

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.4>

В. Ю. Богданський¹, аспірант
О. І. Клесов², д. ф. м. н., професор

Рівномірний підсилений закон великих чисел без припущень стосовно класу множин

¹Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, проспект Перемоги, 37, 03056, м. Київ
e-mail: myemailaddress4567@gmail.com

²Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, проспект Перемоги, 37, 03056, м. Київ
e-mail: klesov@matan.kpi.ua

V. Yu. Bogdanskii¹, Ph. D. Student
O. I. Klesov², Professor

The uniform strong law of large numbers without any assumption on a family of sets

¹National Technical University of Ukraine
“Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Peremogy Avenue, 37, 03056 Kyiv, Ukraine
e-mail: myemailaddress4567@gmail.com

²National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Peremogy Avenue, 03056 37, Kyiv, Ukraine
e-mail: klesov@matan.kpi.ua

Ми вивчаємо суми однаково розподілених випадкових величин, індекси яких належать множинам з певної сім'ї $\mathcal{A}$ в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Для таких сум доведено так звану рівномірну у класі множин теорему про підсилений закон великих чисел без жодного обмеження на $\mathcal{A}$ у випадку попарно незалежних випадкових величин зі скінченим математичним сподіванням. Відома теорема Басса–Пайка є аналогом отриманого результату, в якій використовується певне додаткове обмеження на границі множин, а також припущення про незалежність у сукупності відповідних випадкових величин. За рахунок цих додаткових припущень результат Басса–Пайка є більш точним, але результат, отриманий у цій роботі, справджується для більш широкого класу випадкових величин та сім'ї $\mathcal{A}$. В роботі також показано, що запропонований підхід є оптимальним для інших нормувань, які задовольняють умову Мартікайнена–Петрова. Ми наводимо також низку прикладів та контрприкладів, які пояснюють суть умови Басса–Пайка стосовно сім'ї $\mathcal{A}$. Наведено зв'язок отриманого результату та підсиленого закону великих чисел для підпоследовностей.

Ключові слова: суми випадкових величин, рівномірні у класі множин граничні теореми, підсилений закон великих чисел.

We study the sums of identically distributed random variables whose indices belong to certain sets of a given family $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. We prove that sums over scaling sets $S(kA)$ possess a kind of the uniform in $\mathcal{A}$ strong law of large numbers without any assumption on the class $\mathcal{A}$ in the case of pairwise independent random variables with finite mean. The well known theorem due to R. Bass and R. Pyke is a counterpart of our result proved under a certain extra metric assumption on the boundaries of the sets of $\mathcal{A}$ and with an additional assumption that the underlying random variables are mutually independent. These assumptions allow to obtain a slightly better result than in our case. As shown in the paper, the approach proposed here is optimal for a wide class of other normalization sequences satisfying the Martikainen–Petrov condition and other families $\mathcal{A}$. In a number of examples we discuss the necessity of the Bass–Pyke conditions. We also provide a relationship between the uniform strong law of large numbers and the one for subsequences.

Key Words: sums of random variables, uniform in a family of sets limit results, strong law of large numbers.

Статтю представив д.ф.-м.н. Моклячук М.П.

1 Вступ

В роботі [1] С. Чатерджі сформулював наступне емпіричне правило: *якщо певна асимптотична властивість справджується для будь-якої послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин зі скінченим математичним сподіванням, то з будь-якої послідовності випадкових величин (X_n) (як загодно залежних), для яких*

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E} |X_n| < \infty$$

можна вибрати таку підпослідовність (X_{n_k}) , що зазначена властивість виконується для підпослідовності (X_{n_k}) .

Це правило пізніше отримало назву *принципу підпослідовностей* й було підтверджено різними авторами для багатьох граничних теорем теорії ймовірностей, включно з підсиленням законом великих чисел [2], центральною граничною теоремою [3], законом повторного логарифму [4] тощо.

Подібний універсальний закон Чатерджі привернув значну увагу до вивчення граничних закономірностей у теорії ймовірностей, які виконуються для підпослідовностей. Наприклад, так звана *повна збіжність* для підпослідовностей досліджувалась у роботі [5], а умови для скінченості

$$\mathbb{E} \sup_{k \geq 1} \left| \frac{S_{n_k}}{n_k} \right|$$

для сум незалежних однаково розподілених випадкових величин — в [6].

У цій роботі ми розглядаємо більш загальну постановку, частковим випадком якої є підсилений закон великих чисел для сум незалежних однаково розподілених величин для підпослідовностей. Для такої постановки ми доводимо так звану теорему Марцинкевича–Зігмунда.

Роботу побудовано наступним чином. В розділі 2 ми наводимо кілька загальних прикладів та означень, які пояснюють постановку задачі про рівномірні у класі множин граничні теореми та її зв'язок з граничними теоремами для підпослідовностей. Основні результати роботи (теореми 2 та 3) та їх доведення наведено у розділі 3. У розділі 4 наведено кілька прикладів та контрприкладів, які пояснюють необхідність умов, за яких виконується основний результат. У розділі 5 ми коротко обговорюємо можливі узагальнення отриманого результату.

2 Мотивація

Існує кілька пояснень мотивації авторів вивчати рівномірні у класі множин граничні теореми теорії ймовірностей (див. [7]–[8], а також [9]–[10]). Нижче ми наводимо ще одне пояснення, яке виявляє тісний зв'язок між нашою задачею та граничними теоремами для підпослідовностей. Спочатку ми обговоримо кілька загальних прикладів, які допомагають краще зрозуміти постановку задачі, яка вивчається в цій роботі.

Нехай $d \geq 1$, а $A \subset \mathbb{R}^d$. Позначимо через tA — масштабовану множину,

$$tA = \{tx : x \in A\}.$$

Тут і всюди нижче в цій роботі під tx ми розуміємо вектор $(tx_1, \dots, tx_d)$ для $t \in \mathbb{R}$ та $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Означення 1. З кожною підмножиною $A \subset \mathbb{N}$ пов'яжемо набір підмножин

$$s(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{kA \cap \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}.$$

У подальшому через $\overline{1, k}$ ми позначаємо відрізок $\{1, \dots, k\}$ ряду натуральних чисел, $\overline{1, k} = \{1, \dots, k\}$.

Приклад 1. Нехай $d = 1$ та $A = (0, 1]$. Тоді $s(A)$ складається з відрізків $\overline{1, k}$, $k \in \mathbb{N}$. З іншого боку, якщо $A = (0, 2]$, то $s(A)$ складається з відрізків $\overline{1, (2k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

В кожному з цих випадків, ми можемо записати

$$s(A) = \{\overline{1, n_k}, k \in \mathbb{N}\} \quad (1)$$

для відповідної підпослідовності (n_k) .

Приклад 2. Варто відзначити, що не для довільної підпослідовності (n_k) існує інтервал виду $A = (0, a)$ або $A = (0, a]$, для якого виконується (1). Наприклад, саме такою є підпослідовність, першими членами якої є $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $n_3 = 7$. З іншого боку, співвідношення (1) для такої підпослідовності виконується для $A = (0, 2] \cup \{\frac{7}{3}\}$.

Означення 2. Нехай $d \geq 1$, а $\mathcal{A}$ — довільна сім'я підмножин з $\mathbb{R}^d$. З сім'єю $\mathcal{A}$ пов'яжемо набір підмножин

$$s(\mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} s(A). \quad (2)$$

Зрозуміло, що $s(\mathcal{A})$ може містити набагато більше різноманітних множин, ніж у випадках, розглянутих у прикладах 1–2.

2.1 Суми випадкових величин у множинах та класичні граничні теореми

Розглянемо сім'ю однаково розподілених випадкових величин $\{X(\mathbf{n})\}$, індексованих елементами цілочисельної решітки $\mathbb{N}^d$,

$$\mathbb{N}^d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d), x_1, \dots, x_d \in \mathbb{N}\}.$$

Ми будемо вивчати суми вигляду

$$S(A) = \sum_{j \in A} X(j).$$

Приклад 3. Нехай $d = 1$, а множина A така ж, як і у прикладі 1. Тоді $S(kA)$, $k \in \mathbb{N}$, — це звичайні часткові суми випадкових величин, які у класичних граничних теоремах теорії ймовірностей позначаються S_t , $t \in \mathbb{N}$. В рамках такого підходу підсилений закон великих чисел у випадку незалежних випадкових величин з скінченим математичним сподіванням $\mu = \mathbb{E} X_1$ можна записати наступним чином

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S(kA)}{k} = \mu \quad \text{майже напевно.} \quad (3)$$

Як ми бачили у прикладах 1 та 2, підсилений закон великих чисел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{n_k}}{n_k} = \mu \quad \text{майже напевно}$$

можна записати аналогічно для певного класу підпоследовностей (n_k) .

Зважаючи на означення 2, у роботі [11] поставлено питання про знаходження умов для виконання рівномірного у класі підмножин $\mathbb{R}^d$ підсиленого закону великих чисел, а саме для

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S(nA)}{n^d} - \mu |A| \right| = 0 \quad \text{майже напевно,} \quad (4)$$

де $|A|$ — це міра Лебега множини A .

2.2 Рівномірний у класі множин підсилений закон великих чисел

Для будь-якої підмножини $A \subset \mathbb{R}^d$ позначимо через ∂A — межу множини A , а через $A(\delta)$ — δ -окіл множини A ,

$$A(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \rho(\mathbf{x}, \partial A) < \delta\},$$

де ρ — евклідова відстань в $\mathbb{R}^d$.

Нехай $\mathcal{A}$ — довільний клас підмножин з $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{A : A \in \mathbb{R}^d\}$. Позначимо

$$r(\delta) = \sup_{A \in \mathcal{A}} |A(\delta)|.$$

Слідуючи роботі [11], у подальшому будемо припускати, що виконано умову

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} r(\delta) = 0. \quad (5)$$

Теорема 1 (Басс, Пайк [11]). *Нехай $\{X(\mathbf{n})\}$ незалежні однаково розподілені випадкові величини, індексовані елементами цілочисельної решітки $\mathbb{N}^d$, $d \geq 1$, які мають скінчене математичне сподівання μ .*

Нехай $\mathcal{A}$ — довільний клас вимірних підмножин з $[0, 1]^d$.

Якщо виконано умову (5), то виконано рівномірний відносно сім'ї $\mathcal{A}$ підсилений закон великих чисел (4).

Теорему 1 узагальнено у роботах [7], [8], [9]–[10] на випадок випадкових мір замість $S(nA)$.

Зауваження 1. В теоремі 1 можна дозволити різну швидкість зростання множини A для різних координат, замінивши операцію nA на $\mathbf{n} \cdot A$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, де $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$ для $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ та $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ означає вектор з координатами

$$(n_1 x_1, \dots, n_d x_d).$$

В такому випадку замість теореми Колмогорова про підсилений закон великих чисел для звичайних сум необхідно використати підсилений закон великих чисел Смайза для кратних сум (див. [12]). При цьому до умови існування математичного сподівання треба додати умову існування моменту $\mathbb{E} |X(\mathbf{n})| (\log^+ |X(\mathbf{n})|)^{d-1}$.

3 Основні результати

Теорема 2. *Нехай $\{X(\mathbf{k})\}$ попарно незалежні однаково розподілені випадкові величини, індексовані елементами цілочисельної решітки $\mathbb{N}^d$, $d \geq 1$, які мають скінчене математичне сподівання. Нехай $\mathcal{A}$ — довільний клас підмножин з $\mathbb{R}^d$. Тоді*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{S(nA)}{n^d} \right| \leq \kappa \quad \text{майже напевно,} \quad (6)$$

де

$$\kappa = \mathbb{E} |X|,$$

а X — це копія $X(\mathbf{k})$.

Зауваження 2. На відміну від теореми 1, де випадкові величини є незалежними у сукупності, твердження теореми 2 виконується для попарно незалежних випадкових величин.

Зауваження 3. Ще однією відмінністю теореми 2 від теореми 1 є відсутність жодного обмеження на сім'ю $\mathcal{A}$. Платою за таке узагальнення є менш інформативний результат (6) замість (4).

У наступному результаті ми розглядаємо рівномірний підсилений закон великих чисел для інших нормалізуючих послідовностей. Відзначимо, що нормування, яке використовується в теоремі 2, не задовольняє умові (8) у теоремі 3.

Теорема 3. Нехай $\{X(\mathbf{k})\}$ однаково розподілені випадкові величини, індексовані елементами цілочисельної решітки $\mathbb{N}^d$, $d \geq 1$. Нехай $\mathcal{A}$ — довільний клас підмножин з $\mathbb{R}^d$. Нехай $\{a_n\}$ — неспадна послідовність додатних чисел, для якої

$$\frac{n}{a_n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (7)$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{a_k} = O\left(\frac{n}{a_n}\right). \quad (8)$$

Якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geq a_n) < \infty, \quad (9)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{S(nA)}{a_n} \right| = 0 \quad \text{майже напевно.} \quad (10)$$

Зауваження 4. На перший погляд може здатися, що з огляду на умову (7), підсилений закон великих чисел (10) є наслідком (4). Проте це не так навіть у випадку незалежних у сукупності випадкових величин $X(\mathbf{k})$, оскільки умова (9) є менш обмежливою, ніж умова існування першого моменту, яка є необхідною для теореми 1. Для підтвердження цього висновку ми наводимо один з можливих наслідків теореми (3) для $a_n = n^{d/p}$, $0 < p < 1$, у якому використовується моментна умова (11) замість існування першого моменту.

Наслідок 1. Нехай $\{X(\mathbf{k})\}$ однаково розподілені випадкові величини, індексовані елементами цілочисельної решітки $\mathbb{N}^d$, $d \geq 1$. Нехай $\mathcal{A}$ — довільний клас підмножин з $\mathbb{R}^d$. Якщо $0 < p < 1$ та додатково виконано умову

$$E|X|^{1/p} < \infty, \quad (11)$$

де X — це копія $X(\mathbf{k})$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{S(nA)}{n^{d/p}} \right| = 0 \quad \text{майже напевно.} \quad (12)$$

Зауваження 5. Умова (8) є аналогом відомої умови Феллера для підсиленого закону великих чисел

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{a_k^2} = O\left(\frac{n}{a_n^2}\right).$$

Вперше умова (8) з'явилась у роботі [13]. Нижче ми наводимо відповідний результат з [13] (див. теорему 4). Зауважимо також, що умова (9) є необхідною для підсиленого закону великих чисел.

3.1 Доведення

3.1.1 Доведення теореми 2

Нехай $\mathbf{I} = [0, 1]^d$. Зрозуміло, що

$$|S(nA)| \leq \sum_{\mathbf{j} \in n\mathbf{I}} |X(\mathbf{j})| \quad (13)$$

для будь-якого $A \subset \mathbf{I}$. З підсиленого закону великих чисел Етемаді [15] випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d} \sum_{\mathbf{j} \in n\mathbf{I}} |X(\mathbf{j})| = \kappa \quad \text{майже напевно.}$$

Поєднуючи ці два результати, отримуємо (6).

3.1.2 Доведення теореми 3

Підсилений закон великих чисел (10) випливає з нерівності (13) та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n^d} \sum_{\mathbf{j} \in n\mathbf{I}} |X(\mathbf{j})| = 0 \quad \text{майже напевно,}$$

що є наслідком теореми 4.

3.2 ПЗВЧ для сум однаково розподілених випадкових величин

Для зручності наведемо необхідне у доведенні теореми 3 твердження про підсилений закон великих чисел. На відміну від підсиленого закону великих чисел Колмогорова цей результат справджується без припущення про незалежність випадкових величин.

Теорема 4 (Мартікайнен, Петров [13]). *Нехай $\{X_n\}$ — послідовність однаково розподілених випадкових величин. Нехай $\{a_n\}$ — неспадна послідовність додатних чисел, для якої виконана умова (8). Якщо додатково виконано умову (9), то*

$$\frac{S_n}{a_n} \rightarrow 0 \quad \text{майже напевно,} \quad (14)$$

де $S_1 = X_1$,

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \geq 2.$$

4 Приклади та контрприклад

Для $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d)$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$, $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$, позначатимемо

$$|\mathbf{t}| = \prod_{i=1}^d t_i, \quad [\mathbf{t}, \mathbf{s}] = [t_1, s_1] \times \dots \times [t_d, s_d],$$

$$\mathbf{t} + \mathbf{s} = (t_1 + s_1, \dots, t_d + s_d).$$

Для $A \subset \mathbb{R}^d$ і $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^d$ позначимо $\mathbf{t} \cdot A = \{(t_1 x_1, \dots, t_d x_d) : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in A\}$.

Покладемо також $I = (\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, де $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$.

Для $m \geq 1$ і $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$ позначимо

$$C_m(\mathbf{k}) = \frac{1}{m}(\mathbf{k} - \mathbf{1}, \mathbf{k}].$$

Крім того, нехай

$$A'_m = \bigcup_{C_m(\mathbf{k}) \subseteq A} C_m(\mathbf{k}),$$

$$A''_m = \bigcup_{C_m(\mathbf{k}) \cap A \neq \emptyset} C_m(\mathbf{k})$$

для $A \subset \mathbb{R}^d$.

У статті [10] доводиться наступне твердження:

Теорема 5 (Клесов, Молчанов [10]). *Нехай ξ — випадковий заряд, визначений на обмежених борелевських підмножинах $\mathbb{R}_+^d$, такий, що для кожної обмеженої борелевської множини A існує $E|\xi(A)|$.*

Нехай $\mathcal{A}$ — деяка сукупність борелевських підмножин I .

Припустимо, що виконуються дві умови:

(Z1) Майже напевно виконується

$$\lim_{|\mathbf{t}| \rightarrow \infty} \frac{\xi(\mathbf{t} \cdot I) - E[\xi(\mathbf{t} \cdot I)]}{|\mathbf{t}|} = 0 \quad (15)$$

(Z2) Існує така випадкова міра η , що $\eta(A) \geq |\xi(A)|$ для кожної обмеженої борелевської множини A , і виконується

$$\lim_{|\mathbf{t}| \rightarrow \infty} \frac{\eta(\mathbf{t} \cdot I) - E[\eta(\mathbf{t} \cdot I)]}{|\mathbf{t}|} = 0 \quad \text{м. н.,} \quad (16)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{|\mathbf{t}| \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{E[\eta(\mathbf{t} \cdot (A''_m \setminus A'_m))]}{|\mathbf{t}|} \right| = 0. \quad (17)$$

Тоді

(Z3) Майже напевно виконується

$$\lim_{|\mathbf{t}| \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{\xi(\mathbf{t} \cdot A) - E[\xi(\mathbf{t} \cdot A)]}{|\mathbf{t}|} \right| = 0. \quad (18)$$

Стосовно теореми 5 виникає питання: для яких $d \in \mathbb{N}$ і $\mathcal{A}$ умова (Z2) не є суттєвою, тобто у якому випадку для кожного випадкового заряду ξ , що задовольняє (Z1), виконується також (Z3)?

Нехай α — заряд, заданий на обмежених борелевських підмножинах $\mathbb{R}_+^d$. Позначимо:

(Z4)

$$\lim_{|\mathbf{t}| \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\mathbf{t}I)}{|\mathbf{t}|} = 0, \quad (19)$$

(Z5)

$$\lim_{|\mathbf{t}| \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{\alpha(\mathbf{t}A)}{|\mathbf{t}|} \right| = 0. \quad (20)$$

Тоді для $d \in \mathbb{N}$ і $\mathcal{A}$ твердження

$$\forall \xi : (Z1) \Rightarrow (Z3)$$

є рівносильним твердженню

$$\forall \alpha : (Z4) \Rightarrow (Z5).$$

Дійсно, нехай існує заряд α , для якого виконується (Z4), але не виконується (Z5). Візьмемо $\Omega = \{0, 1\}$, $P(\{0\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{2}$, $\xi = \alpha$ при $\omega = 0$, $\xi = -\alpha$ при $\omega = 1$. Тоді ξ є випадковим

зарядом, $E[\xi] = 0$, і для ξ буде виконуватись (Z1), але не (Z3).

Нехай існує ξ , для якого виконується (Z1), але не (Z3). Тоді $\exists \omega \in \Omega$, для якого виконується (15), але не (18). Візьмемо $\alpha = \xi(\omega) - E[\xi]$. Тоді α — це заряд, і для нього виконується (Z4), але не (Z5).

Наведемо три приклади: в одному з них умова (Z2) є зайвою, а у інших двох вона є необхідною.

Приклад 1. $d = 1$, $\mathcal{A}$ — множина всіх об'єднань скінченної кількості відкритих зліва півінтервалів, що належать I . Тоді умова (Z2) є необхідною.

Доведення: Покладемо в непарні натуральні числа заряд 1, а в парні натуральні числа заряд (-1) (відповідно, $\alpha(A)$ — це кількість непарних натуральних точок, які належать A , мінус кількість парних натуральних точок, які належать A).

Для цього $\alpha(A)$ виконується (Z4), але не виконується (Z5), оскільки $\sup_{A \in \mathcal{A}} |\alpha(tA)| \geq \frac{|t| - 1}{2}$ (ми обираємо таке $A \in \mathcal{A}$, щоб tA з цілих точок від 1 до $[t]$ містило непарні і тільки непарні).

Приклад 2. $d = 1$, $\mathcal{A}$ — множина всіх відкритих зліва півінтервалів, що належать I . Тоді умова (Z2) є зайвою.

Доведення: Позначимо $f(x) = \alpha((0, x])$. Тоді (Z4) рівносильно $\frac{|f(x)|}{x} \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$. Візьмемо $N, M > 0$ так, щоб $M > |f(x)|, \forall x \leq N$; $x > |f(x)|, \forall x \geq N$.

Позначимо через $\mathcal{D}$ множину $\{(0, x], x \in I\}$. Оскільки $\forall A \in \mathcal{A} \exists D_1, D_2 \in \mathcal{D} : A = D_1 \setminus D_2$, то

$$\begin{aligned} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{\alpha(tA)}{t} \right| &\leq 2 \sup_{D \in \mathcal{D}} \left| \frac{\alpha(tD)}{t} \right| = 2 \sup_{0 < x \leq t} \frac{|f(x)|}{t} \\ &\leq 2 \sup_{0 < x \leq \sqrt{t}} \frac{|f(x)|}{t} + 2 \sup_{\sqrt{t} < x \leq t} \frac{|f(x)|}{t} \\ &\leq \frac{2 \max\{\sqrt{t}, M\}}{t} + 2 \sup_{\sqrt{t} < x \leq t} \frac{|f(x)|}{x} \\ &\rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отже, для α виконується (Z5).

Приклад 3. $d = 2$, $\mathcal{A} = \{A_n\}$, где $A_n = \left(0, \left(\frac{1}{n}, 1\right)\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді умова (Z2) є необхідною.

Доведення: Задамо функцію g наступним чином: $g\left(n, \frac{1}{n}\right) = n$, $g\left(n+1, \frac{1}{n}\right) = (-2n-1)$, $g\left(n+2, \frac{1}{n}\right) = n+1$, $n \in \mathbb{N}$. Позначимо через V множину точок, на яких g задана. Нехай $\alpha(A) = \sum_{x \in V \cap A} g(x)$.

Покажемо, що для цього заряду α виконується (Z4) і не виконується (Z5).

Так як $\alpha(\mathbf{t}_n A_n) = \alpha((0, (n^2, \frac{1}{n^2}))) = g\left(n^2, \frac{1}{n^2}\right) = n^2$, (Z5) не виконується, оскільки при $\mathbf{t}_n = (n^3, \frac{1}{n^2})$ $|\mathbf{t}_n| = n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$, і

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{\alpha(\mathbf{t}_n A)}{|\mathbf{t}_n|} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \left| \frac{\alpha(\mathbf{t}_n A_m)}{|\mathbf{t}_n|} \right| \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha(\mathbf{t}_n A_n)}{|\mathbf{t}_n|} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2}{n} \right| = +\infty. \end{aligned}$$

Доведемо, що (Z4) виконується. Достатньо довести, що $\alpha(\mathbf{t}I)$ обмежена на $\{|\mathbf{t}| \geq 3\}$. Оскільки $\{\mathbf{t} = (x, y) | x < 3\}$ містить всього 3 точки з V , то достатньо довести, що якщо $|\mathbf{t}| = xy \geq 3$ і $x \geq 3$, то $\alpha(\mathbf{t}I) = 0$.

Нехай $m = [x] \geq 3$, $xy \geq 3$, s — мінімальне натуральне число, для якого виконується $\frac{1}{s} \leq y$. Тоді $\alpha(\mathbf{t}I) = \alpha((m, \frac{1}{s})I)$, причому $s \leq m-1$ (інакше $s \geq m$ і $\frac{3s-3}{s-1} \geq \frac{m+1}{s-1} > xy \geq 3$, протиріччя). Отже,

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{t}I) &= \alpha((m, \frac{1}{s})I) = g_{m,m} + g_{m,m-1} + g_{m-1,m-1} \\ &\quad + \sum_{k=s}^{m-2} (g_{k,k} + g_{k+1,k} + g_{k+2,k}) = 0, \end{aligned}$$

де $g_{i,j} = g\left(i, \frac{1}{j}\right)$.

Позначимо через $\mathcal{C}$ сукупність множин $\left(0, \frac{j}{m}\right] \subset I$, де $j \in \mathbb{N}^d$, $m \in \mathbb{N}$.

Як і вище, через $|A|$ позначатимемо міру Лебега множини $A \subset \mathbb{R}^d$.

У статті [8] доводиться наступне твердження:

Теорема 6 (Богданський, Клесов [8]). Нехай ξ і $\mathcal{A}$ є такими ж, як і в теоремі 5, причому $\mathcal{A}$ задовольняє умову (5).

Припустимо, що додатково виконуються дві умови:

(Z6) Існує випадкова величина μ , така, що майже напевно $\forall B \in \mathcal{C}$ виконується

$$\frac{\xi(nB)}{n^d} \rightarrow \mu \cdot |B|, \quad n \rightarrow \infty. \quad (21)$$

(Z7) Існує випадкова міра η , визначена на обмежених борелевських підмножинах $\mathbb{R}_+^d$, така, що $\eta(A) \geq |\xi(A)|$ для кожної обмеженої борелевської множини A , і випадкова величина λ , така, що майже напевно $\forall B \in \mathcal{C}$ виконується

$$\frac{\eta(nB)}{n^d} \rightarrow \lambda \cdot |B|, \quad n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Тоді

(Z8) Майже напевно виконується

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{\xi(nA)}{n^d} - \mu |A| \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Чи є умова (Z7) необхідною для теореми 6?

Приклад 4. Контрприклад, що показує необхідність умови (Z7).

Нехай $d = 1$, $\mu \equiv 1$, $\mathcal{A} = \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \right\}$, ξ не залежить від ω . Задамо не випадковий заряд ξ наступним чином:

$$D_k = \left\{ \frac{n}{k} \right\}_{n \geq 1};$$

$A_n = \left(\frac{n}{\sqrt{2}} - a_n, \frac{n}{\sqrt{2}} + a_n \right)$, де $a_n > 0$ підбрані так, щоб $\forall m \leq n$ множини A_n і D_m не перетинались;

$$A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Помітимо, що $\forall m \in \mathbb{N}$ множини A і D_m мають лише скінченну кількість спільних точок.

Покладемо $h(x) = 1$, якщо $x \notin A$; $h\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) = 2$, $n \in \mathbb{N}$; функція h є лінійною на $\left(\frac{n}{\sqrt{2}} - a_n, \frac{n}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{n}{\sqrt{2}}, \frac{n}{\sqrt{2}} + a_n\right)$.

Покладемо $f(x) = xh(x)$; тоді f — неперервна функція $[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ з $f(0) = 0$, і існує заряд ξ , такий, що $\xi((0, x]) = f(x)$, $\forall x > 0$.

Для цього ξ (Z6) виконується, а (Z8) не виконується.

5 Висновки та зауваження

Зважаючи на принцип підпослідовностей Чаттерджі та зв'язок між граничними теоремами для підпослідовностей та для $S(nA)$, можна поставити задачу про рівномірну у класі множин швидкість збіжності випадкових рядів.

Припустимо, що ряд $\sum X_n$ збігається майже напевно. Його хвіст позначимо через

$$\zeta_n = \sum_{k \geq n} X_k.$$

Якщо не випадкова послідовність (b_n) спадає до нуля, $b_n \rightarrow 0$, причому

$$\frac{\zeta_n}{b_n} \rightarrow 0 \quad \text{майже напевно,}$$

то швидкість збіжності ряду $\sum X_n$ можна охарактеризувати як $o(b_n)$. Питання швидкості збіжності для нерівномірної постановки вивчалось в [16]–[17]. Наскільки відомо авторам, це питання для рівномірної постановки ще не досліджене.

Схожу задачу можна поставити й для граничних теорем для процесів відновлення. Таку задачу розглянуто в [8], але її можна узагальнити з використанням загальних методів дослідження асимптотичних квазі-обернених функцій (див. [18]–[19]).

Список використаних джерел

1. Chatterji, S. D. Un principe de sous-suites dans la théorie des probabilités / S. D. Chatterji — Séminaire de Probabilités VI Université de Strasbourg. — (ed. N. Bourbaki). — Springer, Berlin. — (1972). — pp. 72–89. Режим доступу до журн.: <https://www.springer.com/gp/book/9783540057734>
2. Komlós, J. A generalization of a problem of Steinhaus / J. Komlós — Acta Math. Hungar. — 18. — (1967). — pp. 217–229. Available from: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02020976>
3. Chatterji, S. D. A principle of subsequences in probability theory: the central limit theorem / S. D. Chatterji — Adv. Math. — 13. — (1974). — pp. 31–54. Режим доступу до журн.:

- <https://pdf.sciencedirectassets.com/272585/1-s2.0-S0001870800X03969/1-s2.0-0001870874900644/main.pdf?X-Amz-Security-Token=IQoJb3JpZ2luX2VjEKv>
4. Гапошкин, В. Ф. Лакунарные ряды и независимые функции / В. Ф. Гапошкин — Успехи матем. наук. — т. XXI. — вып. 6 (12). — (1966). — с. 3–82. Режим доступа до журн.: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=5939&option_lang=rus
5. Gut, A. On complete convergence in the law of large numbers for subsequences / A. Gut — Ann. Probab. — 1985. — vol. 13. — no. 4. — pp. 1286–1291. Режим доступа до журн.: <https://projecteuclid.org/euclid.aop/1176992812>
6. Klesov, O. I. On integrability of $|S_{n_k}/n_k|$ / O. I. Klesov — in book New Trends in Probability and Statistics. Proceedings of the Bakuriani Colloquium in honour of Yu. V. Prokhorov, Bakuriani, Georgia, USSR, 24 February–4 March 1990 (eds. V. V. Sazonov and T. Shervashidze). — vol. 1. — 1990. — Mokslas and VSP. — Vilnius, Lithuania, and Utrecht, the Netherlands. — pp. 38–42
7. Bogdanskii, V. Yu., Klesov, O. I., Molchanov, I. Uniform strong law of large numbers / V. Yu. Bogdanskii, O. I. Klesov, I. Molchanov // Methodol. Comput. Appl. Probab. — 2019. — Режим доступа до журн.: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11009-019-09711-x>.
8. Богданський, В. Ю., Клесов, О. І. До статті Басса і Пайка / В. Ю. Богданський, О. І. Клесов // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. — 2020. — №2. — С. 34–41. — Режим доступа до журн.: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).34-41](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).34-41)
9. Klesov, O. I., Molchanov, I. Moment conditions in strong laws of large numbers for multiple sums and random measures / O. I. Klesov, I. Molchanov // Stat. Probab. Lett. — 2017. — vol 131. — pp. 56–63. Режим доступа до журн.: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167715217302675>
10. Klesov, O. I., Molchanov, I. Uniform strong law of large numbers / O. I. Klesov, I. Molchanov // in book Modern Mathematics and Mechanics: Fundamentals, Problems and Challenges (editors V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky). — Springer International Publishing AG. — Cham (Switzerland). — pp. 335–350. Режим доступа до журн.: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11009-019-09711-x>
11. Bass, R. F. and Pyke, R. A strong law of large numbers for partial-sum processes indexed by sets / R. F. Bass and R. Pyke // Ann. Probab. — 1984. — vol. 12. — issue 1. — pp. 268–271.
12. Klesov, O. I. Limit Theorems for Multi-Indexed Sums of Random Variables / O. I. Klesov // Springer. — Berlin. 2014. — xviii+483 pp. Режим доступа до монографії: <http://www.springer.com/mathematics/probability/book/978-3-662-44387-3>
13. Мартикайнен, А. И., Петров В. В. Об одной теореме Феллера / А. И. Мартикайнен, В. В. Петров // Теор. вероятност. применен. — 1980. — том 25. — №1. — стр. 194–197. Режим доступа до журн.: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=tv&paperid=1050&option_lang=rus
14. Feller, W. A limit theorem with infinite moments / W. Feller // Amer. J. Math. — 1946. — vol. 68. — issue 2. — pp. 257–262. Режим доступа до журн.: <https://www.jstor.org/stable/2371837?seq=1>
15. Etemadi, N. An elementary proof of the strong law of large numbers / N. Etemadi // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. — 1981. — vol. 55. issue 1. — pp. 119–122 Режим доступа до журн.: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01013465>
16. Клесов, О. И. О скорости сходимости рядов случайных величин / О. И. Клесов // Укр. матем. журнал. — 1983. том 35. — №3. с. 309–314.
17. Клесов, О. И. Скорость сходимости некоторых случайных рядов / О. И. Клесов // Теор. вероятн. мат. стат. — 1984. — вып.

30. — стр. 81–92. Режим доступу до журн.: <http://probability.univ.kiev.ua/tims/?year=1984&volume=30>
18. Булдігін, В. В., Клесов, О. И., Штайнебах, Й. Г. Властивості асимптотично квазі-інверсних функцій та їхні застосування. I / В. В. Булдігін, О. И. Клесов, Й. Г. Штайнебах // Теор. ймовірн. мат. стат. — 2004. — вип. 70. — стр. 9–25. Режим доступу до журн.: <http://probability.univ.kiev.ua/tims/issues-new/70/PDF/4.pdf>
19. Булдігін, В. В., Клесов, О. И., Штайнебах, Й. Г. Властивості асимптотично квазі-інверсних функцій та їхні застосування. I / В. В. Булдігін, О. И. Клесов, Й. Г. Штайнебах // Теор. ймовірн. мат. стат. — 2007. — вип. 77. — стр. 13–27. Режим доступу до журн.: <http://probability.univ.kiev.ua/tims/issues-new/77/PDF/4.pdf>
5. GUT A. (1985), *On complete convergence in the law of large numbers for subsequences*, Ann. Probab., vol. 13, no. 4, pp. 1286–1291. Available from: <https://projecteuclid.org/euclid.aop/1176992812>
6. KLESOV O. I. (1990), *On integrability of $|S_{n_k}/n_k|$* , in book New Trends in Probability and Statistics. Proceedings of the Bakuriani Colloquium in honour of Yu. V. Prokhorov, Bakuriani, Georgia, USSR, 24 February–4 March 1990 (eds. V. V. Sazonov and T. Shervashidze), vol. 1, 1990, Mokslas and VSP, Vilnius, Lithuania, and Utrecht, the Netherlands, pp. 38–42.
7. BOGDANSKII, V. Yu., KLESOV, O. I., MOLCHANOV, I. (2019) *Uniform strong law of large numbers*, Methodol. Comput. Appl. Probab. Available from: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11009-019-09711-x>.
8. BOGDANSKII, V. Yu. and KLESOV, O. I. (2020) *On a theorem of Pyke and Bass*, Nauk. visnyk Uzhgorod Univ., №2, pp. 34–41. Available from: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).34-41](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).34-41)
9. KLESOV O. I. and MOLCHANOV I. (2017) *Moment conditions in strong laws of large numbers for multiple sums and random measures*, Stat. Probab. Lett., vol. 131, pp. 56–63. Available from: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167715217302675>
10. KLESOV O. I. and MOLCHANOV I. (2019) *Uniform strong law of large numbers*, in book Modern Mathematics and Mechanics: Fundamentals, Problems and Challenges (editors V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky), Springer International Publishing AG, Cham (Switzerland), pp. 335–350. Available from: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11009-019-09711-x>
11. BASS R. F. and PYKE R. (1984) *A strong law of large numbers for partial-sum processes indexed by sets* Ann. Probab., vol. 12, issue 1, pp. 268–271.
1. CHATTERJI S. D. (1972) *Un principe de sous-suites dans la théorie des probabilités*, Séminaire de Probabilités VI Université de Strasbourg (ed. N. Bourbaki), Springer, Berlin, pp. 72–89. Available from: <https://www.springer.com/gp/book/9783540057734>
2. KOMLÓS J. (1967) *A generalization of a problem of Steinhaus*, Acta Math. Hungar. 18 (1967) pp. 217–229. Available from: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02020976>
3. CHATTERJI S. D. (1974) *A principle of subsequences in probability theory: the central limit theorem*, Adv. Math., 13, pp. 31–54. Available from: <https://pdf.sciencedirectassets.com/272585/1-s2.0-S0001870800X03969/1-s2.0-0001870874900644/main.pdf?X-Amz-Security-Token=IQoJb3JpZ2luX2VjEKv>
4. GAPOSHKIN V. F. (1966), *Lacunary series and independent functions*, Russian Mathematical Surveys, 21:6, 1–82. Available from: <http://mr.crossref.org/iPage?doi=10.1070>

12. KLESOV, O. I. *Limit Theorems for Multi-Indexed Sums of Random Variables*, Springer, Berlin, 2014, xviii+483 pp. Available from: <http://www.springer.com/mathematics/probability/book/978-3-662-44387-3>
13. MARTIKAINEN, A. I. and PETROV, V. V. (1980) *On a Theorem of Feller*. Theor. Probab. Appl. vol. 25, issue 1, pp. 191–193. Available from: <https://epubs.siam.org/doi/10.1137/1125023>
14. Feller, W. (1946) *A limit theorem with infinite moments*. Amer. J. Math., vol. 68, issue 2, pp. 257–262. Available from: <https://www.jstor.org/stable/2371837?seq=1>
15. ETEMADI, N. (1981) *An elementary proof of the strong law of large numbers*. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. vol. 55, issue 1, pp. 119–122 Available from: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01013465>
16. KLESOV O. I. (1983), *Rate of convergence of series of random variables*, Ukrainian Math. J., vol. 35, pp. 264–268. Available from: <https://link.springer.com/article/10.1007%2F01092173>
17. KLESOV O. I. (1985), *Rate of convergence of some random series*, Theor. Probab. Math. Statist., vol. 30, pp. 91–101.
18. BULDYGIN V. V., KLESOV O. I., and Steinebach J. G. (2004) *Properties of asymptotically quasi-inverse functions and their applications. I* Theory Probab. Math. Statist. — vol. 70. — pp. 11–28. Available from: <http://probability.univ.kiev.ua/tims/issues-new/70/PDF/4.pdf>
19. BULDYGIN V. V., KLESOV O. I., and Steinebach J. G. (2008) *On some properties of asymptotically quasi-inverse functions*. Theory Probab. Math. Statist. — vol. 77. — pp. 15–30. Available from: <http://www.ams.org/journals/tpms/2005-70-00/S0094-9000-05-00627-7/S0094-9000-05-00627-7.pdf>

Надійшла до редколегії 1.10.2020