

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Гайдук Вікторія Андріївна

УДК 512.64

РЕБЕРНО-ЛОКАЛЬНІ ДЕФОРМАЦІЇ  
ДОДАТНИХ КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ ТІТСА

01.01.06 – алгебра і теорія чисел

Автореферат  
дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата  
фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри та математичної логіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

**Науковий керівник**

доктор фізико-математичних наук, професор,  
**БОНДАРЕНКО Віталій Михайлович**,  
Інститут математики НАН України,  
провідний науковий співробітник  
відділу алгебри і топології.

**Офіційні опоненти**

доктор фізико-математичних наук, професор,  
**ЖУЧОК Анатолій Володимирович**,  
ДЗ «Луганський національний  
університет імені Тараса Шевченка»  
завідувач кафедри алгебри та  
системного аналізу.

кандидат фізико-математичних наук, доцент  
**РАССАДКІНА Марина Валеріївна**,  
Житомирський національний  
агроекологічний університет,  
доцент кафедри вищої та  
прикладної математики.

Захист відбудеться 30 січня 2017 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.18 на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 03127, м. Київ, проспект акад. Глушкова, 4е.

Із дисертацією можна ознайомитися в Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58, к. 12.

Автореферат розісланий 26 грудня 2016 р.

Вчений секретар

спеціалізованої вченої ради

Журавльов В. М.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Дисертаційна робота присвячена вивченню локальних деформацій додатних цілочислових квадратичних форм.

Квадратичні форми постійно виникають при розв'язанні різних задач в багатьох галузях математики. Серед них особливу роль відіграють цілочислові квадратичні форми. Це, зокрема, пов'язано з введенням в сучасній теорії зображень та класифікаційних задач лінійної алгебри так званих квадратичних форм Тітса.

У 1972 р. П. Габріель<sup>1</sup> ввів поняття зображення скінченного сагайдака (орієнтованого графа) і показав, що сагайдак має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень тоді і лише тоді, коли є додатною деяка (введена ним) цілочислова квадратична форма. Він назвав цю форму квадратичною формою Тітса відповідного сагайдака. Ця ідея П. Габріеля природним чином узагальнюється на зображення (без алгебраїчних співвідношень) інших об'єктів і, зокрема, зображення частково впорядкованих множин (введених Л. О. Назаровою і А. В. Ройтером<sup>2</sup>. Ю. А. Дрозд<sup>3</sup> довів, що частково впорядкована множина має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень тоді і лише тоді, коли відповідна квадратична форма є слабо додатною (додатною на множині векторів із невід'ємними координатами). Найзагальніший випадок, що стосується зображень без алгебраїчних співвідношень, розглянуто М. М. Клейнером і А. В. Ройтером<sup>4</sup> (для введених ними трикутних диференціальних градуированих категорій).

Пізніше були введені і почали вивчатися квадратичні форми Тітса для зображень об'єктів із алгебраїчними співвідношеннями (першою в цьому напрямку була робота Ш. Бреннер для сагайдаків зі співвідношеннями<sup>5</sup>).

Окрім згаданих авторів, квадратичні форми Тітса та їх природні цілочислові узагальнення вивчали М. Барот, В. М. Бондаренко, Н. С. Головашук, П. Дрекслер, М. В. Зельдіч, С. А. Овсієнко, Х. А. де ла Пенья, Ю. М. Перегуда, К. Рінгель, Д. Сімсон, М. В. Стьопочкіна, Х. И. фон Хёне та інші. Багато авторів досліджували також зв'язки квадратичних форм Тітса з відповідними їм задачами теорії зображень.

З іншого боку, багато проблем сучасної математики пов'язані з різними деформаціями математичних об'єктів, коли ті чи інші числові інваріанти замінюються параметрами, що поглиблює вивчення початкових проблем. Зок-

---

<sup>1</sup> Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen / P. Gabriel // Manuscripts Math. – 1972. – Vol. 6. – P. 71 – 103,309.

<sup>2</sup> Назарова Л. А. Представления частично упорядоченных множеств / Л. А. Назарова, А. В. Ройтер // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – Т. 28. – С. 5–31.

<sup>3</sup> Дрозд Ю. А. Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств / Ю. А. Дрозд // Функц. анализ и его прил. – 1974. – Т. 8. – С. 34–42.

<sup>4</sup> Клейнер М. М. Представления дифференциальных градуированных категорий / М. М. Клейнер, А. В. Ройтер // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 5–70.

<sup>5</sup> Brenner S. Quivers with commutativity conditions and some phenomenology of forms / S. Brenner // Proc. Int. Conf. Representations Algebras. – Ottawa: Carleton Univ. – 1974. – Vol. 488. – P. 29–53.

рема, глибоко досліджувалися деформації асоціативних алгебр, алгебр Лі та алгебр Хопфа, деформації диференціальних рівнянь та функціоналів, деформації структур на многовидах, тощо. Локальні деформації квадратичних форм відносно коефіцієнтів при квадратах змінних вивчалися в роботах В. М. Бондаренка та його учнів.

У дисертації продовжується вивчення локальних деформацій квадратичних форм. Основні результати стосуються додатних квадратичних форм Тітса для скінченних графів та частково впорядкованих множин.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Тематика дисертаційної роботи пов'язана з науковими дослідженнями на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка – тема 11БФ038-03 «Застосування алгебро-геометричних методів в теоріях груп, напівгруп, кілець, зображень до задач прикладної алгебри та захисту інформації» (номер державної реєстрації 0111U005264).

**Мета і задачі дослідження.** *Метою* дослідження є опис  $P$ -визначальних поліномів для додатних квадратичних форм Тітса сагайдаків і частково впорядкованих множин та отримання різних наслідків із такого опису.

*Об'єктом дослідження* є реберно-локальні деформації та  $P$ -визначальні поліноми квадратичних форм над полем дійсних чисел.

*Предметом дослідження* є вивчення поведінки квадратичних форм при реберно-локальній деформації їх коефіцієнтів.

**Методи дослідження.** *Основними методами* досліджень є матричний метод та класичні і сучасні комбінаторні методи.

**Наукова новизна одержаних результатів.** У дисертації отримано нові теоретичні результати, основними із яких є такі:

- Обчислено  $P$ -визначальні поліноми та  $P$ -граничні числа реберно-локальних деформацій квадратичних форм Тітса для несерійних діаграм Динкіна.
- Обчислено основні геометричні характеристики несерійних діаграм Динкіна, оснащених ваговою функцією, яка задана  $P$ -граничними числами поточково-локальних деформацій чи максимальними  $P$ -граничними числами реберно-локальних деформацій.
- Доведено, що зважена несерійна схема Динкіна має єдиний центр відносно як поточково-локальних, так і реберно-локальних деформацій.
- Показано, що будь-який  $P$ -визначальний поліном несерійної частково впорядкованої множини реалізується на частково впорядкованій множині ширини 2 з вузловим елементом, а для таких множин вказано явний вигляд  $P$ -визначальних поліномів для всіх пар порівняльних елементів.
- Виписано всі поліноми, які можуть бути цілочисловими  $P$ -визначальними поліномами для несерійних частково впорядкованих множин;
- Вказано мінімальну систему несерійних частково впорядкованих множин, на яких реалізуються всі  $P$ -визначальні поліноми.

**Практичне значення одержаних результатів.** Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути використані в загальній теорії квадратичних форм і в подальших дослідженнях деформацій квадратичних форм для різних класів алгебраїчних об'єктів.

**Особистий внесок здобувача.** Усі результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У спільних з науковим керівником роботах останньому належать, як правило, постановки задач та загальні ідеї щодо методів їх розв'язання, а практична реалізація та низка конкретних ідей належать здобувачеві. У статті [5] (з трьома співавторами) здобувачу належать всі результати про несерійні діаграми Динкіна.

#### **Апробація результатів дисертації.**

Результати дисертаційної роботи оприлюднено на:

- X Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда (м. Одеса, 20-27 серпня 2015 р.).
- Міжнародній конференції молодих математиків (м. Київ, 3-6 червня 2015 р.);
- Сімнадцятій Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (м. Київ, 19-20 травня 2016 р.);
- XI літній школі – алгебра, топологія, аналіз (Одеса, 1-14 серпня 2016 р.)

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковано в шести наукових роботах [1–6], всі з яких опубліковані у фахових виданнях, одна з них [5] – у виданні, що відображається в наукометричній базі Scopus. Чотири роботи опубліковано у тезах конференцій [7–10].

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг роботи (без додатку) – 179 сторінок, із них список використаних джерел займає 12 сторінок (90 найменування); додаток займає 17 сторінок.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** наведено загальну характеристику та мету роботи, обґрунтовано її актуальність і наукову новизну.

**Перший розділ** присвячено формулюванню відомих результатів, які використовуються в дисертаційній роботі.

У підрозділі 1.1 наведено добре відомі твердження про квадратичні форми над полем дійсних чисел.

Підрозділ 1.2 містить основні означення, пов'язані з сагайдаками, які використовуються в основних розділах дисертації.

Сагайдак – це довільний орієнтований граф  $Q=(Q_0, Q_1)$  ( $Q_0$  і  $Q_1$ ) позначають відповідно множину вершин та множину стрілок). Сагайдак називається

скінченним, якщо множини  $Q_0$  і  $Q_1$  скінченні. Не обмежуючи загальності можна вважати, що  $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ .

П. Габріель ввів для сагайдака  $Q = (Q_0, Q_1)$  наступну цілочислову квадратичну форму  $q_Q(z) = q_Q(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , яку він назвав квадратичною формою Тітса:

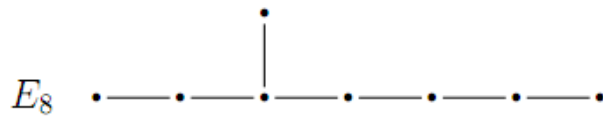
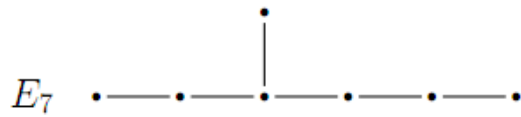
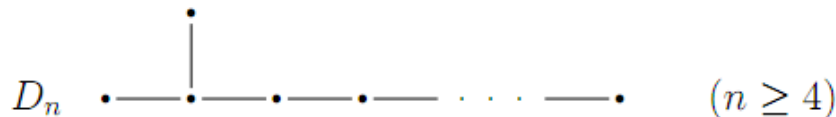
$$q_Q(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{i \in Q_0} z_i^2 - \sum_{i \rightarrow j} z_i z_j,$$

де  $i \rightarrow j$  пробігає множину всіх стрілок  $Q_1$ .

Для неорієнтованого сагайдака квадратична форма Тітса визначається наступним чином. Потрібно зафіксувати яким-небудь чином напрямки ребер і виписати відповідну квадратичну форму Тітса для цього орієнтованого графа (при цьому отримана квадратична форма не залежить від вибору напрямків ребер).

Наступна теорема належить П. Габріелю.

**Теорема 1.5.** *Квадратична форма Тітса сагайдака  $Q$  є додатною тоді і лише тоді, коли відповідний сагайдаку неорієнтований граф є неперетинним об'єднанням діаграм Динкіна з однократними ребрами, тобто графів наступного вигляду:*



(графи  $A_n$  та  $D_n$  мають  $n$  вершин).

Діаграми Динкіна  $A_n$  і  $D_n$  будемо називати серійними (бо їх нескінченне число і залежать вони від одного натурального параметра), а діаграми Динкіна  $E_6, E_7, E_8$  – несерійними.

Підрозділ 1.3 містить основні означення, пов'язані з частково впорядкованими множинами, які використовуються в основних розділах дисертації.

Нехай  $S$  – скінченна частково впорядкована (скорочено ч. в.) множина.

Не обмежуючи загальності будемо вважати, що  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ . Часткову впорядкованість будемо позначати символом  $\pi$  (щоб відрізнити її від природної лінійної впорядкованості цілих чисел). Будемо при цьому вважати, що  $i < j$  кожного разу, коли  $i \pi j$ . Ми ототожнюємо алгебраїчне задання ч. в. множини (за допомогою відношення  $\pi$ ) з графічним. Нагадаємо, що відповідний малюнок при графічному заданні ч. в. множини називається її діаграмою Хассе.

Квадратичною формою Тітса ч. в. множини  $S$  називається наступна квадратична форма:

$$q_S(z) = q_S(z_0, z_1, z_2, \dots, z_n) = z_0^2 + \sum_{i \in Q} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

Ч. в. множини з додатною формою Тітса повністю описані. При цьому виникають два різні випадки: серійні ч. в. множини і несерійні ч. в. множини.

Ч. в. множина  $S$  із додатною квадратичною формою Тітса називається серійною, якщо для будь-якого натурального  $m$  існує ч. в. множина  $T$  з додатною квадратичною формою Тітса така, що  $S \in$  підмножиною  $T$  і  $|T \setminus S| = m$ . У протилежному випадку ч. в. множина  $S$  називається несерійною.

Серійні і несерійні ч. в. множини з додатною квадратичною формою Тітса описали В. М. Бондаренко і М. В. Стъпочкіна<sup>6</sup>. Несерійних ч. в. множин нескінченна кількість (як і сагайдаків) і об'єднані вони в 3 серії. Серійних множин (з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму) 108. Всі ці множини вписані в підрозділі 1.3.

У підрозділі 1.4 приведено означення квадратичної форми Тітса для біграфа, яке узагальнює як випадок сагайдаків, так і випадок ч. в. множин.

У підрозділі 1.5 викладено основні означення, пов'язані з локальними деформаціями квадратичних форм.

Локальна деформація квадратичної форми  $f(x)$  над полем дійсних чисел  $\mathbb{R}$  – це квадратична форма, яка отримується із  $f(x)$  заміною її довільного фіксованого коефіцієнта  $f_{ij} \neq 0$  на коефіцієнт  $af_{ij}$ , де  $a$  – параметр; локальна деформація буває поточково-локальною (випадок  $i = j$ ) і реберно-локальною

---

<sup>6</sup> Бондаренко В. М. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса / В. М. Бондаренко, М. В. Степочкина // Проблемы анализа і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т. 2, №3. – С. 18–58.

(випадок  $i \neq j$ )<sup>7</sup>. Геометрична термінологія прийнята в зв'язку з тим, що кожній квадратичній формі можна зіставити граф, вершинами якого є змінні квадратичної форми, а ребрами – ненульові коефіцієнти (або біграф, якщо відрізняти додатні та від'ємні коефіцієнти).

Перейдемо до більш точних означень, вважаючи квадратичні форми додатними.

Нехай

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^n f_i z_i^2 + \sum_{i < j} f_{ij} z_i z_j$$

— (додатна) квадратична форма над полем дійсних чисел  $\mathbb{R}$ . Її *поточково-локальною деформацією* називається квадратична форма вигляду

$$f^{(s)}(z, a) = f^{(s)}(z_1, \dots, z_n, a) = a f_{ss} z_s^2 + \sum_{i \neq s} f_{ii} z_i^2 + \sum_{i < j} f_{ij} z_i z_j,$$

де  $s \in \{1, \dots, n\}$ , а  $a$  – параметр, що пробігає поле  $\mathbb{R}$ .

Квадратична форма  $f^{(s)}(z, a)$  називається також *поточково-локальною деформацією квадратичної форми  $f(z)$  відносно  $z_s$* .

Число  $c$  називається *P-граничним числом* для  $z_s$  або *s-им P-граничним числом* (квадратичної форми  $f(z)$ ), якщо квадратична форма  $f^{(s)}(z, x)$  є додатною для будь-якого  $x > c$ , а форма  $f^{(s)}(z, c)$  такою не є. Всі P-граничні числа (додатної) квадратичної форми  $f(z)$  лежать у напіввідкритому інтервалі  $[0, 1)$ , а якщо  $n > 1$ , то у відкритому інтервалі  $(0, 1)$ .

Переходимо тепер до реберно-локальних деформацій.

Нехай знову

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^n f_i z_i^2 + \sum_{i < j} f_{ij} z_i z_j$$

— (додатна) квадратична форма над полем дійсних чисел  $\mathbb{R}$ . Її *реберно-локальною деформацією* називається квадратична форма вигляду

$$f^{(p,q)}(z, a) = \sum_{i=1}^n f_i z_i^2 + a f_{pq} z_p z_q + \sum_{(i,j) \neq (p,q)} f_{ij} z_i z_j,$$

де  $p$  і  $q$  ( $p < q$ ) такі, що  $f_{pq} \neq 0$ , а  $a$  – параметр, що пробігає поле  $\mathbb{R}$ .

Квадратична форма  $f^{(p,q)}(z, a)$  називається також *реберно-локальною деформацією квадратичної форми  $f(z)$  відносно  $z_p z_q$* .

Число  $b \in \mathbb{R}$  називається *P-граничним числом квадратичної форми  $f(z)$  для  $z_p z_q$*  або *(p, q)-им P-граничним числом квадратичної форми  $f(z)$* , якщо

<sup>7</sup> Bondarenko V. M. On types of local deformations of quadratic forms / V. M. Bondarenko // Algebra Discrete Math. – 2014. – Vol. 18, №2. – P. 163–170.}

$f(z, b)$  не є додатною квадратичною формою і в кожному околі числа  $b$  існує число  $c$  таке, що  $f(z, c)$  є додатною квадратичною формою.

Оскільки квадратична форма  $f(z)$  додатна, існує два  $(p, q)$  – їх  $P$ -граничних числа. Поліном  $\Delta_f^{(p,q)}(t) = (t - b_1)(t - b_2)$ , де  $b_1$  і  $b_2$  – ці  $P$ -граничні числа, називаються  $P$ -визначальним поліномом квадратичної форми  $f(z)$  для  $z_p z_q$  або  $P$ -визначальним  $(p, q)$ -поліномом квадратичної форми  $f(z)$ . При цьому  $b_1 \neq b_2$  і якщо  $b_1 < b_2$ , то квадратична форма  $f^{(p,q)}(z, a)$  додатна тоді і лише тоді, коли  $b_1 < a < b_2$ .

Якщо до того ж коефіцієнти квадратичної форми  $f(z)$  є раціональними, то її  $P$ -визначальні поліноми також мають раціональні коефіцієнти. Тоді кожному  $P$ -визначальному поліному природним чином відповідає цілочисловий поліном зі взаємно простими коефіцієнтами (в сукупності) і додатнім коефіцієнтом при старшому члені (який отримується із  $P$ -визначального полінома множенням його на деяке натуральне число). Він називається цілочисловим  $P$ -визначальним поліномом і позначається  $Z\Delta_f^{(p,q)}(t)$ .

Ці поняття (для реберно-локальних деформацій) введено В. М. Бондаренком (див. попередню виноску).

У **другому розділі** дисертаційної роботи вивчаються реберно-локальні деформації квадратичних форм Тігса двох природних класів частково впорядкованих множин.

У підрозділі 2.1, як приклад, розглядається випадок несерійних примітивних частково впорядкованих множин (частково впорядкована множина називається примітивною, якщо вона є таким об'єднанням ланцюгів, що будь-які елементи різних ланцюгів непорівняльні). Для таких множин описано  $P$ -визначальні поліноми та їх корені. Всі корені додатні, причому в кожному випадку більший із них дорівнює 2, а менший лежить в інтервалі  $(0,1)$ .

У підрозділі 2.2 розглядається задача про  $P$ -визначальні поліноми квадратичної форми Тігса частково впорядкованої множини у випадку, коли ця квадратична форма додатна, а множина несерійна найменшого можливого порядку. Із результатів, викладених в 1.3, випливає, що з точністю до ізоморфізму та дуальності існує 10 таких множин порядку 5 (і не існує множин меншого порядку):

$$M_1 = \{1,2,3,4,5 \mid 2\pi 3, 4\pi 5\};$$

$$M_2 = \{1,2,3,4,5 \mid 2\pi 3, 2\pi 5, 4\pi 5\};$$

$$M_3 = \{1,2,3,4,5 \mid 1\pi 3, 2\pi 3, 2\pi 5, 4\pi 5\};$$

$$M_4 = \{1,2,3,4,5 \mid 2\pi 5, 3\pi 4, 4\pi 5\};$$

$$M_5 = \{1,2,3,4,5 \mid 1\pi 4, 2\pi 3, 2\pi 5, 3\pi 4\};$$

$$M_6 = \{1,2,3,4,5 \mid 1\pi 2, 1\pi 4, 3\pi 4, 4\pi 5\};$$

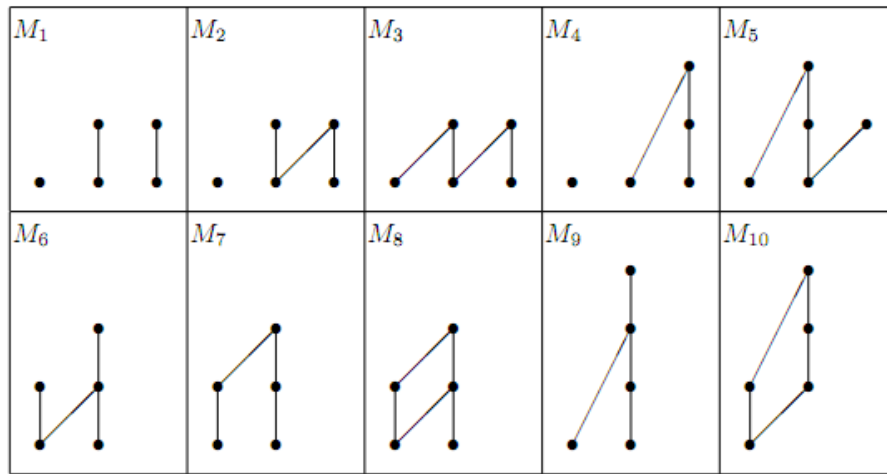
$$M_7 = \{1,2,3,4,5 \mid 1\pi 2, 2\pi 5, 3\pi 4, 4\pi 5\};$$

$$M_8 = \{1,2,3,4,5 \mid 1\pi 2, 1\pi 4, 2\pi 5, 3\pi 4, 4\pi 5\};$$

$$M_9 = \{1,2,3,4,5 \mid 1\pi 4, 2\pi 3, 3\pi 4, 4\pi 5\};$$

$$M_{10} = \{1,2,3,4,5 \mid 1\pi 2, 1\pi 3, 3\pi 4, 2\pi 5, 4\pi 5\}.$$

Графічно ці частково впорядковані множини мають наступний вигляд:



Квадратичну форму Тітса  $q_S(z)$  частково впорядкованої множини  $S = M_i$  будемо позначати, для простоти,  $q_i = q_i(z)$ .

Нагадаємо, що порівняльні елементи  $p$  і  $q$  частково впорядкованої множини  $S$  називаються сусідніми, якщо не існує елемента  $x$  такого, що  $p < x < q$  або  $q < x < p$ . Таким і лише таким парам елементів відповідають ребра діаграми Хассе.

**Теорема 2.4.** Нехай  $S$  – частково впорядкована множина з додатною квадратичною формою Тітса, яка є несерійною порядку 5 (тобто найменшого можливого порядку). У випадках  $S = M_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$ ,  $P$ -визначальні поліноми квадратичної форми Тітса  $q_i(z)$ , які відповідають сусіднім елементам  $p, q$  ( $p < q$ ), є наступними:

$$1) \quad \Delta_{q_1}^{(2,3)}(t) = \Delta_{q_1}^{(4,5)}(t) = t^2 - \frac{12}{5}t + \frac{4}{5};$$

$$2) \quad \Delta_{q_3}^{(2,3)}(t) = t^2 - \frac{8}{5}t; \Delta_{q_3}^{(2,5)}(t) = t^2 - t + \frac{3}{4},$$

$$\Delta_{q_3}^{(4,5)}(t) = t^2 - \frac{8}{5}t;$$

$$3) \quad \Delta_{q_4}^{(1,3)}(t) = \Delta_{q_4}^{(4,5)}(t) = t^2 - t - \frac{3}{4},$$

$$\Delta_{q_4}^{(2,3)}(t) = \Delta_{q_4}^{(2,5)}(t) = t^2 - \frac{4}{5}t - \frac{4}{5};$$

$$4) \quad \Delta_{q_2}^{(2,5)}(t) = t^2 - \frac{4}{5}t - \frac{4}{5}; \Delta_{q_2}^{(3,4)}(t) = t^2 - \frac{12}{5}t + \frac{4}{5},$$

$$\Delta_{q_2}^{(4,5)}(t) = t^2 - t - \frac{3}{4};$$

$$5) \quad \Delta_{q_5}^{(1,4)}(t) = \Delta_{q_5}^{(2,5)}(t) = t^2 - t - \frac{3}{4},$$

$$\Delta_{q_5}^{(2,3)}(t) = \Delta_{q_5}^{(3,4)}(t) = t^2 - \frac{4}{5}t - \frac{4}{5};$$

$$\begin{aligned}
& 6) \quad \Delta_{q8}^{(1,2)}(t) = t^2 - \frac{4}{5}t - \frac{4}{5}, \Delta_{q8}^{(1,4)}(t) = t^2 - \frac{4}{5}t - \frac{4}{5}, \\
& \Delta_{q8}^{(3,4)}(t) = t^2 - t - \frac{3}{4}, \Delta_{q8}^{(4,5)}(t) = t^2 - \frac{12}{5}t + \frac{4}{5}; \\
& 7) \quad \Delta_{q9}^{(1,2)}(t) = t^2 - \frac{12}{5}t + \frac{4}{5}, \Delta_{q9}^{(2,5)}(t) = t^2 - \frac{12}{5}t + \frac{4}{5}, \\
& \Delta_{q9}^{(3,4)}(t) = t^2 - \frac{12}{5}t + \frac{4}{5}, \Delta_{q9}^{(4,5)}(t) = t^2 - \frac{4}{5}t - \frac{4}{5}; \\
& 8) \quad \Delta_{q10}^{(1,2)}(t) = t^2 - \frac{8}{5}t, \Delta_{q10}^{(1,4)}(t) = t^2 - t - \frac{3}{4}, \\
& \Delta_{q11}^{(2,5)}(t) = t^2 - t - \frac{3}{4}, \Delta_{q11}^{(3,4)}(t) = t^2 - \frac{8}{5}t, \Delta_{q1}^{(4,5)}(t) = t^2 - \frac{8}{5}t; \\
& 9) \quad \Delta_{q6}^{(1,4)}(t) = t^2 - \frac{4}{5}t - \frac{4}{5}, \Delta_{q6}^{(2,3)}(t) = t^2 - \frac{12}{5}t + \frac{4}{5}, \\
& \Delta_{q6}^{(3,4)}(t) = t^2 - t - \frac{3}{4}, \Delta_{q6}^{(4,5)}(t) = t^2 - \frac{12}{5}t + \frac{4}{5}; \\
& 10) \quad \Delta_{q7}^{(1,2)}(t) = \Delta_{q7}^{(2,5)}(t) = t^2 - \frac{4}{5}t - \frac{4}{5}, \\
& \Delta_{q7}^{(1,3)}(t) = \Delta_{q7}^{(4,5)}(t) = t^2 - t - \frac{3}{4}, \\
& \Delta_{q7}^{(3,4)}(t) = t^2 - \frac{12}{5}t + \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

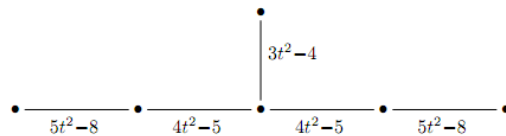
У третьому розділі вивчаються реберно-локальні деформації додатних квадратичних форм Тітса неорієнтованих графів.

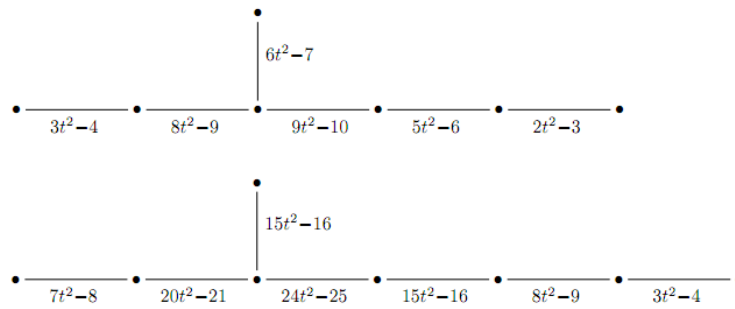
У підрозділі 3.1 формулюється основний результат цього розділу.

Нехай  $Q = (Q_0, Q_1)$  – (скінченний) неорієнтований граф без петель і кратних ребер з множиною вершин  $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ , та множиною ребер  $Q_1$ . Ребро між вершинами  $i$  і  $j$  позначається через  $(i, j)$ , причому ребра  $(i, j)$  і  $(j, i)$  звичайно ототожнюються.

Розглядається задача про опис  $P$ -визначальних поліномів вигляду  $\Delta_{qQ}^{(i,j)}$ ,  $(i,j) \in Q_1$ , квадратичної форми Тітса  $q_Q = q_S(z)$  для несерійних діаграм Динкіна, тобто для діаграм  $E_6, E_7, E_8$ . У випадку  $i, j \in Q_0$ ,  $(i, j) \in Q_1$  замість «(цілочисловий)  $P$ -визначальний поліном квадратичної форми Тітса  $q_Q(z)$  для  $z_i z_j$ » говоримо «(цілочисловий)  $P$ -визначальний поліном графа  $Q$  для ребра  $(i, j)$ ». Аналогічно і для  $P$ -граничних чисел.

**Теорема 3.1.** Цілочислові  $P$ -визначальні поліноми для несерійних діаграм Динкіна  $E_6, E_7, E_8$  є наступними:





Доведення цієї теореми та деякі зауваження до неї розглядаються в підрозділах 3.2 і 3.3.

У підрозділі 3.4 вводяться і досліджуються  $P$ -зважені графи.

Нехай  $Q = (Q_0, Q_1)$  – неорієнтований граф з множиною вершин  $Q_0$  та множиною ребер  $Q_1$ . Для цілей дисертації достатньо вважати, що граф  $Q$  зв'язний і не має циклів.

Граф  $Q$  називається зваженим, якщо додатково задана вагова функція  $\varphi: Q_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$  із множини ребер в множину додатних дійсних чисел; число  $\varphi(\lambda)$  називається вагою ребра  $\lambda$ . Якщо  $u$  і  $v$  – вершини зваженого графа  $Q$ , то  $\varphi$ -відстаню  $d_\varphi(u, v)$  між  $u$  і  $v$  називається вага  $\sum_{i=1}^m \varphi(\lambda_i)$  єдиного шляху  $\lambda = \lambda_1 \dots \lambda_m$  між вершинами  $u$  і  $v$ . Найбільша  $\varphi$ -відстань між вершинами називається  $\varphi$ -діаметром зваженого графа.

Далі приводиться означення радіуса зваженого графа  $Q$ . Для  $u \in Q_0$  вводиться позначення  $m_u = \max_{(u,v) \in Q_1} d_\varphi(u, v)$ . Тоді найбільше серед чисел  $m_u$  є діаметром зваженого графа, а ось найменше із них, скажімо,  $r$  називається радіусом зваженого графа. Центром зваженого графа  $Q$  називається кожна вершина  $w$  така, що  $m_w = r$ .

Надалі у цьому підрозділі розглядаються несерійні схеми Динкіна  $E_n$ ,  $n \in \{6, 7, 8\}$ , вага яких задається  $P$ -граничними числами. При цьому розглядаються 2 випадки. Перший, коли вага ребра задається сумою  $P$ -граничних чисел для відповідних вершин (при поточково-локальній деформації), і другий, коли вага ребра задається його додатним  $P$ -граничним числом (при реберно-локальній деформації).

Вершини діаграми Динкіна  $E_n$  будемо позначати числами  $1, 2, \dots, n-1$  (вершини нижнього ланцюга зліва направо) і  $n$  (верхня вершина).

Спочатку розглядаються  $P$ -зважені діаграми Динкіна  $E_n$ ,  $n \in \{6, 7, 8\}$ , відносно поточково-локальної деформації. З формальних міркувань зручніше говорити про  $P$ -граничні числа графів замість  $P$ -граничних чисел їх квадратичних форм Тітса. А саме,  $P$ -граничним числом вершини  $s$  графа  $G$  називається  $s$ -е  $P$ -граничне число форми Тітса  $q_G(z)$ .

Назвемо  $P$ -вагою ребра  $\lambda = (u, v)$  діаграми Динкіна  $G = E_n$ , ( $n = 6, 7, 8$ ) суму  $\text{pld}^+(\lambda) = \text{pld}(u) + \text{pld}(v)$   $P$ -граничних чисел  $\text{pld}(u)$  і  $\text{pld}(v)$ , що відповідають вершинам  $u$  і  $v$  графа  $E_n$ . Діаметр зваженого графа  $G$  відносно такої вагової функції позначаємо через  $D_{\text{pld}^+}(G)$ , а радіус – через  $R_{\text{pld}^+}(G)$ . Множина центрів позначається через  $C_{\text{pld}^+}(G)$ .

Використовуючи опис всіх  $P$ -граничних чисел діаграм Динкіна<sup>8</sup>, доведено наступні теореми.

**Теорема 3.2.**

$$D_{\text{pld}^+}(G) = \begin{cases} 6 \frac{29}{60} \approx 6.48 & \text{для } G = E_6 \\ 8 \frac{47}{60} \approx 8.78 & \text{для } G = E_7 \\ 11 \frac{37}{168} \approx 11.22 & \text{для } G = E_8 \end{cases}$$

**Теорема 3.3.**

$$R_{\text{pld}^+}(G) = \begin{cases} 6 \frac{29}{60} \approx 6.48 & \text{для } G = E_6 \\ 8 \frac{47}{60} \approx 8.78 & \text{для } G = E_7 \\ 11 \frac{37}{168} \approx 11.22 & \text{для } G = E_8 \end{cases}$$

**Теорема 3.4.**

$$\frac{D_{\text{pld}^+}(G)}{2R_{\text{pld}^+}(G)} = \begin{cases} 1 & \text{для } G = E_6 \\ \approx 0.84 & \text{для } G = E_7 \\ \approx 0.98 & \text{для } G = E_8 \end{cases}$$

**Теорема 3.5.**

$$C_{\text{pld}^+}(G) = \begin{cases} 3 & \text{для } G = E_6 \\ 3 & \text{для } G = E_7 \\ 4 & \text{для } G = E_8 \end{cases}$$

Далі розглядаються  $P$ -зважені діаграми Динкіна відносно реберно-локальної деформації.  $P$ -вагою ребра  $(u, v)$  діаграми Динкіна  $G = E_n$  ( $n = 6, 7, 8$ ) названо єдине додатне  $P$ -граничне число для цього ребра (той факт, що обидва  $P$ -граничні числа відрізняються лише знаком, робить це означення природним). Вказану вагу позначаємо через  $\text{eld}(u, v)$ . Діаметр реберно-зваженого графа  $G$  відносно такої вагової функції позначається через  $D_{\text{eld}}(G)$ , а радіус – через  $R_{\text{eld}}(G)$ .

<sup>8</sup> Бондаренко В. М. Локальные деформации положительно определенных квадратичных форм / В. М. Бондаренко, В. В. Бондаренко, Ю. Н. Перегуда // Укр. мат. журнал. – 2012. – №7. – С. 892 – 907.

**Теорема 3.5.**

$$D_{\text{eld}}(G) = \begin{cases} \sqrt{5} + \frac{4\sqrt{10}}{5} \approx 4.77 & \text{для } G = E_6 \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{3} + \frac{\sqrt{30}}{5} \approx 5.59 & \text{для } G = E_7 \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{5\sqrt{6}}{12} + \frac{2\sqrt{14}}{7} + \frac{4\sqrt{15}}{15} + \frac{\sqrt{105}}{10} \approx \\ \approx 6.36 & \text{для } G = E_8 \end{cases}$$

**Теорема 3.7.**

$$R_{\text{eld}}(G) = \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{2\sqrt{10}}{5} \approx 2.38 & \text{для } G = E_6 \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3} \approx 3.27 & \text{для } G = E_7 \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{15}}{15} \approx 3.25 & \text{для } G = E_8 \end{cases}$$

**Теорема 3.8.**

$$\frac{D_{\text{eld}}(G)}{2R_{\text{eld}}(G)} = \begin{cases} 1 & \text{для } G = E_6 \\ \approx 0.85 & \text{для } G = E_7 \\ \approx 0.98 & \text{для } G = E_8 \end{cases}$$

**Теорема 3.9.**

$$C_{\text{eld}}(G) = \begin{cases} 3 & \text{для } G = E_6 \\ 4 & \text{для } G = E_7 \\ 4 & \text{для } G = E_8 \end{cases}$$

В заключній частині підрозділу 3.4 порівнюються отримані характеристики  $P$ -зважених діаграм.

Виписано порівняльні таблиці для несерійних діаграм Динкіна  $E_6, E_7, E_8$  відносно стандартної відстані  $\mathbb{E}$  (кожному ребру відповідає 1), відстані  $\text{pld}^+$  та  $\text{eld}$  (які пов'язані відповідно з поточково-локальною і реберно-локальною деформаціями). Порівнюються центри діаграм (як номери вершин відносно природної нумерації) та відношення діаметра до двох радіусів.

Зауважимо, що (як і раніше) ми виписуємо дроби з точністю до другого знаку, а у випадку, коли числа, записані з такою точністю збігаються, розглядаємо і третій знак.

Спочатку випишемо таблицю порівняння центрів.

$C$	$\mathbb{E}$	$\text{pld}^+$	$\text{eld}$
$E_6$	3	3	3
$E_7$	3, 4	3	4
$E_8$	4	4	4

Як видно із таблиці, на відміну від стандартної відстані, відстані пов'язані з поточно-локальною та реберно-локальною деформаціями забезпечують єдиний центр для кожної діаграми – відповідно 3 і 4

(а відносно стандартної відстані центрами є і 3, і 4).

Порівняємо тепер відношення діаметра до двох радіусів.

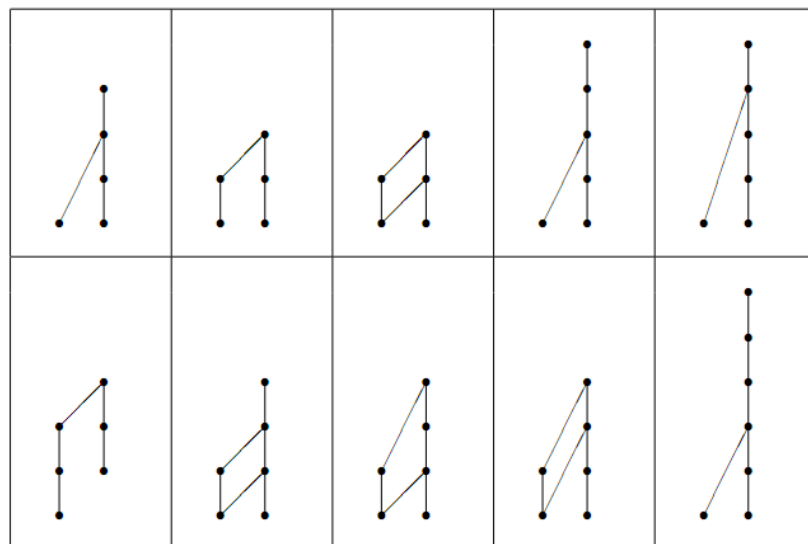
$D/2R$	$\mathbb{E}$	$\text{pld}^+$	$\text{eld}$
$E_6$	1	1	1
$E_7$	$\approx 0.83$	$\approx 0.84$	$\approx 0.85$
$E_8$	1	$\approx 0.976$	$\approx 0.979$

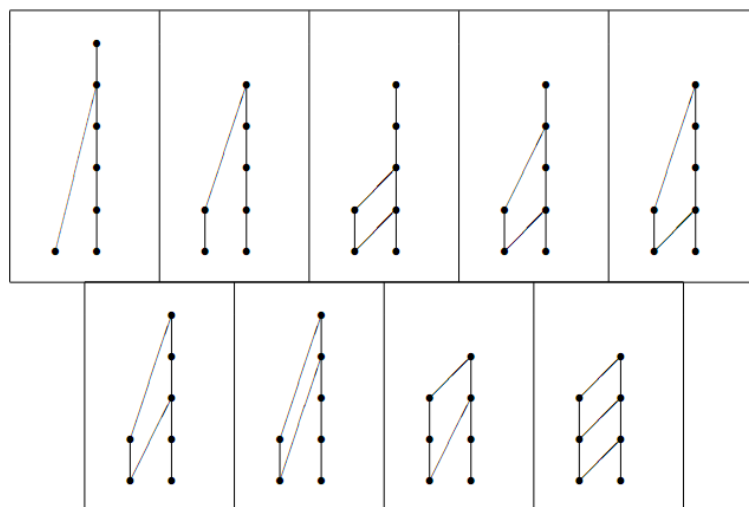
Як видно із таблиці, відстань  $\text{eld}$  (яка пов'язана з реберно-локальною деформацією) краща за відстань  $\text{pld}^+$  (яка пов'язана з поточно-локальною деформацією) у тому сенсі, що відношення діаметра до двох радіусів ближче до одиниці (в усіх випадках). Порівняти (у вказаному сенсі) ці відстані зі стандартною відстанню  $\mathbb{E}$  не можна. Мабуть, первопричина цього в тому, що  $E_7$  має два центри відносно стандартної відстані.

У четвертому розділі описуються цілочислові  $P$ -визначальні поліноми для всіх несерійних частково впорядкованих множин.

У підрозділі 4.1 описано цілочислові  $P$ -визначальні поліноми для всіх порівняльних елементів всіх несерійних частково впорядкованих множин, які мають вузлові елементи, тобто елементи, порівняльні з усіма іншими. З очевидних міркувань можна розглядати лише такі множини, які мають максимальний вузловий елемент і не мають мінімального вузлового елемента.

Таких несерійних множин 19:





У підрозділі 4.2 (пп. 4.2.1 – 4.2.3) розглядаються загальні теореми про  $P$ -визначальні поліноми та  $P$ -граничні числа. Сформулюємо основні із них.

Наступна теорема показує, що всі  $P$ -визначальні поліноми реалізуються на частково впорядкованих множинах, розглянутих в підрозділі 4.1.

**Теорема 4.4.** *Будь-який цілочисловий  $P$ -визначальний поліном несерійної частково впорядкованої множини дорівнює деякому такому ж поліному деякої несерійної частково впорядкованої множини з максимальним вузловим елементом.*

Усі  $P$ -визначальні поліноми описує наступна теорема (поліноми розташовані в лексикографічному порядку в відносно їх коефіцієнтів).

**Теорема 4.8.** *Цілочисловими  $P$ -визначальними поліномами несерійних частково впорядкованих множин є наступні і лише наступні поліноми:*

$$\begin{aligned}
 &2t^2 - 2t - 1, \quad 2t^2 - 3t, \quad 2t^2 - 5t + 2, \quad 3t^2 - 2t - 2, \quad 3t^2 - 3t - 1, \\
 &3t^2 - 4t, \quad 3t^2 - 6t + 2, \quad 3t^2 - 8t + 4, \quad 4t^2 - 4t - 1, \quad 4t^2 - 4t - 3, \\
 &4t^2 - 8t + 3, \quad 5t^2 - 4t - 4, \quad 5t^2 - 8t, \quad 5t^2 - 12t + 4, \quad 7t^2 - 4t - 4, \\
 &7t^2 - 8t, \quad 7t^2 - 12t + 4, \quad 7t^2 - 16t + 8, \quad 7t^2 - 20t + 12.
 \end{aligned}$$

Усі  $P$ -визначальні числа (в порядку зростання) описує наступна теорема.

**Теорема 4.12.**  *$P$ -граничними числами несерійних частково впорядкованих множин є наступні і лише наступні дійсні числа:*

$$\begin{aligned}
 &\frac{2-2\sqrt{6}}{5}, \quad \frac{1-\sqrt{7}}{3}, \quad \frac{2-4\sqrt{2}}{7}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{3-\sqrt{21}}{6}, \quad \frac{1-\sqrt{2}}{2}, \quad 0, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3-\sqrt{3}}{3}, \\
 &\frac{6-2\sqrt{2}}{7}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{8-2\sqrt{2}}{7}, \quad \frac{6}{7}, \quad \frac{2+4\sqrt{2}}{7}, \quad 1\frac{1}{7}, \quad \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{1+\sqrt{7}}{3}, \quad \frac{6+2\sqrt{2}}{7}, \\
 &\frac{3+\sqrt{21}}{6}, \quad 1\frac{1}{3}, \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{2+2\sqrt{6}}{5}, \quad 1\frac{1}{2}, \quad \frac{8+2\sqrt{2}}{7}, \quad \frac{3+\sqrt{3}}{3}, \quad 1\frac{3}{5}, \quad 2.
 \end{aligned}$$

У 4.2.4 викладені в попередніх пунктах результати обчислень про цілочислові  $P$ -визначальні поліноми (несерійних ч. в. множин) та їх корені записано, для наглядності, у вигляді таблиці:

№	Порядок множини	Поліном	Менший корінь	Більший корінь
1	6	$2t^2 - 2t - 1$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2} \approx -0.37$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1.37$
2	6	$2t^2 - 3t$	0	$1\frac{1}{2} = 1.5$
3	6	$2t^2 - 5t + 2$	$\frac{1}{2} = 0.5$	2
4	6	$3t^2 - 2t - 2$	$\frac{1-\sqrt{7}}{2} \approx -0.55$	$\frac{1+\sqrt{7}}{2} \approx 1.22$
5	6	$3t^2 - 3t - 1$	$\frac{3-\sqrt{21}}{6} \approx -0.26$	$\frac{3+\sqrt{21}}{6} \approx 1.26$
6	6, 7	$3t^2 - 4t$	0	$1\frac{1}{3} \approx 1.33$
7	6	$3t^2 - 6t + 2$	$\frac{3-\sqrt{3}}{3} \approx 0.42$	$\frac{3+\sqrt{3}}{3} \approx 1.58$
8	6, 7	$3t^2 - 8t + 4$	$\frac{2}{3} \approx 0.67$	2
9	7	$4t^2 - 4t - 1$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2} \approx -0.21$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1.21$
10	5	$4t^2 - 4t - 3$	$-\frac{1}{2} = -0.5$	$1\frac{1}{2} = 1.5$
11	7	$4t^2 - 8t + 3$	$\frac{1}{2} = 0.5$	$1\frac{1}{2} = 1.5$
12	5	$5t^2 - 4t - 4$	$\frac{2-2\sqrt{6}}{5} \approx -0.58$	$\frac{2+2\sqrt{6}}{5} \approx 1.38$
13	5	$5t^2 - 8t$	0	$1\frac{3}{5} = 1.6$
14	5	$5t^2 - 12t + 4$	$\frac{2}{5} = 0.4$	2
15	7	$7t^2 - 4t - 4$	$\frac{2-4\sqrt{2}}{7} \approx -0.52$	$\frac{2+4\sqrt{2}}{7} \approx 1.09$
16	7	$7t^2 - 8t$	0	$1\frac{1}{7} \approx 1.14$
17	7	$7t^2 - 12t + 4$	$\frac{6-2\sqrt{2}}{7} \approx 0.45$	$\frac{6+2\sqrt{2}}{7} \approx 1.26$
18	7	$7t^2 - 16t + 8$	$\frac{8-2\sqrt{2}}{7} \approx 0.74$	$\frac{8+2\sqrt{2}}{7} \approx 1.55$
19	7	$7t^2 - 20t + 12$	$\frac{6}{7} \approx 0.86$	2

У 4.2.5 вказано мінімальну систему несерійних частково впорядкованих множин, на яких реалізуються всі  $P$ -визначальні поліноми. Вона складається із семи частково впорядкованих множин ширини 2.

У додатках приведено детальне обчислення визначників та вказано явний вигляд деяких допоміжних матриць, про які йде мова в розділі 2.

## ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено вивченню локальних деформацій додатних цілочислових квадратичних форм над полем дійсних чисел. Основна увага приділена квадратичним формам Тітса несерійних діаграм Динкіна та частково впорядкованих множин.

Описано цілочислові  $P$ -визначальні поліноми та  $P$ -граничні числа несерійних діаграм Динкіна відносно реберно-локальних деформацій. У кожному з випадків обчислено геометричні інваріанти  $P$ -зваженого відносно таких деформацій графа – діаметри, радіуси, центри, тощо. Такі ж інваріанти обчислено у випадку  $P$ -зважених графів відносно поточно-локальних деформацій. Зроблено порівняння трьох типів зважених діаграм Динкіна: відносно реберно-локальних і поточно-локальних деформацій та класичного випадку.

Описано цілочислові  $P$ -визначальні поліноми несерійних частково впорядкованих множин з вузловими елементами і доведено, що до таких множин зводиться загальний випадок. Описано цілочислові поліноми, які можуть бути цілочисловими  $P$ -визначальними поліномами несерійних частково впорядкованих множин, а також вказано їх корені. Вказано мінімальну реалізацію всіх цілочислових  $P$ -визначальних поліномів несерійних частково впорядкованих множин.

Автор щиро вдячний своєму науковому керівнику професору В. М. Бондаренку за постановку задач, цінні поради та постійну увагу до роботи.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Лісикевич В. А. Про реберно-локальні деформації додатних квадратичних форм Тітса для примітивних несерійних частково впорядкованих множин / **В. А. Лісикевич** // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика. – 2014. – Т.25, №2. – С. 82–90.

2. Бондаренко В. М. Описание  $P$ -граничных чисел реберного типа для  $P$ -несерийных примитивных ч.у. множеств / В. М. Бондаренко, **В. А. Лісикевич** // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 1: фізико-математичні науки. – 2014. – №16. – С. 31–48.

3. Бондаренко В. М. Про реберно-локальні деформації квадратичних форм Тітса найменших несерійних ч. в. множин / В. М. Бондаренко, **В. А. Лісикевич** // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2015. – Т.12, №3. – С. 175–183.

4. Бондаренко В. М.  $P$ -визначальні поліноми для несерійних частково впорядкованих множин ширини 2 / В. М. Бондаренко, **В. А. Лісикевич** //

Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика. – 2015. – Т.27, №2. – С. 30–40.

5. Bondarenko V. M. *On a deformation diameter of Dynkin diagrams* / V. M. Bondarenko, V. V. Bondarenko, **V. A. Lisykevych**, Yu. M. Pereguda // J. Algebra and discrete mathematics. – 2015. – Vol.19, №1. – P.39–43.

6. Бондаренко В. М. *Реберно-локальні деформації квадратичних форм Тітса несерійних діаграм Динкіна* / В. М. Бондаренко, **В. А. Лісикевич** // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика. – 2016. – Т.28, №1. – С. 35–47.

Тези конференцій:

7. Bondarenko V. M. *On a deformation diameter of Dynkin diagrams* / V. M. Bondarenko, **V. A. Lisykevych** // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Odessa, August 20-27, 2015: abstracts. – Odessa, 2015. – P. 23.

8. Bondarenko V. M. *On the diameter of Dynkin diagrams with respect to the point-local deformation* / V. M. Bondarenko, V. V. Bondarenko, **V. A. Lisykevych**, Yu. M. Pereguda // Міжнародна конференція молодих математиків: Київ, 3-6 червня 2015р., Тези доповідей. – Київ, 2015. – С. 8.

9. Лісикевич В. А. *Про  $P$ -визначальні поліноми для несерійних діаграм Динкіна* / **В. А. Лісикевич** // Сімнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука: Київ, 19-20 травня 2016р., Матеріали конференції, Т.2 (Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз). – Київ, 2016. – С. 129.

10. Лісикевич В. А. *Про опис  $P$ -визначальних поліномів для додатних квадратичних форм Тітса частково впорядкованих множин* / **В. А. Лісикевич** // XI літня школа. Алгебра, топологія, аналіз: Одеса, 1-14 серпня 2016р., Тези доповідей. – Київ, 2016. – С. 7-71.

## АНОТАЦІЯ

**Гайдук В. А.** *Реберно-локальні деформації додатних квадратичних форм Тітса.* – На правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра і теорія чисел. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2016.

Дисертаційна робота присвячена вивченню локальних деформацій додатних квадратичних форм Тітса, знаходженню їх  $P$ -визначальних поліномів та граничних чисел, а для квадратичних форм несерійних діаграм Динкіна додатково і обчисленню відповідних геометричних інваріантів.

Для несерійних діаграм Динкіна обчислено  $P$ -визначальні поліноми та  $P$ -граничні числа реберно-локальних деформацій квадратичних форм Тітса.

Обчислено діаметри, радіуси і центри несерійних діаграм Динкіна, оснащених ваговою функцією, яка задана  $P$ -граничними числами поточково-локальних деформацій чи максимальними  $P$ -граничними числами реберно-локальних деформацій. Доведено, що зважена несерійна схема Динкіна має єдиний центр відносно як поточково-локальних, так і реберно-локальних деформацій.

Показано, що будь-який  $P$ -визначальний поліном несерійної частково впорядкованої множини реалізується на частково впорядкованій множині ширини 2 з вузловим елементом, а для таких множин вказано явний вигляд  $P$ -визначальних поліномів для всіх пар порівняльних елементів. Вказано мінімальну систему несерійних частково впорядкованих множин, на яких реалізуються всі  $P$ -визначальні поліноми.

Виписано всі поліноми, які можуть бути цілочисловими  $P$ -визначальними поліномами для несерійних частково впорядкованих множин.

**Ключові слова:** матриця, діаграми Динкіна, частково впорядкована множина, квадратична форма, поточково-локальні деформації, реберно-локальні деформації, граничне число, визначальний поліном.

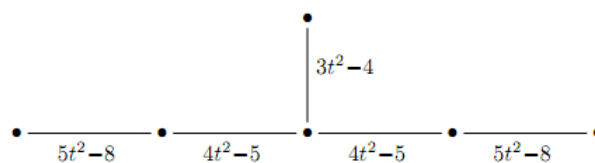
## АННОТАЦИЯ

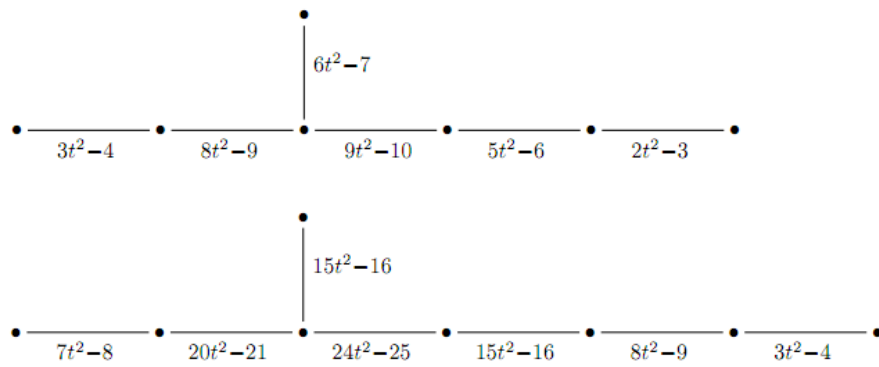
**Гайдук В. А.** Реберно-локальные деформации положительных квадратичных форм Титса. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, 2016.

Диссертация посвящена изучению локальных деформаций положительных квадратичных форм Титса, нахождению их  $P$ -определяющих полиномов и предельных чисел, а для квадратичной формы несерийных диаграмм Дынкина дополнительно и вычислению соответствующих геометрических инвариантов.

Для несерийных диаграмм Дынкина вычислены целочисленные  $P$ -определяющие полиномы реберно-локальных деформаций квадратичной формы Титса:





Вычислены диаметры, радиусы и центры несерийных диаграмм Дынкина, оснащенных весовой функцией, которая задана  $P$ -граничными числами точечно-локальных деформаций или максимальными  $P$ -граничными числами реберно-локальных деформаций. Доказано, что взвешенная серийный схема Дынкина имеет единственный центр относительно как точечно-локальных, так и реберно-локальных деформаций.

Показано, что любой  $P$ -определяющий полином несерийного частично упорядоченного множества реализуется на частично упорядоченном множестве ширины 2 с узловым элементом, а для таких множеств указано явный вид  $P$ -определяющих полиномов для всех пар сравнимых элементов. Указана минимальная система несерийных частично упорядоченных множеств, на которых реализуются все  $P$ -определяющие полиномы.

Выписаны все полиномы, которые могут быть целочисленными  $P$ -определяющими полиномами для несерийных частично упорядоченных множеств.

**Ключевые слова:** матрица, диаграммы Дынкина, частично упорядоченное множество, квадратичная форма, точечно-локальные деформации, реберно-локальные деформации, предельное число, определяющий полином.

## ABSTRACT

**Haydyk V. A.** *Edge-local deformations of positive quadratic Tits forms.* – On the rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.06 – algebra and number theory. – Taras Shevchenko Kyiv National University, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to the study of local deformations of positive quadratic Tits forms, finding their  $P$ -defining polynomials and limiting numbers, and calculation the corresponding geometric invariants for quadratic forms of nonserial Dynkin diagrams.

For nonserial Dynkin diagrams. it is calculated the  $P$ -defining polynomials and  $P$ -limiting number of edge-local deformations of quadratic forms Tits.

It is calculated diameters, radii and centers of nonserial Dynkin diagrams equipped by the weighted function given by  $P$ -limiting numbers of pointwise-local deformations or maximum  $P$ -limiting numbers of edge-local deformations. It is proved that the weighted nonserial Dynkin has a single center concerning pointwise-local or local-edge deformations.

It is shown that every  $P$ -defining polynomial of a non-serial partially ordered set implemented by a partially ordered set of width 2 with nodal point, and for such sets it is indicated the explicit form of  $P$ -defining polynomials for all pairs of comparable elements.

It is written a minimal system of nonserial partially ordered sets, on which all the  $P$ -defining polynomials are implemented.

It is written all polynomials that can be integral  $P$ -defining polynomials for nonserial partially ordered sets.

**Keywords:** matrix, Dynkin diagrams, partially ordered set, quadratic form, pointwise-local deformations, edge-local deformations, limiting number, defining polynomial.