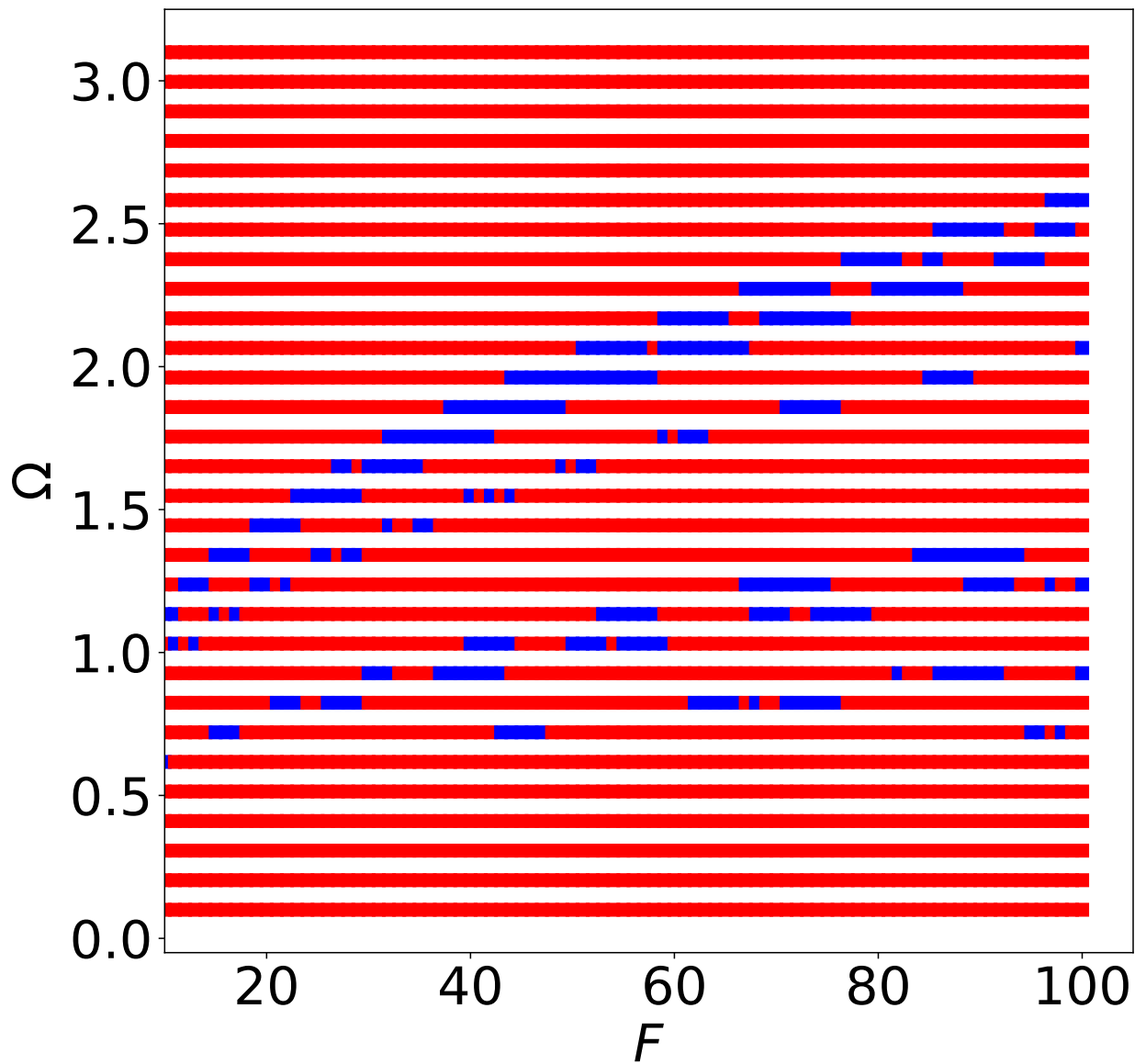


Рис. 2.40: Мапа зміни положення стохастичних шарів при зміні частоти зовнішньої сили. $F = [10, 100]$; $D = 0.4$. Синій колір — стохастична динаміка, червоний — регулярна.

ВИСНОВКИ

У даній роботі зроблений загальний аналіз поведінки моделі Дюффінга-Холмса. Зокрема:

- Використані методи, які дають змогу ретельно досліджувати стохастичну модель, зокрема побудова стохастичних кривих, відображень Пуанкаре, мап залежностей станів системи від початкових умов та від параметрів системи.
- Показано, що при введенні в систему слабкої дисипації, області стохастичної динаміки перетворюються на квазіатрактори, а острівці стійкого руху, які там існували — на стійкі фокуси, наявність яких і обмежує тривалість квазістохастичної динаміки.
- При розгляді сильної дисипації показано, що у системі існують три причини, які викликають появу дивних атракторів у системі:
 - Коливання точки поблизу нуля потенціалу, що призводить до стохастичних стрибків точки з однієї потенціальної ями в іншу. Причина цих стрибків поява у системі двох особливих точок типу "центр" і одного "сідла".
 - Поява дивного атрактора внаслідок перекриття нелінійних резонансів, що відповідають субгармонікам частоти зовнішньої сили.
 - Поява дивного атрактора внаслідок перекриття вищих гармонік (з частотами кратними частоті зовнішньої сили).
- Показано, що дві останні причини супроводжуються так званим сценарієм Фейгенбаума (періодичне подвоєння періода коливань).

- Показано, що положення областей, де виникають дивні атрактори залежить від частоти та амплітуди зовнішньої сили, а також параметра дисипації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Todd A Brun, Ian C Percival, and Rüdiger Schack. Quantum chaos in open systems: a quantum state diffusion analysis. Technical report, 2018.
- [2] James W Cooley and John W Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, 19:297–301, 1965.
- [3] George Duffing. *Erzwungene Schwingungen Bei Veränderlicher Eigenfrequenz Und Ihre Technische Bedeutung*. 1918.
- [4] P Holmes. A Nonlinear Oscillator with a Strange Attractor. Technical Report 1394, 1979.
- [5] International Neural Network Society. and IEEE Computational Intelligence Society. *The 2007 International Joint Conference on Neural Networks : IJCNN 2007 conference proceedings : August 12-17, 2007, Renaissance Orlando Resort, Orlando, Florida, USA*. IEEE Xplore, 2007.
- [6] J D Lambert. *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem*. Wiley, 1991.
- [7] A M Lyapunov. The General Problem of the Stability of Motion. *Kharkov Mathematical Society*, 1892.
- [8] Yukihiro Ota and Ichiro Ohba. Crossover from classical to quantum behavior of the Duffing oscillator through a pseudo-Lyapunov-exponent. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 71(1), 1 2005.
- [9] P K Sikorski and I O Anisimov. Regular and stochastic dynamics of the Duffing oscillator excited by the harmonic force. *Journal of V.N. Karazin Kharkiv National University, series 'Physics'*, (34):47, 7 2021.

- [10] P K Sikorski and I O Anisimov. Регулярна та стохастична динаміка моделі Дюффінга під дією гармонічної сили. Technical report, 2021.
- [11] E. Tamaševičiūtė, A. Tamaševičius, G. Mykolaitis, and S. Bumelienė. Analogue Electrical Circuit for Simulation of the Duffing-Holmes Equation. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 13(2):241–252, 4 2008.
- [12] J M T Thompson and H B Stewart. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Wiley, 2002.
- [13] Y Ueda and N Akamatsu. Chaotically transitional phenomena in the forced negative-resistance oscillator. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 28(3):217–224, 1981.
- [14] Yoshisuke. Ueda. Explosion of strange attractors exhibited by Duffing's equation, 1979.
- [15] Yoshisuke Ueda. Steady Motions Exhibited by Duffing's Equation : A Picture Book of Regular and Chaotic Motions (Functional Differential Equations). 1980.
- [16] Yoshisuke Ueda. Survey of Regular and Chaotic Phenomena in the Forced Duffkg Oscillator. Technical report, 1991.
- [17] Yoshisuke Ueda, Hiroyuki Nakajima, Takashi Hikiyara, and Bruce Stwert. Forced Two-Well Potential Duffing's Oscillator. 5 1988.
- [18] І О Анісімов. *Коливання та хвилі*. ВПЦ "Київський університет Київ, 2 edition, 2009.