Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

на тему “Дослідження процесу озброєння в математичній моделі Річардсона”

Виконав студент 2 курсу, групи ОМ-2
спеціальності
113 Прикладна математика
Орган Богдан Сергійович ___________
Керівник Хусаінов Денис Ях’євич ___________

Роботу розглянуто й допущено до захисту на засіданні кафедри обчислювальної математики «5» травня 2023 р., протокол №7
Завідувач кафедри
проф. Сергій Ляшко ___________

Київ – 2023 р.

Зміст

Вступ

У даній роботі висвітлюються проблеми співвідношення теоретичних і прикладних аспектів політичного аналізу в контексті розуміння процесу моделювання, оскільки наукова модель включає ряд складових, одні з яких виражаються у формалізованій мові наукових теорій, а інші містяться в ній як неявні припущення і подання ціннісного характеру. Моделюванню політичних процесів (зокрема, військових конфліктів та процесів накопичення озброєнь й економічних витрат) передує їхня теоретична інтерпретація. З цієї точки зору модель політичного процесу є ніщо інше, як формалізоване вираження інтерпретації політичної дійсності. Розкриваються теоретичні підстави аналізу та моделювання політичних процесів. Методичною основою такого роду моделювання являються системна динаміка, теорія багаторівневих ієрархічних систем, міжрайонний міжгалузевий підхід (витрати - випуск), математичне прогнозування. Сучасний світовий стан характеризується збільшеною напруженістю та конфліктністю, що вимагає наукового вивчення та прийняття комплексних методологічно-конструктивних заходів для врегулювання складної зовнішньополітичної ситуації. Міжнародні науково-дослідницькі організації вкладають значні зусилля у стабілізацію та вирішення міжнародних конфліктів. Вони застосовують різні методи та методики для вивчення та прогнозування конфліктних ситуацій з метою запобігання новим міжнародним конфліктам, включаючи використання математичного моделювання. Останнє повинно допомогти уявити повну картину досліджуваного конфліктного процесу, його розвитку та врахувати всі можливі варіанти розвитку конкретної проблемної міжнародної ситуації, з урахуванням якісних характеристик вивчених протиріч та їхньої динаміки у числових показниках і параметрах. Це може дати можливість політикам-практикам та міжнародним структурам різних рівнів впливати на стабілізацію цих ситуацій. Питання використання методів та методик моделювання у практичному вирішенні міжнародних конфліктів стимулює подальші дослідження в цій галузі. Моделювання базується на вивченні основних характеристик та властивостей об'єктів та процесів шляхом оцінки їх кількісних характеристик, аналізу динаміки подій, а також розкритті структурних елементів модельованого явища, їх якісних характеристик та параметрів, що їх описують, а також передбаченні можливих нових станів досліджуваного об'єкту (процесу або явища), що підлягає моделюванню. Таким чином, модель представляє собою систему елементів, яка відтворює властивості, параметри, зв'язки та функції об'єкта дослідження, а процес моделювання - це процес побудови моделі досліджуваного об'єкта. У сучасних умовах вивчення міжнародних конфліктів застосування методів моделювання дозволяє більш детально встановити зв'язки з окремими факторами конфліктів та конкретними складовими конфліктних ситуацій. Оскільки модель представляє собою систему логічних, математичних або інших об'єктів, зв'язків і відношень, які відтворюють з максимальним або щонайліпшим ступенем подібності фрагмент реальності, що підлягає комплексному детальному вивченню та відтворенню за допомогою математичного апарату та алгоритму дій і розв'язання складних рівнянь, які описують ці явища та процеси, то статистика всіх характеристик системи, включаючи міжнародні структури та процеси, є неабияк важливою практичною складовою математичного моделювання міжнародних конфліктів.

Розділ 1. Математичне моделювання конфліктних ситуацій.

Розглянемо математичну модель політичної поведінки, що відома як модель Річардсона, на прикладі гонки озброєнь. Вона примітна тим, що враховує дію лише трьох факторів, що робить її з певного боку відносно простою. Перший фактор полягає в тому, що держава X відчуває наявність військової загрози з боку противника – держави Y. Чим більшу кількість озброєння має в своєму розпорядженні Y, тим більше озброєння захоче придбати X у відповідь на загрозу. Однак у той самий час держава X змушена вирішувати і актуальні соціальні питання, і не може перевести всю свою економіку на рейки військового виробництва. Отже, чим більшою кількістю озброєння буде володіти X, тим менше додаткових озброєнь воно зможе придбати через існуючий тягар витрат. І, нарешті, на думку Річардсона, існують і минулі образи, що впливають на загальний рівень озброєння. Та сама логіка, яка застосовна до держави X, діє і щодо держави Y, для якої складається подібне рівняння. З математичної точки зору все це міркування зводиться до двох рівнянь:

$$X_{t+1} = kY_{\mathrm{t}} - aX_t + g,$$

$$Y_{t+1} = mX_t - bY_t + h.$$

Члени рівнянь X_t та Y_t визначають величини рівнів озброєння у момент часу t, X_{t+1} та Y_{t+1} – у момент часу t +1. Коефіцієнти k, m, a і b усі є позитивними величинами, а g і h – позитивними чи негативними залежно від цього, наскільки загалом вороже чи дружньо налаштовані держави X і Y стосовно одне одного. Величина загрози відображена в членах kY_t і mX_t, оскільки чим більше ці числа, тим більша кількість озброєнь у протилежної сторони. Величина витрат відображена у членах aX_t та bY_t, оскільки за рахунок цих членів знижується рівень озброєння наступного року. Нарешті, константи g та h характеризують величину минулої образи, що у межах цієї моделі вважається незмінною.

Загалом принцип побудови моделі Річардсона базується на наступних припущеннях:

1. У гонці озброєнь (в якій приймають участь дві країни) кожна з країн буде прагнути наростити своє озброєння пропорційно розміру озброєння іншої.

2. Економіка є обмеженням для озброєння, що зменшує темпи зростання озброєння на величину, пропорційну розміру існуючих збройних сил.

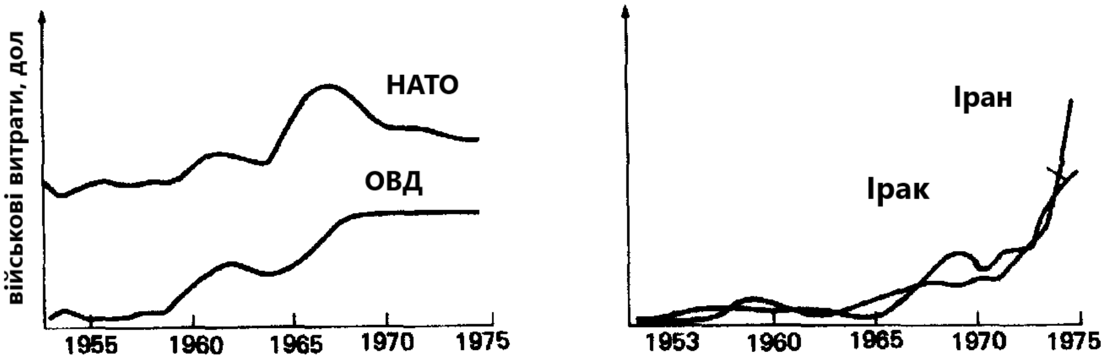
3. Держава нарощуватиме озброєння, керуючись своїми державними прагненнями, а також ворожістю до інших країн, навіть якщо жодна з них не являється загрозою для існування цієї держави.

У цій моделі рівновага сил має місце тоді, коли встановлюється стійкий стан за постійного рівня витрат. Стійкість досягається при $km < ab$, тобто, коли добуток коефіцієнтів реакції на дію іншої сторони менше, ніж добуток коефіцієнтів, що відповідні витратам на озброєння.

Нестійка рівновага має місце при $ab < km$ і свідчить про нестримну гонку озброєння.

Великий плюс моделі Річардсона полягає в її автономності. Це проявляється у тому, що якщо вам відомі значення коефіцієнтів та рівні озброєнь держав X та Y в якомусь одному певному році, ви можете за допомогою цієї моделі передбачити величину рівня озброєнь у будь-якому наступному році. Це надає моделі здатність, принаймні, теоретично, прогнозувати майбутнє, і Річардсон сподівався, що якщо політики зможуть передбачати наближення війни, то вони зможуть навчитися й уникати її.

Також однією з найважливіших характеристик моделі зазначеної моделі є стабільність. У найпростішій формі стабільність визначається тим, якими – прискореними чи уповільненими – темпами розвивається гонка озброєнь. На рис. 1.1 показано два приклади перегонів озброєнь: стабільних перегонів озброєнь між країнами НАТО та ОВД і нестабільних між Іраном та Іраком. Обидві схеми відображають розміри військових витрат згідно з даними щорічників Міжнародного інституту мирних досліджень у Стокгольмі (SIPRI). У разі нестабільних перегонів озброєнь, проблема запобігання війні була, звичайно, тим головним стимулом, який із самого початку підштовхнув Річардсона до його розробок. Виявилося, що його модель вміє дуже добре пророкувати війну, оскільки майже всім сучасним війнам передує нестабільна гонка озброєнь. Річардсон постулював це у своїй основній роботі, а згодом це було підтверджено іншими, більш систематичними дослідженнями.



(а) Стабільна гонка озброєнь

(б) Нестабільна гонка озброєнь

Рис. 1.1. Приклади гонки озброєнь.

Модель Річардсона – це один із представників дуже великого класу динамічних моделей, тобто таких, що моделюють розвиток деякого процесу у часі. Велика кількість цих моделей реалізуються у вигляді диференціальних рівнянь, а також багато запозичує математичний апарат з моделей демографічного зростання та інших біологічних процесів. Ще складнішими є динамічні комп'ютерні імітаційні моделі, які моделюють складні процеси за допомогою великих систем рівнянь, які піддаються вирішенню алгебраїчними засобами. Об'єктами комп'ютерних імітаційних моделей найчастіше є цілі держави або глобальні політичні та економічні системи, і ці моделі все частіше використовуються для відтворення сценаріїв типу “що буде, якщо…”, що стосуються різних сюжетів внутрішньої та міжнародної політики.

Наведена вище модель представляється більш переконливою, якщо замість озброєнь провести на ній вивчення проблем загрози, оскільки люди реагують на абсолютний рівень ворожості, що проявляється по відношенню до них іншими, і відчувають тривогу в міру, пропорційну рівню ворожості, яку вони самі відчувають. Характерною рисою такої моделі є точно виражена залежність рівня озброєнь однієї сторони від рівня озброєнь іншої. Це дозволяє кожній стороні коригувати рівень власних озброєнь виходячи з реакції її потенційних супротивників на рівень її озброєнь у минулому. Однак ця модель не передбачає послідовності виборів під час гонки озброєнь.

Річардсон не ставить верхньої межі витрат, але по суті багатство суспільства за вирахуванням мінімальної кількості благ, необхідних для підтримки існування його членів, є абсолютним обмеженням озброєнь. Взагалі, створення нової військової техніки потребує більших витрат, аніж збереження на озброєнні старої техніки, звідси випливає, що матеріальні витрати на озброєння не просто пропорційні рівню озброєння. Система швидше за все вибухне задовго до того, як буде реалізовано економічно здійсненний рівень озброєнь. Це відбудеться в силу наростання міжнародної напруженості, хоча ці змінні і не включені в модель самі по собі.

Модель Річардсона не дає відповіді на запитання, чи призводить гонка озброєнь до війни або військового конфлікту. Проте є всі причини вважати, що стан війни іноді являється наслідком збільшення напруженості й появі конфліктів, пов’язаних із ростом озброєнь самих по собі. Можна навіть припустити, що якась країна може свідомо спровокувати конфлікт в сприятливий для неї момент часу. Вона може піти на це, для того щоб зупинити процес нарощування озброєння ціною великих затрат для економіки або щоб не відстати від потенційного супротивника у перегонах озброєнь.

Узагальнення моделі для n країн було використано Річардсоном для вивчення гонки озброєнь у 1932-1939 рр. Він дійшов висновку, що модель дозволяє з достатнім ступенем достовірності прогнозувати результати цих перегонів озброєнь. Річардсон також звернув увагу на зростання тенденції до нестійкості із зростанням величини n.

Ці гарні збіги моделі Річардсона з реальністю демонструють експонентний характер зростання витрат на озброєння протягом обох періодів. Немає сумнівів у тому, що існує багато інших моделей, які покажуть такі ж експоненційні тенденції. У моделі Річардсона коефіцієнти приймають різні значення для різних проявів гонки озброєння, і тому для виявлення закону освіти значень цих змінних, а також для використання цієї моделі з метою прогнозування потрібні дані щодо великого історичного матеріалу.

Необхідно розробити загальнішу і меншу механістичну теорію, здатну розглянути раціональна поведінка та пояснювальну взаємозалежність нарощування озброєнь та виникнення конфліктів. Однак і модель Річардсона може бути використана як індикатор, що запобігає державі про те, що їх озброєння досягли певної встановленої раніше межі і що продовження гонки озброєнь може призвести до великої загрози.

Висловлювалися думки, що війна необхідна людині як стимул, що концентрує його волю та зусилля на забезпечення прогресу. Цю ідею зазвичай намагаються підкріпити посиланнями на історичні дані. Безперечно, що в людині зберігаються пережитки варварства. Однак на становище, що склалося в наші дні, впливає наше минуле, а війни є далеко не єдиним джерелом енергії і прояви творчого початку в людині. Встановлення миру та безпеки на землі — альтернатива війні — дозволить людині надати своїй діяльності набагато глибшого сенсу та створити світ, у якому стимулом для прогресу будуть безпека та співпраця народів, а не збройна боротьба та чвари між ними.

Розділ 2. Основні підходи при побудові фазового портрета на площині. Стійкість. Другий метод Ляпунова.

2.1. Фазовий портрет на площині. Основні означення.

До якісних методів дослідження з метою аналізу поведінки динаміки системи належать теорія стійкості руху та класифікація точок спокою. При побудові математичної моделі реального явища, зазвичай, певні властивості даного явища опускаються, або ідеалізуються. Тож виникає питання, чи адекватно математична модель описує явище. Нехай математична модель представлена у вигляді наступної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = F_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dot{y}_2 = F_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ \dot{y}_n = F_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \qquad (2.1.1)$$

Початкові умови будуть:

$$y_1(t_0) = y_1^0,\, y_2(t_0) = y_2^0,\, \dots,\, y_n(t_0) = y_n^0.$$

Оскільки ці умови є результатами вимірів, вони отримані з певними помилками. Тож необхідно зрозуміти вплив цих помилок на розв'язок системи. Помилки в даному випадку називаються збуреннями. Якщо навіть малі зміни початкових даних можуть сильно змінити розв'язок, то отримана математична модель, що представляє собою систему звичайних диференціальних рівнянь, навіть приблизно не може описувати явище, що досліджується.

Перепишемо зазначену систему диференціальних рівнянь (2.1.1) в компактнішому вигляді:

$$\dot{y} = F(y, t). \qquad (2.1.2)$$

Розв'язок цієї системи рівнянь буде мати вигляд

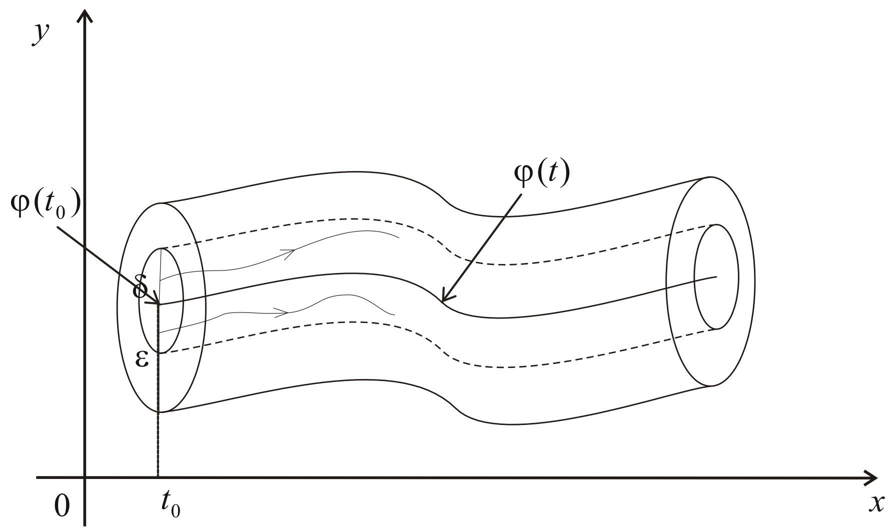
$$y = \phi(t),$$

тут $\phi(t)$ – векторна функція, що складається з n-неперервно диференційованих функцій $\phi^T(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))$.

Використовуватимемо одну з норм Евклідового простору R^n для запису наступної рівності:

$$\|\phi(t) - y(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\big(y_i(t) - \phi_i(t)\big)^2}.$$

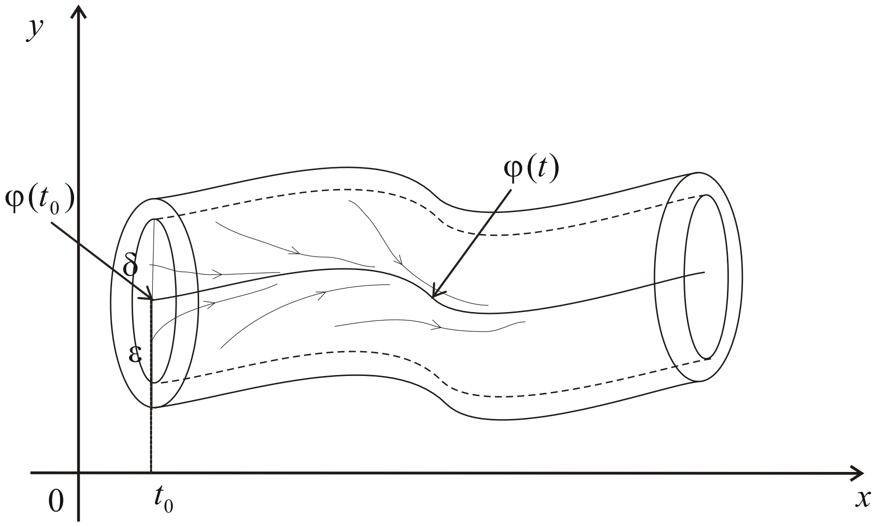
Наведемо означення. Розв’язок $y = \phi(t)$ системи (2.1.2) називається *стійким по Ляпунову* (рівномірно за часом), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого іншого розв’язку $y = y(t)$ системи (2.1.1) при $t > t_0$ буде виконуватись $\|\phi(t) - y(t)\| < \varepsilon$, лише $\|\phi(t_0) - y(t_0)\| < \delta$. Наведемо рисунок в якості графічного представлення:



Розв’язок $y = \phi(t)$ системи (2.1.2) називається *асимптотично стійким* (рівномірно за часом), якщо він стійкий по Ляпунову та

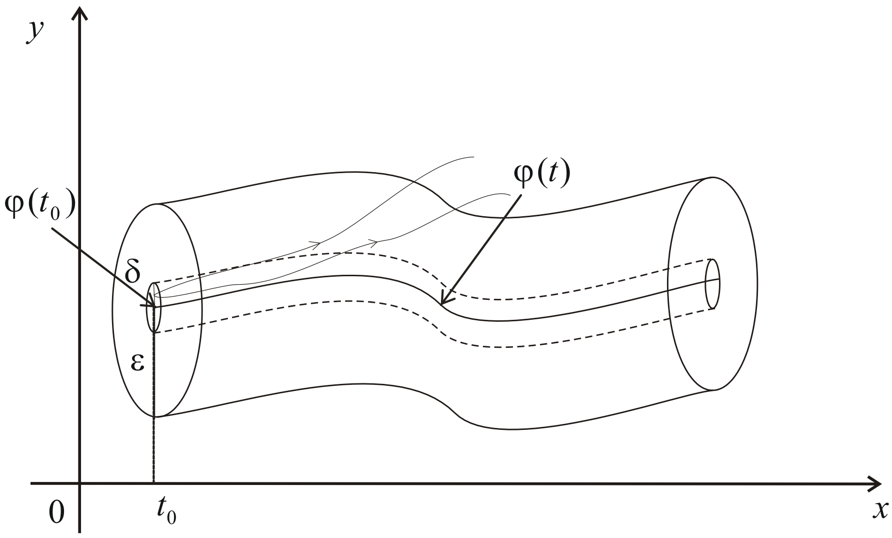
$$\lim_{t\to\infty}\|\phi(t) - y(t)\| = 0.$$

Область $\Delta(t_0) = \left\{y(t_0): \lim_{t\to\infty}\|\phi(t) - y(t)\| = 0\right\}$ називається *областю асимптотичної стійкості*. Наведемо рисунок:



Розв’язок $y = \phi(t)$ системи (2.1.2) називається *нестійким*, якщо для скільки завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує хоча б один розв’язок $\bar{y}(t)$ такий, що при деякому $T > t_0$ буде виконуватись

$\|\phi(T) - y(T)\| > \varepsilon$, хоча $\|\phi(t_0) - y(t_0)\| < \delta$, де $\delta > 0$ як завгодно мала величина.



Дослідження стійкості розв’язку $\phi(t)$ системи (2.1.2) завжди можна звести до дослідження стійкості нульового розв’язку (точки спокою) деякої іншої системи. Зробимо заміну

$$y = \phi(t) + x,$$

де x −нова невідома векторна функція. Після заміни система диференціальних рівнянь (2.1.2) прийме вигляд

$$\dot{\phi}(t) + \dot{x} = F(\phi(t) + x, t). \quad (2.1.3)$$

Оскільки $\phi(t)$ є розв”язком системи (2.1.2), то

$$\dot{\phi}(t) \equiv F(\phi(t), t). \quad (2.1.4)$$

Підставимо (2.1.4) в (2.1.3), і отримаємо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x} = F(\phi(t) + x, t) - F(\phi(t), t).$$

Або

$$\dot{x} = f(x, t), f(x, t) = F(\phi(t) + x, t) - F(\phi(t), t), \quad (2.1.5)$$

Оскільки $f(0, t) = F(\phi(t), t) - F(\phi(t), t) \equiv 0$, то $x(t) \equiv 0$ є розв’язком системи (6.1.5). Таким чином дослідження стійкості розв’язку $\phi(t)$ системи (2.1.2) зводиться до дослідження стійкості розв’язку $x(t) \equiv 0$ системи (2.1.5).

Отримана система диференціальних рівнянь (2.1.5) називається *системою рівнянь збурювань*.

Розглянемо системи лінійних диференціальних рівнянь. Для них умови стійкості можна сформулювати в більш конструктивному вигляді. А для лінійних систем зі сталими коефіцієнтами ці умови можна перевіряти для систем досить великої розмірності.

Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь

$$\dot{y} = A(t)y + f(t). \quad (2.1.6)$$

Нехай

$$\dot{x} = A(t)x \quad (2.1.7)$$

відповідна їй однорідна система. Тут $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - вектор розв’язків системи, $f(t)$ - неперервна векторна функція, $t_0 \le t < \infty$.

Означення 2.1.1. Лінійна система (2.1.6) називається *стійкою по Ляпунову (асимптотично стійкою)*, якщо всі її розв’язки $x(t)$ стійкі по Ляпунову (асимптотично стійкі).

Як буде показано нижче, в лінійних системах усі розв’язки одночасно або стійкі, або нестійкі. Цей факт не має місця для нелінійних систем, у яких одні розв’язки можуть бути стійкими, інші ні.

Теорема 2.1.1. Лінійна неоднорідна система (2.1.6) буде стійкою (асимптотично стійкою) тоді і тільки тоді, коли нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ відповідної однорідної системи (2.1.7) є стійким (асимптотично стійким).

Стійкість довільного розв'язку неоднорідної системи (2.1.6) не залежить від векторної функції $f(t)$, а цілком визначається матрицею $A(t)$.

Розглянемо однорідну систему зі змінною матрицею (2.1.7). Покажемо, що стійкість системи еквівалентна обмеженості всіх її розв'язків.

Теорема 2.1.2. Лінійна однорідна система (2.1.7) стійка по Ляпунову тоді і тільки тоді, коли всі її розв'язки $x = x(t)$ обмежені.

Теорема 2.1.3. Лінійна однорідна система диференціальних рівнянь (2.1.7) асимптотично стійка тоді і тільки тоді, коли всі її розв'язки $x(t)$ прямують до нуля при $t \to +\infty$, тобто

$$lim\, x\,(t) = 0, t \to +\infty\ .$$

Якщо лінійна система (2.1.7) асимптотично стійка, то областю її стійкості є весь простір. Для нелінійної системи не існує поняття *стійка система.* Якщо система нелінійна, то можливі випадки коли нульовий розв'язок є стійким, а ще існують нестійкі роз'язки. Крім того можливі випадки, коли всі розв'язки системи прямують до нуля, але нульовий розв'язок не є стійким. Тобто для нелінійних систем треба розглядати стійкість кожного розв'язку окремо.

Розглянемо однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\Gamma = \begin{bmatrix} p_1 & 1 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}, \qquad (2.1.8)$$

де $\Delta_1 = p_1 > 0$ – матриця зі сталими коефіцієнтами. Дослідимо на стійкість нульовий розв'язок $\Delta_2 = p_1 p_2 > 0$.

Теорема 2.1.4. Для лінійної однорідної системи зі сталими коефіцієнтами можливі такі випадки.

1. Для того, щоб нульовий розв'язок $p_1 > 0$ лінійної системи із сталими коефіцієнтами (2.1.8) був асимптотично стійким, необхідно і достатньо щоб усі корені характеристичного рівняння системи (2.1.8) мали від'ємну дійсну частину, тобто $p_2 > 0$, p_i.

2. Якщо хоча б один корінь характеристичного рівняння системи (2.1.8) має додатну дійсну частину, тобто існує $i = \overline{1, n}$, таке, що $\omega = f(i\omega)$, то нульовий розв'язок $0 \le \omega < \infty$ системи є нестійким.

3. Для того, щоб розв'язок $i = \sqrt{-1}$ лінійної системи із сталими коефіцієнтами (2.1.8) був стійким по Ляпунову, необхідно і достатньо, щоб усі корені характеристичного рівняння системи (2.1.8) мали недодатню дійсну частину, тобто $f(z)$, n, причому числа з нульовою дійсною частиною мали прості елементарні дільники, тобто клітка Жордана зводилася до одного елемента.

Для дослідження стійкості лінійної системи зі сталими коефіцієнтами треба розкрити характеристичне рівняння

$$\|R(x,t)\| \le N\|x\|^{\alpha+1},$$

переписати його у вигляді

$$N > 0 \qquad (2.1.9)$$

та дослідити його корені отриманого полінома.

Теорема 2.1.5. *(Необхідна умова стійкості)* Якщо характеристичне рівняння (2.1.9) має корені з від'ємною дійсною частиною, то всі коефіцієнти характеристичного рівняння (2.1.9) додатні, тобто $\alpha > 0$, $Re\,\lambda_i\,(A) < 0$.

Розглянемо нелінійну систему

$$\dot{x} = f(x,t), x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad (2.1.10)$$

або

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t),$$

$$i = \overline{1,n},$$

де $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ та $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $i, k = \overline{1, n}$ неперервні функції при $t_0 \le t < \infty$.

Нехай $f(0,t) \equiv 0$, тобто $x(t) \equiv 0$ є розв''язком системи.

Дослідимо нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ на стійкість використовуючи лінійне наближення. Ідея метода полягає в наступному: функції $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ розкладаються в ряд в околі початку координат та залишаються лише лінійні члени. Отримана система називається *лінеаризованою.* Висновок про стійкість нульового розв'язку нелінійної системи роблять виходячи зі стійкості нульового розв"язку лінаризованої системи.

Нехай система (2.1.10) після виділення лінійної частини має вигляд

$$\dot{x} = A(t)x + R(x,t), \qquad (2.1.11)$$

тоді система

$$\dot{x} = A(t)x \quad (2.1.12)$$

називається *системою лінійного наближення*. Дослідження стійкості нульового розв"язку вихідної нелінійної системи (2.1.10) проводиться за допомогою наступної теореми.

Теорема 2.1.6. Нехай система (2.1.12) стаціонарна, тобто матриця A не залежить від tта нелінійні члени задовольняють нерівності

$$\|R(x,t)\| \leq N\|x\|^{\alpha+1}, N > 0, \alpha > 0.$$

1. Якщо всі корені характеристичного рівняння мають від'ємні дійсні частини, тобто $Re\,\lambda_i\,(A) < 0$, то нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ вихідної нелінійної системи (2.1.10) буде асимптотично стійким.

2. Якщо знайдеться хоча б один корінь з додатною дійсною частиною, тобто знайдеться λ_s такий, що $Re\,\lambda_s\,(A) > 0$, то нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ вихідної нелінійної системи – нестійкий.

3. Якщо $Re\,\lambda_i\,(A) \leq 0,\, i = \overline{1,n}$ та існує хоча б один корінь λ_s такий, що $Re\,\lambda_s\,(A) = 0$, то про стійкість нульового розв'язку $x(t) \equiv 0$ нелінійної системи (2.1.10) нічого не можна сказати. Це, так званий, *критичний випадок*.

2.2. Другий метод Ляпунова.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x} = f(x,t), x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (2.2.1)$$

де $f(x,t)$ та $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ неперервні функції при $t_0 \leq t < \infty$. Крім того $f(0,t) \equiv 0$, тобто система має нульовий розв'язок.

Основна ідея другого методу А.М.Ляпунова полягає в тому, що стійкість нульового розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи (2.2.1) визначається з поведінки наперед визначеної функції Ляпунова.

Фізична інтерпретація наступна. Коливання маятника, чи рух кульки можна описати за допомогою систем диференціальних рівнянь. Ці системи мають два стани рівноваги – верхній та нижній. Верхній стан рівноваги – нестійкий, нижній – стійкий. Якщо за характеристичну функцію брати повну енергію, то стійкість буде там, де енергія мінімальна, причому, при переході до стійкого стану рівноваги енергія зменшується. Таким чином дослідження стійкості фізичної системи можна проводити, використовуючи функцію повної енергії (енергетичної функції).

Наведемо основні визначення та твердження методу функцій Ляпунова.

Розглянемо в деякій області $H \times R = \{t \geq t_0, \|x\| \leq h\}$ функцію $n+1$ змінних $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, або $V(x, t)$.

Означення 2.2.1. Функція $V(x)$ називається додатно визначеною, якщо $V(x) > 0$ при $x \neq 0$ та $V(0) = 0$.

Означення 2.2.2. Функція $V(x, t)$ називається додатно визначеною, якщо існує така додатно визначена функція $W(x)$, що $V(x, t) \geq W(x)$ та $V(0, t) \equiv 0$.

Означення 2.2.3. Функція $V(x, t)$ допускає нескінченно малу нижню границю, якщо існує додатно визначена функція $W_1(x)$ така, що $|V(x, t)| \leq W_1(x)$.

Означення 2.2.4. Повною похідною функції $V(x, t)$ у силу системи (2.1.1) називається функція

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + (gradV(x,t), f(x,t)) =$$

$$= \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_1} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t).$$

Наведемо основні теореми про стійкість та нестійкість руху. В основі другого методу Ляпунова лежать дві теореми про стійкість та теорема Четаєва про нестійкість.

Теорема 2.2.1. *(Перша Ляпунова про стійкість)* Нехай існує неперервно-диференційована функція $V(x,t)$, що задовольняє умовам:

1. $V(x,t)$ – додатно визначена в деякому околі $x=0$ (тобто $V(x,t)>0$);

2. повна похідна функції $V(x,t)$ у силу системи не додатна (тобто $\frac{dv(x,t)}{dt}\leq 0$).

Тоді нульовий розв’язок $x(t)\equiv 0$ системи (2.1.1) стійкий по Ляпунову.

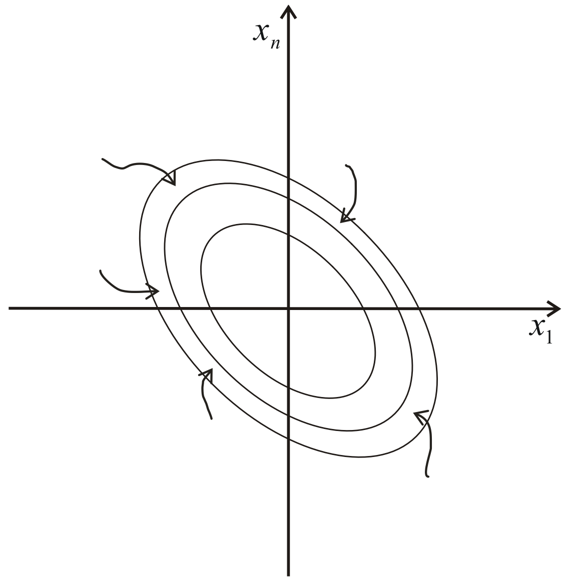


Рис.2.2.1. Геометрична інтерпретація 1-й теореми Ляпунова.

Теорема 2.2.2. *(Друга Ляпунова про асимптотичну стійкість).* Нехай існує неперервно диференційована функція $V(x,t)$, що задовольняє умовам:

1. $V(x,t)$ – додатно визначена (тобто $V(x,t)>0$);

2. $V(x,t)$ – допускає нескінченно малу вищу границю (тобто $|V(x,t)|\leq W_1(x)$);

3. повна похідна функції $V(x,t)$ у силу системи від’ємно визначена (тобто $\frac{dV(x,t)}{dt}<0$).

Тоді нульовий розв’язок $x(t)\equiv 0$ системи (2.2.1) асимптотично стійкий.

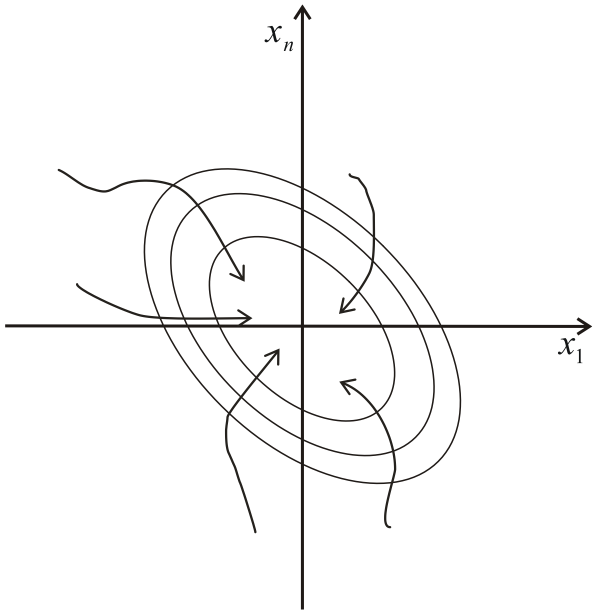


Рис.2.2.2. Геометрична інтерпретація 2-й теореми Ляпунова.

Окрім теорем про стійкість О.М.Ляпуновим було доведено дві теореми про нестійкість нульового розв’язку. Проте невдовзі конструктивнішу теорему про нестійкість було доведено М.Г.Четаєвим.

Теорема 2.2.3. *(Четаєва, про нестійкість)* Нехай існує неперервно диференційована функція $V(x,t)$, область додатності якої $\Pi(x,t) = \{(x,t): V(x,t) > 0\}$ при кожному фіксованому $t \geq t_0$ має ненульовий відкритий перетин $D_t(x)$, що примикає до початку координат, а на границі області $\Pi(x,t)$ виконується рівність $V(x,t) = 0$.

Якщо виконуються умови:

1. функція $V(x,t)$ обмежена в $\Pi(x,t)$;

2. в області $\Pi(x,t)$ справедлива нерівність $\frac{dV(x,t)}{dt} > 0$;

3. Існує функція $\beta(\alpha)$ така, що при $V(x,t) \geq a > 0$ буде $\frac{dV(x,t)}{dt} \geq \beta(\alpha) > 0$.

Тоді нульовий розв’язок $x(t) \equiv 0$ системи (2.2.1) нестійкий.

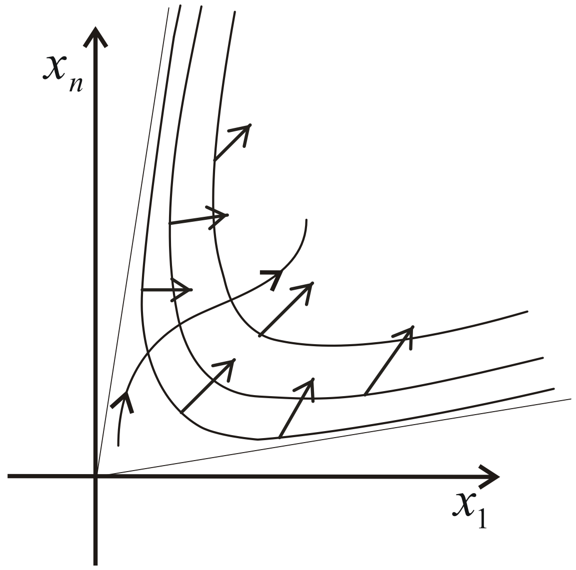


Рис.2.2.3. Геометрична інтерпретація теореми Четаєва.

Метод функцій Ляпунова допускає просту геометричну інтерпретацію:

1. Існування додатно визначеної функції Ляпунова означає існування всюди щільної системи поверхонь рівня $V(x,t)=a$, які не розширюються та охоплюють початок координат.

2. Нескінченно мала вища границя функції $V(x,t)$ означає, що поверхні рівня $V(x,t)=\alpha$ – не стягуються при $t\to+\infty$ до початку координат.

3. Умова $\frac{dV(x,t)}{dt}<0$, $\left(\frac{dV(x,t)}{dt}\leq 0\right)$ означає, що векторне поле системи спрямоване усередину областей, обмежених поверхнями рівня (або дотикається до них).

Розглянемо методи побудови функції Ляпунова.

В розглянутих вище теоремах використовується поняття додатної визначеності функції $V(x,t)$, яка найчастіше будується у вигляді квадратичної форми $V(x)=x^T Hx$ з деякою додатно визначеною матрицею $H.$ А для перевірки знаковизначеності матриці H використовують критерій Сильвестра.

Теорема 2.2.4. *(критерій Сильвестра)* Для того щоб квадратична форма $V(x)=x^T Hx$ була додатно визначеною необхідно і достатньо, щоб головні діагональні мінори матриці H були додатними.

До наступного часу не існує (і мабуть, не буде існувати) конструктивних методів побудови функції Ляпунова. Розглянемо деякі.

1. Нехай розглядається лінійна стаціонарна система на площині

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

Функцію Ляпунова шукаємо у вигляді квадратичної форми

$$V(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

Де A, B, C – невідомі сталі.

Виберемо сталі таким чином, щоб для похідної в силу системи виконувалось умова

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = -2(x^2 + y^2).$$

Після підстановки одержимо

$$(2Ax + 2By)(ax + by) + (2Cx + 2Dy)(cx + dy) = -2(x^2 + y^2).$$

Розкривши дужки, запишемо

$$Aax^2 + Baxy + Abxy + Bby^2 + Bcx^2 + Ccxy + Bdxy + Cdy^2 = -x^2 - y^2.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових ступенях, одержимо:

$$\left.\begin{matrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{matrix}\right| \left| \begin{matrix} aA + cB = 1 \\ bA + (a + d)B + cC = 0 \\ bB + dC = -1 \end{matrix} \right.$$

Звідси, розв’язуючи систему за правилом Крамера, маємо

$$A = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -1 & c & 0 \\ 0 & a + d & c \\ -1 & b & d \end{vmatrix}, B = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}, C = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a & c & -1 \\ b & a + d & 0 \\ 0 & b & -1 \end{vmatrix}.$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & a + b & c \\ 0 & b & d \end{vmatrix}.$$

Використовуючи критерій Сильвестра, запишемо умови додатної визначеності функції $V(x, t)$. Вони мають вигляд

$$A > 0 \text{ та } \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0.$$

2. Розглянемо рівняння коливання маятника

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + f(x) = 0,$$

Де $g(x)$ відновлюча сила, $f(x)$ – сила тертя. Зробимо заміну

$$x = x, \dot{x} = y$$

і перепишемо рівняння другого порядку у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) - g(x)y \end{cases}$$

Функцію Ляпунова беремо у вигляді повної енергії (суми кінетичної і потенціальної енергій)

$$V(x,y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x g(\tau)d\tau$$

Тоді для її похідної буде виконуватись

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = f(x)y + y[-f(x) - g(x)y] = -y^2 g(x)$$

Звідси умовами стійкості стану рівноваги буде мати вигляд

$$g(x) > 0, xf(x) > 0.$$

3. Розглянемо лінійну стаціонарну систему загального вигляду

$$\dot{x} = Ax, x \in R^n.$$

Функцію Ляпунова будуємо у вигляді квадратичної форми

$$V(x) = x^T Hx,$$

де H – деяка додатно визначена матриця. Повна похідна функції $V(x)$ в силу системи має вигляд

$$\frac{dv(x)}{dt} = \dot{x}^T Hx + x^T H\dot{x} = (Ax)^T Hx + x^T H(Ax) = x^T(A^T H + HA)x.$$

Будемо вимагати, щоб похідна дорівнювала від'ємно визначеній квадратичній формі

$$W(x) = -x^T Cx,$$

де C – деяка додатно визначена матриця. Тоді при заданій матриці C пошук додатно визначеної матриці H зводиться до розв‘язку матричного рівняння Ляпунова

$$A^T H + HA = -C.$$

Доведено, що для існування квадратичної функції Ляпунова для лінійних стаціонарних систем необхідною та достатньою умовою є асимптотична стійкість матриці A, тобто матриця A повинна мати власні числа з від’ємною дійсною частиною. Причому матриця H знаходиться з матричного рівняння Ляпунова при довільній додатно визначеній матриці C.

За допомогою вдало побудованої функції Ляпунова можна отримати не лише твердження про стійкість (асимптотичну стійкість, нестійкість) розв’язків системи, але й обчислити деякі характеристики динаміки, зокрема величину перерегулювання, час перехідного процесу, інтегральний критерій якості.

Нехай є лінійна стаціонарна система

$$\dot{x} = Ax, \ t \geq t_0.$$

Її дослідження проводимо за допомогою квадратичної функції Ляпунова $V(x) = x^T Hx$, симетрична, додатно визначена матриця якої знаходиться з матричного рівняння Ляпунова

$$A^T H + HA = -C.$$

Як було вказано вище, у випадку асимптотично стійкої матриці A це рівняння при довільній додатно визначеній матриці C має єдиний розв’язок – додатно визначену матрицю H. Для квадратичної форми мають місце двосторонні нерівності

$$\lambda \|x(t)\|^2 \big(x(t)\big)(H)\|x(t)\|^2{}_{max_{min}},$$

а для її повної похідної вздовж розв’язків системи нерівність

$$\frac{dV\big(x(t)\big)}{dt} \leq -\lambda(C)\|x(t)\|^2{}_{min}.$$

З правої частини двосторонньої нерівності отримуємо

$$-\|x(t)\|^2 \le -\frac{1}{\lambda_{max}(x(t))}.$$

Підставивши в нерівність для похідної функції Ляпунова, запишемо

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \le -\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}V(x(t))}.$$

Проінтегрувавши нерівність, отримаємо

$$V(x(t)) \le V(x(t_0))e^{-\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}(t-t_0)}}.$$

Знов використавши двосторонню нерівність, маємо

$$\lambda\|x(t)\|^2(x(t))_{min}$$

$$\le V(x(t_0))e^{-\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}(t-t_0)}} \le \lambda\|x(t_0)\|^2{}^{-\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}(t-t_0)}}{}_{max}$$

Звідси отримуємо мажорантну оцінку згасання розв'язків

$$\|x(t)\| \le \sqrt{\phi(H)}\|x(t_0)\|e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)(t-t_0)},\ \phi(H) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}},$$

$$\gamma(H) = \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}.$$

Виходячи з цієї оцінки отримаємо наступні характеристики динаміки систем.

1.Величиною перерегулювання лінійної системи називається відношення максимального відхилення збурень системи до мінімального. За допомогою отриманої нерівності ця величина обчислюється наступним чином

$$\max_{t\ge t_0}\left\{\frac{\|x(t)\|}{\|x(t_0)\|}\right\} = \sqrt{\phi(H)}.$$

2.Часом перехідного процесу називається проміжок часу, за який величина зберення системи, яка виходить з заданого ε −околу, попадає в δ −окіл, з якого вже не виходить.

Використовуючи оцінку збіжності, розв'язків системи, запишемо наступну нерівність

$$\sqrt{\phi(H)}\delta e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)(t-t_0)} \le \varepsilon.$$

Звідси

$$T(\varepsilon,\delta,H) \le \frac{2}{\gamma(H)} ln\left[\frac{\delta\sqrt{\phi(H)}}{\varepsilon}\right] =$$

$$= 2\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \ln\left[\frac{\delta}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}\right].$$

3. Інтегральним критерієм якості називається величина

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{+\infty} \|x(t)\| dt.$$

За допомогою мажорантної оцінки ця характеристика обчислюється таким чином

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{+\infty} \|x(t)\| dt \leq \int_{t_0}^{+\infty} \sqrt{\phi(H)} \|x(t_0)\| e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)(t-t_0)} dt =$$

$$= 2\frac{\sqrt{\phi(H)}}{\gamma(H)} \|x(t_0)\|.$$

Таким чином

$$I[x(t)] \leq 2\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} \|x(t_0)\|.$$

2.3. Рівняння з післядією (запізненням).

Математичні моделі, які описуються функціонально-диференціальними рівняннями, краще адаптуються для опису більшості динамічних об'єктів. У реальних об'єктах часто виникають ефекти запізнення, спричинені різними фізичними та технічними явищами, такими як транспортні затримки, затримки передачі інформації, затримки при прийнятті рішень і т.д. Такі затримки також можуть бути присутні у моделюванні економічних об'єктів, екологічних систем, медицинських процесах, динаміці популяцій та інших сферах. Наприклад, в хіміко-технологічних процесах затримки виникають через необхідний час для реакцій, що залежать від властивостей реагентів. Також динаміка транспортних засобів на воді відрізняється від динаміки на суші, і ці особливості можна врахувати, використовуючи запізнення. Існують інші фізичні та технічні варіанти інтерпретації запізнення.

Як зазначається багатьма авторами, повну класифікацію функціонально-диференціальних рівнянь остаточно не здійснено. Тому можна навести такого роду просту класифікацію рівнянь зі сталим запізненням.

Розглянемо наступне скалярне диференціальне рівняння.

$$\dot{x}(t) =$$
$$= f\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t), x(t-\tau), x'(t-\tau), x''(t-\tau), \dots, x^{m}(t-\tau)\right).$$

1. Якщо $n > m$. У такому випадку рівняння називається *диференціальним рівнянням із запізненням.* Для прикладу можна навести наступне рівняння:

$$\ddot{x}(t) = x(t) + 3x^2(t-\tau)\dot{x}(t-\tau).$$

Такого роду рівняння вивчені досить непогано, адже якісна теорія таких рівнянь тісно пов'язана з теорією звичайних диференціальних рівнянь.

2. Якщо $n = m$. У такому випадку рівняння називається *диференціальним рівнянням нейтрального типу.* Для такого типу можна навести приклад

$$\ddot{x}(t) = x(t) + 3x(t-\tau)\dot{x}(t-\tau) + \ddot{x}(t-\tau).$$

Рівняння нейтрального типу мають властивості як диференціальних рівнянь, так і функціональних рівнянь наступного вигляду:

$$x(t) = F(t, x(t-\tau)).$$

Говорячи про такі рівняння, їх теорія вже досліджена не так добре, як теорія диференціальних рівнянь із запізненням.

3. Якщо $n < m$. У такому випадку рівняння називається *диференціальним рівнянням із випередженням.* У якості прикладу можна навести:

$$\dot{x}(t) = x(t) + 3x(t-\tau)\dot{x}(t-\tau) + \ddot{x}(t-\tau).$$

Такого роду рівняння некоретні і дуже мало досліджені. Навіть кажучи про задачу Коші, для таких рівнянь вона ставиться некоректно. Впродовж руху в додатньому напрямі гладкість розв'язків на кожному кроці знижується, при цьому у вузлових точках є розриви.

Розділ 3. Комп'ютерне моделювання математичної моделі Річардсона.

Моделювання являється одним з найважливіших етапів при будь-якій проєктній діяльності. Воно широко застосовується в дослідженні систем різноманітної природи, але особливого значення приділяється соціальному управлінню в контексті методології системного підходу. Моделювання має велику вагу при вивченні економіко-політичних аспектів суспільства і дає змогу, зокрема, чисельно проаналізувати поведінку об'єкта чи явища, наприклад, в контексті цієї роботи, певні форми конфліктів та озброєння держав.

У рамках даної роботи для моделювання та побудови графіків буде використовуватися мова програмування Python.

3.1. Дослідження залежності швидкості зміни витрат від їх розміру.

Для початку розглянемо наступну ситуацію. Візьмемо дві країни, які умовно позначимо як X та Y, подібно до першого розділу роботи. Нехай A та B будуть позначати витрати країн X та Y відповідно на придбання озброєння, а A_0 та B_0 – відповідні сумісні витрати.

Тепер визначимо $X = A - A_0$ та $Y = B - B_0$ та в контексті даного випадку приймемо коефіцієнти $k = m$ та $a = b$ (див. рівняння в розділі 1). Тобто ми прийняли, що коефіцієнти реакцій (оборони) та втомленості (затрат) у країн рівні. Якщо ми підставимо ці вирази в рівняння моделі Річардсона, отримаємо:

$$X' = k(B - B_0) - a(A - A_0) + g$$

$$Y' = m(A - A_0) - b(B - B_0) + h$$

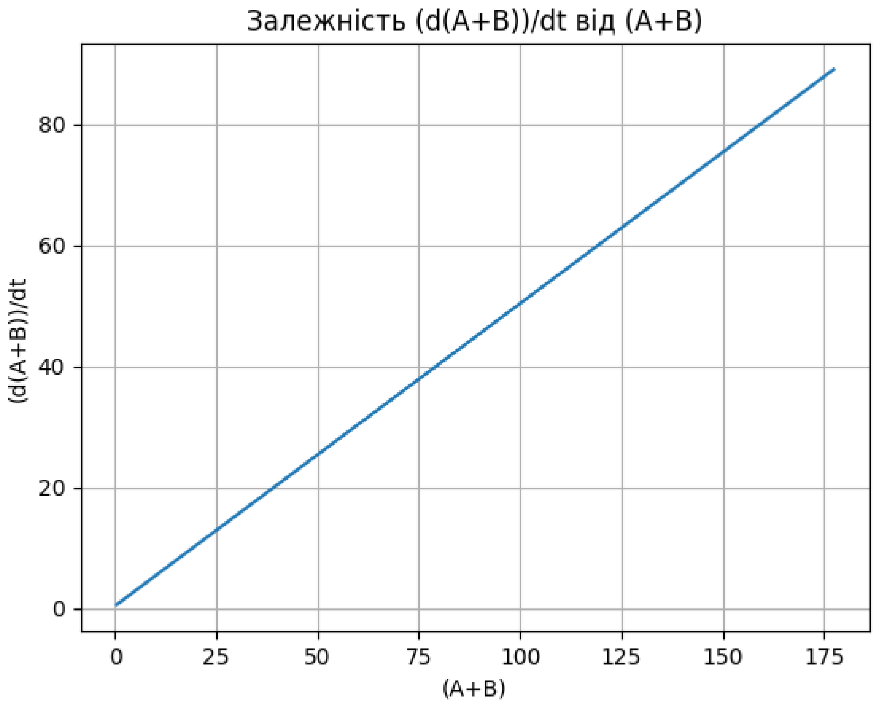
Просумуємо ці рівняння:

$$\frac{d(A+B)}{dt} = k(B - B_0) - a(A - A_0) + g + k(A - A_0) - a(B - B_0) + h =$$

$$= k(A + B - A_0 - B_0) - a(A + B - A_0 - B_0) + g + h =$$

$$= (k - a)(A + B - (A_0 + B_0 - \frac{g + h}{k - a})).$$

Це рівняння показує, що швидкість зміни загальних витрат на озброєння обох сторін лінійно залежить від розміру цих витрат.



Для побудови графіку булі прийняті наступні коефіцієнти:

- Коефіцієнти реакції оборони $(k = m)$ – 1.0.
- Коефіцієнти втомленості $(a = b)$ – 0.97.
- Коефіцієнт претензій країни X (g)– 0.2.
- Коефіцієнт претензій країни Y (h)– 0.3.

3.2. Чисельне моделювання системи рівнянь без запізнення.

Тепер розглянемо математичну модель Річардсона без запізнення на прикладі якихось конкретних числових значень. Для її побудови будемо використовувати програму, написану мовою програмування Python.

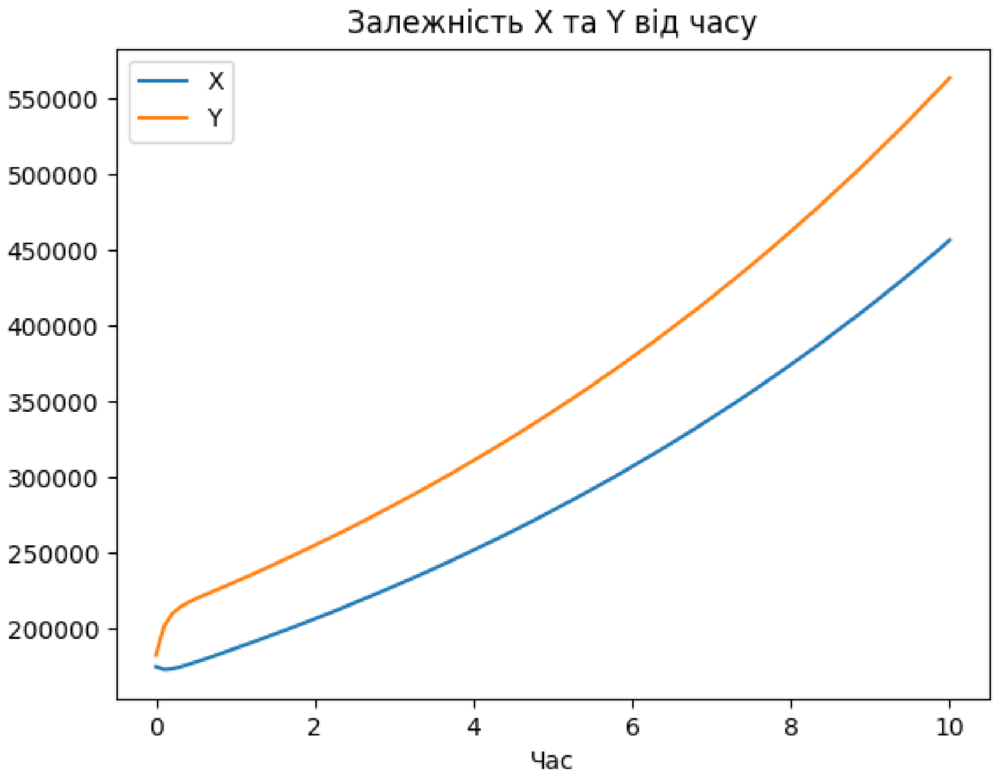
Задаємо початкові значення для сторін X та Y:

- Початковий рівень озброєння країни X (X_0) – 175200.
- Початковий рівень озброєння країни Y (Y_0) – 182750.

Тепер задаємо коефіцієнти для цих країн:

- Коефіцієнт реакції оборони країни X (k) – 1.7.
- Коефіцієнт реакції оборони країни Y (m) – 10.
- Коефіцієнт втомленості країни X (b) – 2.
- Коефіцієнт втомленості країни Y (b) – 8.
- Коефіцієнт претензій країни X (g) – 0.5.
- Коефіцієнт претензій країни Y (h) – 0.7.

Після підстановки значень у моделюючу програму, отримаємо наступний графік:



Зауважимо, що у наведеному вище випадку ми приймали дані такі, що коефіцієнти задовольняли нерівність $km > ab$, що свідчить про нестримну гонку озброєнь, і це можна прослідкувати на графіку (на ньому видно, що з плином часу країна Y дедалі більше превалює по кількості озброєння).

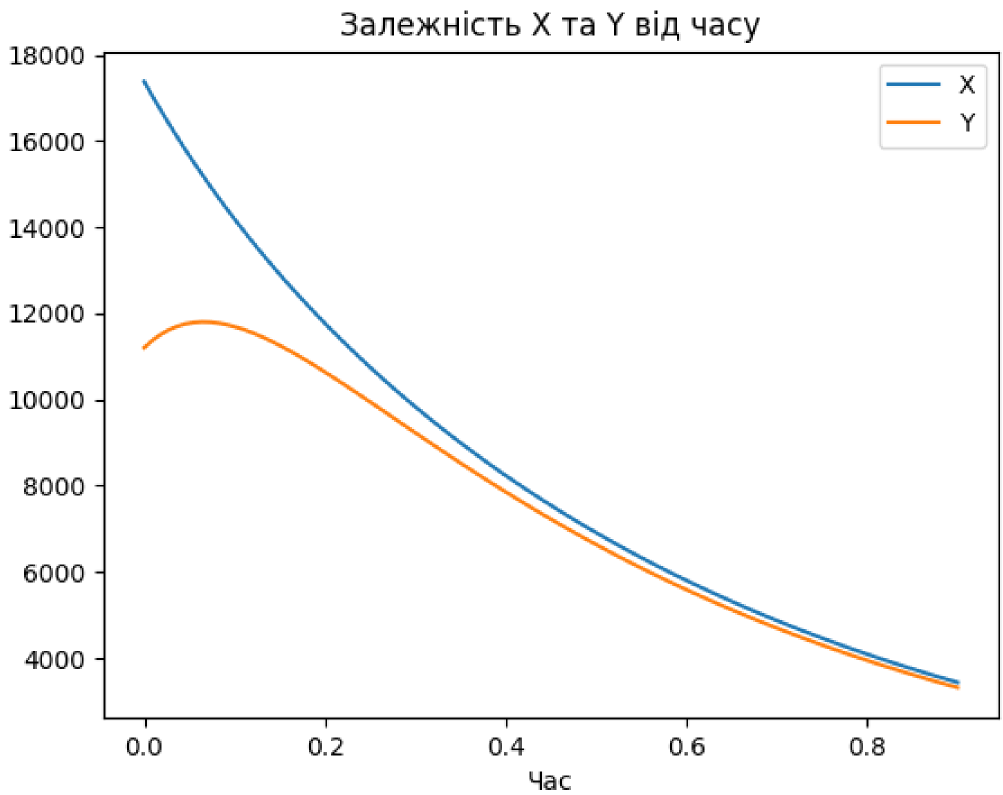
Розберемо випадок, коли $km < ab$.

Візьмемо наступні вхідні дані:

- Початковий рівень озброєння країни X (X_0) – 17377.

- Початковий рівень озброєння країни Y (Y_0) – 11200.
- Коефіцієнт реакції оборони країни X (k) – 1.3.
- Коефіцієнт реакції оборони країни Y (m) – 7.
- Коефіцієнт втомленості країни X (a) – 3.
- Коефіцієнт втомленості країни Y (b) – 9.
- Коефіцієнт претензій країни X (g) – 0.4.
- Коефіцієнт претензій країни Y (h) – 0.8.

Підставимо ці значення у модель та отримаємо графік вже з іншими тенденціями:



По ньому можемо прослідкувати, що і справді, коли ми маємо коефіцієнти, що задовольняють нерівність $km < ab$, або якщо добуток коефіцієнтів реакції на дії протилежної сторони менший за добуток коефіцієнтів, що відповідають витратам на озброєння, то має місце рівновага сил при стійкому стані (на графіку можемо побачити, що окрім того, що рівні озброєння обох країн зменшуються, з плином часу вони збігаються все більше).

3.3. Чисельне моделювання системи рівнянь із запізненням.

Розглянемо математичну модель Річардсона з запізненням на прикладі конкретних числових значень.

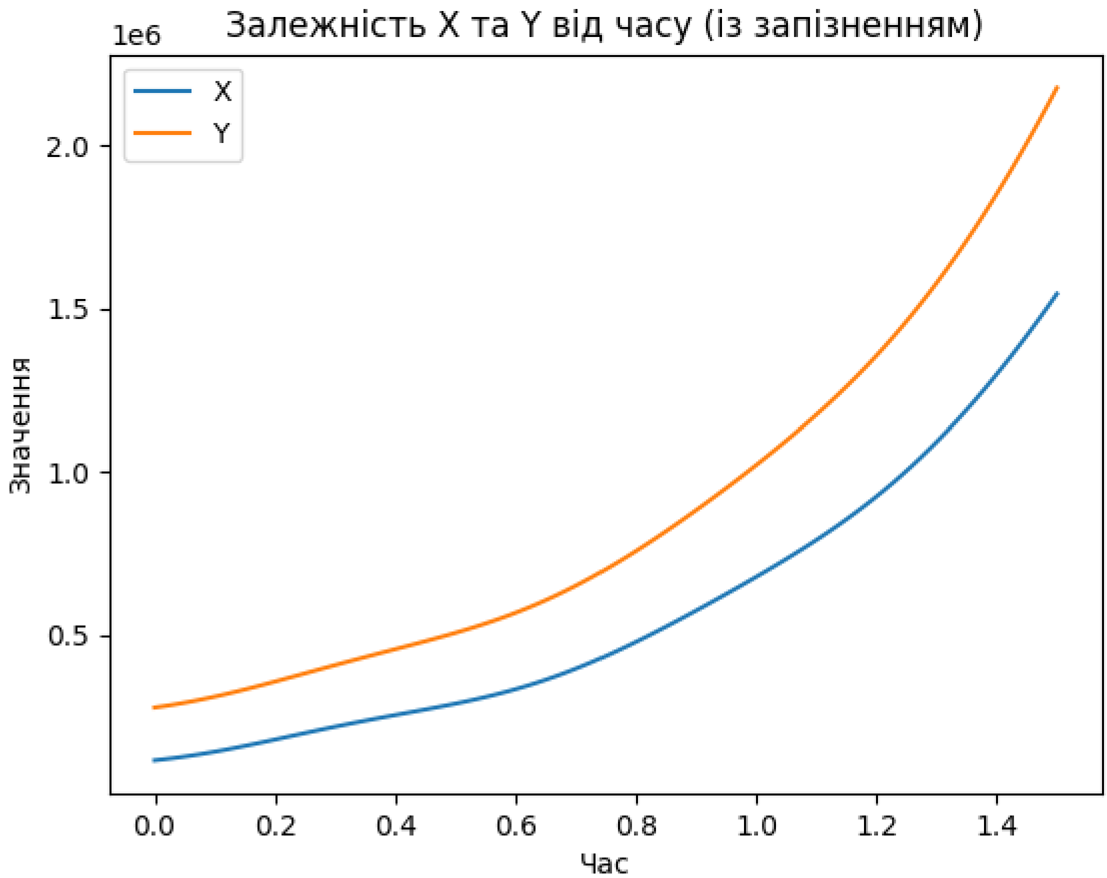
$$X' = kY(t - \tau_1) - aX(t) + g$$

$$Y' = mX(t - \tau_2) - bY(t) + h$$

Задаємо початкові значення та коефіцієнти для сторін X та Y:

- Початковий рівень озброєння країни X (X_0) – 115523.
- Початковий рівень озброєння країни Y (Y_0) – 277344.
- Коефіцієнт реакції оборони країни X (k) – 7.
- Коефіцієнт реакції оборони країни Y (m) – 8.
- Коефіцієнт втомленості країни X (a) – 3.
- Коефіцієнт втомленості країни Y (b) – 4.
- Коефіцієнт претензій країни X (g) – 0.4.
- Коефіцієнт претензій країни Y (h) – 0.8.
- Коефіцієнт затримки τ_1 – 0.2.
- Коефіцієнт затримки τ_2 – 0.1.

Підставимо ці значення у модель та отримаємо графік, який виглядає наступним чином:



Можемо побачити на графіку вплив запізнень на загальну систему, це проявляється в не настільки гладких як в ситуації без запізнення лініях. У даній варіації ми визначили коефіцієнти k, m, a, b таким чином, що виконується нерівність $km > ab$.

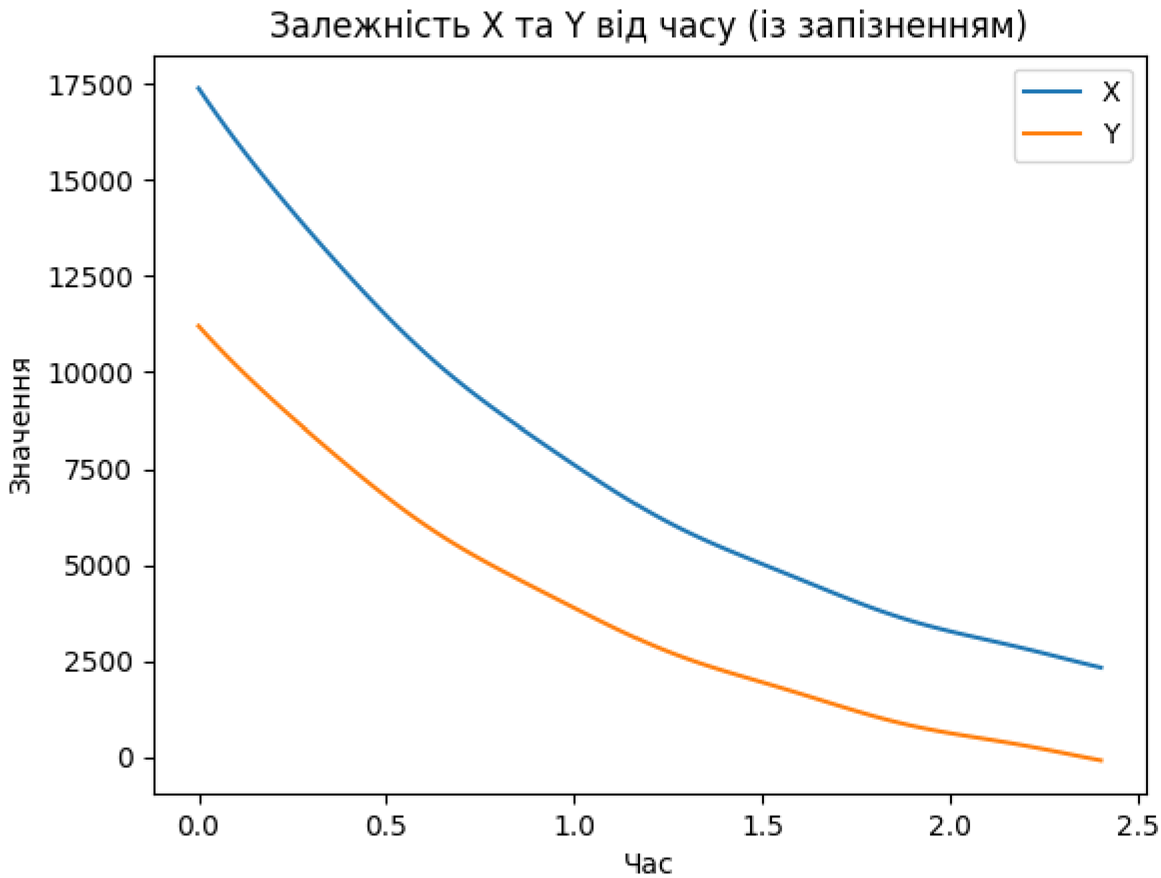
Розглянемо також випадок, коли задовольняється нерівність $km < ab$ у системі з запізненням.

Візьмемо наступні величини:

- Початковий рівень озброєння країни X (X_0) – 17377.
- Початковий рівень озброєння країни Y (Y_0) – 11200.
- Коефіцієнт реакції оборони країни X (k) – 2.
- Коефіцієнт реакції оборони країни Y (m) – 3.
- Коефіцієнт втомленості країни X (a) – 3.
- Коефіцієнт втомленості країни Y (b) – 4.
- Коефіцієнт претензій країни X (g) – 0.3.

- Коефіцієнт претензій країни Y (h) – 0.4.
- Коефіцієнт затримки τ_1 – 0.1.
- Коефіцієнт затримки τ_2 – 0.2.

Після підставлення значень вище в запрограмовану модель, отримаємо графік:



Виходячи з графіку, можна прослідкувати, що в цьому випадку досягається стійкість, тобто добуток коефіцієнтів реакції на дії іншої країни менший за добуток коефіцієнтів, відповідних за обсяг витрат на озброєння.

Висновок

Отже, математичне моделювання використовує методику, яка перетворює припущення щодо конкретної конфліктної ситуації або процесу (явища) на математичні вирази, які потім аналізуються за допомогою математичних інструментів. Головна мета створення математичних моделей полягає у встановленні функціональних залежностей між змінними і параметрами. Змінна розглядається як математична величина, яка може приймати різні значення в досліджуваній проблемі. Параметр, зі свого боку, є математичною величиною, яка залишається постійною під час дослідження. Різниця між змінною і параметром є відносною, оскільки величина, яка залишається постійною у одному дослідженні, може змінюватися в іншій постановці проблеми. Функція встановлює відповідність між змінними, де кожне значення однієї змінної (аргументу, незалежної змінної) має відповідне значення іншої змінної (залежної змінної). Цю відповідність можна виразити у формулі, графічно або у таблиці. Математичний вираз є комбінацією змінних, параметрів, функцій і математичних операцій. Структурні моделі відображають склад елементів міжнародної конфліктної ситуації та сприяють розумінню зв'язку між ними, тобто вони представляють структуру об'єкта конфліктологічного моделювання. Ці моделі відтворюють змістове значення процесу міжнародної конфліктної взаємодії і часто використовуються в теоретичних політологічних дослідженнях, де модельні знання представляються у вигляді структурних схем, діаграм, описів та таблиць. Функціональні моделі імітують поведінку оригінального об'єкта, його функціональну залежність від зовнішнього середовища, тому їх часто використовують у моніторингових дослідженнях наявних міжнародних конфліктів та протистоянь, де необхідно змоделювати ситуацію зв'язків та факторів розвитку досліджуваного конфлікту. Аналітичні моделі дозволяють вивчити явні залежності між величинами, що характеризують досліджуване міжнародне конфліктне середовище та його зовнішній вплив. Аналітичний розв'язок математичного виразу є загальним описом досліджуваного конфлікту, який часто включає ілюстративний матеріал у вигляді графіків, діаграм, картограм та інших картографічних зображень. Числові моделі характеризуються тим, що значення необхідних величин для проведення конфліктологічної експертизи можна отримати за допомогою кількісних методів. Зазвичай створення таких моделей включає розрахунок індексних показників, таких як коефіцієнти та індекси локалізації міжнародних конфліктних процесів та явищ.

Список використаних джерел

1. Барбашин Е.А. Вступ до теорії стійкості. – М., Наука, 1967. – 224 с.
2. Барбашин Е.А. Функції Ляпунова. – М., Наука, 1970. – 240 с.
3. Беллман Р. Теорія стійкості розв'язків диференціальних рівнянь. – М., Видавництво Іноземної літератури, 1954. – 216 с.
4. Валеев К.Г. Побудова функцій Ляпунова. – Київ, Наукова думка, 1981. – 412 с.
5. Демидович В.П. Лекції по математичній теорії стійкості. – М., Наука, 1967. – 472 с.
6. Лакшмікантам В., Лила С., Мартинюк А.А. Стійкість руху: метод порівняння, АН УССР, Ін-т механіки АН УССР, Наукова думка, 1991. – 248 с.
7. Ляпунов А.М. Загальна задача про стійкість руху. – М.-Л., Держ. вид. тех.-теор. дит., 1950. – 471 с.
8. Перестюк М.О., Чернікова О.С. Теорія стійкості. – ВПЦ "Київський університет", 2012. – 103 с.
9. Четаєв Н.Г. Стійкість руху. – М., Наука, 1990. – 176 с.
10. Щоголев Теорія стійкості руху, Одеса, ОНУ, 2017. – 148 с.
11. Томас Л. Сааті. Математичні моделі конфліктних ситуацій. – М. Радянське радіо, 1977. – 302 с
12. Джарол Б. Мангейм, Ричард К. Річ. Політологія. Методи дослідження. – М.: Видавництво «Весь Мир», 1997. – 544 с.
13. Самарський А.А., Михайлов А.П. Математичне моделювання. М., Наука, Фізматліт. -1997. 320 с.

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СИСТЕМА ЗАПОБІГАННЯ ТА ВИЯВЛЕННЯ АКАДЕМІЧНОГО ПЛАГІАТУ

Довідка про оригінальність кваліфікаційної роботи за освітнім рівнем магістр

UNICHECK

Ім'я користувача:
Оноцький В'ячеслав ФКомпНаук

Дата перевірки:
22.05.2023 16:08:52 EEST

Дата звіту:
22.05.2023 16:32:09 EEST

ID перевірки:
1015182915

Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library

ID користувача:
100002816

Назва документа: ОрганБогданСергійович

Кількість сторінок: 34 **Кількість слів:** 6199 **Кількість символів:** 43866 **Розмір файлу:** 332.83 KB **ID файлу:** 1014861483

19.8%
Схожість

Найбільша схожість: 11.8% з джерелом з Бібліотеки (ID файлу: 1014364393)

5.34% Джерела з Інтернету | 89 .... Сторінка 36

16.9% Джерела з Бібліотеки | 44 .... Сторінка 37

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0%
Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи | 94

Експертна оцінка роботи науковим керівником :

Випускна кваліфікаційна робота Органа Богдана заслуговує оцінки „задовільно" (61 бал)

н/к проф. /Гусаїн Д.Я./

Науковий керівник: ______ (підпис) Гусаїн Д.Я. (ПІБ)

Оператор: ______ (підпис) Оноцький В.В. (ПІБ)

ВІДЗИВ

наукового керівника
на випускну кваліфікаційну роботу магістра **ОРГАНА Богдана Сергійовича**

"ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ОЗБРЄННЯ В МАТЕМАТИЧНІЙ МОДЕЛІ РІЧАРДСОНА"

Випускна кваліфікаційна робота магістра Органа Богдана Сергійовича "Дослідження процесу озброєння в математичній моделі Річардсона" присвячена цікавій математичній проблемі, що обумовлена сучасними політичними процесами в нашій країні, – **військовим станом в суспільстві і, звідси, процесами озброєння.**

Ця проблема завжди цікавила людство, а останнім часом отримала математичне спрямування. Динаміка процесу озброєння почала формалізуватися за допомогою апарату звичайних диференціальних рівнянь. Роботи цього напрямку проводились в роботах Томаса Сааті, Джарола Б. Мангейма та інших.

Робота складається з вступу, трьох розділів, висновків та списку використаної літератури.

У вступі розглянуто основні положення випускної кваліфікаційної роботи.

В першому розділі розглянуті підходи математичного моделювання, що використовуються при дослідженні конфліктних ситуацій.

Другий розділ присвячений методам якісної теорії диференціальних рівнянь, які використовуються дослідником, зокрема побудові фазового портрету систем на площині.

В третьому розділі проведено чисельне моделювання математичної моделі, що являє собою систему звичайних диференціальних рівнянь.

Основна особиста робота магістра Б.С. Органа міститься в третьому розділі. Вважаю, що робота магістра Органа Б.С. "Дослідження процесу озброєння в математичній моделі Річардсона" виконана на невисокому рівні і заслуговує оцінки «задовільно» (61 балів).

Професор
кафедри моделювання складних систем
факультету комп"ютерних наук та кібернетики,
доктор фіз.-мат. наук Денис ХУСАІНОВ

РЕЦЕНЗІЯ

на випускну магістерську роботу ОРГАНА Богдана Сергійовича

“ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ОЗБРОЄННЯ В МАТЕМАТИЧНІЙ МОДЕЛІ РІЧАРДСОНА”

Випускна магістерська робота Органа А.Я. “Дослідження процесу озброєння в математичній моделі Річардсона” присвячена актуальній математичній проблемі моделювання, що виникає при проектуванні динамічних систем і є надзвичайно актуальною для нашої країни, а саме задачі дослідження процесу озброєння.

Ця проблема є надзвичайно актуальною для України в сучасних умовах військового конфлікту.

Математична модель процесу озброєння записується у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь.

Робота складається з трьох розділів.

Перший розділ є оглядовим і присвячений принципам математичного моделювання конфліктних ситуацій.

У другому розділі розглянуто основні математичні методи дослідження динаміки систем звичайних диференціальних рівнянь, а саме теорії стійкості і другому методу Ляпунова. Наведено основні поняття теорії стійкості, описано метод функцій Ляпунова, як один з апаратів дослідження якісної теорії.

У третьому розділі проведено комп’ютерне моделювання математичної моделі Річардсона.

Вважаю, що робота магістра Органа А.Я. “Дослідження процесу озброєння в математичній моделі Річардсона” виконана на невисокому рівні і заслуговує оцінки «задовільно» (60 балів).

Завідувач
кафедри програмних систем та технологій
факультету інформаційних систем та
інформаційних технологій
Київського національного університета
імені Тараса Шевченка

доктор техн. наук Олексій БИЧКОВ