Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА

на тему:

Побудова майже рівнокутних жорстких фреймів, для яких оператори фреймів підсистем добре обумовлені

студентки 4 курсу
Легкої Анни Євгеніївни

Науковий керівник:
старший дослідник, кандидат фізико-математичних наук,
Рабанович В.І.

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та рекомендована до захисту в ДЕК, протокол № 9 від 23 травня 2023 р.

Завідувач кафедри ДО проф. Іксанов О.М.

Київ - 2023

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

Позначення

$\mathbb{H}$ Векторний простір над полем дійсних або комплексних чисел разом зі скалярним добутком — функцією від двох змінних $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$\mathbb{N}$ Множина натуральних чисел: $\{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{R}$ Множина дійсних чисел

$\mathbb{R}^N$ N-вимірний простір з дійсними координатами

I_n Одинична матриця розміру n

I Зліченна множина індексів, така як $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ або 0,...,N-1

ВСТУП

Дипломна робота присвячена побудові майже рівнокутних жорстких фреймів, для яких оператори фреймів підсистем добре обумовлені.

Зазвичай фрейми використовуються в обробці сигналів, проте вони також мають багато застосувань у математиці та інженерії, включаючи зв'язок і обробку зображень, теорію операторів, гармонійний аналіз, псевдодиференціальні оператори, передачу даних зі "стираннями", геофізику, квантові обчислення тощо.

Важливою рисою, що робить фрейми фундаментальним інструментом у цих областях є їх "надповнота", яка дозволяє представляти вектори наборами чисел, стійкими до квантування, стійкими до адитивного шуму. Фрейми забезпечують стабільну реконструкцію після стирань і надають більше можливостей для передачі сигналу.

Об'єктом дослідження даної дипломної роботи є рівнокутні набори ліній, жорсткі фрейми, рівнокутні жорсткі фрейми та фрейми Грассмана. Рівнокутні фрейми мають безпосереднє відношення до щільного пакування куль і квантової теорії інформації.

Рівнокутні жорсткі фрейми особливо цікаві та корисні. Зокрема, Холмс і Поулсен показали, що рівнокутні жорсткі фрейми забезпечують кодування з виправленням помилок, яке є максимально стійким до двох стирань, дивись [8]. Тому, предметом дослідження роботи є існування та побудова дійсних жорстких фреймів, які є рівнокутними або максимально близькими до рівнокутних.

Також підставою для вивчення фреймів є те, що фрейми узагальнюють базиси. "Завдяки своїм багатим теоретичним властивостям і численним практичним застосуванням рівнокутні жорсткі фрейми є, мабуть, найважливішим класом скінченновимірних фреймів, і вони є природним вибором, коли хтось намагається поєднати переваги ортонормованого базису із концепцією надлишковості, що забезпечується фреймами" [6].

Хорошим джерелом для ознайомлення з теорією фреймів є праця Пітера Казаци та Джити Кутиньок, [4].

У розділі 1, Огляд літератури, ми даємо деякі основні визначення, обговорюємо мотивацію для вивчення рівнокутних наборів ліній і рівнокутних жорстких фреймів, а також надаємо деякі з важливих чинних результатів як довідкову інформацію.

У розділі 2 наведено постановку задачі, а саме - побудувати рівнокутний жорсткий фрейм з 22 векторів в $\mathbb{R}^{20}$, для цього використано техніку обчислення спектра невід'ємно визначеного оператора, збуреного одновимірним ортопроектором. Також зроблено експериментальні побудови різноманітних фреймів з оператором фрейму $\left(1+\frac{1}{10}\right)\mathrm{I}_{20}$ та наведено загальний алгоритм побудови.

У розділі 3 проведено теоретичні дослідження, практичні експерименти та знайдено літературні оцінки на можливі значення $tr(P_iP_jP_i)$ для фреймів з оператором $\left(1+\frac{1}{10}\right)\mathrm{I}_{20}$ з 22 векторів. Крім того, зроблено порівняння кутів, $tr(P_iP_jP_i)$, які є в конструкції з теоретичними оцінками.

Додатки містять комп'ютерні результати у вигляді коду і матриць, а також деякі додаткові докази.

1 Огляд літератури

"Ортонормовані базиси є всюдивживаним і надзвичайно потужним інструментом, який пронизує всі галузі математики. Проте в деяких випадках представлення функції або оператора надповної охоплюючої системи є кращим, ніж використання ортонормованого базису. Однією з причин цього може бути те, що ортонормований базис з бажаними властивостями не існує. Іншою важливою причиною є навмисне введення надмірності з метою виправлення помилок у теорії кодування.

Маючи справу з надповними охоплюючими системами, природнім є звернення до концепції фреймів."[2]

1.1 Загальні відомості про фрейми

Означення 1. Послідовність векторів $F = \{f_k\}_{k\in I}$, що належить до (сепарабельного) гільбертового простору $\mathbb{H}$, є фреймом в $\mathbb{H}$, якщо існують константи $0 < A \leq B < \infty$ такі, що

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k\in I} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \tag{1.1.1}$$

для довільного $f \in \mathbb{H}$.

Означення 2. Фрейм $F = \{f_k\}_{k\in I}$ називається жорстким, якщо існує $A > 0$ таке, що

$$\sum_{k\in I} |\langle f, f_k\rangle|^2 = A\|f\|^2$$

для довільного $f \in \mathbb{H}$.

Наступні поняття пов'язані з фреймом F:

a) Константи A і B в (1.1.1) називаються нижньою та верхньою межею фрейму відповідно. Найбільша нижня межа фрейму і найменша верхня межа фрейму позначаються A_{op}, B_{op} і називаються оптимальними межами фрейму;

б) Якщо $A = B = 1$, F є фреймом Парсеваля;

в) Якщо $\|f_i\| = \|f_j\| = c$ для всіх $i, j \in I$, то F є рівнонормованим фреймом;

г) Якщо $\|f_i\| = 1$ для всіх $i \in$ I, то F є одинично нормованим фреймом.

Означення 3. Одинично нормований фрейм, для якого існує константа c така, що

$$|\langle f_i, f_j \rangle| = c, \text{ для довільних } i \neq j,$$

називається рівнокутним фреймом з кутом c. Тут c фактично є косинусом гострого кута між рівнокутними прямими, що відповідають векторам фрейму.

Очевидно, що будь-який ортонормований базис є рівнокутним.

Означення 4. Нехай $F = \{f_i\}_{i \in I}$ є фреймом у $\mathbb{H}$ з межами A, B. Тоді

1. асоційований оператор аналізу $T : \mathbb{H} \to l_2$ визначається як

$$Tf = \sum_{i \in I} \langle f, f_i \rangle e_i, \text{ для довільного } f \in \mathbb{H},$$

   де $\{e_i\}_{i \in I}$ є ортонормованим базисом l_2.

2. спряжений до оператора аналізу оператор синтезу фрейму $T^* : l_2 \to \mathbb{H}$ визначається як

$$T^*(a_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I} a_i f_i.$$

   Крім того,

$$\|Tf\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2, \text{ для довільного } f \in \mathbb{H}.$$

Якщо для фрейму $\{f_i\}_{i=1}^{M}$ в $\mathbb{R}^N$ запишемо оператор аналізу T в матричному вигляді, то отримаємо $M \times N$ матрицю, рядки якої утворюють фрейм, а в матриці оператора синтезу T^* стовпчики є векторами фрейму в стандартному базисі.

Означення 5. Нехай $\{f_i\}_{i\in I}$ є послідовністю векторів в $\mathbb{H}$ з асоційованим з нею оператором аналізу T. Тоді оператор фрейму $S : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ визначається наступним чином

$$Sf = T^*Tf = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle f_i.$$

З означення випливає, що

$$\langle Sf, f\rangle = \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2$$

Очевидно, що оператор фрейму $S = T^*T$ є додатним, самоспряженим і оборотним оператором в $\mathbb{H}$.

Лема 6. *Оператор фрейму S фрейму $\{f_i\}_{i\in I}$ в $\mathbb{H}$ з межами A, B є додатним самоспряженим оборотним оператором, що задовольняє*

$$A \cdot I \leq S \leq B \cdot I,$$

де символ I позначає одиничну матрицю, розміри якої визначаються контекстом.

Оператор фрейму забезпечує точну формулу для відновлення:

$$f = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle S^{-1} f_i, \text{ для довільного } f \in \mathbb{H}.$$

З оборотності оператора фрейму S випливає, що послідовність $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ також є фреймом в $\mathbb{H}$.

Твердження 7. *Нехай $F = \{f_i\}_{i\in I}$ фрейм в $\mathbb{H}$ з оператором аналізу T та оператором фрейму S. Тоді наступні умови еквівалентні:*

а) F жорсткий фрейм;

б) $S = AI$, де I - тотожний оператор, A - дійсне число;

в) Для довільного $f \in \mathbb{H}$,

$$f = \frac{1}{A}\sum_{m=1}^{M}\langle f, f_m\rangle f_m;$$

г) Для довільного $f \in \mathbb{H}$,

$$A\|f\|^2 = \sum_{m=1}^{M} |\langle f, f_m\rangle|^2.$$

"Жорсткі фрейми мають властивість, що всі власні значення асоційованого оператора фрейму збігаються. Також найбільше та найменше власні значення оператора фрейму з довільними власними значеннями є оптимальними межами фрейму."[4]

Теорема 8. *Нехай $\{f_i\}_{i\in I}$ фрейм в $\mathbb{H}$ з оператором фрейму S, який має власні значення $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Тоді λ_1 збігається з оптимальною верхньою межею фрейму, а λ_n є оптимальною нижньою межею фрейму.*

Означення 9. Фрейм $F = \{f_k\}_{k=1}^{M}$ в $\mathbb{H}^N$ називається full spark фреймом, якщо стирання будь-яких $M - N$ векторів утворює базис $\mathbb{H}^N$. Тобто для будь-якого $\Omega \subset \{1, \cdots, M\}, |\Omega| = M - N$, послідовність $\{f_k\}_{k=1,k\notin\Omega}^{M}$ все ще є фреймом в $\mathbb{H}^N$.

Full spark фрейми досить спеціалізовані й не зустрічаються дуже часто. Проте відомо, що кожен фрейм є як завгодно близьким до full spark фрейму, див. [4].

Примітка. В даній роботі ми завжди матимемо $\mathbb{H} = \mathbb{R}^N$ для деякого $N \in \mathbb{N}$.

1.2 Фрейми Грассмана

У цьому розділі ми керуємося статтею [2].

Не накладаючи жодних інших умов на фрейм, ми можемо покласти $M = N$ і побудувати з векторів $\{f_k\}_{k=1}^{M}$ фрейм в $\mathbb{R}^N$, що буде ортонормованим базисом. Але якщо ми хочемо вийти за рамки цього тривіального випадку і побудувати фрейм, що справді є надповним, тоді в середньому число $|\langle f_k, f_l\rangle|$ сильно залежатиме від надмірності фрейму. Модуль $|\langle f_k, f_l\rangle|$ можна розглядати як "міру надлишкової повноти" фрейму. Очевидно, що чим меншою є надмірність, тим менше ми очікуємо

$|\langle f_k, f_l \rangle|$. В просторі $\mathbb{R}^N$ надмірність ρ фрейму $\{f_k\}_{k=1}^M$ визначається як $\rho = M/N$.

Означення 10. Для заданого одинично нормованого фрейму $\{f_k\}_{k=1}^M$ в $\mathbb{H}$ ми визначаємо максимальну кореляцію фрейму $M(\{f_k\}_{k=1}^M)$ як

$$M(\{f_k\}_{k=1}^M) = \max_{k,l,k \neq l} \{|\langle f_k, f_l \rangle|\}.$$

Означення 11. Послідовність векторів $\{f_k\}_{k=1}^M$ в $\mathbb{H}$ називається Грасмановим фреймом, якщо вона є розв'язком

$$\min\{M(\{f_k\}_{k=1}^M)\},$$

де мінімум береться по всім фреймам одиничної норми $\{f_k\}_{k=1}^M$ в $\mathbb{H}$.

Отже, фрейм Грассмана мінімізує максимальну кореляцію між елементами фрейму серед усіх фреймів одиничної норми, які мають однакову надмірність.

Також відомо, що

$$M(\{f_k\}_{k=1}^M) \geq \sqrt{\frac{M-N}{N(M-1)}}.$$

Якщо в наведеній вище нерівності досягається рівність, то фрейм Грасмана називається оптимальним.

Більше інформації про фрейми Грассмана наведено в статті [2].

1.3 Рівнокутні жорсткі фрейми та умови їх існування

Згідно зі статтею [1] рівнокутний жорсткий фрейм може бути представлений в матричному вигляді, як $N \times M$ матриця з одинично нормованими стовпцями та ортогональними рядками з нормою $\sqrt{\frac{M}{N}}$. Його ключова властивість полягає в тому, що абсолютні скалярні добутки між парами стовпців (між парами векторів) є ідентичними та мінімальними.

У результаті рівнокутні жорсткі фрейми узагальнюють геометричні властивості ортонормованого базису.

Геометрично рівнокутні жорсткі фрейми можна розглядати як набори прямих, що проходять через початок координат. Таким чином, для побудови M елементного рівнокутного жорсткого фрейму нам потрібен набір з M прямих, що проходять через початок координат у $\mathbb{R}^N$ і є рівнокутними. Тобто якщо ми виберемо набір векторів одиничної довжини $\{f_m\}_{m=1}^M$, по одному на кожній прямій, то $|\langle f_k, f_l\rangle|$ є константою. Цей скалярний добуток являє собою косинус гострого кута між прямими.

Наступну нерівність вперше виявив Уолш у контексті теорії кодування, вона визначає нижню межу кута, утвореного набором рівнокутних прямих.

Теорема 12. *Якщо $\{f_m\}_{m=1}^M$ є одинично нормованим фреймом в $\mathbb{R}^N$, то*

$$M(\{f_m\}_{m=1}^M) = \max_{m\neq n} |\langle f_m, f_n\rangle| \geq \sqrt{\frac{M-N}{N(M-1)}} \tag{1.3.1}$$

Рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $\{f_m\}_{m=1}^M$ є рівнокутним жорстким фреймом. У цьому випадку межа фрейму дорівнює $\frac{M}{N}$.

Крім того, якщо F є одинично нормованим жорстким рівнокутним фреймом, то

$$\theta = |\langle f_m, f_n\rangle| = \sqrt{\frac{M-N}{N(M-1)}}.$$

Покладемо

$$\alpha = \frac{1}{\theta}.$$

1.3.1 Оцінки числа елементів рівнокутного жорсткого фрейму

Наступна теорема визначає верхню межу для максимальної кількості рівнокутних прямих (і, отже, кількості елементів рівнокутного фрейму) в $\mathbb{R}^N$.

Теорема 13. *(Gerzon) Якщо існує M рівнокутних прямих в $\mathbb{R}^N$, то*

$$M \leq \frac{N(N+1)}{2}$$

є верхньою межею кількості прямих.

Теорема 14. *(Theorem C) Припустимо, що $1 < N < M - 1$ та існує $N \times M$ рівнокутний жорсткий фрейм. Тоді, для дійсних рівнокутних жорстких фреймів,*

$$M \leq min\{\frac{N(N+1)}{2}, \frac{(M-N)(M-N+1)}{2}\}.$$

З попередньої нерівності випливає, що

$$\frac{2N+1+\sqrt{8N+1}}{2} \leq M \leq \frac{N(N+1)}{2}.$$

1.3.2 Необхідні умови існування рівнокутних жорстких фреймів

Важлива теорема про структуру рівнокутних прямих була наведена Пітером Нейманом.

Теорема 15. *(Peter Neumann) Якщо існує M рівнокутних прямих в $\mathbb{R}^N$, $M > 2N$, з кутом $\frac{1}{\alpha}$, то α — непарне ціле число.*

Таким чином, якщо F є одинично нормованим жорстким рівнокутним фреймом з $M > 2N$ і кутом $\theta = \frac{1}{\alpha}$, то α є непарним цілим числом.

Наступні теореми визначають необхідні умови існування рівнокутних жорстких фреймів.

Теорема 16. *(Holmes-Paulsen) Якщо $N < M$ і існує рівнокутний жорсткий фрейм з M векторами в $\mathbb{R}^N$, то*

$$(M-2N)\sqrt{\frac{M-1}{N(M-N)}} \text{ є цілим числом.}$$

Два попередні результати були вдосконалені в [1], де автори доводять наступне:

Теорема 17. *(Theorem A) Припустимо, що* $1 < N < M - 1$. *Коли* $M \neq 2N$ *дійсний рівнокутний жорсткий фрейм існує, лише якщо*

$$\sqrt{\frac{N(M-1)}{M-N}} \text{ і } \sqrt{\frac{(M-N)(M-1)}{N}} \text{ є непарними цілими числами.}$$

Зокрема, M *є парним числом. Крім того, якщо* $M = 2N$, *рівнокутний жорсткий фрейм одиничної норми може існувати лише якщо* N *є непарним числом, а* $2N - 1$ *є сумою двох квадратів.*

У таблиці на рисунку 1 наведено всі пари (N, M) з $M \leq 100$ і $N \leq M/2$, які відповідають умовам теорем A та C і для яких існують дійсні рівнокутні жорсткі фрейми.

N	M	N	M	N	M	N	M
3	6	13	26	21	42	33	66
5	10	15	30	23	46	41	82
6	16	15	36	25	50	43	86
7	14	19	38	27	54	45	90
7	28	19	76	28	64	45	100
9	18	20	96	31	62	49	98

Рис. 1: Пари (N, M) з $M \leq 100$ і $N \leq M/2$, для яких існує дійснозначний жорсткий фрейм.

В даному підрозділі ми представили основні відомості про рівнокутні жорсткі фрейми, зокрема, ряд обмежень на їх існування, які допомагають пояснити, чому їх побудов є складною задачею. Ми також побачили, що проблема побудови рівнокутних жорстких фреймів пов'язана з проблемою побудови рівнокутних прямих, що є однією з найглибших і найскладніших проблем у математиці.

1.4 Одновимірні збурення компактних операторів

Примітка. Попри те, що тематика даного розділу прямо не пов'язана з рівнокутними жорсткими фреймами, результати наведені в даному розділі надалі будуть застосовані в алгоритмі для побудови рівнокутного жорсткого фрейму.

У праці Васудева, [3], розглядається зсув спектра компактного самоспряженого оператора, що діє в гільбертовому просторі $\mathbb{H}$, який відбувається при додаванні до нього невід'ємного одновимірного проектора.

Розглянемо компактний самоспряжений оператор A у гільбертовому просторі $\mathbb{H}$. P позначає одновимірний проектор на нормований вектор x з $\mathbb{H}$, такий що $Py = \langle y, x\rangle x$ для кожного y з $\mathbb{H}$. B є оператором $A + tP$, $t > 0$.

Теорема 18. *Припустимо, що нульовий простір A порожній. Між кожною парою різних, послідовних власних значень $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ є точно одне власне значення B в одному з інтервалів $(\lambda_i, \lambda_{i+1}]$, $[\lambda_i, \lambda_{i+1})$ або $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$.*

Таким чином, при додаванні до оператора A одновимірного проектора P, відбувається зсув спектру і власні значення нового оператора B перемежовуються з власними значеннями оператора A.

Теорема 19. *Нехай $\{\lambda_i\}$ і $\{\mu_i\}$ дві різні монотонні послідовності дійсних чисел, кожна з яких має нуль як єдину граничну точку. Далі припустимо, що μ_j належить до $(\lambda_j, \lambda_{j+1})$ для кожного j і $\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k - \lambda_k)$ збігається. Нехай A компактний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathbb{H}$, який має власні значення λ_i $(i = 1, 2, \dots)$. Тоді існує нормований вектор x і відповідний одновимірний проектор P, такий що для відповідного $t > 0$ оператор $B = A + tP$ має власні значення μ_i $(i = 1, 2, \dots)$.*

Скористаємося деякими результатами з доведення теореми 19, з повним доведенням даної теореми можна ознайомитись в [3].

Розглянемо функцію

$$\Phi(\xi) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\xi - \mu_k}{\xi - \lambda_k} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\lambda_k - \mu_k}{\xi - \lambda_k}\right) = \\ = 1 + \frac{m_1}{\lambda_1 - \xi} + \frac{m_2}{\lambda_2 - \xi} + \dots + \frac{m_n}{\lambda_n - \xi}, \quad (1.4.1)$$

де m_k додатні. Останній перехід здійснено за допомогою розкладу в суму елементарних дробів за умови, що всі λ_i різні.

Якщо всі λ_i різні, то

$$m_s = \lim_{\xi \to \lambda_s} \Phi(\xi)(\lambda_s - \xi) = \lim_{\xi \to \lambda_s} \prod_{k=1}^{n} \frac{\xi - \mu_k}{\xi - \lambda_k}(\lambda_s - \xi) = -\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(\lambda_s - \mu_k)}{\prod\limits_{k=1,\, k\neq s}^{n}(\lambda_s - \lambda_k)}. \tag{1.4.2}$$

Згідно з доведенням теореми 19, $\sum_{k=1}^{n} m_k = 1$.

Візьмемо вектор x з координатами $(a_1, \ldots, a_n)$, де a_i є довільним розв'язком рівняння ${a_i}^2 = m_i$. Тоді вектор x є нормованим, а оператор P виглядає наступним чином:

$$P = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

Отже, якщо ми покладемо $t = 1$, то за допомогою формули (1.4.2) при заданих власних значеннях λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ і μ_i $(i = 1, \ldots, n)$ можна побудувати одновимірний проектор P, що збурює спектр оператора A і оператор $B = A + P$ має власні значення μ_i.

2 Побудова майже Грассманових жорстких фреймів

2.1 Постановка задачі

Розглянемо $P_1, P_2, \cdots, P_m$ - оператори проектування на одновимірні підпростори. Нехай проектор P_i проектує на вектор f_i, набір векторів $(f_i)_{i=1}^m$ утворює фрейм F. Тоді координати довільного вектора $x \in \mathbb{H}$ по фрейму F дорівнюють

$$y_i = \frac{\langle x, f_i \rangle}{\|f_i\|^2}.$$

По координатах y_i можна однозначно відтворити вектор x:

$$x = A^{-1}(y_1 f_1 + y_2 f_2 + \cdots + y_m f_m), \text{ де } A = \sum_{i=1}^{m} P_i.$$

У разі втрати частини сигналу при передачі інформації з шумом, інформацію, тобто вектор x, можна відновити по тих координатам, що залишаться:

$$x = {A_k}^{-1}(\sum_{i=1, i \neq k}^{m} y_i f_i), \text{ де } A_k = \sum_{i=1, i \neq k}^{m} P_i.$$

Таким чином, важливе значення при відновленні інформації має оборотність суми операторів проектування за умови того, що з початкової суми A відкинуто декілька проекторів.

Тому, ми працюватимемо з одинично нормованими жорсткими фреймами, тобто послідовностями одиничних векторів $f_1, f_2, \cdots, f_m$ у n вимірному гільбертовому просторі $\mathbb{H}$ з наступною властивістю. Якщо P_i є ортогональною проекцією на $span\langle f_i \rangle$, то

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_m = \alpha \mathrm{I}, \tag{2.1.1}$$

де I — тотожний оператор у $\mathbb{H}$.

Наша увага зосереджена на full spark фреймах, фреймах, які залишаються фреймом після видалення будь-яких $M - N$ векторів з набору векторів $(f_i)_{i=1}^M$ і для яких будь-який оператор виду

$$\sum_{i \in \Omega} P_i \tag{2.1.2}$$

є оборотним, якщо $|\Omega| \geq N$.

З практичної точки зору, ми шукаємо фрейми з "хорошим" числом обумовленості для довільного оператора в (2.1.2) і з фіксованим значенням надмірності $(M-N)/N$. Це дає можливість ефективно відновлювати інформацію, закодовану фреймом, коли якась її частина втрачена. Рівнокутні жорсткі фрейми та фрейми Грассмана є найкращими прикладами таких фреймів. Саме тому, ми зосередимо свою увагу на побудові такого виду жорстких фреймів.

Якщо F є жорстким фреймом у n вимірному просторі з m одинично нормованими векторами, то оператор фрейму $S = \lambda \mathrm{I}$, де $\lambda = \frac{m}{n}$. У цьому випадку, константа λ називається коефіцієнтом надмірності. Доведення цього твердження наведено в статті [7].

Оскільки

$$Sf = \sum_{i=1}^{m} \langle f, f_i \rangle f_i = \sum_{i=1}^{m} P_i f, \text{ то}$$

$$S = \sum_{i=1}^{m} P_i.$$

В нашій роботі ми розглядаємо $N = 20$ - розмірність простору $\mathbb{R}^N$, $M = 22$ - кількість елементів фрейму.

Таким чином, мета даної роботи полягає у побудові фрейму з 22 векторів в $\mathbb{R}^{20}$, такого що які б 2 вектори ми не виключили (10% інформації - координат фрейму), інформацію про координати початкового вектора все одно можна відновити. Тобто при відкиданні декількох проекторів все одно залишається фрейм, у оператора фрейму якого добре число обумовленості.

2.2 Перевірка існування фрейму з заданими розмірностями

Перевіримо, чи виконуються необхідні умови існування рівнокутних жорстких фреймів для заданих в постановці задачі розмірностей. Нагадаємо, що $N = 20$ - розмірність простору $\mathbb{R}^N$, $M = 22$ - кількість елементів фрейму.

Перевіримо умови теореми А, ст. 14:

$$\sqrt{\frac{N(M-1)}{M-N}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 21}{2}} = 14.49$$
$$\sqrt{\frac{(M-N)(M-1)}{N}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 21}{20}} = 1.449$$

Обидва числа не є непарними цілими. Отже, відповідно до теореми А, для заданих M та N дійсний рівнокутний жорсткий фрейм не існує. Також даний результат підтверджується практичними експериментами.

Тому, надалі спробуємо побудувати жорсткий фрейм з 22 векторів в $\mathbb{R}^{20}$, який є максимально близьким до рівнокутного, за допомогою експериментальних побудов різноманітних фреймів з оператором фрейму $\left(1 + \frac{1}{10}\right) \mathrm{I}_{20}$. Також знайдемо практичні та теоретичні оцінки на можливі значення $tr(P_i P_j P_i)$, порівняємо кути в конструкції з теоретичними оцінками.

2.3 Алгоритм побудови проекторів

Цілю даного підрозділу є побудова у двадцяти вимірному просторі двадцяти двох операторів проектування на одиничні вектори таких, що

$$\sum_{i=1}^{22} P_i = \left(1 + \frac{1}{10}\right) \mathrm{I}_{20}.$$

Загальний вигляд проектора рангу 1, що діє в двовимірному просторі

$$\begin{pmatrix} x & \sqrt{y - y^2} \\ \sqrt{y - y^2} & 1 - y \end{pmatrix},$$

це проекція на лінію з кутом нахилу θ, $y = cos^2\theta$.

Згідно з працею Halmos, Two Subspaces, [5], можемо покласти

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} x & \sqrt{x - x^2} \\ \sqrt{x - x^2} & 1 - x \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$P_1 + P_2 \simeq \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 - \varepsilon \end{pmatrix}, \tag{2.3.1}$$

де $\simeq$ позначає унітарну еквівалентність.

В наведеній вище рівності, (2.3.1),

$$\varepsilon = cos\alpha_{1,2},$$

де $\alpha_{1,2}$ - кут між проекторами P_1 і P_2. Доведення даного факту наведено у розділі 2.4 на сторінці 24.

Оскільки в унітарно еквівалентних матриць співпадають визначники та власні значення, то обчисливши визначник $P_1 + P_2$ і підставивши в якості власного значення $1 + \varepsilon$ можна знайти формулу для обчислення x:

$$x = \varepsilon^2.$$

Алгоритм побудови наступних проекторів:

1) Експериментально ми надавали ε різні значення з кроком $\Delta = \frac{1}{1000}$ від 0 до 0.1, результати наведено в додатку Б.

   Якщо 2 проектори в сумі дають хоч одне власне значення більше 1.1, то при додаванні будь-якого іншого проектора буде відбуватись зсув спектра і збільшення максимально власного числа. В такому випадку, неможливим буде досягнення межі 1.1. При ε більшому за 0.1, $1 + \varepsilon > 1.1$. Тому, ε обираємо в межах від 0 до 0.1.

2) Підібрали P_3 так, щоб спектр $P_1 + P_2 + P_3$ дорівнював

$$\sigma(P_1 + P_2 + P_3) = \begin{pmatrix} 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.9 - y_1 \end{pmatrix}.$$

Для підбору було використано техніку збурення спектра і формулу (1.4.2) з розділу 1.4:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \sqrt{-\frac{(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_1-\mu_2)(\lambda_1-\mu_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}},\\
s_2 &= \sqrt{-\frac{(\lambda_2-\mu_1)(\lambda_2-\mu_2)(\lambda_2-\mu_3)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}},\\
s_3 &= \sqrt{-\frac{(\lambda_3-\mu_1)(\lambda_3-\mu_2)(\lambda_3-\mu_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}}.
\end{aligned}
\tag{2.3.2}
$$

Тут $\lambda_1 = 1+\varepsilon$, $\lambda_2 = 1-\varepsilon$, $\lambda_3 = 0$, $\mu_1 = 1.1$, $\mu_2 = y_1$, $\mu_3 = 1.9 - y_1$.

$$
P_3 = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}
$$

Кожне зі значень s_i можна обирати як додатного, так і від'ємного знаку. Також сума ${s_i}^2$ дорівнює одиниці.

Підбір y_1 здійснювався з кроком $\Delta_1 = \frac{1}{100}$ від $\lambda_2 = 1-\varepsilon$ до $\lambda_1 = 1+\varepsilon$ так, щоб кути між P_1 і P_2, P_2 і P_3 та P_1 і P_3 були однаковими.

3) Таким чином, три проектори дають вже одне власне число 1.1, а інші потрібно ще змінювати.

4) Так як і в 2) підбиралися s_1, s_2, s_3, підбираємо P_4 так, щоб

$$
\begin{pmatrix} 1,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.9-y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + P_4 \simeq \begin{pmatrix} 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.8-y_2 \end{pmatrix},
$$

тут $\simeq$ позначає унітарну еквівалентність.

P_4 будуємо наступним чином

$$
P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix},
$$

де для обчислення $(s_i)_{i=\overline{1,3}}$ покладаємо

$$\lambda_1 = y_1,$$
$$\lambda_2 = 1.9 - y_1,$$
$$\lambda_3 = 0,$$

$$\mu_1 = 1.1,$$
$$\mu_2 = y_2,$$
$$\mu_3 = 1.8 - y_2.$$

5) Аналогічно підбираються P_5, P_6, $\cdots$ P_{20}. Для P_{20}:

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & y_{17} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0.3 - y_{17} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + P_{20} \simeq$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1.1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & y_{18} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0.2 - y_{18} \end{pmatrix}$$

Для побудови P_i на i-му кроці знаходимо $(s_i)_{i=\overline{1,3}}$, покладаючи λ_1 і λ_2 рівними μ_2 і μ_3 з $(i-1)$-го кроку, відповідно, $\lambda_3 = 0$. $\mu_1 = 1.1$, $\mu_2 = y_{i-2}$, а μ_3 підбирається так, щоб

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0.1 + \mu_2 + \mu_3.$$

Остання рівність випливає з лінійності сліду

$$tr(P_1 + P_2 + \cdots + P_{i-1}) + tr(P_i) = tr(P_1 + P_2 + \cdots + P_{i-1} + P_i).$$

У разі рівності λ_1 і λ_2 на i-му кроці ($\mu_2 = \mu_3$ на $(i-1)$-му кроці) обчислення $(s_i)_{i=1,2}$ за формулами наведеними в пункті 2), (2.3.2), є неможливим. Тому, обчислюємо s_3 за формулою (2.3.2), а s_1 і s_2 знаходимо з рівності ${s_1}^2 + {s_2}^2 + {s_3}^2 = 1$. Для знаходження s_1 ми експериментально надавали йому різні значення з кроком $\frac{1}{100}$ від 0 до $\sqrt{1 - {s_3}^2}$, тоді $s_2 = \sqrt{1 - {s_3}^2 - {s_1}^2}$.

6) Будуємо

$$P_{21} + P_{22} = \begin{pmatrix} 1.1 - y_{18} & 0 \\ 0 & 0.9 + y_{18} \end{pmatrix}$$

за формулою (2.3.1).

7) На кожному кроці P_1, P_2, P_3, $\cdots$ P_i переходили до еквівалентних проекторів за допомогою унітарного оператора U_i так, щоб

$$U_i{}^*(P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_i)U_i = \begin{pmatrix} 1.1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & y_{i-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 - (i-2)(\frac{1}{10}) - y_{i-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для знаходження унітарного оператора U_i було застосовано сингулярний розклад (SVD) матриці суми $P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_i$.

8) Таким чином, після кроку 5) ми мали

$$\hat{P_1} + \hat{P_2} + \cdots + \hat{P_{20}} = \begin{pmatrix} 1.1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & y_{18} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0.2 - y_{18} \end{pmatrix}$$

9) Крок 8) разом з 6) дають

$$\tilde{P_1} + \tilde{P_2} + \cdots + \tilde{P_{20}} + P_{21} + P_{22} = (1.1)\mathrm{I}_{20}.$$

Примітка. При побудові P_i на i-му кроці підбір y_{i-2} здійснювався з кроком $\Delta_4 = \frac{1}{100}$. Межі в яких підбирався y_{i-2} знаходяться з системи

$$\begin{cases} y_{i-2} \in [\lambda_2; \lambda_1]; \\ 2 - (i-2)(\frac{1}{10}) - y_{i-2} \leq \lambda_2. \end{cases}$$

Для побудови i-го проектора обиралося таке значення y_{i-2}, щоб кути $(tr(P_iP_jP_i))_{j=1}^{i-1}$ були максимально близькими до теоретично оптимального значення 0.004761 і не наближалися до критичного значення 0.01.

В додатку А.1 наведено програмну реалізацію алгоритму, на прикладі побудови перших п'яти проекторів. Код написано в системі комп'ютерної алгебри - Maple. Всі значення y_i, $i = \overline{1,18}$, які було використано для побудови проекторів $P_3, P_4, \cdots, P_{22}$, наведено в додатку А.2, ст. 37.

2.4 Спектр суми двох проекторів

Нехай одновимірний оператор проектування P_1 проектує на вектор v_1, а P_2 проектує на вектор v_2. Довжини $\|v_i\|$ дорівнюють 1. Покладемо $A = P_1 + P_2$, A може проектувати максимум на двовимірний простір. Для довільного вектора $x \in \mathbb{R}^2$:

$$Ax = P_1x + P_2x.$$

Знайдемо власні значення матриці A.

Перший власний вектор u_1 матриці A лежить на бісектрисі кута α, кута між P_1 і P_2. Тоді

$$P_1u_1 = cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\|u_1\|v_1 = cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)v_1,$$

$$P_2u_1 = cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\|u_1\|v_2 = cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)v_2,$$

$$Au_1 = P_1u_1 + P_2u_1 = cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)(v_1+v_2) = 2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + cos\alpha.$$

Оскільки A - ермітова матриця, то власні вектори матриці A перпендикулярні і їх довжина дорівнює 1, $\|u_i\| = 1$.

Перше власне значення матриці A: $\lambda_1 = 1 + cos\alpha$. Друге власне значення λ_2 можна обчислити використовуючи перпендикулярність власних векторів або скориставшись властивістю сліду. Тоді $\lambda_2 = 2 - \lambda_1 = 1 - cos\alpha$.

Отже, спектр оператора $P_1 + P_2$ дорівнює

$$\sigma(P_1 + P_2) = \{1 + cos\alpha; 1 - cos\alpha\}.$$

Узагальнивши попередній результат, отримаємо формулу для значення спектра суми двох довільних одновимірних операторів проектування P_i і P_j:

$$\sigma(P_i + P_j) = \{1 + cos\alpha_{ij}; 1 - cos\alpha_{ij}\},$$

де α_{ij} позначає кут між проекторами P_i і P_j.

2.5 Оцінки можливих значень кутів між векторами

За допомогою елементарних геометричних міркувань можна показати, що якщо $P_1, P_2, \cdots, P_n$ - оператори проектування на одновимірні підпростори, то

$$P_iP_jP_i = cos^2\alpha_{ij}P_i,$$

де α_{ij} позначає кут між векторами, на які проектують оператори P_i та P_j.

Взявши слід від обох частин попередньої рівності і врахувавши, що $tr(P_i) = 1$, отримаємо формулу для знаходження кута між проекторами P_i та P_j:

$$tr(P_iP_jP_i) = tr(cos^2\alpha_{ij}P_i) = cos^2\alpha_{ij}tr(P_i) = cos^2\alpha_{ij}. \tag{2.5.1}$$

Саме за допомогою наведеної вище формули, (2.5.1), програмно обчислювалися кути між проекторами.

2.5.1 Теоретична оцінка кутів між векторами рівнокутного фрейму

Згідно з нерівністю Уолша, (1.3.1), якщо $\{f_m\}_{m=1}^{M}$ є одинично нормованим фреймом в $\mathbb{R}^N$, то

$$\max_{m\neq n} |\langle f_m, f_n\rangle| \geq \sqrt{\frac{M-N}{N(M-1)}},$$

де рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $\{f_m\}_{m=1}^{M}$ є рівнокутним жорстким фреймом.

Таким чином, якби для заданих $M = 22$ та $N = 20$ існував дійсний рівнокутний жорсткий фрейм, то

$$\max_{m\neq n} |\langle f_m, f_n\rangle| = \sqrt{\frac{M-N}{N(M-1)}} = \sqrt{\frac{2}{20\cdot 21}} = \sqrt{0.004761} = 0.069.$$

Тобто квадрат косинуса кута між векторами, $tr(P_iP_jP_i)$, дорівнював би 0.004761.

2.5.2 Пряма оцінка кутів між векторами

Розглянемо суму проекторів

$$\sum_{i=1}^{22} P_i = \left(1+\frac{1}{10}\right)\mathrm{I}_{20}.$$

Домножимо рівність з обох сторін на P_1 та використаємо те, що P_1 є проектором і ${P_1}^n = P_1$, де $n \in \mathbb{N}$.

$$P_1(P_1+P_2+\cdots+P_{22})P_1 = \left(1+\frac{1}{10}\right){P_1}^2 = \left(1+\frac{1}{10}\right)P_1,$$

$$P_1 + P_1P_2P_1 + P_1P_3P_1 + \cdots + P_1P_{22}P_1 = \left(1+\frac{1}{10}\right)P_1.$$

Візьмемо слід від обох частин попередньої рівності

$$tr(P_1 + P_1P_2P_1 + P_1P_3P_1 + \cdots + P_1P_{22}P_1) = tr\left(\left(1 + \frac{1}{10}\right)P_1\right).$$

Оскільки $tr(P_1) = 1$, то

$$1 + tr(P_1P_2P_1 + P_1P_3P_1 + \cdots + P_1P_{22}P_1) = 1 + \frac{1}{10},$$

$$tr(P_1P_2P_1 + P_1P_3P_1 + \cdots + P_1P_{22}P_1) = \frac{1}{10}.$$

Отже,

$$\sum_{j=2}^{22} tr(P_1P_jP_1) = \frac{1}{10}.$$

Тоді найбільше $tr(P_iP_jP_i) \geq \frac{1}{210}$.

Якщо всі $tr(P_iP_jP_i)$ однакові, то всі проектори розташовані під одним кутом і

$$tr(P_iP_jP_i) = \frac{1}{10 \cdot 21} = 0.004761.$$

З цієї рівності випливає безпосередня оцінка для кутів між проекторами. За умови рівнокутності фрейму, квадрат косинуса кута між проекторами дорівнює 0.004761.

2.5.3 Експериментальні оцінки кутів між векторами

Практично в нашій конструкції оптимальні теоретичні значення кутів не досягаються, оскільки рівнокутні жорсткі фрейми в обраній розмірності не існують. Тому, при побудові операторів проектування ми підбирали параметри так, щоб отримати жорсткий фрейм з 22 векторів в $\mathbb{R}^{20}$, кути якого є максимально близькими до теоретичного оптимального значення, значення яке досягається при рівнокутності фрейму.

Крім того, при побудові проекторів значення підбиралися так, щоб квадрати косинусів кутів між проекторами не наближалися до критичного значення 0.01. Якщо $tr(P_iP_jP_i) = 0.01$, то косинус кута між проекторами P_i, P_j дорівнює 0.1. Тоді слід суми проекторів дорівнює $\sigma(P_i+P_j) =$

$\{1+0.1; 1-0.1\}$ і при відкиданні цих проекторів з конструкції одне з власних значень оператора фрейму підсистеми стане нульовим. В такому випадку, матриця оператора фрейму є виродженою і відновлення інформації не можливе.

В результаті численних комп'ютерних експериментів нам вдалося побудувати проектори P_1, P_2, P_3 такі, що

$$tr(P_1P_2P_1) = tr(P_1P_3P_1) = tr(P_2P_3P_2) = 0.0025.$$

Програмна реалізація підбору параметрів для побудови рівнокутних перших трьох проекторів наведена в додатку Б.

Проте побудова четвертого оператора P_4 такого, що утворював би рівні кути з першими трьома проекторами виявилася не можливою. У випадку, коли з одним або навіть двома проекторами P_4 утворює кут 0.0025, кут між P_4 та третім проектором досягає критичного значення. Цей результат також підтверджується викладками наведеними у попередньому підрозділі 2.5.2. Програмну реалізацію наведено в додатку В.

Також одним з комп'ютерних експериментів був пошуку третього проектора при $tr(P_1P_2P_1) = 0.004761$. Однак підбір параметрів для побудови третього проектора, який утворює кут 0.004761 з першим і другим проектором одночасно теж є не можливим, як це показано в додатку Г.

В результаті побудови двадцяти двох операторів проектування, найбільший квадрат косинуса кута між двома проекторами дорівнює 0.00989. Зі значення всіх кутів, отриманих в конструкції, можна ознайомитись в додатку Д.

2.6 Число обумовленості

Знайдемо теоретично можливе число обумовленості оператора фрейму при відкиданні довільних двох проекторів.

Припустимо, що існує рівнокутний жорсткий фрейм заданої розмірності, тоді косинуси всіх кутів між векторами дорівнює 0.069, згідно з викладками наведеними в розділі 2.5. Тому, для будь-яких двох проекторів P_i, P_j, $i, j = \overline{1, 22}$ спектр суми дорівнює $\sigma(P_i+P_j) = \{1+0.069; 1-0.069\}$.

Теоретичне число обумовленості дорівнює

$$\frac{1.1}{1.1 - 1.069} = \frac{1.1}{0.031} = 35.48.$$

Отже, число обумовленості теоретично не краще 35.48.

Практично в нашій конструкції теоретичного значення числа обумовленості досягти не можливо, оскільки рівнокутні жорсткі фрейми в обраній розмірності не існують. Більше того в результаті експериментів найбільший кут між проекторами дорівнює 0.00989, це квадрат косинуса кута між проекторами P_{15} і P_{20}.

Тоді найбільше власне число суми двох проекторів дорівнює
$1 + cos\alpha_{15,20} = 1 + 0.09945$, де $\alpha_{15,20}$ - кут між P_{15}, P_{20}.

Практичне число обумовленості дорівнює

$$\frac{1.1}{1.1 - 1.09945} = \frac{1.1}{0.00055} = 2000.$$

Таким чином, найгірше число обумовленості експериментально побудованої конструкції дорівнює 2000.

Зі значеннями оптимальних параметрів, які було використано для побудови фрейму, можна ознайомитись в додатку А.2, ст. 37.

ВИСНОВКИ

В дипломній роботі було побудовано жорсткий фрейм з 22 векторів в $\mathbb{R}^{20}$, оператор фрейму якого дорівнює $\left(1+\frac{1}{10}\right)\mathrm{I}_{20}$. Даний фрейм є стійким до втрати 10% інформації, тобто які б два вектори ми не виключили, інформацію все одно можна відновити.

Для побудови було використано відомий спосіб обчислення збурення спектра невід'ємно визначеного оператора одновимірним ортопроектором та виведено формули, за допомогою яких при заданих власних значеннях $\lambda_{i,\, i=\overline{1,n}}$ і $\mu_{i,\, i=\overline{1,n}}$ можна побудувати одновимірний проектор P, що збурює спектр оператора A, який має власні значення λ_i. Тоді оператор $B = A + P$ має власні значення μ_i.

Крім того, було знайдено новий підхід до знаходження фреймів таких, що оператор фрейму навіть після відкидання декількох векторів фрейму має нормальне число обумовленості, та запропоновано загальний алгоритм для їх побудови. При цьому даний підхід не залежить від рівнокутності фрейму, він прямо будує фрейм. Проте при побудові необхідно підбирати константи за допомогою чисельних методів, що ще чекають на узагальнення.

Також було зроблено аналіз та численні перевірки за допомогою комп'ютера, котрі вказують на те, що для деяких розмірностей фреймів, в нашому випадку це двадцяти вимірний простір з 22 векторами, оцінки на кути між векторами практично побудованих моделей дуже сильно відхиляються від теоретично допустимих. Було побудовано більше 1000000 фреймів і серед них вибрано в певному сенсі оптимальний з точки зору надійності відновлення інформації.

Таким чином, в дипломній роботі було виведено формули та наведено алгоритм для побудови жорстких фреймів, практичне значення яких полягає у потенційній можливості їх застосування для розв'язання практичних та теоретичних задач у різних галузях науки. Теоретичне значення результатів полягає у поглибленні знань про нерівнокутні жорсткі фрейми, що можуть бути використані в теорії інформації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] On the existence of equiangular tight frames/M. A. Sustik, J. A. Tropp, I. S. Dhillon, Jr. R. W. Heath - Linear Algebra and its Application, 2007. - Vol. 426. - P. 619–635.

[2] Thomas Strohmer, Robert W. Heath Jr. Grassmannian frames with applications to coding and communication - Applied and Computational Harmonic Analysis, 2003. - Vol. 14; № 3. - P. 257-275.

[3] Harkrishan Vasudeva. One Dimensional Perturbations of Compact Operators - Proceedings of the American Mathematical Society, 1976. - Vol. 57; № 1. - P. 58-60.

[4] Peter G. Casazza, Gitta Kutyniok. Finite Frames. Theory and Applications - Applied and Numerical Harmonic Analysis, 2013. - 485 p.

[5] P. R. Halmos. Two Subspaces - Transactions of the American Mathematical Society, 1969. - Vol. 144. - P. 381-389.

[6] Thomas Strohmer. A note on equiangular tight frames - Linear Algebra and its Applications, 2008. - Vol. 429; № 1. - P. 326-330.

[7] V. N. Malozemov, A. B. Pevnyi. Equiangular tight frames - Journal of Mathematical Sciences, 2009. - Vol. 157. - P. 789–815.

[8] Roderick B. Holmes, Vern I. Paulsen. Optimal frames for erasures - Linear Algebra and its Applications, 2004. - Vol. 377. - P. 31-51.

[9] Roger A. Horn, Charles R. Johnson. Matrix Analysis - Cambridge University Press, 2013. - 643 p.

[10] Equiangular lines and covers of the complete graph/G. Coutinho, C. Godsil, H. Shirazi, H. Zhan - Linear Algebra and its Applications, 2016. - Vol. 488. - P. 264-283.

[11] Tremain equiangular tight frames/Matthew Fickus, John Jasper, Dustin G. Mixon, Jesse Peterson - Journal of Combinatorial Theory, Series A, 2018. - Vol. 153. - P. 54-66.

[12] Peter A. Fillmore. On sums of projections - Journal of Functional Analysis, 1969. - Vol. 4; № 1. - P. 146-152.

[13] Bernhard G. Bodmann, Vern I. Paulsen. Frames, graphs and erasures - Linear Algebra and its Applications, 2005. - Vol. 404. - P. 118-146.

[14] Matthew Fickus, Dustin G. Mixon. Tables of the existence of equiangular tight frames - Department of Mathematics and Statistics, Air Force Institute of Technology, 2016. - Available online: https://arxiv.org/pdf/1504.00253.pdf.

[15] Peter G. Casazza, Dan Redmond, Janet C. Tremain. Real Equiangular Frames: Invited Paper - 42nd Annual Conference on Information Sciences and Systems, 2008. - Available online: https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=5894d37d416f9ea198bba64e2dbde20abb51e1cd.

Додаток А

Програмна реалізація алгоритму та параметри для побудови проекторів

А.1 Програмна реалізація алгоритму для побудови проекторів

Розглянемо побудову перших п'яти проекторів, для решти алгоритм є аналогічним.

Крок 1. *Шукаємо матриці* P_1 і P_2

```
> ε := 0.05 :
> τ := 1 :
```

> $P_1 := \begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$

$$P_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

> $x := \varepsilon^2;$

$$x := 0.0025 \tag{1.2}$$

> $P_2 := \begin{bmatrix} x & \mathrm{sqrt}(x - x^2) \\ \mathrm{sqrt}(x - x^2) & 1 - x \end{bmatrix}:$

> $P12 := evalf(P_1 + P_2):$

> $evalf(P12):$

> #*Власні значення* $P_1 + P_2$

> $Eigenvalues(P12);$

$$\begin{bmatrix} 1.050000000 \\ 0.9500000000 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

> $U1, S1, V1 := svd(P12):$

> $evalf(Multiply(U1^*, Multiply(P12, U1))):$

>

> #*Діагоналізуємо* P_1, P_2

> $P_{1,1} := Multiply(U1^*, Multiply(P_1, U1)):$

> $P_{2,1} := Multiply(U1^*, Multiply(P_2, U1)):$

> #*Сума* $P_1 + P_2$

> $evalf(P_{1,1} + P_{2,1});$

$$\begin{bmatrix} 1.05000000000000004 & 2.65512611899999996\ 10^{-11} \\ -2.06223371699999986\ 10^{-11} & 0.949999999999999954 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

> #*Знаходимо* $\cos^2$ *кута між* P_1 і P_2

> $Trace(evalf(Multiply(P_1, Multiply(P_2, P_1))));$

$$0.0025 \tag{1.5}$$

Крок 2. Шукаємо матрицю P_3

> $\lambda_1 := 1.05$:

> $\lambda_2 := 0.95$:

> $\lambda_3 := 0$:

> $\mu_1 := 1.1$:

> $\mu_2 := 0.95$:

> $\mu_3 := 0.95$:

> $s1 := \sqrt{-\frac{(\lambda_1-\mu_1)\cdot(\lambda_1-\mu_2)\cdot(\lambda_1-\mu_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)\cdot(\lambda_1-\lambda_3)}}$:

> $s2 := \sqrt{-\frac{(\lambda_2-\mu_1)\cdot(\lambda_2-\mu_2)\cdot(\lambda_2-\mu_3)}{(\lambda_2-\lambda_1)\cdot(\lambda_2-\lambda_3)}}$:

> $s3 := \sqrt{-\frac{(\lambda_3-\mu_1)\cdot(\lambda_3-\mu_2)\cdot(\lambda_3-\mu_3)}{(\lambda_3-\lambda_2)\cdot(\lambda_3-\lambda_1)}}$:

> $P_3 := \begin{bmatrix} s1 \\ s2 \\ s3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s1 & s2 & s3 \end{bmatrix}$:

>

> $S := evalf(Matrix(3, 3, P_{1,1} + P_{2,1}) + P_3)$:

> $U2, S2, V2 := svd(S)$:

>

> *#Діагоналізуємо P_1, P_2 і P_3, за допомогою унітарного оператора U2*

> $P_{1,2} := Multiply(U2^*, Multiply(Matrix(3, 3, P_{1,1}), U2))$:

> $P_{2,2} := Multiply(U2^*, Multiply(Matrix(3, 3, P_{2,1}), U2))$:

> $P_{3,2} := Multiply(U2^*, Multiply(P_3, U2))$:

> *#Сума $P_1 + P_2 + P_3$*

> $evalf(P_{1,2} + P_{2,2} + P_{3,2})$;

$$\begin{bmatrix} 1.10000000000000008 & 9.00418628500000010\ 10^{-11} & 2.40826334599999988\ 10^{-11} \\ 1.18190901500000002\ 10^{-10} & 0.949999999999999954 & -1.15643415000000006\ 10^{-11} \\ -1.66830316900000000\ 10^{-11} & 1.20156367499999992\ 10^{-11} & 0.949999999999999954 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

> *#Знаходимо кути між P_1 і P_2, P_2 і P_3, P_1 і P_3*

> $Trace(evalf(Multiply(P_{1,2}, Multiply(P_{2,2}, P_{1,2}))))$;
$Trace(evalf(Multiply(P_{2,2}, Multiply(P_{3,2}, P_{2,2}))))$;
$Trace(evalf(Multiply(P_{1,2}, Multiply(P_{3,2}, P_{1,2}))))$;

0.002499999996

0.002500000000

0.002500000000 (2.2)

Крок 3. Шукаємо матрицю P_4

> $\lambda_1 := \mu_2$;

$$\lambda_1 := 0.95 \quad (3.1)$$

> $\lambda_2 := \mu_3$;

$$\lambda_2 := 0.95 \quad (3.2)$$

> $\lambda_3 := 0$:

> $\mu_1 := 1.1$:

> $\mu_2 := 0.95$:

> $\mu_3 := 0.85$:

$> s3 := \sqrt{-\frac{(\lambda_3-\mu_1)\cdot(\lambda_3-\mu_2)\cdot(\lambda_3-\mu_3)}{(\lambda_3-\lambda_2)\cdot(\lambda_3-\lambda_1)}}$:

$> s1 := 0.08$:

$> s2 := \sqrt{1 - s3^2 - s1^2}$:

$>$ *#Перевіряємо, що* $s1^2 + s2^2 + s3^2 = 1$

$> S := s1^2 + s2^2 + s3^2;$

$$S := 1.000000000 \tag{3.3}$$

$> P_4 := \begin{bmatrix} 0 \\ s1 \\ s2 \\ s3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & s1 & s2 & s3 \end{bmatrix}$:

$>$

$> S := evalf\left(Matrix\left(4, 4, P_{1,2} + P_{2,2} + P_{3,2}\right) + P_4\right)$:

$> U3, S3, V3 := svd(S)$:

$>$

$>$ *#Діагоналізуємо* P_1, P_2, P_3 і P_4, *за допомогою унітарного оператора U3*

$> P_{1,3} := Multiply\left(U3^*, Multiply\left(Matrix\left(4, 4, P_{1,2}\right), U3\right)\right)$:

$> P_{2,3} := Multiply\left(U3^*, Multiply\left(Matrix\left(4, 4, P_{2,2}\right), U3\right)\right)$:

$> P_{3,3} := Multiply\left(U3^*, Multiply\left(Matrix\left(4, 4, P_{3,2}\right), U3\right)\right)$:

$> P_{4,3} := Multiply\left(U3^*, Multiply\left(P_4, U3\right)\right)$:

$>$

$>$ *#Сума* $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$

$> evalf\left(P_{1,3} + P_{2,3} + P_{3,3} + P_{4,3}\right);$

$$\begin{bmatrix} 1.10000000000000008 & -1.36342326299999992\ 10^{-12} & -2.29077301199999992\ 10^{-11} & 2.32510677399999985\ 10^{-11} \\ -8.34439462000000016\ 10^{-12} & 1.10000000000000008 & -2.81231098399999996\ 10^{-11} & -3.17254556000000020\ 10^{-12} \\ -1.03068858900000003\ 10^{-11} & 2.08897489200000016\ 10^{-11} & 0.949999999999999954 & -1.15149234999999996\ 10^{-11} \\ -7.47957251699999950\ 10^{-12} & 5.41753447699999994\ 10^{-12} & -2.74657662400000006\ 10^{-11} & 0.849999999500000046 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$> Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{4,3}, Multiply\left(P_{1,3}, P_{4,3}\right)\right)\right)\right);$

$$0.001134909376 \tag{3.5}$$

$> Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{4,3}, Multiply\left(P_{2,3}, P_{4,3}\right)\right)\right)\right);$

$$0.009679508397 \tag{3.6}$$

$> Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{4,3}, Multiply\left(P_{3,3}, P_{4,3}\right)\right)\right)\right);$

$$0.004185582340 \tag{3.7}$$

$>$

Крок 4. Шукаємо матрицю P_5

$> \lambda_1 := \mu_2;$

$$\lambda_1 := 0.95 \tag{4.1}$$

$> \lambda_2 := \mu_3;$

$$\lambda_2 := 0.85 \tag{4.2}$$

$> \lambda_3 := 0$:

$> \mu_1 := 1.1$:

$> \mu_2 := 0.9$:

$> \mu_3 := 0.8$:

$> \; P_5 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s1 \\ s2 \\ s3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & s1 & s2 & s3 \end{bmatrix}:$

$>$

$> \; S := evalf\left(Matrix\left(5, 5, P_{1,3} + P_{2,3} + P_{3,3} + P_{4,3}\right) + P_5\right):$

$> \; U4, S4, V4 := svd(S):$

$>$

$>$ *#Діагоналізуємо* P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, *за допомогою унітарного оператора U4*

$> \; P_{1,4} := Multiply\left(U4^*, Multiply\left(Matrix\left(5, 5, P_{1,3}\right), U4\right)\right):$

$> \; P_{2,4} := Multiply\left(U4^*, Multiply\left(Matrix\left(5, 5, P_{2,3}\right), U4\right)\right):$

$> \; P_{3,4} := Multiply\left(U4^*, Multiply\left(Matrix\left(5, 5, P_{3,3}\right), U4\right)\right):$

$> \; P_{4,4} := Multiply\left(U4^*, Multiply\left(Matrix\left(5, 5, P_{4,3}\right), U4\right)\right):$

$> \; P_{5,4} := Multiply\left(U4^*, Multiply\left(P_5, U4\right)\right):$

$>$

$>$ *#Сума* $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$

$> \; evalf\left(P_{1,4} + P_{2,4} + P_{3,4} + P_{4,4} + P_{5,4}\right);$

$$[[1.10000000000000008, 1.36375077900000004\ 10^{-11}, 2.28552399199999992\ 10^{-10}, -6.00478000699999997\ 10^{-12}, -4.06665812099999974\ 10^{-11}], [-1.51373358300000013\ 10^{-11}, 1.10000000000000008, 3.10029779600000010\ 10^{-12}, -1.47719891899999994\ 10^{-11}, -1.53115298200000004\ 10^{-11}], [2.29395502600000012\ 10^{-10}, -1.67761360400000002\ 10^{-11}, 1.10000000000000008, -1.59000035399999990\ 10^{-11}, 2.99644753499999994\ 10^{-11}], [8.96613339100000012\ 10^{-12}, 5.28706522999999994\ 10^{-11}, 1.94613769500000008\ 10^{-12}, 0.899999999900000014, -1.68058622599999986\ 10^{-11}], [1.96671567899999988\ 10^{-11}, -5.25983145900000014\ 10^{-11}, 6.66361410499999992\ 10^{-12}, 2.91807966700000017\ 10^{-11}, 0.799999999800000026]] \quad (4.3)$$

A.2 Параметри для побудови проекторів

В результаті численних перевірок за допомогою комп'ютера, для побудови жорсткого фрейму з 22 векторів в $\mathbb{R}^{20}$, кути якого якомога більше віддалені від критичного значення 0.01, було обрано наступні параметри

$$
\begin{aligned}
x &= 0.0025,\\
y_1 &= 0.95,\\
y_2 &= 0.95,\\
y_3 &= 0.9,\\
y_4 &= 0.8,\\
y_5 &= 0.8,\\
y_6 &= 0.75,\\
y_7 &= 0.65,\\
y_8 &= 0.65,\\
y_9 &= 0.6,\\
y_{10} &= 0.5,\\
y_{11} &= 0.5,\\
y_{12} &= 0.45,\\
y_{13} &= 0.35,\\
y_{14} &= 0.35,\\
y_{15} &= 0.3,\\
y_{16} &= 0.2,\\
y_{17} &= 0.2,\\
y_{18} &= 0.15.
\end{aligned}
$$

Таким чином,

$$
\begin{aligned}
&P_1 + P_2 = diag(1.05; 0.95),\\
&P_1 + P_2 + P_3 = diag(1.1; 0.95; 0.95),\\
&P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = diag(1.1; 1.1; 0.95; 0.85),\\
&P_1 + P_2 + \cdots + P_5 = diag(1.1; 1.1; 1.1; 0.9; 0.8),\\
&P_1 + P_2 + \cdots + P_6 = diag(1.1; \cdots 1.1; 0.8; 0.8),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_1 + P_2 + \cdots + P_7 = diag(1.1; \cdots 1.1; 0.8; 0.7),\\
&P_1 + P_2 + \cdots + P_8 = diag(1.1; \cdots 1.1; 0.75; 0.65),\\
&P_1 + P_2 + \cdots + P_9 = diag(1.1; \cdots 1.1; 0.65; 0.65),\\
&P_1 + P_2 + \cdots + P_{10} = diag(1.1; \cdots 1.1; 0.65; 0.55),\\
&P_1 + P_2 + \cdots + P_{11} = diag(1.1; \cdots 1.1; 0.6; 0.5),\\
&P_1 + P_2 + \cdots + P_{12} = diag(1.1; \cdots 1.1; 0.5; 0.5),\\
&P_1 + P_2 + \cdots + P_{13} = diag(1.1; \cdots 1.1; 0.5; 0.4),\\
&P_1 + P_2 + \cdots + P_{14} = diag(1.1; \cdots 1.1; 0.45; 0.35),\\
&P_1 + P_2 + \cdots + P_{15} = diag(1.1; \cdots 1.1; 0.35; 0.35),\\
&P_1 + P_2 + \cdots + P_{16} = diag(1.1; \cdots 1.1; 0.35; 0.25),\\
&P_1 + P_2 + \cdots + P_{17} = diag(1.1; \cdots 1.1; 0.3; 0.2),\\
&P_1 + P_2 + \cdots + P_{18} = diag(1.1; \cdots 1.1; 0.2; 0.2),\\
&P_1 + P_2 + \cdots + P_{19} = diag(1.1; \cdots 1.1; 0.2; 0.1),\\
&P_1 + P_2 + \cdots + P_{20} = diag(1.1; \cdots 1.1; 0.15; 0.05),\\
&P_{21} + P_{22} = diag(0.95; 0.95).
\end{aligned}
$$

Додаток Б

Програмна реалізація підбору параметрів для побудови рівнокутних перших трьох проекторів

```
> τ := 1 :
> P[1] := Matrix([[τ, 0], [0, 0]]);
```

$$P_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

```
>
> eps := 0.001;
```

$$eps := 0.001 \qquad (2)$$

```
> while eps ≤ 0.1 do
  x := (eps)^2 :
  P[2] := Matrix([[x, sqrt(x - x^2)], [sqrt(x - x^2), 1 - x]]) :
  P12 := evalf(P[1] + P[2]) :
  U1, S1, V1 := svd(P12) :

  P[1, 1] := Multiply(U1^*, Multiply(P[1], U1)) :
  P[2, 1] := Multiply(U1^*, Multiply(P[2], U1)) :

  t1 := Trace(evalf(Multiply(P[1, 1], Multiply(P[2, 1], P[1, 1])))) :

  λ[1] := 1.0 + eps :
  λ[2] := 1.0 - eps :
  λ[3] := 0 :
  μ[1] := 1.1 :
  μ[2] := 1.0 - eps :
  μ[3] := 1.9 - (1.0 - eps) :
```

$$s1 := \sqrt{-\frac{(\lambda_1-\mu_1)\cdot(\lambda_1-\mu_2)\cdot(\lambda_1-\mu_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)\cdot(\lambda_1-\lambda_3)}} :$$

$$s2 := \sqrt{-\frac{(\lambda_2-\mu_1)\cdot(\lambda_2-\mu_2)\cdot(\lambda_2-\mu_3)}{(\lambda_2-\lambda_1)\cdot(\lambda_2-\lambda_3)}} :$$

$$s3 := \sqrt{-\frac{(\lambda_3-\mu_1)\cdot(\lambda_3-\mu_2)\cdot(\lambda_3-\mu_3)}{(\lambda_3-\lambda_2)\cdot(\lambda_3-\lambda_1)}} :$$

$$P_3 := \begin{bmatrix} s1 \\ s2 \\ s3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s1 & s2 & s3 \end{bmatrix} :$$

$S := evalf\left(Matrix\left(3, 3, P_{1,1} + P_{2,1}\right) + P_3\right) :$
$U2, S2, V2 := svd(S) :$
$P_{1,2} := Multiply\left(U2^*, Multiply\left(Matrix\left(3, 3, P_{1,1}\right), U2\right)\right) :$
$P_{2,2} := Multiply\left(U2^*, Multiply\left(Matrix\left(3, 3, P_{2,1}\right), U2\right)\right) :$
$P_{3,2} := Multiply\left(U2^*, Multiply\left(P_3, U2\right)\right) :$

$t2 := Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{1,2}, Multiply\left(P_{3,2}, P_{1,2}\right)\right)\right)\right) :$
$t3 := Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{2,2}, Multiply\left(P_{3,2}, P_{2,2}\right)\right)\right)\right) :$
print("eps:" , *eps*, "Tr(P1_P2_P1):", *t1*, "Tr(P1_P3_P1):", *t2*, "Tr(P2_P3_P2):", *t3*) :
eps := *eps* + 0.001;
end:

```
"eps:", 0.001, "Tr(P1_P2_P1):", 9.999999016 10^-7, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004950000002, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004950000003
"eps:", 0.002, "Tr(P1_P2_P1):", 0.000003999999662, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004900000000, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004900000000
"eps:", 0.003, "Tr(P1_P2_P1):", 0.000009000000014, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004849999998, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004849999998
"eps:", 0.004, "Tr(P1_P2_P1):", 0.00001599999926, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004799999996, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004799999995
"eps:", 0.005, "Tr(P1_P2_P1):", 0.00002499999996, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004750000001, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004750000002
"eps:", 0.006, "Tr(P1_P2_P1):", 0.00003599999962, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004700000001, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004700000000
"eps:", 0.007, "Tr(P1_P2_P1):", 0.00004900000042, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004650000002, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004650000002
"eps:", 0.008, "Tr(P1_P2_P1):", 0.00006399999994, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004599999994, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004599999993
"eps:", 0.009, "Tr(P1_P2_P1):", 0.00008099999935, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004550000004, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004550000004
"eps:", 0.010, "Tr(P1_P2_P1):", 0.00009999999994, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004500000004, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004500000004
"eps:", 0.011, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0001209999999, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004450000004, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004450000005
"eps:", 0.012, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0001440000004, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004399999994, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004399999995
"eps:", 0.013, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0001689999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004349999999, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004350000000
"eps:", 0.014, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0001960000008, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004299999998, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004299999998
"eps:", 0.015, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0002249999988, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004249999998, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004249999998
"eps:", 0.016, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0002559999925, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004200000001, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004200000002
"eps:", 0.017, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0002890000039, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004150000002, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004150000002
"eps:", 0.018, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0003239999947, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004100000006, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004100000006
"eps:", 0.019, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0003610000010, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004050000002, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004050000002
"eps:", 0.020, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0004000000027, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003999999994, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003999999995
"eps:", 0.021, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0004409999970, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003950000003, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003950000002
"eps:", 0.022, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0004840000051, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003899999998, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003899999998

"eps:", 0.023, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0005290000012, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003849999997, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003849999997
"eps:", 0.024, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0005760000005, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003799999997, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003799999997
"eps:", 0.025, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0006249999974, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003750000001, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003750000001
"eps:", 0.026, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0006759999951, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003699999997, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003699999998
"eps:", 0.027, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0007289999990, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003650000001, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003650000002
"eps:", 0.028, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0007839999988, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003600000007, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003600000007
"eps:", 0.029, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0008409999981, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003549999999, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003549999999
"eps:", 0.030, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0008999999946, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003500000002, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003500000002
"eps:", 0.031, "Tr(P1_P2_P1):", 0.0009610000002, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003449999999, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003450000000
"eps:", 0.032, "Tr(P1_P2_P1):", 0.001024000002, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003399999997, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003399999997
"eps:", 0.033, "Tr(P1_P2_P1):", 0.001089000005, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003350000003, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003350000004
"eps:", 0.034, "Tr(P1_P2_P1):", 0.001156000002, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003299999999, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003300000000
"eps:", 0.035, "Tr(P1_P2_P1):", 0.001224999995, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003250000002, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003250000003
"eps:", 0.036, "Tr(P1_P2_P1):", 0.001295999999, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003200000002, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003200000001
"eps:", 0.037, "Tr(P1_P2_P1):", 0.001368999995, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003149999997, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003149999997
"eps:", 0.038, "Tr(P1_P2_P1):", 0.001443999993, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003100000002, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003100000002
"eps:", 0.039, "Tr(P1_P2_P1):", 0.001521000000, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003049999999, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003050000000
"eps:", 0.040, "Tr(P1_P2_P1):", 0.001599999999, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003000000004, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003000000002
```

```
"eps:", 0.041, "Tr(P1_P2_P1):", 0.001681000001, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002950000003, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002950000003
"eps:", 0.042, "Tr(P1_P2_P1):", 0.001764000006, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002900000002, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002900000002
"eps:", 0.043, "Tr(P1_P2_P1):", 0.001848999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002849999997, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002849999997
"eps:", 0.044, "Tr(P1_P2_P1):", 0.001935999994, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002799999998, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002799999998
"eps:", 0.045, "Tr(P1_P2_P1):", 0.002025000004, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002749999995, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002749999996
"eps:", 0.046, "Tr(P1_P2_P1):", 0.002116000000, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002699999999, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002699999999
"eps:", 0.047, "Tr(P1_P2_P1):", 0.002208999992, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002650000000, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002649999998
"eps:", 0.048, "Tr(P1_P2_P1):", 0.002303999993, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002600000002, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002600000002
"eps:", 0.049, "Tr(P1_P2_P1):", 0.002401000007, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002550000000, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002550000000
"eps:", 0.050, "Tr(P1_P2_P1):", 0.002499999996, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002500000000, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002500000000
"eps:", 0.051, "Tr(P1_P2_P1):", 0.002600999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002449999997, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002449999997
"eps:", 0.052, "Tr(P1_P2_P1):", 0.002704000000, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002400000004, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002400000004
"eps:", 0.053, "Tr(P1_P2_P1):", 0.002809000001, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002349999996, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002349999997
"eps:", 0.054, "Tr(P1_P2_P1):", 0.002916000008, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002299999995, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002299999995
"eps:", 0.055, "Tr(P1_P2_P1):", 0.003025000005, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002250000001, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002250000001
"eps:", 0.056, "Tr(P1_P2_P1):", 0.003135999996, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002200000000, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002199999999
"eps:", 0.057, "Tr(P1_P2_P1):", 0.003249000000, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002149999999, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002149999999
"eps:", 0.058, "Tr(P1_P2_P1):", 0.003363999995, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002099999998, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002099999998
"eps:", 0.059, "Tr(P1_P2_P1):", 0.003480999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002049999998, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002049999997
"eps:", 0.060, "Tr(P1_P2_P1):", 0.003600000004, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002000000000, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002000000000
"eps:", 0.061, "Tr(P1_P2_P1):", 0.003721000009, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001949999998, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001949999998
"eps:", 0.062, "Tr(P1_P2_P1):", 0.003843999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001900000002, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001900000001
"eps:", 0.063, "Tr(P1_P2_P1):", 0.003968999999, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001850000001, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001850000001
"eps:", 0.064, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004096000008, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001799999998, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001799999998
"eps:", 0.065, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004224999999, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001749999998, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001749999998
"eps:", 0.066, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004356000000, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001699999999, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001699999999
"eps:", 0.067, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004489000004, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001649999996, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001649999997
"eps:", 0.068, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004624000001, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001599999999, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001599999999
"eps:", 0.069, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001550000000, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001550000000
"eps:", 0.070, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004900000000, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001499999995, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001499999996
"eps:", 0.071, "Tr(P1_P2_P1):", 0.005041000002, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001450000002, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001450000002
"eps:", 0.072, "Tr(P1_P2_P1):", 0.005183999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001399999997, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001399999997
"eps:", 0.073, "Tr(P1_P2_P1):", 0.005328999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001350000005, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001350000005
"eps:", 0.074, "Tr(P1_P2_P1):", 0.005476000002, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001300000004, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001300000004
"eps:", 0.075, "Tr(P1_P2_P1):", 0.005624999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001250000000, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001249999999
"eps:", 0.076, "Tr(P1_P2_P1):", 0.005775999996, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001200000001, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001200000001
"eps:", 0.077, "Tr(P1_P2_P1):", 0.005929000007, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001149999997, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001149999997
```

```
"eps:", 0.078, "Tr(P1_P2_P1):", 0.006084000000, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001099999998, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001099999998
"eps:", 0.079, "Tr(P1_P2_P1):", 0.006240999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001050000003, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001050000003
"eps:", 0.080, "Tr(P1_P2_P1):", 0.006400000004, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001000000001, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001000000001
"eps:", 0.081, "Tr(P1_P2_P1):", 0.006560999996, "Tr(P1_P3_P1):", 0.0009500000017, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0009500000019
"eps:", 0.082, "Tr(P1_P2_P1):", 0.006724000007, "Tr(P1_P3_P1):", 0.0008999999962, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0008999999962
"eps:", 0.083, "Tr(P1_P2_P1):", 0.006889000000, "Tr(P1_P3_P1):", 0.0008499999973, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0008499999974
"eps:", 0.084, "Tr(P1_P2_P1):", 0.007056000002, "Tr(P1_P3_P1):", 0.0008000000007, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0008000000006
"eps:", 0.085, "Tr(P1_P2_P1):", 0.007225000000, "Tr(P1_P3_P1):", 0.0007499999995, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0007499999995
"eps:", 0.086, "Tr(P1_P2_P1):", 0.007395999996, "Tr(P1_P3_P1):", 0.0006999999970, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0006999999970
"eps:", 0.087, "Tr(P1_P2_P1):", 0.007568999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.0006499999973, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0006499999972
"eps:", 0.088, "Tr(P1_P2_P1):", 0.007743999994, "Tr(P1_P3_P1):", 0.0005999999946, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0005999999946
"eps:", 0.089, "Tr(P1_P2_P1):", 0.007920999996, "Tr(P1_P3_P1):", 0.0005500000012, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0005500000012
"eps:", 0.090, "Tr(P1_P2_P1):", 0.008099999999, "Tr(P1_P3_P1):", 0.0004999999997, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0004999999998
"eps:", 0.091, "Tr(P1_P2_P1):", 0.008281000002, "Tr(P1_P3_P1):", 0.0004500000004, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0004500000004
"eps:", 0.092, "Tr(P1_P2_P1):", 0.008464000002, "Tr(P1_P3_P1):", 0.0004000000002, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0004000000002
"eps:", 0.093, "Tr(P1_P2_P1):", 0.008649000000, "Tr(P1_P3_P1):", 0.0003499999996, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0003499999997
"eps:", 0.094, "Tr(P1_P2_P1):", 0.008836000005, "Tr(P1_P3_P1):", 0.0003000000008, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0003000000007
"eps:", 0.095, "Tr(P1_P2_P1):", 0.009024999990, "Tr(P1_P3_P1):", 0.0002499999997, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0002499999997
```

"eps:", 0.096, "Tr(P1_P2_P1):", 0.009216000006, "Tr(P1_P3_P1):", 0.0001999999998, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0001999999998
"eps:", 0.097, "Tr(P1_P2_P1):", 0.009409000002, "Tr(P1_P3_P1):", 0.0001500000001, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0001500000001
"eps:", 0.098, "Tr(P1_P2_P1):", 0.009604000002, "Tr(P1_P3_P1):", 0.00009999999974, "Tr(P2_P3_P2):", 0.00009999999974
"eps:", 0.099, "Tr(P1_P2_P1):", 0.009801000002, "Tr(P1_P3_P1):", 0.00004999999993, "Tr(P2_P3_P2):", 0.00004999999993
"eps:", 0.100, "Tr(P1_P2_P1):", 0.009999999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0., "Tr(P2_P3_P2):", 0. **(3)**

Додаток В

Програмна реалізація пошуку четвертого проектора такого, що утворював би рівні кути з першими трьома проекторами

> restart;
> with(LinearAlgebra) :
> with(MTM) :
> interface(display_zero_complex_part = false) :
> #Будуємо матриці P_1 і P_2
> $\varepsilon := 0.05$:
> $\tau := 1$:
> $P_1 := \begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$$P_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

> $x := \varepsilon^2$;

$$x := 0.0025 \tag{2}$$

> $P_2 := \begin{bmatrix} x & \mathrm{sqrt}(x - x^2) \\ \mathrm{sqrt}(x - x^2) & 1 - x \end{bmatrix}$;

$$P_2 := \begin{bmatrix} 0.0025 & 0.04993746089 \\ 0.04993746089 & 0.9975 \end{bmatrix} \tag{3}$$

> $P12 := evalf(P_1 + P_2)$:
> $U1, S1, V1 := svd(P12)$:
> $evalf(Multiply(U1^*, Multiply(P12, U1)))$:
> $P_{1,1} := Multiply(U1^*, Multiply(P_1, U1))$:
> $P_{2,1} := Multiply(U1^*, Multiply(P_2, U1))$:
> $evalf(P_{1,1} + P_{2,1})$;

$$\begin{bmatrix} 1.05000000000000004 & 2.65512611899999996\ 10^{-11} \\ -2.06223371699999986\ 10^{-11} & 0.949999999999999954 \end{bmatrix} \tag{4}$$

> #Будуємо матрицю P_3
> $\lambda_1 := 1.05$:
$\lambda_2 := 0.95$:
$\lambda_3 := 0$:
$\mu_1 := 1.1$:
$\mu_2 := 0.95$:

$\mu_3 := 0.95$:

> $s1 := \sqrt{-\dfrac{(\lambda_1 - \mu_1)\cdot(\lambda_1 - \mu_2)\cdot(\lambda_1 - \mu_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)\cdot(\lambda_1 - \lambda_3)}}$:

$s2 := \sqrt{-\dfrac{(\lambda_2 - \mu_1)\cdot(\lambda_2 - \mu_2)\cdot(\lambda_2 - \mu_3)}{(\lambda_2 - \lambda_1)\cdot(\lambda_2 - \lambda_3)}}$:

$s3 := \sqrt{-\dfrac{(\lambda_3 - \mu_1)\cdot(\lambda_3 - \mu_2)\cdot(\lambda_3 - \mu_3)}{(\lambda_3 - \lambda_2)\cdot(\lambda_3 - \lambda_1)}}$:

$> P_3 := \begin{bmatrix} s1 \\ s2 \\ s3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s1 & s2 & s3 \end{bmatrix}:$

$> S := evalf\left(Matrix\left(3, 3, P_{1,1} + P_{2,1}\right) + P_3\right):$
$U2, S2, V2 := svd(S):$

$> P_{1,2} := Multiply\left(U2^*, Multiply\left(Matrix\left(3, 3, P_{1,1}\right), U2\right)\right):$
$P_{2,2} := Multiply\left(U2^*, Multiply\left(Matrix\left(3, 3, P_{2,1}\right), U2\right)\right):$
$P_{3,2} := Multiply\left(U2^*, Multiply\left(P_3, U2\right)\right):$

$> evalf\left(P_{1,2} + P_{2,2} + P_{3,2}\right);$

$$\begin{bmatrix} 1.10000000000000008 & 9.00418628500000010\ 10^{-11} & 2.40826334599999988\ 10^{-11} \\ 1.18190901500000002\ 10^{-10} & 0.949999999999999954 & -1.15643415000000006\ 10^{-11} \\ -1.66830316900000000\ 10^{-11} & 1.20156367499999992\ 10^{-11} & 0.949999999999999954 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$>$

$> Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{1,2}, Multiply\left(P_{2,2}, P_{1,2}\right)\right)\right)\right);$
$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{2,2}, Multiply\left(P_{3,2}, P_{2,2}\right)\right)\right)\right);$
$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{1,2}, Multiply\left(P_{3,2}, P_{1,2}\right)\right)\right)\right);$

$$0.002499999996$$
$$0.002500000000$$
$$0.002500000000 \quad (6)$$

$>$ #Шукаємо матрицю P_4

$> \lambda_1 := \mu_2;$

$$\lambda_1 := 0.95 \quad (7)$$

$> \lambda_2 := \mu_3;$

$$\lambda_2 := 0.95 \quad (8)$$

$> \lambda_3 := 0;$

$$\lambda_3 := 0 \quad (9)$$

$> \mu_1 := 1.1;$

$$\mu_1 := 1.1 \quad (10)$$

$> \mu_2 := 0.95;$

$$\mu_2 := 0.95 \quad (11)$$

$> \mu_3 := 0.85;$

$$\mu_3 := 0.85 \quad (12)$$

$> s3 := \sqrt{-\dfrac{\left(\lambda_3 - \mu_1\right)\cdot\left(\lambda_3 - \mu_2\right)\cdot\left(\lambda_3 - \mu_3\right)}{\left(\lambda_3 - \lambda_2\right)\cdot\left(\lambda_3 - \lambda_1\right)}}:$

$> j := 0:$

$>$ **while** $j \le \sqrt{1 - s3^2}$ **do**
$s1 := j:$
$s2 := \sqrt{1 - s3^2 - s1^2}:$

$P_4 := \begin{bmatrix} 0 \\ s1 \\ s2 \\ s3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & s1 & s2 & s3 \end{bmatrix}:$

$P1234 := evalf\left(Matrix\left(4, 4, P_{1,2} + P_{2,2} + P_{3,2}\right) + P_4\right):$
$U3, S3, V3 := svd(P1234):$
$P_{1,3} := Multiply\left(U3^*, Multiply\left(Matrix\left(4, 4, P_{1,2}\right), U3\right)\right):$
$P_{2,3} := Multiply\left(U3^*, Multiply\left(Matrix\left(4, 4, P_{2,2}\right), U3\right)\right):$

$P_{3,3} := Multiply\left(U3^*, Multiply\left(Matrix\left(4, 4, P_{3,2}\right), U3\right)\right):$
$P_{4,3} := Multiply\left(U3^*, Multiply\left(P_4, U3\right)\right):$
$t1 := Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{4,3}, Multiply\left(P_{1,3}, P_{4,3}\right)\right)\right)\right):$
$t2 := Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{4,3}, Multiply\left(P_{2,3}, P_{4,3}\right)\right)\right)\right):$
$t3 := Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{4,3}, Multiply\left(P_{3,3}, P_{4,3}\right)\right)\right)\right):$
print("s_1:", *s1*, "P4_P1:", *t1*, "P4_P2:", *t2*, "P4_P3:", *t3*);

$j := j + 0.01:$
end:

"s_1:", 0, "P4_P1:", 0.007382758289, "P4_P2:", 0.007615436855, "P4_P3:", 0.000001804969611
"s_1:", 0.01, "P4_P1:", 0.006655151263, "P4_P2:", 0.008258419548, "P4_P3:", 0.00008642930844
"s_1:", 0.02, "P4_P1:", 0.005880580921, "P4_P2:", 0.008822154096, "P4_P3:", 0.0002972650762
"s_1:", 0.03, "P4_P1:", 0.005072887626, "P4_P2:", 0.009293223184, "P4_P3:", 0.0006338893025
"s_1:", 0.04, "P4_P1:", 0.004246855839, "P4_P2:", 0.009657294107, "P4_P3:", 0.001095850161
"s_1:", 0.05, "P4_P1:", 0.003418865214, "P4_P2:", 0.009898487808, "P4_P3:", 0.001682647077
"s_1:", 0.06, "P4_P1:", 0.002607826456, "P4_P2:", 0.009998471523, "P4_P3:", 0.002393702123
"s_1:", 0.07, "P4_P1:", 0.001836663945, "P4_P2:", 0.009935021454, "P4_P3:", 0.003228314715
"s_1:", 0.08, "P4_P1:", 0.001134909376, "P4_P2:", 0.009679508397, "P4_P3:", 0.004185582340
"s_1:", 0.09, "P4_P1:", 0.0005438019322, "P4_P2:", 0.009191953487, "P4_P3:", 0.005264244698
"s_1:", 0.10, "P4_P1:", 0.0001280400898, "P4_P2:", 0.008409635479, "P4_P3:", 0.006462324543
"s_1:", 0.11, "P4_P1:", 0.00001056533662, "P4_P2:", 0.007213370077, "P4_P3:", 0.007776064693
"s_1:", 0.12, "P4_P1:", 0.0005460300359, "P4_P2:", 0.005259343364, "P4_P3:", 0.009194626715 **(13)**

Додаток Г

Програмна реалізація пошуку третього проектора при $tr(P_1 P_2 P_1) = 0.004761$

$> \varepsilon := 0.069 :$

$> \tau := 1 :$

$$> P_1 := \begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} :$$

$> x := \varepsilon^2;$

$$x := 0.004761 \qquad (1)$$

$$> P_2 := \begin{bmatrix} x & \mathrm{sqrt}(x - x^2) \\ \mathrm{sqrt}(x - x^2) & 1 - x \end{bmatrix} :$$

$> P12 := evalf(P_1 + P_2) :$

$> U1, S1, V1 := svd(P12) :$

$> evalf(Multiply(U1^*, Multiply(P12, U1))) :$

$> P_{1,1} := Multiply(U1^*, Multiply(P_1, U1)) :$

$> P_{2,1} := Multiply(U1^*, Multiply(P_2, U1)) :$

$>$

$> eps := 0.001 :$

$>$ **for** i **from** 0 **to** 100 **do**

$\lambda_1 := 1.069 :$

$\lambda_2 := 0.931 :$

$\lambda_3 := 0 :$

$\mu_1 := 1.1 :$

$\mu_2 := 0.969 + i \cdot eps :$

$\mu_3 := 1.9 - \mu_2 :$

$$s1 := \sqrt{-\frac{(\lambda_1 - \mu_1)\cdot(\lambda_1 - \mu_2)\cdot(\lambda_1 - \mu_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)\cdot(\lambda_1 - \lambda_3)}} :$$

$$s2 := \sqrt{-\frac{(\lambda_2 - \mu_1)\cdot(\lambda_2 - \mu_2)\cdot(\lambda_2 - \mu_3)}{(\lambda_2 - \lambda_1)\cdot(\lambda_2 - \lambda_3)}} :$$

$$s3 := \sqrt{-\frac{(\lambda_3 - \mu_1)\cdot(\lambda_3 - \mu_2)\cdot(\lambda_3 - \mu_3)}{(\lambda_3 - \lambda_2)\cdot(\lambda_3 - \lambda_1)}} :$$

$$P_3 := \begin{bmatrix} s1 \\ s2 \\ s3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s1 & s2 & s3 \end{bmatrix} :$$

$S := evalf(Matrix(3, 3, P_{1,1} + P_{2,1}) + P_3) :$

$U2, S2, V2 := svd(S) :$

$P_{1,2} := Multiply(U2^*, Multiply(Matrix(3, 3, P_{1,1}), U2)) :$

$P_{2,2} := Multiply(U2^*, Multiply(Matrix(3, 3, P_{2,1}), U2)) :$

$P_{3,2} := Multiply(U2^*, Multiply(P_3, U2)) :$

$t1 := Trace(evalf(Multiply(P_{1,2}, Multiply(P_{2,2}, P_{1,2})))) :$

$t2 := Trace(evalf(Multiply(P_{1,2}, Multiply(P_{3,2}, P_{1,2})))) :$

$t3 := Trace(evalf(Multiply(P_{2,2}, Multiply(P_{3,2}, P_{2,2})))) :$

```
print( μ_2, "i:" , i, "Tr(P1_P2_P1):", t1, "Tr(P1_P3_P1):", t2, "Tr(P2_P3_P2):", t3) :
end:
0.969, "i:", 0, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001550000000, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001550000000
0.970, "i:", 1, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.001953739860, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001185260142
0.971, "i:", 2, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002139499316, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001040500676
0.972, "i:", 3, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002291788440, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0009312115574
0.973, "i:", 4, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002427742331, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0008402576695
0.974, "i:", 5, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002553884144, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0007611158558
0.975, "i:", 6, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002673498927, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0006905010712
0.976, "i:", 7, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002788500431, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0006264995719
0.977, "i:", 8, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.002900109580, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0005678904208
0.978, "i:", 9, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003009155424, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0005138445720
0.979, "i:", 10, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003116226928, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0004637730697
0.980, "i:", 11, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003221757054, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0004172429473
0.981, "i:", 12, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003326072551, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0003739274554
0.982, "i:", 13, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003429425223, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0003335747754
0.983, "i:", 14, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003532012308, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0002959876923
0.984, "i:", 15, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003633990328, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0002610096645
0.985, "i:", 16, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003735484729, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0002285152724
0.986, "i:", 17, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003836596819, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0001984031903
0.987, "i:", 18, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.003937408837, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0001705911610
0.988, "i:", 19, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004037987763, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0001450122401
0.989, "i:", 20, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004138388127, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0001216118699
0.990, "i:", 21, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004238654282, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0001003457222
0.991, "i:", 22, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004338822108, "Tr(P2_P3_P2):", 0.00008117789272
0.992, "i:", 23, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004438920351, "Tr(P2_P3_P2):", 0.00006407964823
0.993, "i:", 24, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004538971769, "Tr(P2_P3_P2):", 0.00004902823834
0.994, "i:", 25, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004638993881, "Tr(P2_P3_P2):", 0.00003600611258
0.995, "i:", 26, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004738999865, "Tr(P2_P3_P2):", 0.00002500013648
0.996, "i:", 27, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004838998936, "Tr(P2_P3_P2):", 0.00001600105840
0.997, "i:", 28, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.004938996957, "Tr(P2_P3_P2):", 0.000009003041026
0.998, "i:", 29, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.005038996780, "Tr(P2_P3_P2):", 0.000004003217414
0.999, "i:", 30, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.005138998541, "Tr(P2_P3_P2):", 0.000001001460208
1.000, "i:", 31, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.005239000000, "Tr(P2_P3_P2):", 1.474034577 10^(-12)
1.001, "i:", 32, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.005338996713, "Tr(P2_P3_P2):", 0.000001003289422
1.002, "i:", 33, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.005438982247, "Tr(P2_P3_P2):", 0.000004017763500
```

```
1.003, "i:", 34, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.005538948275, "Tr(P2_P3_P2):", 0.000009051729439
1.004, "i:", 35, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.005638884816, "Tr(P2_P3_P2):", 0.00001611517724
1.005, "i:", 36, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.005738780249, "Tr(P2_P3_P2):", 0.00002521975377
1.006, "i:", 37, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.005838621427, "Tr(P2_P3_P2):", 0.00003637858015
1.007, "i:", 38, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.005938393743, "Tr(P2_P3_P2):", 0.00004960625844
1.008, "i:", 39, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.006038081225, "Tr(P2_P3_P2):", 0.00006491878148
1.009, "i:", 40, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.006137666500, "Tr(P2_P3_P2):", 0.00008233348849
1.010, "i:", 41, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999996, "Tr(P1_P3_P1):", 0.006237130931, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0001018690731
1.011, "i:", 42, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999996, "Tr(P1_P3_P1):", 0.006336454532, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0001235454693
1.012, "i:", 43, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.006435616039, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0001473839724
1.013, "i:", 44, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.006534592906, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0001734071011
1.014, "i:", 45, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.006633361277, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0002016387316
1.015, "i:", 46, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.006731896003, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0002321040042
1.016, "i:", 47, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.006830170589, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0002648294182
1.017, "i:", 48, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.006928157183, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0002998428279
1.018, "i:", 49, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.007025826500, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0003371735044
1.019, "i:", 50, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999996, "Tr(P1_P3_P1):", 0.007123147856, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0003768521465
1.020, "i:", 51, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.007220089007, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0004189109961
1.021, "i:", 52, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.007316616165, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0004633838454
1.022, "i:", 53, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999996, "Tr(P1_P3_P1):", 0.007412693877, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0005103061321
```

1.024, "i:", 55, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.007603350430, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0006116495761
1.025, "i:", 56, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.007697849343, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0006661506619
1.026, "i:", 57, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.007791738682, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0007232613106
1.027, "i:", 58, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.007884973298, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0007830266949
1.028, "i:", 59, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.007977505656, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0008454943444
1.029, "i:", 60, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.008069285708, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0009107142903
1.030, "i:", 61, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.008160260743, "Tr(P2_P3_P2):", 0.0009787392473
1.031, "i:", 62, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.008250375142, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001049624861
1.032, "i:", 63, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.008339570089, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001123429919
1.033, "i:", 64, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.008427783419, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001200216579
1.034, "i:", 65, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.008514949232, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001280050770
1.035, "i:", 66, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.008600997573, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001363002422
1.036, "i:", 67, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.008685854085, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001449145913
1.037, "i:", 68, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.008769439516, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001538560473
1.038, "i:", 69, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.008851669278, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001631330714
1.039, "i:", 70, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.008932452854, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001727547153
1.040, "i:", 71, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009011693123, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001827306861
1.041, "i:", 72, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009089285701, "Tr(P2_P3_P2):", 0.001930714283
1.042, "i:", 73, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009165118000, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002037882020
1.043, "i:", 74, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009239068137, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002148931848
1.044, "i:", 75, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009311004030, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002263995980
1.045, "i:", 76, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009380781670, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002383218328
1.046, "i:", 77, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009448243705, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002506756305
1.047, "i:", 78, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009513217370, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002634782642
1.048, "i:", 79, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009575512170, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002767487834
1.049, "i:", 80, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009634916989, "Tr(P2_P3_P2):", 0.002905083017
1.050, "i:", 81, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009691196594, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003047803408
1.051, "i:", 82, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999996, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009744087299, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003195912707
1.052, "i:", 83, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009793291577, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003349708423
1.053, "i:", 84, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009838471222, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003509528788
1.054, "i:", 85, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999996, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009879238590, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003675761421
1.055, "i:", 86, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009915145259, "Tr(P2_P3_P2):", 0.003848854758
1.056, "i:", 87, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009945666963, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004029333046
1.057, "i:", 88, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009970183331, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004217816680
1.058, "i:", 89, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009987949959, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004415050043
1.059, "i:", 90, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009998058879, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004621941132

1.060, "i:", 91, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009999380918, "Tr(P2_P3_P2):", 0.004839619088
1.061, "i:", 92, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009990478733, "Tr(P2_P3_P2):", 0.005069521273
1.062, "i:", 93, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999998, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009969469276, "Tr(P2_P3_P2):", 0.005313530720
1.063, "i:", 94, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009933794856, "Tr(P2_P3_P2):", 0.005574205143
1.064, "i:", 95, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009879813779, "Tr(P2_P3_P2):", 0.005855186232
1.065, "i:", 96, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009801998615, "Tr(P2_P3_P2):", 0.006162001414
1.066, "i:", 97, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009691148067, "Tr(P2_P3_P2):", 0.006503851921
1.067, "i:", 98, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009529523485, "Tr(P2_P3_P2):", 0.006898476521
1.068, "i:", 99, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.009271866528, "Tr(P2_P3_P2):", 0.007391133463
1.069, "i:", 100, "Tr(P1_P2_P1):", 0.004760999997, "Tr(P1_P3_P1):", 0.008449999998, "Tr(P2_P3_P2):", 0.008449999999 **(2)**

Додаток Д

Результат побудови, кути між векторами

#Знаходимо кути між P_1 і P_2, P_2 і P_3, P_1 і P_3

$Trace(evalf(Multiply(P_{1,2}, Multiply(P_{2,2}, P_{1,2}))));$

$Trace(evalf(Multiply(P_{2,2}, Multiply(P_{3,2}, P_{2,2}))));$

$Trace(evalf(Multiply(P_{1,2}, Multiply(P_{3,2}, P_{1,2}))));$

0.002499999996

0.002500000000

0.002500000000 **(2.2)**

#Знаходимо кути між кожною парою проекторів

$Trace(evalf(Multiply(P_{4,4}, Multiply(P_{1,4}, P_{4,4}))));$

0.001134909376 **(5.6)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{4,4}, Multiply(P_{2,4}, P_{4,4}))));$

0.009679508396 **(5.7)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{4,4}, Multiply(P_{3,4}, P_{4,4}))));$

0.004185582340 **(5.8)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{5,4}, Multiply(P_{1,4}, P_{5,4}))));$

0.009679508327 **(5.9)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{5,4}, Multiply(P_{2,4}, P_{5,4}))));$

0.004185582294 **(5.10)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{5,4}, Multiply(P_{3,4}, P_{5,4}))));$

0.001134909363 **(5.11)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{5,4}, Multiply(P_{4,4}, P_{5,4}))));$

0.002499999999 **(5.12)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{6,5}, Multiply(P_{1,5}, P_{6,5}))));$

0.004185582367 **(5.13)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{6,5}, Multiply(P_{2,5}, P_{6,5}))));$

0.001134909357 **(5.14)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{6,5}, Multiply(P_{3,5}, P_{6,5}))));$

0.009679508302 **(5.15)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{6,5}, Multiply(P_{4,5}, P_{6,5}))));$

0.002499999985 **(5.16)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{6,5}, Multiply(P_{5,5}, P_{6,5}))));$

0.002500000021 **(5.17)**

На зображені наведеному вище можна помітити цікаву закономірність, значення кутів між проекторами P_4, P_5, P_6 та іншими проекторами повторюються. Надалі дана закономірність буде повторюватись для кожних трьох послідовних проекторів.

$Trace(evalf(Multiply(P_{7,6}, Multiply(P_{1,6}, P_{7,6}))));$
0.008716515507 (1)
$Trace(evalf(Multiply(P_{7,6}, Multiply(P_{2,6}, P_{7,6}))));$
0.006038401419 (2)
$Trace(evalf(Multiply(P_{7,6}, Multiply(P_{3,6}, P_{7,6}))));$
0.0002450830758 (3)
$Trace(evalf(Multiply(P_{7,6}, Multiply(P_{4,6}, P_{7,6}))));$
0.004248936992 (4)
$Trace(evalf(Multiply(P_{7,6}, Multiply(P_{5,6}, P_{7,6}))));$
0.009656527654 (5)
$Trace(evalf(Multiply(P_{7,6}, Multiply(P_{6,6}, P_{7,6}))));$
0.001094535348 (6)

$Trace(evalf(Multiply(P_{8,7}, Multiply(P_{1,7}, P_{8,7}))));$
0.006038401424 (7)
$Trace(evalf(Multiply(P_{8,7}, Multiply(P_{2,7}, P_{8,7}))));$
0.0002450830738 (8)
$Trace(evalf(Multiply(P_{8,7}, Multiply(P_{3,7}, P_{8,7}))));$
0.008716515489 (9)
$Trace(evalf(Multiply(P_{8,7}, Multiply(P_{4,7}, P_{8,7}))));$
0.001094535387 (10)
$Trace(evalf(Multiply(P_{8,7}, Multiply(P_{5,7}, P_{8,7}))));$
0.004248937024 (11)
$Trace(evalf(Multiply(P_{8,7}, Multiply(P_{6,7}, P_{8,7}))));$
0.009656527690 (12)
$Trace(evalf(Multiply(P_{8,7}, Multiply(P_{7,7}, P_{8,7}))));$
0.002500000016 (13)

$Trace(evalf(Multiply(P_{9,8}, Multiply(P_{1,8}, P_{9,8}))));$
0.0002450830613 (14)
$Trace(evalf(Multiply(P_{9,8}, Multiply(P_{2,8}, P_{9,8}))));$
0.008716515515 (15)
$Trace(evalf(Multiply(P_{9,8}, Multiply(P_{3,8}, P_{9,8}))));$
0.006038401487 (16)

$Trace(evalf(Multiply(P_{9,8}, Multiply(P_{4,8}, P_{9,8}))));$
0.009656527708 (17)
$Trace(evalf(Multiply(P_{9,8}, Multiply(P_{5,8}, P_{9,8}))));$
0.001094535311 (18)
$Trace(evalf(Multiply(P_{9,8}, Multiply(P_{6,8}, P_{9,8}))));$
0.004248936981 (19)
$Trace(evalf(Multiply(P_{9,8}, Multiply(P_{7,8}, P_{9,8}))));$
0.002500000025 (20)
$Trace(evalf(Multiply(P_{9,8}, Multiply(P_{8,8}, P_{9,8}))));$
0.002499999967 (21)

$Trace(evalf(Multiply(P_{10,9}, Multiply(P_{1,9}, P_{10,9}))));$
0.006483252659 (22)
$Trace(evalf(Multiply(P_{10,9}, Multiply(P_{2,9}, P_{10,9}))));$
0.008393584802 (23)

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{10,\,9}, Multiply\left(P_{3,\,9}, P_{10,\,9}\right)\right)\right)\right);$

$$0.0001231625293 \tag{24}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{10,\,9}, Multiply\left(P_{4,\,9}, P_{10,\,9}\right)\right)\right)\right);$

$$0.006882558012 \tag{25}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{10,\,9}, Multiply\left(P_{5,\,9}, P_{10,\,9}\right)\right)\right)\right);$

$$0.008070202158 \tag{26}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{10,\,9}, Multiply\left(P_{6,\,9}, P_{10,\,9}\right)\right)\right)\right);$

$$0.00004723976842 \tag{27}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{10,\,9}, Multiply\left(P_{7,\,9}, P_{10,\,9}\right)\right)\right)\right);$

$$0.009296718930 \tag{28}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{10,\,9}, Multiply\left(P_{8,\,9}, P_{10,\,9}\right)\right)\right)\right);$

$$0.0006372207788 \tag{29}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{10,\,9}, Multiply\left(P_{9,\,9}, P_{10,\,9}\right)\right)\right)\right);$

$$0.005066060294 \tag{30}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{11,\,10}, Multiply\left(P_{1,\,10}, P_{11,\,10}\right)\right)\right)\right);$

$$0.008393584808 \tag{31}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{11,\,10}, Multiply\left(P_{2,\,10}, P_{11,\,10}\right)\right)\right)\right);$

$$0.0001231625310 \tag{32}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{11,\,10}, Multiply\left(P_{3,\,10}, P_{11,\,10}\right)\right)\right)\right);$

$$0.006483252644 \tag{33}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{11,\,10}, Multiply\left(P_{4,\,10}, P_{11,\,10}\right)\right)\right)\right);$

$$0.00004723978582 \tag{34}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{11,\,10}, Multiply\left(P_{5,\,10}, P_{11,\,10}\right)\right)\right)\right);$

$$0.006882558018 \tag{35}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{11,\,10}, Multiply\left(P_{6,\,10}, P_{11,\,10}\right)\right)\right)\right);$

$$0.008070202269 \tag{36}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{11,\,10}, Multiply\left(P_{7,\,10}, P_{11,\,10}\right)\right)\right)\right);$

$$0.005066060297 \tag{37}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{11,\,10}, Multiply\left(P_{8,\,10}, P_{11,\,10}\right)\right)\right)\right);$

$$0.009296718903 \tag{38}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{11,\,10}, Multiply\left(P_{9,\,10}, P_{11,\,10}\right)\right)\right)\right);$

$$0.0006372207852 \tag{39}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{11,\,10}, Multiply\left(P_{10,\,10}, P_{11,\,10}\right)\right)\right)\right);$

$$0.002499999986 \tag{40}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{12,\,11}, Multiply\left(P_{1,\,11}, P_{12,\,11}\right)\right)\right)\right);$

$$0.0001231625289 \tag{41}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{12,\,11}, Multiply\left(P_{2,\,11}, P_{12,\,11}\right)\right)\right)\right);$

$$0.006483252691 \tag{42}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{12,\,11}, Multiply\left(P_{3,\,11}, P_{12,\,11}\right)\right)\right)\right);$

$$0.008393584793 \tag{43}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{12,\,11}, Multiply\left(P_{4,\,11}, P_{12,\,11}\right)\right)\right)\right);$

$$0.008070202213 \tag{44}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{12,\,11}, Multiply\left(P_{5,\,11}, P_{12,\,11}\right)\right)\right)\right);$

$$0.00004723978027 \tag{45}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{12,\,11}, Multiply\left(P_{6,\,11}, P_{12,\,11}\right)\right)\right)\right);$

$$0.006882557984 \tag{46}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{12,\,11}, Multiply\left(P_{7,\,11}, P_{12,\,11}\right)\right)\right)\right);$

$$0.0006372207791 \tag{47}$$

$Trace\left(evalf\left(Multiply\left(P_{12,\,11}, Multiply\left(P_{8,\,11}, P_{12,\,11}\right)\right)\right)\right);$

$$0.005066060289 \tag{48}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{12,11}, Multiply(P_{9,11}, P_{12,11}))));$
$$0.009296718963 \tag{49}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{12,11}, Multiply(P_{10,11}, P_{12,11}))));$
$$0.002499999999 \tag{50}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{12,11}, Multiply(P_{11,11}, P_{12,11}))));$
$$0.002499999986 \tag{51}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{13,12}, Multiply(P_{1,12}, P_{13,12}))));$
$$0.009554249630 \tag{52}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{13,12}, Multiply(P_{2,12}, P_{13,12}))));$
$$0.0009356684981 \tag{53}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{13,12}, Multiply(P_{3,12}, P_{13,12}))));$
$$0.004510081868 \tag{54}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{13,12}, Multiply(P_{4,12}, P_{13,12}))));$
$$0.0001703116403 \tag{55}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{13,12}, Multiply(P_{5,12}, P_{13,12}))));$
$$0.008535372072 \tag{56}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{13,12}, Multiply(P_{6,12}, P_{13,12}))));$
$$0.006294316331 \tag{57}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{13,12}, Multiply(P_{7,12}, P_{13,12}))));$
$$0.007004673543 \tag{58}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{13,12}, Multiply(P_{8,12}, P_{13,12}))));$
$$0.007964521251 \tag{59}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{13,12}, Multiply(P_{9,12}, P_{13,12}))));$
$$0.00003080515142 \tag{60}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{13,12}, Multiply(P_{10,12}, P_{13,12}))));$
$$0.004380226679 \tag{61}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{13,12}, Multiply(P_{11,12}, P_{13,12}))));$
$$0.009606619199 \tag{62}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{13,12}, Multiply(P_{12,12}, P_{13,12}))));$
$$0.001013154057 \tag{63}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{14,13}, Multiply(P_{1,13}, P_{14,13}))));$
$$0.0009356684964 \tag{64}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{14,13}, Multiply(P_{2,13}, P_{14,13}))));$
$$0.004510081895 \tag{65}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{14,13}, Multiply(P_{3,13}, P_{14,13}))));$
$$0.009554249640 \tag{66}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{14,13}, Multiply(P_{4,13}, P_{14,13}))));$
$$0.006294316294 \tag{67}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{14,13}, Multiply(P_{5,13}, P_{14,13}))));$
$$0.0001703116391 \tag{68}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{14,13}, Multiply(P_{6,13}, P_{14,13}))));$
$$0.008535372055 \tag{69}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{14,13}, Multiply(P_{7,13}, P_{14,13}))));$
$$0.00003080513608 \tag{70}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{14,13}, Multiply(P_{8,13}, P_{14,13}))));$
$$0.007004673536 \tag{71}$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{14,13}, Multiply(P_{9,13}, P_{14,13}))));$
$$0.007964521285 \tag{72}$$

$$Trace(evalf(Multiply(P_{14,13}, Multiply(P_{10,13}, P_{14,13}))));$$
$$0.001013154080 \tag{73}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{14,13}, Multiply(P_{11,13}, P_{14,13}))));$$
$$0.004380226708 \tag{74}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{14,13}, Multiply(P_{12,13}, P_{14,13}))));$$
$$0.009606619201 \tag{75}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{14,13}, Multiply(P_{13,13}, P_{14,13}))));$$
$$0.002500000003 \tag{76}$$

$$Trace(evalf(Multiply(P_{15,14}, Multiply(P_{1,14}, P_{15,14}))));$$
$$0.004510081901 \tag{77}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{15,14}, Multiply(P_{2,14}, P_{15,14}))));$$
$$0.009554249641 \tag{78}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{15,14}, Multiply(P_{3,14}, P_{15,14}))));$$
$$0.0009356684768 \tag{79}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{15,14}, Multiply(P_{4,14}, P_{15,14}))));$$
$$0.008535372085 \tag{80}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{15,14}, Multiply(P_{5,14}, P_{15,14}))));$$
$$0.006294316274 \tag{81}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{15,14}, Multiply(P_{6,14}, P_{15,14}))));$$
$$0.0001703116326 \tag{82}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{15,14}, Multiply(P_{7,14}, P_{15,14}))));$$
$$0.007964521298 \tag{83}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{15,14}, Multiply(P_{8,14}, P_{15,14}))));$$
$$0.00003080515140 \tag{84}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{15,14}, Multiply(P_{9,14}, P_{15,14}))));$$
$$0.007004673545 \tag{85}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{15,14}, Multiply(P_{10,14}, P_{15,14}))));$$
$$0.009606619190 \tag{86}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{15,14}, Multiply(P_{11,14}, P_{15,14}))));$$
$$0.001013154066 \tag{87}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{15,14}, Multiply(P_{12,14}, P_{15,14}))));$$
$$0.004380226719 \tag{88}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{15,14}, Multiply(P_{13,14}, P_{15,14}))));$$
$$0.002500000019 \tag{89}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{15,14}, Multiply(P_{14,14}, P_{15,14}))));$$
$$0.002500000004 \tag{90}$$

$$Trace(evalf(Multiply(P_{16,15}, Multiply(P_{1,15}, P_{16,15}))));$$
$$0.007728477089 \tag{91}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{16,15}, Multiply(P_{2,15}, P_{16,15}))));$$
$$0.007264336912 \tag{92}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{16,15}, Multiply(P_{3,15}, P_{16,15}))));$$
$$0.000007186033623 \tag{93}$$
$$Trace(evalf(Multiply(P_{16,15}, Multiply(P_{4,15}, P_{16,15}))));$$
$$0.005548854439 \tag{94}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{16,15}, Multiply(P_{5,15}, P_{16,15}))))$;
$$0.009029532480 \quad (95)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{16,15}, Multiply(P_{6,15}, P_{16,15}))))$;
$$0.0004216130830 \quad (96)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{16,15}, Multiply(P_{7,15}, P_{16,15}))))$;
$$0.009830951159 \quad (97)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{16,15}, Multiply(P_{8,15}, P_{16,15}))))$;
$$0.001468086690 \quad (98)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{16,15}, Multiply(P_{9,15}, P_{16,15}))))$;
$$0.003700962152 \quad (99)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{16,15}, Multiply(P_{10,15}, P_{16,15}))))$;
$$0.009810717643 \quad (100)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{16,15}, Multiply(P_{11,15}, P_{16,15}))))$;
$$0.003774788064 \quad (101)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{16,15}, Multiply(P_{12,15}, P_{16,15}))))$;
$$0.001414494265 \quad (102)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{16,15}, Multiply(P_{13,15}, P_{16,15}))))$;
$$0.005755895999 \quad (103)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{16,15}, Multiply(P_{14,15}, P_{16,15}))))$;
$$0.0003416938401 \quad (104)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{16,15}, Multiply(P_{15,15}, P_{16,15}))))$;
$$0.008902410150 \quad (105)$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{17,16}, Multiply(P_{1,16}, P_{17,16}))))$;
$$0.000007186033476 \quad (106)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{17,16}, Multiply(P_{2,16}, P_{17,16}))))$;
$$0.007728477085 \quad (107)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{17,16}, Multiply(P_{3,16}, P_{17,16}))))$;
$$0.007264336902 \quad (108)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{17,16}, Multiply(P_{4,16}, P_{17,16}))))$;
$$0.009029532496 \quad (109)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{17,16}, Multiply(P_{5,16}, P_{17,16}))))$;
$$0.0004216130786 \quad (110)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{17,16}, Multiply(P_{6,16}, P_{17,16}))))$;
$$0.005548854415 \quad (111)$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{17,16}, Multiply(P_{7,16}, P_{17,16}))))$;
$$0.001468086703 \quad (112)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{17,16}, Multiply(P_{8,16}, P_{17,16}))))$;
$$0.003700962143 \quad (113)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{17,16}, Multiply(P_{9,16}, P_{17,16}))))$;
$$0.009830951152 \quad (114)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{17,16}, Multiply(P_{10,16}, P_{17,16}))))$;
$$0.003774788082 \quad (115)$$
$Trace(evalf(Multiply(P_{17,16}, Multiply(P_{11,16}, P_{17,16}))))$;
$$0.001414494257 \quad (116)$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{17,16}, Multiply(P_{12,16}, P_{17,16}))));$
0.009810717656 **(117)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{17,16}, Multiply(P_{13,16}, P_{17,16}))));$
0.0003416938494 **(118)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{17,16}, Multiply(P_{14,16}, P_{17,16}))));$
0.008902410152 **(119)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{17,16}, Multiply(P_{15,16}, P_{17,16}))));$
0.005755896011 **(120)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{17,16}, Multiply(P_{16,16}, P_{17,16}))));$
0.002500000010 **(121)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{18,17}, Multiply(P_{1,17}, P_{18,17}))));$
0.007264336918 **(122)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{18,17}, Multiply(P_{2,17}, P_{18,17}))));$
0.000007186035114 **(123)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{18,17}, Multiply(P_{3,17}, P_{18,17}))));$
0.007728477071 **(124)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{18,17}, Multiply(P_{4,17}, P_{18,17}))));$
0.0004216130861 **(125)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{18,17}, Multiply(P_{5,17}, P_{18,17}))));$
0.005548854447 **(126)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{18,17}, Multiply(P_{6,17}, P_{18,17}))));$
0.009029532546 **(127)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{18,17}, Multiply(P_{7,17}, P_{18,17}))));$
0.003700962141 **(128)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{18,17}, Multiply(P_{8,17}, P_{18,17}))));$
0.009830951132 **(129)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{18,17}, Multiply(P_{9,17}, P_{18,17}))));$
0.001468086697 **(130)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{18,17}, Multiply(P_{10,17}, P_{18,17}))));$
0.001414494248 **(131)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{18,17}, Multiply(P_{11,17}, P_{18,17}))));$
0.009810717631 **(132)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{18,17}, Multiply(P_{12,17}, P_{18,17}))));$
0.003774788087 **(133)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{18,17}, Multiply(P_{13,17}, P_{18,17}))));$
0.008902410145 **(134)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{18,17}, Multiply(P_{14,17}, P_{18,17}))));$
0.005755896003 **(135)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{18,17}, Multiply(P_{15,17}, P_{18,17}))));$
0.0003416938435 **(136)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{18,17}, Multiply(P_{16,17}, P_{18,17}))));$
0.002499999995 **(137)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{18,17}, Multiply(P_{17,17}, P_{18,17}))));$$
0.002500000002 **(138)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{1,18}, P_{19,18}))));$$
0.001632304674 **(139)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{2,18}, P_{19,18}))));$$
0.003483227252 **(140)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{3,18}, P_{19,18}))));$$
0.009884468103 **(141)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{4,18}, P_{19,18}))));$$
0.005258759956 **(142)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{5,18}, P_{19,18}))));$$
0.0005462955197 **(143)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{6,18}, P_{19,18}))));$$
0.009194944521 **(144)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{7,18}, P_{19,18}))));$$
0.00002448654380 **(145)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{8,18}, P_{19,18}))));$$
0.007915774675 **(146)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{9,18}, P_{19,18}))));$$
0.007059738766 **(147)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{10,18}, P_{19,18}))));$$
0.0004715737233 **(148)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{11,18}, P_{19,18}))));$$
0.005428452648 **(149)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{12,18}, P_{19,18}))));$$
0.009099973633 **(150)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{13,18}, P_{19,18}))));$$
0.003457913688 **(151)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{14,18}, P_{19,18}))));$$
0.009890081561 **(152)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{15,18}, P_{19,18}))));$$
0.001652004750 **(153)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{16,18}, P_{19,18}))));$$
0.00006527939266 **(154)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{17,18}, P_{19,18}))));$$
0.008164783717 **(155)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{19,18}, Multiply(P_{18,18}, P_{19,18}))));$$
0.006769936901 **(156)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{1,19}, P_{20,19}))));$$
0.003483227238 **(157)**

$$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{2,19}, P_{20,19}))));$$
0.009884468108 **(158)**

$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{3,19}, P_{20,19}))));$

$$0.001632304668 \tag{159}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{4,19}, P_{20,19}))));$

$$0.009194944537 \tag{160}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{5,19}, P_{20,19}))));$

$$0.005258759933 \tag{161}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{6,19}, P_{20,19}))));$

$$0.0005462954988 \tag{162}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{7,19}, P_{20,19}))));$

$$0.007059738761 \tag{163}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{8,19}, P_{20,19}))));$

$$0.00002448654308 \tag{164}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{9,19}, P_{20,19}))));$

$$0.007915774692 \tag{165}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{10,19}, P_{20,19}))));$

$$0.009099973624 \tag{166}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{11,19}, P_{20,19}))));$

$$0.0004715737182 \tag{167}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{12,19}, P_{20,19}))));$

$$0.005428452660 \tag{168}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{13,19}, P_{20,19}))));$

$$0.001652004756 \tag{169}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{14,19}, P_{20,19}))));$

$$0.003457913692 \tag{170}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{15,19}, P_{20,19}))));$

$$0.009890081588 \tag{171}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{16,19}, P_{20,19}))));$

$$0.008164783714 \tag{172}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{17,19}, P_{20,19}))));$

$$0.006769936897 \tag{173}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{18,19}, P_{20,19}))));$

$$0.00006527940845 \tag{174}$$

$Trace(evalf(Multiply(P_{20,19}, Multiply(P_{19,19}, P_{20,19}))));$

$$0.002499999996 \tag{175}$$