

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.19>

Куценко О. Г.¹, к. ф.-м. н., доц.
Харитоновна Л. В.², к. ф.-м. н., доц.
Круш Р. М.³, студент

O. G. Kutsenko¹, Ph.D, Associate Professor
L. V. Kharytonova², Ph.D, Associate Professor
R. M. Krush³, Student

Закономірності росту плоских тріщин в пластинах

Regularities of flat cracks growth in plates

^{1,3}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т
Глушкова 4е,

^{1,3}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03127, Kyiv, Glushkova av., 4e,

²Національний транспортний університет,
01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-
Павленка, 1
e-mail: Oleksii.Kutsenko@knu.ua

²National Transport University, 01010, Kyiv,
M. Omelianovycha-Pavlenka str., 1
e-mail: Oleksii.Kutsenko@knu.ua

Досліджено загальні закономірності впливу геометричних параметрів тріщини втомі на напрямок її росту в пружних пластинах при їх одновісному розтягу. Розглянуто прямолінійні тріщини, тріщини у вигляді повного періоду косинусоїди, тріщини у вигляді дуги кола та тріщини у вигляді ломаної в широкому діапазоні зміни їх геометричних параметрів. Напрямок розвитку тріщин визначався у відповідності до критерію максимальних колових напружень. Отримані результати дозволили зробити висновок, що у випадку гладких берегів тріщини напрямок її росту в першу чергу залежить від кута між дотичною при вершині та напрямком розтягу. Встановлено, що наявність кутової точки берега тріщини поблизу її вершини суттєво впливає на напрямок її росту у випадку малих кутів між дотичною та напрямком розтягу. Для таких випадків чисельно не вдалося досягти неперервного граничного переходу в результатах при наближенні кутової точки до вершини. Дана обставина ускладнює питання про вибір розміру початкового приросту тріщини.

Ключові слова: критерій максимальних колових напружень, ломана тріщина.

The general regularities of the influence of the geometric parameters of a fatigue crack on the direction of its growth in elastic plates under uniaxial tension were studied. Straight cracks, cracks in the form of a full cosine period, cracks in the form of a circle arc and kinked cracks were considered in a broad range of their geometric parameters variations. The direction of crack growth was determined in accordance with the criteria of maximum tangential (circumferential) stresses. The stress intensity factor of mode I and mode II of fracture were determined numerically using the finite element method. The obtained results made it possible to conclude that in the case of smooth crack faces, the direction of its growth primarily depends on the angle between the tangent at the crack tip and the direction of tension. It was established that the presence of a corner point of the faces near crack tip significantly affects the direction of crack growth in the case of small angles, between the tangent and the direction of tension. For such cases, numerically, it was not possible to achieve a continuous limiting transition in the results when the corner point approaches the tip. This circumstance complicates the issue of choosing the size of the initial crack growth step.

Key Words: maximum tangential stress criteria, kinked crack.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

Вступ

Вивчення процесу підростання тріщин втомі залишається актуальним напрямком механіки

руйнування вже понад півстоліття. Воно поєднує в собі декілька складових: встановлення критеріїв визначення напрямку розвитку тріщини та

залежностей швидкості поширення тріщин від інтенсивності зовнішнього навантаження для різних матеріалів, розробку методів визначення характеристик механіки руйнування, що впливають на процес, тощо. Огляд досліджень з даної тематики можна знайти в роботах [1,2].

Метою даної роботи покладено встановлення загальних закономірностей впливу різних геометричних чинників на формування траєкторії плоских (наскрізних) тріщин в пружних пластинах. На думку авторів дане питання не знайшло свого достатнього відображення в наявних публікаціях.

Постановка задачі та методи дослідження

Будемо розглядати центральну тріщину в пружній квадратній пластині розмірами $2a \times 2a$, яка розтягується вздовж однієї пари своїх сторін напруженнями p (див. рис. 1). Конфігурація тріщини не змінюється по товщині пластини. За характерний розмір тріщини приймається довжина її хорди (відлітка, що сполучає кінці тріщини) $2l$. Нормаль до хорди складає кут α з напрямком розтягу. Напрямок поширення тріщини задається кутом ϑ , який відкладається від продовження хорди проти годинникової стрілки.

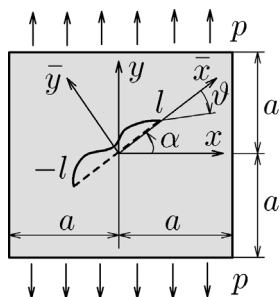


Рис. 1 Пластина з плоскою тріщиною

У якості критерію визначення напрямку розвитку тріщини будемо використовувати критерій максимальних колових напружень у вершині тріщини. Він є історично першим і найбільш вживаним критерієм. Разом з критеріями напрямку максимальної швидкості вивільнення енергії деформації та напрямку мінімальної питомої енергії деформації він дає схожі результати у випадку крихкого тіла [3]. У відповідності до нього кут напрямку зростання тріщини визначається зі співвідношення [4]:

$$\vartheta = \arccos \left(\frac{3K_{II}^2 + K_I \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{K_I^2 + 9K_{II}^2} \right), \quad (1)$$

де K_I — коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) деформації нормального розриву тріщини, K_{II} — КІН деформації поперечного зсуву тріщини. Для знаходження значень КІН будемо використовувати метод скінченних елементів, реалізований у пакеті CalculiX [5].

Результати та їх аналіз

Проаналізуємо спочатку залежність кута зростання прямолінійної тріщини від її довжини та орієнтації. На рисунку 2 наведені відповідні графіки. З них випливає, що напрямок зростання, практично, не залежить від довжини тріщини. При цьому самі значення КІН швидко зростають з наближенням півдовжини тріщини до a .

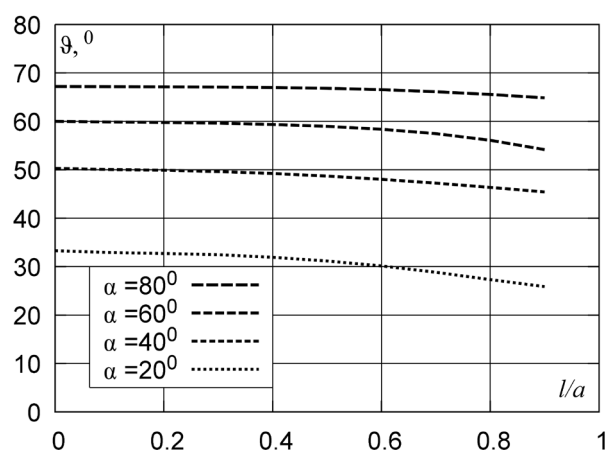


Рис. 2 Розподіл ϑ для прямолінійної тріщини

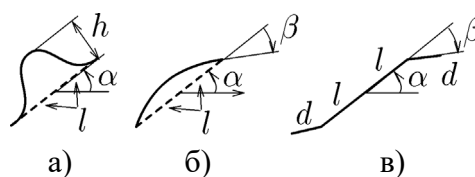


Рис. 3 Розглянуті конфігурації тріщин

Дослідимо вплив на напрямок зростання тріщини її кривизни. Для цього розглянемо два типи криволінійних тріщин: у вигляді косинусоїди (рис. 3а) та у вигляді дуги кола (рис. 3б). У тріщин першого типу хорди дотикаються до їх берегів у вершинах. Кривина таких тріщин характеризується величиною подвоєної амплітуди косинусоїди h .

Розрахунки показують, що для малих тріщин першого типу напрямок росту тріщини залежить головним чином від кута між нормаллю до хорди та напрямком розтягу. Так для тріщини довжиною $l = 0,1a$, орієнтованою під кутом $\alpha = 45^\circ$,

для значень $0 \leq h \leq l$ напрямком поширення тріщини ϵ , практично, незмінним: $53^\circ < \vartheta < 55^\circ$ (див. рис. 4).

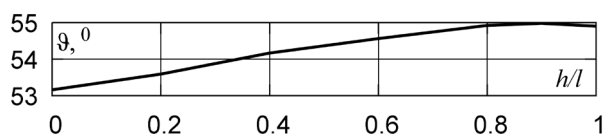


Рис. 4 Розподіл ϑ для тріщини-косинусоїди

З наведеного випливає, що у випадку, коли береги тріщини є гладкими, а їх нахил в околі вершини співпадає з нахилом хорди тріщини, напрямком подальшого росту тріщини залежить саме від відповідного кута. Розглянемо випадок, коли дотична до берега при вершині та хорда не є колінеарними. Для цього дослідимо напружений стан в пластині з тріщиною у вигляді дуги кола. Відзначимо, що кут між дотичною та хордою такої тріщини — кут β , рівний половині кутового розміру дуги.

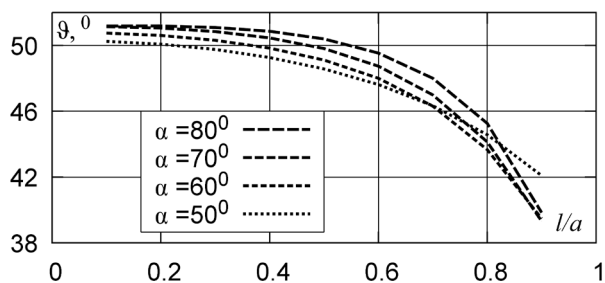


Рис. 5 Розподіл ϑ для правої вершини тріщини у вигляді дуги кола при $\alpha - \beta = 40^\circ$

Аналізуючи результати розрахунків для тріщини-дуги, можна прийти до висновку про суттєву залежність його від кутів α та β , якщо фіксувати один з кутів і змінювати інший. Проте якщо розглянути різницю $\alpha - \beta$, то можна помітити, що при її фіксованому значенні кут ϑ слабо залежить як від кута α , так і від довжини тріщини. Вказаний висновок ілюструється рисунком 5, на якому зображено графіки залежності кута ϑ для правої (див. рис. 3б) вершини тріщини від кута α та відносної довжини хорди тріщини при $\alpha - \beta = 40^\circ$.

Таким чином, можемо констатувати, що кут розвитку тріщини-дуги залежить не окремо від кутів α та β , а від їх різниці. Це пояснюється тим, що різниця $\alpha - \beta$ відповідає куту між

дотичною до тріщини у її вершині та напрямком розтягу. Більш сильна залежність ϑ від геометричних параметрів при великих розмірах тріщини пояснюється виключно впливом тріщини на глобальний розподіл напружень в пластині. Зауважимо, що у випадку прямолінійних тріщин та тріщин-дуг адекватність отриманих результатів контролювалася шляхом порівняння з випадком необмеженої пластини, для якого відомі точні аналітичні розв'язки.

Береги всіх вже розглянутих тріщин є гладкими. З'ясуємо, як на напрямок росту тріщини впливає наявність кутових точок берегів, відмінних від вершин. Для цього розглянемо тріщину, яка складається з трьох прямолінійних ланок (див. рис. 3в): центральної довжиною $2l$ та симетрично розташованих крайніх довжиною d кожна, нахилених під кутом β до середньої.

Особливий інтерес являє випадок, коли кутова точка розташована поблизу вершини тріщини, тобто $d \ll l$. Очевидно, що в цьому випадку її вплив є суттєвим. Подібна ситуація виникає при зміні навантаження, коли до певного моменту тріщина підросла під дією одного навантаження, а потім воно змінилося, наприклад, змінився напрямок розтягу пластини. Тріщини такого типу в літературі прийнято називати ломаними (kinked crack).

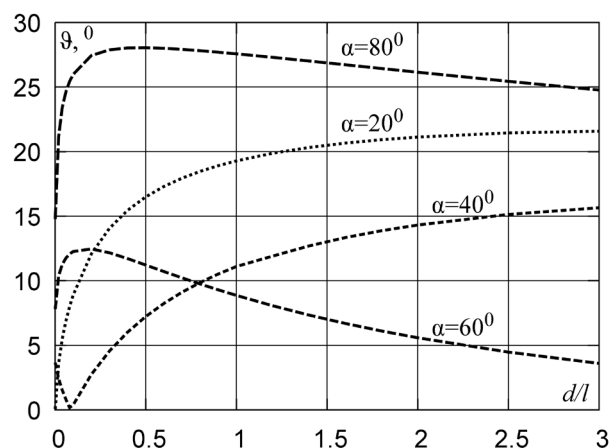


Рис. 6 Розподіл ϑ для ломаної тріщини

Цікаво прослідкувати саме за початковим етапом розвитку нової ланки ломаної тріщини. Для цього виберемо кут β рівним куту ϑ для прямолінійної тріщини. Вважаючи довжину тріщини малою у порівнянні з розміром пластини, цей кут можна знайти з співвідношення (1), якщо покласти в ньому

$$K_I = \cos^2 \alpha, \quad K_{II} = \sin \alpha \cos \alpha. \quad (2)$$

Логічно припустити, що для такої ломаної тріщини $\vartheta \rightarrow 0$, якщо $d \rightarrow 0$. Розрахунки показують, що для кутів $\alpha < 40^\circ$ це, дійсно, так. Проте для більших кутів даний результат не є очевидним. Якщо подивитися на рисунок 6, на якому зображені графіки залежності кута ϑ від відносної довжини крайніх ланок для різних кутів α , то можна побачити, що для кутів $\alpha > 40^\circ$, кут ϑ , хоч і зменшується за величиною, проте не до нульового значення. При цьому крайні ліві точки цих графіків відповідають значенням $d/l = 0,001$, а, наприклад, для $\alpha = 80^\circ$ кут ϑ складає біля 15° . Причиною такого відхилення може бути вплив сингулярності в кутовій точці на розподіл напружень біля вершини, яким традиційно нехтують без чіткого теоретичного обґрунтування [6].

Список використаних джерел

1. *Miranda A. C. O. Fatigue life and crack path predictions in generic 2D structural components* / A. C. O. Miranda, M. A. Meggiolaro, J. T. P. Castro, L. F. Martha, T. N. Bittencourt // *Engineering Fracture Mechanics* – 2003. – Vol. 70, No. 10. – P. 1259–1279.
2. *Rege K. A review of fatigue crack propagation modelling techniques using FEM and XFEM* / K. Rege, H.G. Lemu // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* – 2017. – Vol. 276, No. 1. – P. 12–27.
3. *Bittencourt T. N. Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems* / T. N. Bittencourt, P. A. Wawrzynek, A. R. Ingraffea, J. L. Sousa // *Eng. Fract. Mech.* – 1996. – Vol. 55, No. 2. – P. 321–334.
4. *Erdogan F. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear* / F. Erdogan, G. C. Sih // *J. Basic Eng.* – 1963. – Vol. 85, No. 4. – p. 519–525.
5. *A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program* [Електронний ресурс]. – 2023. – Режим доступу до ресурсу: <https://www.calculix.de>.
6. *Chen Y. Z. A singular integral equation method for examining asymptotic solutions of a kinked crack with infinitesimal kink length* / Y. Z. Chen, X. Y. Lin, Z. X. Wang // *Journal of Mechanics of Materials and Structures* – 2009. – Vol. 4, No. 10. – P. 1657–1674.

Висновки

Наведені результати дозволяють стверджувати, що у випадку гладких берегів тріщини напрямком її подальшого росту в першу чергу визначається кутом між дотичною до берегів у вершині та напрямком розтягу. Для ломаних тріщин з малими кутами між середньою ланкою тріщини та напрямком розтягу чисельно не вдалося отримати неперервного граничного переходу $\vartheta \rightarrow 0$, при $d \rightarrow 0$. Дане питання потребує додаткового дослідження. Проте навіть за умови справедливості такого переходу, гостро постає питання про величину першого кроку утворення нової ланки тріщини при її підростанні, адже при прирості в 0,05% довжини тріщини відхилення напрямку росту тріщини від теоретично передбаченого може складати більше 10° .

References

1. MIRANDA, A. C. O. et al. (2003) *Fatigue life and crack path predictions in generic 2D structural components*. *Engineering Fracture Mechanics*. 70(10). p. 1259–1279.
2. REGE, K. & LEMU, H.G. (2017) *A review of fatigue crack propagation modelling techniques using FEM and XFEM*. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 276(1). p. 12–27.
3. BITTENCOURT T.N. et al. (1996) *Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems*. *Engineering Fracture Mechanics*. 55(2). p. 321–334.
4. ERDOGAN F. & SIH G. C. (1963) *On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear* *Journal of Basic Engineering*. 85(4). p. 519–525.
5. (2023) *A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program*. Available from: <https://www.calculix.de>.
6. CHEN Y. Z., LIN X. Y. & WANG Z. X. (2009) *A singular integral equation method for examining asymptotic solutions of a kinked crack with infinitesimal kink length* *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 4(10). p. 1657–1674.

Надійшла до редколегії 14.07.23