

2. Постановка задачі.

Розглядатимемо систему, що складається з двох тіл. Одне тіло може рухатись вздовж горизонтальної осі, друге тіло закріплене на підвісі до першого і являю собою маятник. Еволюція такої двомасової системи описується системою двох диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = F_p - m_2 \frac{g}{l} (x_1 - x_2) - F_r \operatorname{sign} \dot{x}_1, \\ \ddot{x}_2 = \frac{g}{l} (x_1 - x_2), \end{cases} \quad (1)$$

де x_1 – визначає положення першого тіла відносно горизонтальної осі, уздовж якої це тіло може рухатись, x_2 – положення другого тіла відносно тієї ж горизонтальної осі, m_1 , m_2 – маси першого і другого тіл відповідно, l – довжина підвісу другого тіла до першого, F_r – сила опору, що діє на перше тіло під час його руху унаслідок зовнішніх факторів, F_p – зовнішня сила, що спричиняє рух першого тіла уздовж горизонтальної осі, і змінюється у заданих межах

$$F_p \in [-F_{p\max}, F_{p\max}], \quad (2)$$

$F_{p\max}$ – стала, яка задає максимальну рушійну силу, що може діяти на перше тіло, g – стала прискорення вільного падіння.

При русі під дією сили F_p на перше тіло двомасової системи, що розглядається, зі стану спокою у цій системі можуть виникати коливні процеси, спричинені другим тілом системи, яке знаходиться на підвісі до першого тіла. Керуючи силою F_p , можна керувати коливними процесами у системі і, навіть, досягти припинення коливнь, перевівши систему до рівномірного руху з деякою додатною швидкістю.

Розглядатимемо процес руху розглядуваної двомасової системи зі стану спокою до рівномірного руху з додатною швидкістю, вибираючи керування зовнішньою силою так, щоб якнайшвидше припинити коливні процеси у системі.

Таким чином, процес, що розглядається, описується системою (1) з крайовими умовами

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x_1(T) - x_2(T) &= 0, \dot{x}_1(T) = \dot{x}_2(T) = v_0, \\ \ddot{x}_1(T) &= \ddot{x}_2(T), \end{aligned} \quad (4)$$

де $v_0 > 0$ – задана швидкість якої система має досягти, $T > 0$ – кінцевий момент часу, який є

нефіксованим і залежить від керування зовнішньою силою F_p .

Отже, будемо розглядати задачу оптимального керування, у якій керована система описується крайовою Задачею (1), (3), (4), керуючим параметром виступає зовнішня сила F_p з областю допустимих керувань (2), і критерієм якості

$$T \rightarrow \inf. \quad (5)$$

Для розв'язання задачі (1) – (5) використовуємо принцип максимуму Понтрягіна [8, 9].

3. Оптимальне керування системою

Для зручності подальшого розгляду поставленої задачі уведемо такі позначення:

$$y_1 = \dot{x}_1, y_2 = \dot{x}_2, q = g/l > 0,$$

$$p = q \frac{m_2}{m_1} > 0, f_p = \frac{F_p}{m_1}, f_r = \frac{F_r}{m_1}.$$

Тоді еволюційна система (1) переписується у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_1 = f_p - p(x_1 - x_2) - f_r \operatorname{sign} y_1, \\ \dot{y}_2 = q(x_1 - x_2), \end{cases} \quad (6)$$

а задача (1) – (5) –

$$\begin{cases} T \rightarrow \inf, \\ \begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_1 = f_p - p(x_1 - x_2) - f_r \operatorname{sign} y_1, \\ \dot{y}_2 = q(x_1 - x_2), \end{cases} \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, y_1(0) = y_2(0) = 0, \\ x_1(T) = x_2(T), y_1(T) = y_2(T) = v_0, \\ \dot{y}_1(T) = \dot{y}_2(T), \\ f_p \in [-f_{p\max}, f_{p\max}], \end{cases} \quad (7)$$

де $f_{p\max} = F_{p\max} / m_1$.

Перш ніж розв'язувати одержану задачу (7), еквівалентну вихідній задачі (1) – (5), звернемо увагу на умову $\dot{y}_1(T) = \dot{y}_2(T)$ на правому кінці (у кінцевий момент часу). Враховуючи інші умови на правому кінці, відразу маємо, що $\dot{y}_2(T) = 0$. Тоді для виконання указаної умови потрібно, щоб $\dot{y}_1(T) = 0$, а для цього достатньо встановити значення рушійної сили f_p у кінцевий момент часу T рівною $f_r \operatorname{sign} y_1$, тобто $f_p(T) = f_r \operatorname{sign} y_1$. І, якщо в подальшому (для значень $t > T$)

залишити значення рушійної сили без змін, тобто $f_p(t) = f_r \operatorname{sign} y_1$ для $t > T$, то після моменту часу T одержимо рівномірний рух двомасової системи із заданою додатною швидкістю v_0 .

При розв'язанні задачі для визначеності розглядатимемо випадок руху системи зі стану спокою у додатному напрямку координатної осі.

Застосовуючи принцип максимуму Понтрягіна, з умови максимуму маємо, що оптимальне керування визначається функцією

$$f_p^*(t) = \begin{cases} f_{p\max}, & \Psi_3(t) > 0, \\ -f_{p\max}, & \Psi_3(t) < 0, \end{cases} \quad (8)$$

де $\Psi_3(t)$ – компонента розв'язку

$$\Psi(t) = (\Psi_1(t), \Psi_2(t), \Psi_3(t), \Psi_4(t))$$

спряженої системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_1 = q\Psi_3 - p\Psi_4, \\ \dot{\Psi}_2 = -q\Psi_3 + p\Psi_4, \\ \dot{\Psi}_3 = -\Psi_1, \\ \dot{\Psi}_4 = -\Psi_2, \end{cases} \quad (9)$$

який задовольняє умови трансверсальності

$$\begin{aligned} \Psi_1(0) &= \lambda_1, \Psi_2(0) = \lambda_2, \\ \Psi_3(0) &= \lambda_3, \Psi_4(0) = \lambda_4, \\ \Psi_1(T) &= -\lambda_5, \Psi_2(T) = \lambda_5, \\ \Psi_3(T) &= -\lambda_6, \Psi_4(T) = -\lambda_7, \end{aligned} \quad (10)$$

де $\lambda_0, \dots, \lambda_7$ – множники Лагранжа у функції Лагранжа

$$L = \lambda_0 T + \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 y_1(0) + \lambda_4 y_2(0) + \\ + \lambda_5 (x_1(T) - x_2(T)) + \lambda_6 (y_1(T) - v_0) + \lambda_7 (y_2(T) - v_0)$$

Розв'язуючи систему (9), одержуємо

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &= -K_2 + K_3 \sqrt{p+q} \sin(\sqrt{p+q}t) - \\ &\quad - K_4 \sqrt{p+q} \cos(\sqrt{p+q}t), \\ \Psi_2(t) &= -K_2 \frac{q}{p} - K_3 \sqrt{p+q} \sin(\sqrt{p+q}t) + \\ &\quad + K_4 \sqrt{p+q} \cos(\sqrt{p+q}t), \\ \Psi_3(t) &= K_1 + K_2 t + K_3 \cos(\sqrt{p+q}t) + \\ &\quad + K_4 \sin(\sqrt{p+q}t), \\ \Psi_4(t) &= (K_1 + K_2 t)q / p - K_3 \cos(\sqrt{p+q}t) - \\ &\quad - K_4 \sin(\sqrt{p+q}t), \end{aligned}$$

де K_1, K_2, K_3, K_4 – довільні сталі. І, враховуючи умови (10), маємо $K_2 = 0$.

Таким чином, для явного визначення оптимального керування $f_p^*(t)$ (8) одержуємо функцію $\Psi_3(t)$ у вигляді

$$\Psi_3(t) = K_1 + K_3 \cos(\sqrt{p+q}t) + K_4 \sin(\sqrt{p+q}t).$$

В залежності від значень констант K_1, K_3, K_4 функція $\Psi_3(t)$ може, або не змінювати знак на інтервалі $[0, T]$, або змінювати знак скінченну кількість разів на вказаному інтервалі.

4. Побудова програмного керування

Розглянемо окрема декілька випадків поведінки функції $\Psi_3(t)$, а саме, випадки, коли ця функція є знакосталою, і коли змінює знак.

Для скорочення записів позначимо $u = f_p - f_r \operatorname{sign} y_1$, тоді еволюційна система, що описує рух двомасової системи, переписується у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_1 = u - p(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 = q(x_1 - x_2), \end{cases} \quad (11)$$

а її фазові траєкторії задаються системою

$$\begin{cases} U_1(x_1, x_2, y_1, y_2, u) = \\ = (py_1 + qy_2)^2 - 2up(px_1 + qx_2) = C_1, \\ U_2(x_1, x_2, y_1, y_2, u) = \\ = 2u(x_1 - x_2) - (p+q)(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2) = C_2, \\ U_3(x_1, x_2, y_1, y_2, u) = \\ = \arctg \frac{\sqrt{p+q}(y_1 - y_2)}{(p+q)(x_1 - x_2) - u} + \frac{\sqrt{p+q}}{pu} (py_1 + qy_2) = C_3, \end{cases}$$

де $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ – довільні сталі, які визначають кожну конкретну траєкторію, що проходить через конкретну точку.

У ситуації, коли функція $\Psi_3(t)$ є знакосталою, тобто $\Psi_3(t) > 0$, якщо система рухається у додатному напрямку координатної осі, і, відповідно, $f_p(t) = f_{p\max}$, $t \geq 0$, не представляється можливим перевести розглядувану двомасову систему із початкового стану (3) у кінцевий стан (4), бо траєкторії системи (6) не можуть одночасно проходити через точки фазового простору, які задають початковий і кінцевий стан двомасової системи.

Якщо функція $\Psi_3(t)$ змінює знак, для одержання керування зовнішньою силою, що діє на перше тіло, і переведення системи із початкового стану у кінцевий стан достатньо, щоб функція $\Psi_3(t)$ один раз змінила знак на інтервалі $[0, T]$. Точка переключення керування визначається системою

$$U_1(x_1, x_2, y_{10}, y_{20}, u_1) = 0,$$

$$U_2(x_1, x_2, y_{10}, y_{20}, u_1) = 0,$$

$$U_3(x_1, x_2, y_{10}, y_{20}, u_1) = 0,$$

$$U_1(x_1, x_2, y_{1T}, y_{2T}, u_2) = (p + q)^2 v_0^2 - 2pu_2(p + q)x_T,$$

$$U_2(x_1, x_2, y_{1T}, y_{2T}, u_2) = 0,$$

$$U_3(x_1, x_2, y_{1T}, y_{2T}, u_2) = (p + q)^{3/2} v_0 / (pu_2),$$

де x_1, x_2 – положення в момент переключення,
 y_{10}, y_{20} – швидкості тіл до моменту переключення керування, y_{1T}, y_{2T} – швидкості тіл після моменту переключення керування, u_1, u_2 – керування зовнішньою силою до переключення керування (коли $\Psi_3(t) > 0$) і після переключення керування (коли $\Psi_3(t) < 0$), x_T – кінцеве положення системи.

Список використаних джерел

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. Westphal, Louis C. Handbook of Control Systems Engineering // The Springer International Series in Engineering and Computer Science. – Springer, 2001. – V. 635. – 1063 p.
3. Weaver W., Timoshenko S.P., Young D.H. Vibration Problems in Engineering. – John Wiley & Sons, 1990. – 624 p.
4. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
5. Ерофеев В.И., Кажжаев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. – М.: Физматлит, 2002. – 208 с.
6. Ловейкін Ю.В. Керування коливними процесами в одній двомасовій системі // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2012. – № 4. – С. 60-63.
7. Ловейкін Ю., Ромасевич Ю. Оптимізація керування одномасовими механічними системами // Вісник ТНТУ. Математичне моделювання, математика, фізика. – 2010. – Том 15. – № 4. – С.140-146.
8. Понtryгин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Понtryгин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. – М.: Наука, 1983. – 393 с.
9. Кротов В.Ф. Основы теории оптимального управления. – М.: Высшая школа, 1990. – 431 с.

5. Висновки

У роботі розглянуто систему, що складається з двох тіл, перше з яких може рухатись вздовж горизонтальної осі, друге – є маятником, який знаходиться на підвісі до першого тіла. Для такої двомасової системи розглянуто розгінний рух зі стану спокою до заданої швидкості, а саме, розглянуто задачу усунення коливних процесів, які виникають у системі після початку руху зі стану спокою. У роботі, використовуючи принцип максимуму Понtryгіна, побудовано програмне оптимальне зовнішньою силою, яка діє на перше тіло і спричиняє рух системи. Побудоване керування має одну точку переключення.

References

1. CHERNOUSKO F.L., AKULENKO L.D., SOKOLOV B.N. (1980) *Upravlenie kolebaniyami*. Moskva: Nauka.
2. WESTPHAL, LOUIS C. (2001) Handbook of Control Systems Engineering. *The Springer International Series in Engineering and Computer Science*. 635. 1063 p.
3. WEAVER W., TIMOSHENKO S.P., YOUNG D.H. (1990) *Vibration Problems in Engineering*. John Wiley & Sons.
4. FILIPPOV A.P. (1970) *Kolebaniya deformiruemymykh system*. Moskva: Mashinostroenie.
5. EROFEEV V.I., KAZHAEV V.V., SEMIRIKOVA N.P. (2002) *Volny v stержnyach. Dispersiya. Dissipatiya. Nelineinost*. Moskva: Fizmatlit.
6. LOVEIKIN YU.V. (2012) Keruvannya kolyvnymy procesamy v odnii dvomasovii systemi. *Visnyk Kyivskogo nacionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriya fizyko-matematychni nauky*. (4). p. 60-63.
7. LOVEIKIN YU., ROMASEVICH YU. (2010) Optymizaciya keruvannya odnomasovymy mechanichnymy systemamy. *Visnyk TNTU. Matematychne modelyuvannya, matematika, fizyka*. 15 (4). p.140-146.
8. PONTRYAGIN I.S. et al. (1983) *Matematicheskaya teoriya optimalnykh procesov*. Moskva: Nauka.
9. KROTOV V.F. (1990) *Osnovy teorii optimalnogo upravleniya*. Moskva: Vysshaya shkola.

Надійшла до редколегії 28.11.18

УДК 532.5

Остос О. Х., аспірант

**Термомеханічна задача про коливання
в'язкопружного гумоподібного стержня
при кінематичному навантаженні**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е
e-mail: ostos.alexander1994@gmail.com

O. J. Ostos, PhD Student

**Thermomechanical problem on vibration of a
viscoelastic rubberlike rod by kinematic load**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova pr., 4e
e-mail: ostos.alexander1994@gmail.com

Розглянуто задачу про коливання в'язкопружного стержня при кінематичному навантаженні, прикладеному на одному з його кінців. Досліджено властивості гумоподібного матеріалу на прикладі бутилкаучука, з якого складається стержень. Отримані амплітудно-частотні характеристики для напруження та деформації. На основі скінченно-елементної моделі побудовано розв'язок задачі з врахуванням в'язкопружних властивостей бутилкаучука. Проведені порівняння при трьох різних значеннях температури матеріалу. Проаналізовано результати згідно з класичною теорією пружності, зроблені відповідні висновки щодо поведінки даного гумоподібного матеріалу. Перевірено достовірність значень частот для перших резонансів на основі теоретичних розрахунків.

Ключові слова: бутилкаучук, в'язкопружний стержень, температура, комплексні модулі.

By using the complex moduli the problem on vibration of the viscoelastic rod was solved. The complex shear and Young's moduli of a rubberlike material should exhibit the same dependence on frequency. The viscoelastic rod under kinematic loading was considered. The properties of rubberlike materials such as filled butyl rubber were investigated. The transition frequencies of high-damping materials occur at or near frequencies that are normally of interest in vibration problems at room temperature. The strain and stress amplitude-frequency characteristics at temperatures of 5, 20, and 35°C were obtained. For solving the problem a finite element model was applied. According to the theory of elasticity an analysis of the results was done. Conclusions about the behavior of the filled butyl rubber were made. The reliability of the values of frequencies on the first resonances was checked. Butyl rubber is essentially polyisobutylene, in which a small proportion of the isobutylene molecules has been replaced by isoprene. Using the graphs of frequency-response curves at three different values of the temperature were compared. The numerical results by the general theoretical laws on vibration in damped mechanical systems were confirmed.

Key Words: filled butyl rubber, viscoelastic rod, temperature, complex moduli.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

1. Вступ

Дослідження дисипативних властивостей матеріалів стало необхідним в сучасній науці. В таких сферах як повітряна, морська та автомобільна промисловість використання в'язкопружних матеріалів та дисипативних компонентів зробило можливим працювати навіть у випадках, коли коливання є небезпечними для механічних та електронних систем або несприятливі для людського комфорту чи продуктивності роботи. В даній статті дослідження зосереджене на динамічних та механічних властивостях гумоподібних в'язкопружних матеріалів,

які стали основою для інженерів та фізиків при роботі з коливальними системами. Це питання є найбільш важливим для морських суден та аерокосмічних кораблів. В даній роботі досліджуються дисипативні властивості гумоподібних матеріалів на прикладі заповненого бутилкаучука при різних температурах. Внутрішнє затухання гумоподібних матеріалів описується стаціонарними рівняннями руху. Бутилкаучук є компонентом твердого ракетного палива, а також він використовується в будівельній, гумотехнічній сферах промисловості, наприклад для виготовлення антикорозійних, герметизуючих, гідроізолюючих покриттів. Резонансні частоти таких