УДК 514.112 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.8**

Олександр ПРИШЛЯК, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.
ORCID ID: 0000-0002-7164-807X
e-mail: prishlyak@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Світлана Білун, Канд. фіз.-мат. наук.
ORCID ID: 0000-0003-2925-5392
e-mail: bilun@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ГЕОМЕТРІЯ ТА ТОПОЛОГІЯ ПРОЄКТИВНОЇ ПЛОЩИНИ

Анотація. *Описано топологічну структуру та геометричні властивості проєктивної площини, а також її групу рухів, що породжують проєктивні перетворення евклідової площини.*

Ключові слова: *проєктивна площина; група рухів; топологічна структура.*

1. Вступ.

Актуальність дослідження. В комп'ютерній графіці при русі об'єкта спостереження, зображення нерухомих тривимірних тіл на площині весь час проєктуються з різних точок. Вони між собою пов'язані проєктивними перетвореннями площини. Це пояснює актуальність робіт з проєктивної геометрії (Greenberg, 1974) (Борисенко, 1995), (Beutelspacher, Rosenbaum, 1998), (Hilbert, Cohn-Vossen, 1999) (Пришляк, 2013).

Об'єктом дослідження є проєктивна площина або, більш загально, проєктивний простір. Під n-вимірним проєктивним простором розуміють простір 1-вимірних підпросторів (прямих, що проходять через початок координат) в евклідовому просторі розмірності $n+1$. При цьому відстань між точками проєктивного простору – це кут між відповідними прямими.

Основна мета цієї статті – описати топологічну структуру та геометричні властивості проєктивної площини, а також її групу рухів. Ми пояснимо, звідки береться її назва, а також, що таке нескінченно віддалена пряма, що фігурує в традиційному означенні проєктивної площини. В роботі поряд з важливими фактами теорії наводимо низку вправ, яку читачеві пропонуємо розв'язати самостійно.

Ми використовуємо методи диференціальної геометрії та теорії груп. Зокрема властивості орбіт під дією групи використовуються як для описання топологічних властивостей проективного простору, так і його групи рухів, а для описання властивостей проективних прямих ми використовуємо геодезичні лінії.

2. Основні означення та результати.

2.1. Проєктивна пряма RP^1. *Дійсна проєктивна пряма* – це множина одновимірних підпросторів двовимірного простору або, іншими словами, прямих на площині, що проходять через початок координат. *Відстань між прямими* визначається як найменший (тобто гострий або прямий) кут між ними.

Вправа 1. *Перевірте, що так визначена відстань задовольняє аксіомам метрики*.

Опишемо топологічні та геометричні властивості проєктивної прямої. Нагадаємо,

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

що геометричні властивості – це ті, що зберігаються при ізометріях (бієктивних відображеннях, що зберігають відстань або довжини кривих), а топологічні властивості зберігаються при гомеоморфізмах (неперервних бієктивних відображеннях, обернені до яких також неперервні). Для цього побудуємо відображення $p: RP^1 \to S_{\frac{1}{2}}$ проєктивної прямої на коло радіуса $\frac{1}{2}$ за формулою

$$p(\alpha) = \left\{\frac{1}{2}\cos(2\alpha), \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right\},$$

де α – кут нахилу відповідної прямої.

Вправа 2. *Перевірте, що відображення p є гомеоморфізмом.*

Вправа 3. *Перевірте, що відображення p є ізометрією*.

2.2. Означення проєктивної площини RP^2. Проєктивна площина є проєктивним простором розмірності 2.

Означення 1. *Дійсна проєктивна площина* – це *множина одновимірних підпросторів тривимірного евклідового простору*.

Розглянемо в тривимірному евклідовому просторі сферу S^2 з центром у початку координат і радіуса 1. Кожний одновимірний підпростір є прямою, що проходить через початок координат. Вона перетинає сферу по парі діаметрально протилежних точок. Тому існує бієкція між одновимірними підпросторами і парами діаметрально протилежних точок на сфері.

Означення 2. *Проєктивна площина є факторпростором двовимірної сфери за відношенням еквівалентності породженим симетрією відносно центра сфери (клас еквівалентності - це пара діаметрально протилежних точок):*

$$PR^2 = S^2 /\sim, \text{ де } p \sim p \text{ або } p \sim -p, \; p \in S^2.$$

На S^2 можна задати дію групи $Z_2 = \{1, -1\}$ як $1p^{\cdot} = p$ і $-1p^{\cdot} = -p$. Тоді проєктивна площина є множина орбіт цієї дії: $RP^2 = \frac{S^2}{Z_2}$.

Опишемо ще один спосіб побудови проєктивної площини. Нагадаємо, що в топології кажуть, що *точки склеєні*, якщо вони попадають в один клас еквівалентності при факторизації. Щоб склеїти діаметрально протилежні точки сфери, спочатку склеїмо точки верхньої півсфери з точками нижньої півсфери (без екватору). Ортогонально спроєктуємо отриману нижню півсферу на горизонтальну площину. Отримаємо двовимірний диск (круг) D^2, у якого потрібно склеїти симетричні точки межі.

Означення 3.

$$PR^2 = D^2 /\sim, \text{ де } p \sim p \text{ або } p \sim -p, \; p \in \partial D^2.$$

Замість ортогональної проекції застосуємо центральну проекцію нижньої півсфери з центра сфери на площину $z = -1$. При цьому точки нижньої півсфери бієктивно відображаються на точки площин, а точки екватора переходять в точки на нескінченності.

Означення 4. *Проєктивна площина – це евклідова площина з нескінченно віддаленими точками. Кожна така нескінченно віддалена точка відповідає класу еквівалентності паралельних прямих. Цей клас еквівалентності також називають напрямком. При цьому множина нескінченно віддалених точок утворює проєктивну пряму*.

Повсякчасне застосування проєктивної площини та відстані: коли ми дивимось на об'єкт в тривимірному просторі, то сприймаємо промені від нього на сітківку ока. При цьому відстані та розміри об'єктів нами оцінюються за допомогою кутів між цими променями, тобто за допомогою проєктивної метрики або відстані на сфері (сітківці). При обертанні голови відбуваються проєктивні перетворення (ізометричні перетворення сфери).

2.3. Топологічна структура.

Теорема 1. *На проєктивній площині існує замкнена крива, яка розбиває проєктивну площину на дві частини, одна з яких гомеоморфна листу Мьобіуса, а інша двовимірному диску.*

Наслідок 1. *Якщо з проєктивної площини викинути досить малий регулярний окіл довільної точки, то отримана множина гомеоморфна листу Мьобіуса*.

Наслідок 2. *Проєктивна площина є неорієнтованою поверхнею*.

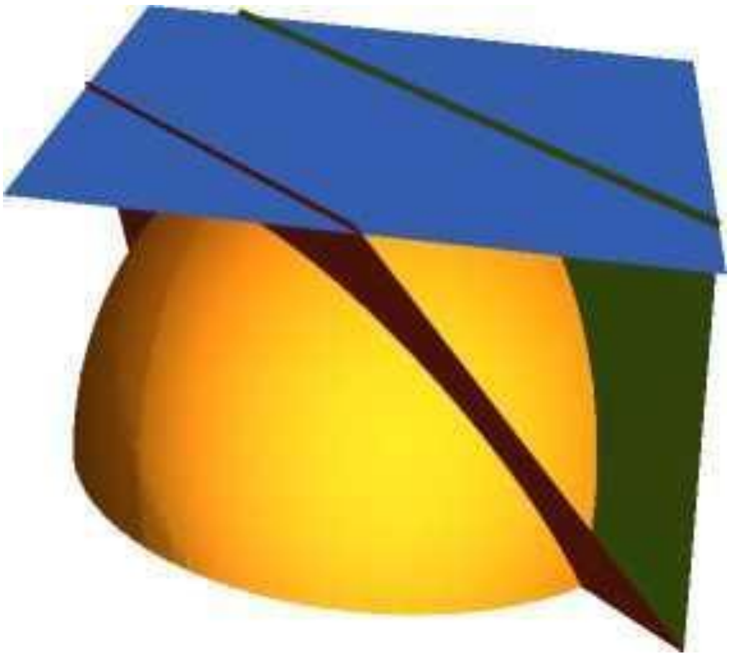


Рис. 1: Дві паралельні прямі, що перетинаються в точці на нескінченності

Насправді кожна замкнена неорієнтована поверхня може бути отримана як деяке число проєктивних площин, з яких викинуті двовимірні диски, а межі отриманих дірок попарно склеєні за допомогою деяких гомеоморфізмів.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

2.4. Геометричні властивості. Локальні властивості проєктивної площини такі самі, як на одиничній сфері.

Проєктивна пряма – двовимірний підпростір. Оскільки двовимірний підпростір (площина, що проходить через початок координат) перетинається з одиничною сферою S^2 за колом радіусу 1 з центром в початку координат (велике коло), то після ототожнення па ньому діаметрально протилежних точок знову отримаємо коло. Це значить, що проєктивна пряма гомеоморфна колу, тобто є замкненою кривою.

Теорема 2. *Найкоротша крива між двома точками проєктивного простору є відрізком проєктивної прямої*.

Нагадаємо, що кут між кривими на поверхні визначається як кут між їх дотичними у точці перетину.

Вправа 4. *Довести, що кут між проєктивними прямими дорівнює куту між їх двовимірними просторами і дорівнює куту між нормалями до них*.

Зауважимо, що ортогональне доповнення у тривимірному просторі задає бієкцію між проєктивними прямими та точками проєктивного простору.

Вправа 5. *Довести, що площа трикутника, утвореного проєктивними прямими, дорівнює сумі його кутів мінус* π.

Наслідок. *Сума кутів трикутника в проєктивній геометрії більша за* π.

2.5. Група рухів проєктивної площини.

Група рухів проєктивної площини пов'язана з групою рухів сфери, для яких образи діаметрально протилежних точок буть діаметрально протилежними. Рухи на сфері утворюють групу ортогональних перетворень $O(3)$ і вони переводять діаметрально протилежні точки в такі самі. Але оскільки центральна симетрія задає тотожне перетворення проєктивної площини, то слід профактеризувати групу $O(3)$ за цим претворенням. Отримаємо групу $SO(3)$. Її елементи є обертаннями навколо осей в тривимірному просторі.

Вправа 6. *Довести, що як топологічний простір ця група гомеоморфна проєктивному простору розмірності* 3.

2.6. Однорідна система координат.

$$x\colon y\colon z = kx\colon ky\colon kz$$

За допомогою однорідних координат можна побудувати атлас карт на проєктивній площині:

1) перша карта $x \neq 0$, $x\colon y\colon z \to \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$, параметризація $(y,z) \to 1\colon y\colon z$;
2) друга карта $y \neq 0$, $x\colon y\colon z \to \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)$, параметризація $(x,z) \to x\colon 1\colon z$;
3) третя карта $z \neq 0$, $x\colon y\colon z \to \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$, параметризація $(y,z) \to x\colon y\colon 1$.

Однорідні рівняння задають криві в проєктивній площині. Проєктивна пряма задається однорідним рівнянням першого порядку $Ax + By + Cz = 0$.

Якщо $F(x,y) = 0$ – рівняння кривої в третій карті, то її однорідне рівняння буде мати вигляд $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$.

3. Доведення.

*Доведення теореми 1***.** Розглянемо на сфері множину точок, відстань яких до екватора не перевищує $\frac{1}{3}$. Ця множина гомеоморфна циліндру. Після ототожнення діаметрально протилежних точок на ньому отримаємо лист Мьобіуса. (Вправа: довести це.) Якщо цю множину викинути зі сфери, то отримаємо два диска (один у верхній, а інший у нижній півсфері). Після склеювання діаметрально протилежних точок отримаємо один диск. Його границя – шукана крива. Отже, проєктивна площина є об'єднання диска і листа Мьобіуса.

∎

Доведення теореми 2. Будемо використовувати основну властивість геодезичних ліній, що доводиться у курсі диференціальної геометрії, про те, що найкоротша крива між двома точками є геодезичною. Отже, слід показати, що проєктивні прямі, і тільки вони, є геодезичними на проєктивній площині. За означенням, *геодезична*, це крива, у якої геодезична кривина дорівнює 0. Це означення носить локальний характер, тому треба показати, що великі кола є геодезичними на одиничній сфері. Оскільки таке коло лежить в площині, що перпендикулярна до дотичної площини, то при проекції його на дотичну площину вийде відрізок. Оскільки геодезична кривина – це кривина проекції на дотичну площину, а кривина (швидкість обертання дотичного вектора при русі по кривій з одиничною швидкістю) відрізка дорівнює 0, то великі кола є геодезичними. Оскільки через кожну точку сфери в довільному напрямку з дотичного простору можна провести велике коло, то інших геодезичних немає.

∎

4. Приклади.

Приклад 1. *Як правильно зобразити квадрат (прямокутник) у горизонтальній площині?*

Розв'язання. Ми припускаємо, що дивимось прямо, тому сприймаємо зображення як на вертикальній площині (наприклад, моніторі), тобто в першій карті (рис. 2). Горизонтальній площині відповідає третя карта. Нехай квадрат має рівняння в ній

$$x + y = 1, x + y = 2, x - y = 1, x - y = 2.$$

Однорідні рівняння цих прямих мають вигляд

$$x + y = z, x + y = 2z, x - y = z, x - y = 2z.$$

Тоді в першій карті їх рівняння будуть мати вигляд:

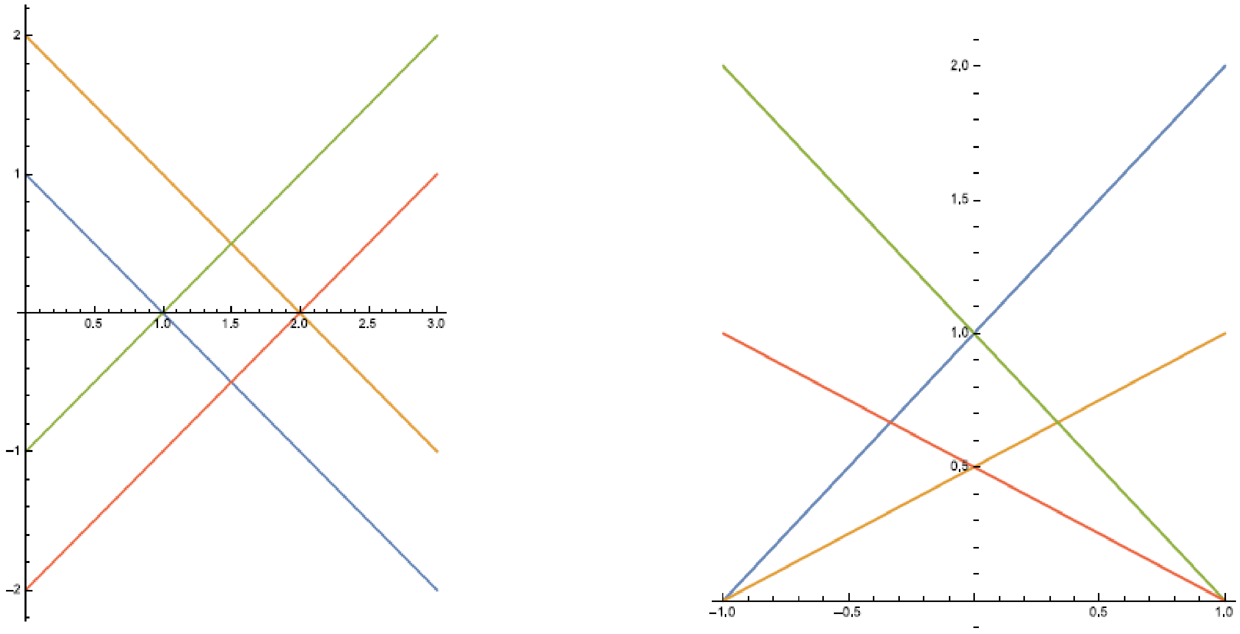
$$1 + y = z, 1 + y = 2z, 1 - y = z, 1 - y = 2z.$$

Отже, перші дві прямі будуть перетинатися в точці (на нескінченості)

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$y = -1, z = 0,$$

а останні дві – в точці $y = 1$, $z = 0$.



а) б)

Рис.2. Квадрат в різних картах.

Приклад 2. *Довести, що будь-які дві паралельні горизонтальні прямі в першій карті перетинаються в точці на прямій* $z = 0$.

Цю пряму зображують па рисунках як обрій, а любі дві прямі, що паралельні горизонтальній площині і паралельні між собою, як прямі, що перетинаються на обрії. Це широко використовується в комп'ютерній графіці, наприклад, в програмі Inkscape для створення прямокутних паралелепіпедів (рис. 3).

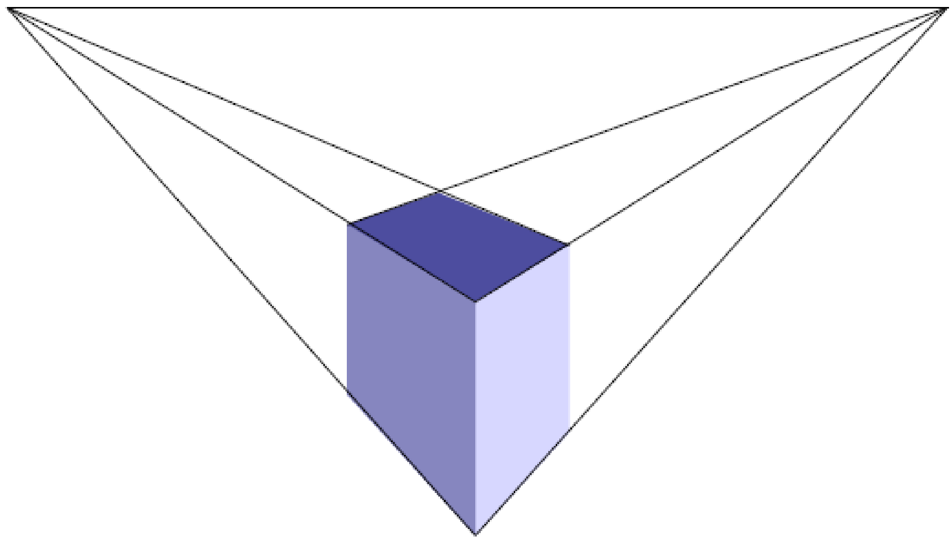


Рис. 3: 3D паралелепіпед в Inkscape

Приклад 3. *Знайти кут при вершині* A *та довжину сторони* AB *трикутника* ABC, $A(1:0:0)$, $B(a:b:1)$, $C(c:1:d)$.

Вказівка. Скористайтися тим, що відстань між точками в проективній геометрії дорівнює куту між відповідними прямими.

Приклад 4. *Знайти кут між проєктивними прямими, заданими в третій карті рівняннями* $x = 0$ та $x = 1$.

Розв'язання. Однорідне рівняння першої прямої в третій карті буде $\frac{x}{z} = 0$ та $x = 0$ в проєктивній площині. Для другої кривої маємо рівняння $\frac{x}{z} = 1$ та $x - z = 0$, відповідно. Кут між проєктивними прямими дорівнює куту між векторами нормалей $\{1,0,0\}$, $1,\ 0,\ -1$ відповідних площин в тривимірному просторі і дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

Висновки

Проективна площина є замкненим неорієнтованим двовимірним многовидом найменшого роду (1), всі інші неорієнтовані двовимірні многовиди можна отримати з неї за допомогою операції зв'язної суми, тому описані в статті її топологічні властивості є важливими при роботі з такими об'єктами. Геометричні властивості проективної площини і проективних перетворень є необхідним елементом тривимірної комп'ютерної графіки.

Внесок авторів. Олександр Пришляк – концептуалізація, методика, емпіричне дослідження; Світлана Білун – збір і перевірка емпіричних даних.

Список використаних джерел

Борисенко О.А.(1995) *Диференціальна геометрія і топологія.* Х.: Основа. 209 с.

Пришляк О.О. (2013) *Топологія многовидів*. К.: Київський університет. 83 с.

Beutelspacher, Albrecht; Rosenbaum, Ute (1998). *Projective geometry: from foundations to applications*. Cambridge University Press.

Coxeter, Harold Scott MacDonald (1974). *Projective geometry*. Toronto, Ont.: University of Toronto Press,

Greenberg, M.J. (1980). *Euclidean and non-Euclidean geometries*. Freeman.

Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S. (1999). *Geometry and the imagination.* Chelsea.

Отримано редакцією журналу: 01.09.2023
Схвалено до друку: 24.06.2024

Aleksandr PRISHLYAK, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID ID: 0000-0002-7164-807X
e-mail: prishlyak@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Svitlana BILUN, Ph.D (Phys&Math)
ORCID ID: 0000-0003-2925-5392
e-mail: bilun@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

GEOMETRY AND TOPOLOGY OF THE PROJECTIVE PLANE

Abstract. *The topological structure and geometric properties of the projective plane are described, as well as its group of movements that generate projective transformations of the Euclidean plane.*

Keywords: *projective plane; groups of movements; topological structure.*