ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

**Математичний гурток**

**УДК 519.218.7** **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.7**

**Нікіта АРСЬКИЙ, студент**
**ORCID ID: 0009-0000-9340-2639**
**e-mail: nikita.arskiy.25@gmail.com**
**Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна**

# АРИФМЕТИЧНІ ФУНКЦІЇ ДЛЯ ҐАУСОВИХ ЧИСЕЛ

***Анотація.*** *Комплексні числа, у яких дійсна та уявна частини є цілими, називаються ґаусовими. У цій статті на ґаусові числа переносяться відомі теоретико-числові функції: кількість, сума та добуток дільників. Для цих функції доводяться формули для обчислення, що використовують розклад числа на прості множники, та властивості, пов'язані з асоційованими та спряженими ґаусовими числами. Виведено також формули для кількості, суми та добутку всіх дільників ґаусового числа, що кратні іншому ґаусовому числу. Застосування отриманих результатів проілюстровано в розв'язаннях задач.*

***Ключові слова:*** *ґаусове число; дільник; кількість дільників; сума дільників; добуток дільників.*

## 1. Вступ

Працюючи над біквадратичним законом взаємності, у кінці 1820-х років видатний німецький математик Карл Фрідріх Ґаус дослідив властивості одного класу комплексних чисел, які **тепер називаються** на його честь – *ґаусові числа*. Виявилося, що з точки зору подільності ґаусові числа поводяться подібно до натуральних. Зокрема, для них доведені теореми про ділення з остачею, існування найбільшого спільного дільника та однозначний розклад на прості множники. Завдяки цим властивостям ґаусові числа є корисними для розв'язування широкого класу діофантових рівнянь, а також полегшують доведення деяких теорем. Наприклад, за їх допомогою можна неважко довести таке зовсім не тривіальне твердження, яке часто називають різдвяною теоремою Ферма: *довільне просте число вигляду $4k+1$ розкладається в суму двох точних квадратів.*

У цій статті ми переносимо на ґаусові числа класичні арифметичні функції: кількість, суму та добуток дільників.

## 2. Огляд літератури

Перші результати про подільність ґаусових чисел, отримані Ґаусом, можна знайти в його монографії (Gauss, 1973). Також із теорією ґаусових чисел можна познайомитися, наприклад, у статтях (Calcut, 2009) і (Willerding, 1966), чи в підручнику (Stillwell, 2003). Зокрема, у вказаних джерелах містяться поняття та теореми, що були використані при отриманні результатів цієї статті.

Детальнішу інформацію про функції кількості, суми та добутку дільників ґаусового числа можна знайти в (Arskyi, 2023).

## 3. Основні відомості про ґаусові числа

Ґаусовими називають комплексні числа, у яких дійсна та уявна частини є цілими. Множина усіх ґаусових чисел позначається $Z[i]$. Зауважимо, що за означенням, кожне ціле число є ґаусовим. У цьому підрозділі ми наведемо основні поняття та твердження (без доведення), пов'язані із ґаусовими числами.

Ґаусові числа $\alpha$ і $\beta$ називають *асоційованими*, якщо $\beta = \mu\alpha$, де $\mu \in \{\pm 1, \pm i\}$. Те, що числа $\alpha$ і $\beta$ є асоційованими, позначається $\alpha \sim \beta$. *Нормою* ґаусового числа $\alpha = a + bi$ називається число $N(\alpha) = a^2 + b^2$.

Очевидно, що сума, різниця та добуток двох ґаусових чисел також є ґаусовим. Однак частка двох ґаусових чисел не завжди буде належати множині $Z[i]$. З огляду на це природним є таке означення.

**Означення 1**. *Кажуть, що ґаусове число $\alpha$ ділиться націло на ненульове ґаусове число $\beta$, якщо існує таке ґаусове число $\gamma$, що $\alpha = \beta\gamma$. При цьому число $\beta$ називають дільником числа $\alpha$ і використовують позначення $\beta|\alpha$.*

Довільне ґаусове число $\alpha \neq 0$ ділиться на числа $\pm 1, \pm i, \pm\alpha, \pm\alpha i$. Ці дільники числа $\alpha$ називають *тривіальними*. Дільники, які не є тривіальними, називають *нетривіальними*.

**Означення 2**. *Ґаусове число $\rho, N(\rho) > 1$ називається простим, воно не має нетривіальних дільників. Числа, що мають нетривіальні дільники, називають складеними.*

Зауважимо, що хоча всі натуральні числа є ґаусовими, *прості* натуральні числа можуть буди складеними в $Z[i]$. Наприклад, число $2$ є складеним як ґаусове, оскільки $2 = (1 + i)(1 - i)$.

**Означення 3**. *Найбільшим спільним дільником ненульових ґаусових чисел $\alpha$ і $\beta$ називають такий їхній спільний дільник $\delta$, який ділиться на всі спільні дільники цих чисел. Якщо $1$ є найбільшим спільним дільником чисел $\alpha$ і $\beta$, то ці числа називають взаємно простими.*

Нижче ми наведемо кілька важливих теорем, які показують, що подільність ґаусових чисел влаштована подібно до подільності натуральних чисел.

**Теорема 1** (про ділення з остачею для ґаусових чисел). *Для довільних $\alpha, \beta \in Z[i]$, $\beta \neq 0$, існують такі $\gamma, \rho \in Z[i]$, що $\alpha = \beta\gamma + \rho$ і $N(\rho) < N(\beta)$.*

**Теорема 2**. *Для довільних ненульових ґаусових чисел $\alpha$ та $\beta$ їхній найбільший спільний дільник існує, причому його можна подати у вигляді $\gamma\alpha + \kappa\beta$ для деяких $\gamma, \kappa \in Z[i]$.*

**Теорема 3**. *Якщо ґаусові числа $\alpha$ і $\beta$ взаємно прості і $\beta|\alpha\gamma$, то $\beta|\gamma$.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

**Теорема 4** (основна теорема арифметики для ґаусових чисел). *Довільне ґаусове число $\alpha$, таке що $N(\alpha) > 1$, можна подати у вигляді $\alpha = \mu\rho_1^{a_1} \cdots \rho_k^{a_k}$, де $\mu \sim 1$, а $\rho_1, \ldots, \rho_k$ — попарно не асоційовані прості числа. Цей розклад єдиний із точністю до порядку множників та їх асоційованості.*

**Теорема 5**. *Кожне просте ґаусове число $\rho$ задовольняє рівно одну із таких трьох умов:*

1. $\rho \sim 1 + i$;
2. $\rho \sim p$, *де $p$ – просте натуральне число вигляду $4k + 3$;*
3. $N(\rho)$ *– просте натуральне число вигляду $4k + 1$.*

**Теорема 6**. *Ґаусове число $\alpha = a + bi$ ділиться на $1 + i$ тоді й тільки тоді, коли числа $a$ і $b$ однієї парності.*

## 4. Результати.

Оскільки у ненульового ґаусового числа кількість дільників скінченна, то постає природне питання: чому дорівнюють їхня кількість, сума і добуток. Для натуральних чисел відповідні функції детально вивчені. Ознайомитися із їхніми властивостями та застосуванням до розв'язування задач можна, наприклад, у (Koshy, 2007). У цьому підрозділі ми введемо аналогічні функції для ґаусових чисел та доведемо основні твердження, пов'язані з ними, а також проілюструємо застосування отриманих результатів для розв'язування задач.

**Означення 4**. *Для ненульового ґаусового числа $\alpha$ визначимо функції*

$$\tau^*(\alpha) = \sum_{\delta|\alpha} 1\,, \qquad \sigma_m^* = \sum_{\delta|\alpha} \delta^m\,, \qquad \pi^*(\alpha) = \prod_{\delta|\alpha} \delta$$

*як кількість, суму $m$-тих $(m \in N)$ степенів та добуток усіх дільників числа $\alpha$ відповідно.*

Зауважимо, що якщо $\delta$ є дільником числа $\alpha$, то $-\delta, \delta i$ та $-\delta i$ також будуть дільниками $\alpha$. Але тоді якщо $m$ не кратне 4, то сума $m$-тих степенів усіх дільників числа $\alpha$ дорівнюватиме нулю. З огляду на це надалі розглядатимемо лише випадок, коли $4|m$.

Значення введених нами функцій для $\alpha = 1$ обчислити легко: $\tau^*(1) = 4$, $\sigma_{4m}^*(1) = 4$, $\pi^*(1) = -1$. Наступна теорема дає змогу обчислювати значення цих функцій і для чисел, не асоційованих з одиницею.

**Теорема 7**. *Нехай $\alpha = \mu\rho_1^{a_1} \cdots \rho_k^{a_k}$ – розклад числа $\alpha$ на прості множники, а $m \in N$. Тоді:*

$$\tau^*(\alpha) = 4\prod_{j=1}^{k}\left(a_j + 1\right),$$

$$\sigma^*_{4m}(\alpha) = 4\prod_{j=1}^{k}\frac{\rho_j^{4m(a_j+1)} - 1}{\rho_j^{4m} - 1} = 4\prod_{j=1}^{k}\left(1 + \rho_j^{4m} + \rho_j^{8m} + \cdots + \rho_j^{4ma_j}\right),$$

$$\pi^*(\alpha) = \begin{cases} \alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}, & \text{якщо } \alpha \text{ не є квадратом ґаусового числа,} \\ -\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}, & \text{якщо } \alpha \text{ є квадратом ґаусового числа.} \end{cases}$$

*Доведення.* Довільний дільник ґаусового числа $\alpha$ має вигляд $\vartheta\rho_1^{b_1}\cdots\rho_k^{b_k}$, де $\vartheta \sim 1$ і $0 \le b_j \le a_j, 1 \le j \le k$. Тому число $\vartheta$ може набувати $4$ можливих значення, а $b_j$ — $a_j + 1$ можливих значень, $1 \le j \le k$. Застосувавши комбінаторне правило добутку, знаходимо значення $\tau^*(\alpha)$.

Щоб отримати значення $\sigma^*_{4m}(\alpha)$, розглянемо добуток

$$(1 + 1 + 1 + 1)\prod_{j=1}^{k}\left(1 + \rho_j^{4m} + \rho_j^{8m} + \cdots + \rho_j^{4ma_j}\right).$$

Після розкриття дужок отримуємо суму усіх можливих доданків вигляду $\left(\vartheta\rho_1^{b_1}\cdots\rho_k^{b_k}\right)^{4m}$, тобто суму $4m$-тих степенів усіх дільників числа $\alpha$.

Знайдемо, чому дорівнює добуток дільників числа $\alpha$. Нехай $\beta_1, \ldots, \beta_{\tau^*(\alpha)}$ – усі дільники числа $\alpha$. Помітимо, що число $\beta$ є дільником числа $\alpha$ тоді й тільки тоді, коли $\frac{\alpha}{\beta}$ є дільником числа $\alpha$. Тому можемо записати:

$$\pi^*(\alpha) = \beta_1 \cdots \beta_{\tau^*(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta_1}\cdots\frac{\alpha}{\beta_{\tau^*(\alpha)}},$$

звідки

$$\left(\pi^*(\alpha)\right)^2 = \beta_1 \cdots \beta_{\tau^*(\alpha)} \cdot \frac{\alpha}{\beta_1}\cdots\frac{\alpha}{\beta_{\tau^*(\alpha)}} = \alpha^{\tau^*(\alpha)}.$$

Тому $\pi^*(\alpha) = \alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$ або $\pi^*(\alpha) = -\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Дільники числа $\alpha$ природно розпадаються на четвірки: $(\delta_j, -\delta_j, i\delta_j, -i\delta_j)$, $1 \le j \le \frac{1}{4}\tau^*(\alpha)$. Тому можемо записати:

$$\pi^*(\alpha) = \prod_{j=1}^{\frac{1}{4}\tau^*(\alpha)} \left((\delta_j)\cdot(-\delta_j)\cdot(i\delta_j)\cdot(-i\delta_j)\right) = (-1)^{\frac{1}{4}\tau^*(\alpha)}\gamma^4.$$

Тепер розглянемо три випадки.

**1.** Якщо $\alpha = \mu\rho_1^{a_1}\cdots\rho_k^{a_k}$ не є асоційованим із квадратом ґаусового числа, то для деякого $j$ число $a_j$ непарне. Тому число $\tau^*(\alpha)$ ділиться на $8$ і $\pi^*(\alpha) = \gamma^4$. Оскільки $-1$ не є четвертим степенем ґаусового числа, то випадок $\pi^*(\alpha) = -\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$ неможливий, отже, $\pi^*(\alpha) = \alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$.

**2.** Якщо $\alpha = i\omega^2, \omega \in Z[i]$, за допомогою аналогічних міркувань отримуємо, що число $\tau^*(\alpha)$ не ділиться на $8$, а тому $\pi^*(\alpha) = -\gamma^4$ і $\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)} = -\omega^{\tau^*(\alpha)}$. Оскільки число $-1$ не є четвертим степенем ґаусового числа, то випадок $\pi^*(\alpha) = -\gamma^4 = \omega^{\tau^*(\alpha)} = -\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$ неможливий. Тому $\pi^*(\alpha) = \alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$.

**3.** Якщо $\alpha = \omega^2, \omega \in Z[i]$, то, міркуючи аналогічно, отримуємо, що $\pi^*(\alpha) = -\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$.

Підсумувавши ці випадки, отримуємо формулу із твердження теореми.

■

З формул для обчислення одразу випливають такі найпростіші властивості функцій $\tau^*, \sigma_{4m}^*$ та $\pi^*$:

**Твердження 1**.

**1.** *Для асоційованих ґаусових чисел значення функцій $\tau^*, \sigma_{4m}^*$ та $\pi^*$ рівні.*

**2.** *Для спряжених ґаусових чисел значення функції $\tau^*$ однакові, а значення функцій $\sigma_{4m}^*$ та $\pi^*$ відповідно спряжені.*

**3.** *Якщо $\alpha \in Z$, то $\sigma_{4m}^*(\alpha) \in Z$ та $\pi^*(\alpha) \in Z$.*

**Задача 1**. *Обчисліть кількість, суму четвертих степенів та добуток усіх дільників чисел $\alpha = 7 + 9i, \beta = 9 + 7i$.*

*Розв'язання.* Розкладемо число $\alpha$ на прості множники. Оскільки числа $7$ та $9$ однієї парності, то $(1+i)|\alpha$. Після ділення отримуємо, що $\alpha = (1+i)(8+i)$. Щоб знайти прості дільники числа $8+i$, знайдемо його норму та розкладемо її на множники.

$$N(8+i) = 65 = 5\cdot 13 = (1^2+2^2)(2^2+3^2 = (1+2i)(1-2i)(2+3i)(2-3i).$$

Таким чином, $8+i$ ділиться на одне з чисел $1\pm 2i$ та на одне з чисел $2\pm 3i$. Перевіркою пересвідчуємося, що $8+i=(1+2i)(2-3i)$. Отже, шуканий розклад такий:

$$7+9i=(1+i)(1+2i)(2-3i).$$

Використовуючи формули, знаходимо: $\tau^*(7+9i)=4(1+1)(1+1)(1+1)=32$, $\sigma_4^*(7+9i)=4(1+(1+i)^4)(1+(1+2i)^4)(1+(2-3i)^4)=-43056-25344i$, $\pi^*(7+9i)=(7+9i)^{\frac{32}{2}}=(7+9i)^{16}$.

Тепер помітимо, що $\beta=9+7i=i(7-9i)=i\underline{\alpha}\sim\underline{\alpha}$. Тому $\tau^*(\beta)=\tau^*(\alpha)=16$, $\sigma_4^*(\beta)=\underline{\sigma_4^*(\alpha)}=-43056+25344i$, $\pi^*(\beta)=\underline{\pi^*(\alpha)}=(7-9i)^{16}$.

*Відповідь.* $\tau^*(\alpha)=\tau^*(\beta)=32$, $\sigma_4^*(\alpha)=-43056-25344i$, $\sigma_4^*(\beta)=-43056+23544i$, $\pi^*(\alpha)=(7+9i)^{16}, \pi^*(\beta)=(7-9i)^{16}$.

**Задача 2**. *Знайдіть усі ґаусові числа $\alpha$, для яких $\tau^*(\alpha)=24$ та $\sigma_4^*(\alpha)=4264$.*

*Розв'язання.* Очевидно, що $\alpha$ не є асоційованим із одиницею. Нехай $\alpha=\mu\rho_1^{a_1}\cdots\rho_k^{a_k}$ — розклад числа $\alpha$ на прості множники. Тоді $\tau^*(\alpha)=24=4(a_1+1)\cdots(a_k+1)$, а тому $(a_1+1)\cdots(a_k+1)=6=(1+1)(2+1)=5+1$. Таким чином, маємо два варіанти: $\alpha=\mu\rho^5$ або $\alpha=\mu\rho\xi^2$ для деяких простих $\rho$ та $\xi$. Розглянемо їх окремо.

**1.** Якщо $\alpha=\mu\rho^5$ для деякого простого $\rho$, то $\sigma_4^*(\alpha)=4(1+\rho^4+\rho^8+\rho^{12}+\rho^{16}+\rho^{20})=4264$, звідки $\rho^4(1+\rho^4+\rho^8+\rho^{12}+\rho^{16})=1065$. Число $1065$ як ґаусове розкладається на прості множники таким чином: $1065=3\cdot 71(1-2i)(1+2i)$, а тому воно не ділиться на четвертий степінь простого числа. Отже, цей випадок не дає розв'язків до задачі.

**2.** Якщо $\alpha=\mu\rho\xi^2$, то $\sigma_4^*(\alpha)=4(1+\rho^4)(1+\xi^4+\xi^8)=4264$, а тому $(1+\rho^4)(1+\xi^4+\xi^8)=1066$. Звідси $(1+\rho^4)|1066$. Перевіркою пересвідчуємося, що $\rho$ не може бути асоційованим із $1+i$. Нехай $\rho=a+bi$. Тоді $a$ та $b$ мають різну парність. Застосувавши формулу бінома Ньютона, отримуємо:

$$1+\rho^4=(1+a^4-6a^2b^2+b^4)+4(a^3b-ab^3)i.$$

Тому $1+\rho^4$ ділиться на $2$. Перебравши дільники числа $1066$, що діляться на $2$, отримуємо, що $\alpha\sim 6$, тобто $\alpha\in\{6,-6,6i,-6i\}$.

*Відповідь.* $\alpha\in\{6,-6,6i,-6i\}$.

Обчислимо значення кількості, суми та добутку усіх дільників ґаусового числа, кратних деякому числу.

**Твердження 2**. *Нехай число $\delta$ є дільником ненульового ґаусового числа $\alpha$. Тоді кількість, сума $4m$-тих степенів та добуток усіх дільників числа $\alpha$, які діляться на $\delta$, дорівнюють $\tau^*\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)$, $\delta^{4m}\sigma_{4m}^*\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)$ та $\delta^{\tau^*\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)}\pi^*\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)$ відповідно.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

*Доведення.* Довільний дільник числа $\alpha$, що ділиться на $\delta$, можна єдиним чином нзаписати у вигляді $\gamma\delta$, де $\gamma$ – деякий дільник числа $\frac{\alpha}{\delta}$. Звідси одразу випливає формула для кількості таких дільників. Для їхньої суми маємо:

$$\sum_{\beta|\alpha,\delta|\beta} \beta^{4m} = \sum_{\gamma|(\alpha/\delta)} \gamma^{4m}\delta^{4m} = \delta^{4m} \sum_{\gamma|(\alpha/\delta)} \gamma^{4m} = \delta^{4m}\sigma_{4m}^{*}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right).$$

Для добутку таких дільників доведення аналогічне.

■

**Задача 3**. *Скільки дільників числа* $1066$ *у випадку (2) задачі 2 вдалося відкинути за допомогою доведення того, що* $2|(1+\rho^4)$*?*

*Розв'язання.* Ми відкинули всі дільники числа $1066$, що не діляться на $2$. Очевидно, що їхня кількість дорівнює різниці кількості усіх дільників числа $1066$ та тих, що кратні $2$. Розкладемо число $1066$ на прості множники:

$$1066 = 2 \cdot 13 \cdot 41 = -i(1+i)^2(2-3i)(2+3i)(4-5i)(4+5i).$$

Тоді шукана кількість дорівнює

$$\tau^*(1066) - \tau^*(533) = 4 \cdot 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^4 = 192 - 64 = 128.$$

Таким чином, було відкинуто $128$ варіантів, що складає дві третини від початкової кількості.

*Відповідь.* $128$.

Добре відомо, що функція $\pi(n)$ добутку дільників натурального числа $n$ є ін'єктивною. На множині ґаусових чисел аналогічна функція $\pi^*$ є "майже" ін'єктивною.

**Твердження 3**. *Якщо для деяких* $\alpha, \beta \in Z[i]$ *виконується рівність* $\pi^*(\alpha) = \pi^*(\beta)$*, то* $\alpha \sim \beta$*.*

*Доведення.* Якщо $\alpha \sim 1$ або $\beta \sim 1$, то твердження очевидне. Нехай $\alpha$ і $\beta$ не є асоційованими з одиницею. З формули для обчислення функції $\pi^*$ випливає, що числа $\alpha$ і $\beta$ повинні мати однакові прості дільники. Нехай $\alpha = \mu\rho_1^{a_1} \cdots \rho_k^{a_k}$ та $\beta = \vartheta\rho_1^{b_1} \cdots \rho_k^{b_k}$. Тоді

$$\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)} = \mu^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}\rho_1^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)a_1} \cdots \rho_k^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)a_k} = \pm\beta^{\frac{1}{2}\tau^*(\beta)} = \pm\vartheta^{\frac{1}{2}\tau^*(\beta)}\rho_1^{\frac{1}{2}\tau^*(\beta)b_1} \cdots \rho_k^{\frac{1}{2}\tau^*(\beta)b_k}.$$

Звідси для довільного $j, 1 \le j \le k$, виконується рівність $a_j\tau^*(\alpha) = b_j\tau^*(\beta)$. Тому

$$\frac{a_1}{b_1} = \cdots \frac{a_k}{b_k} = \frac{\tau^*(\beta)}{\tau^*(\alpha)}.$$

Якби виконувалася нерівність $\frac{\tau^*(\beta)}{\tau^*(\alpha)} > 1$, то для довільного $j$ було б $a_j > b_j$, але тоді ми б отримали нерівність $\tau^*(\alpha) > \tau^*(\beta)$, яка суперечить початковій. Аналогічно до суперечності призводить припущення, що $\frac{\tau^*(\alpha)}{\tau^*(\beta)} > 1$. Отже, $\frac{a_1}{b_1} = \cdots \frac{a_k}{b_k} = \frac{\tau^*(\beta)}{\tau^*(\alpha)} = 1$, звідки $a_j = b_j, 1 \le j \le k$, і $\alpha \sim \beta$.

■

**Наслідок 1**. $\pi^*(\alpha) \in Z$ *тоді й тільки тоді, коли* $\alpha$ *асоційоване із цілим числом.*

Доведення цього наслідку залишаємо читачеві як вправу.

**Задача 4**. *Для яких натуральних чисел* $n$ *добуток усіх дільників числа* $(1+i)^n$ *є цілим числом?*

*Розв'язання.* За наслідком 1, число $\alpha$ має бути асоційованим із цілим числом. Розглянемо випадки в залежності від остачі від ділення числа $n$ на $4$:

$$(1+i)^{4k} = (-4)^k \in Z;\ (1+i)^{4k} = (-4)^k \in Z;$$
$$(1+i)^{4k+2} = (-4)^k \cdot 2i \sim 2(-4)^k \in Z;\ (1+i)^{4k+3} = (-4)^k(-2+2i) \notin Z.$$

Отже, умову задовольняють лише парні числа.
*Відповідь.* Для парних $n$.

## Висновки

У цій статті розглянуто функції кількості, суми та добутку дільників на множині ґаусових чисел. Для них доведено формули для обчислення та співвідношення між їхніми значеннями для асоційованих та спряжених ґаусових чисел; отримано формули для кількості, суми та добутку тих дільників ґаусового числа, що кратні деякому фіксованому ґаусовому числу. Наведено також кілька прикладів задач, які можна розв'язати за допомогою виведених тверджень.

Отримані результати мають спільні риси із відповідними теоремами для натуральних чисел, але й дещо відрізняються від них. Наприклад, формули для обчислення функцій $\tau^*$ та $\sigma^*_{4m}$ мають додатковий множник $4$. Це пояснюється тим, множина ґаусових чисел містить $4$ дільники одиниці: $1, -1, i, -i$. До суттєвих розбіжностей призводить і той факт, що комплексні (зокрема, і ґаусові) числа не можна порівнювати між собою так само, як дійсні.

Перспективи для подальших досліджень полягають не лише в знаходженні нових властивостей для функцій дільників для ґаусових чисел, а й в узагальненні теорії таких

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

функцій для інших множин, для елементів яких визначена подільність. Цікавим прикладом є множина так званих *чисел Айзенштайна* – чисел вигляду $a + b\omega$, де $a, b \in Z$, а $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ – кубічний корінь з одиниці.

**Список використаних джерел**


Arskyi, N. (2023). Number-theoretic functions for Gaussian *integers*. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences*. (1), 11–20. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.1

Calcut, J. S. (2009). Gaussian Integers and Arctangent *Identities* for π. *The American Mathematical Monthly*, *116*(6), 515–530. http://www.jstor.org/stable/40391144

Gauss, C. F. (1973). Theoria residuorum *biquadraticorum*. Commentatio secunda. Comm. Soc. Reg. Sci. Göttingen 7: 89-148; reprinted in Werke, Hildesheim: Georg Olms Verlag. p. 93–148.

Koshy, T. (2007). *Elementary Number Theory with Applications* (2nd ed.). Academic Press

Stillwell, J. (2003). *Elements of Number Theory.* New York: Springer *Science*+Business Media.

Willerding, M. F. (1966). Divisibility and factorization of *Gaussian* integers. *The Mathematics Teacher,* 59(7). p. 634-637. http://www.jstor.org/stable/27957439


*Отримано редакцією журналу: 12.04.2024*
*Схвалено до друку: 24.06.2024*

**Nikita ARSKYI, Student**
**ORCID ID: 0009-0000-9340-2639**
**e-mail: nikita.arskiy.25@gmail.com**
**Taras Shevchenko National University of Lyiv, Kyiv, Ukraine**

## ON SOME ARITHMETIC FUNCTIONS FOR GAUSSIAN INTEGERS

***Abstract.*** *Complex numbers whose real and imaginary parts are integers are called Gaussian integers. In this article, the well-known arithmetic functions—the number, sum and product of divisors—are generalized to Gaussian integers. For this functions, the formulae for calculation that use the prime factorization were derived, and some properties of these functions that concern associative or conjugate Gaussian integers were established. Obtained were also the formulae of the number, sum and product of all divisors of a Gaussian integer that are themselves divisible by a certain number. The usefulness of the obtained results are illustrated in the solutions to some problems.*

***Keywords:*** *Gaussian integer, divisor, number of divisors, sum of divisors, product of divisors.*