МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Гуляницький Андрій Леонідович

УДК 519.63

ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ І ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ З ПАМ'ЯТТЮ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Семенов Володимир Вікторович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
професор кафедри обчислювальної математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Гладкий Анатолій Васильович,
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
завідувач лабораторії методів математичного
моделювання процесів екології та енергетики;

доктор фізико-математичних наук,
член-кореспондент НАН України
Кочубей Анатолій Наумович,
Інститут математики НАН України
завідувач відділу нелінійного аналізу.

Захист відбудеться «_24_» _жовтня_ 2016 о _14_ год. _15_ хв. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.35 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: м. Київ, просп. Академіка Глушкова, 2а, географічний факультет, ауд. 310.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці ім. М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий «21» вересня 2016 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Зінько П. М.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Із розвитком природознавства й техніки дедалі більшою стає потреба у дослідженні систем, еволюція яких характеризується пам'яттю (ередитарністю, залежністю від передісторії). Важливими прикладами математичних моделей систем з пам'яттю є інтегро-диференціальні рівняння й рівняння з дробовою похідною Рімана-Ліувілля або Капуто за часом. Так, інтегро-диференціальні рівняння Вольтерра описують теплопровідність і коливання у в'язко-пружних матеріалах. Рівняння у частинних похідних з дробовими похідними за часом слугують математичними моделями перенесення зарядів в аморфних напівпровідниках, дифузії речовин у ґрунтових водах, внутрішньоклітинного транспорту, перенесення морфогенів у тканинах зародків тощо. Побудовою сучасних математичних моделей таких процесів займались В.М. Булавацький, І.М Соколов, С.П. Федотов, О.В. Чечкін, E. Barkai, R. Gorenflo, J. Klafter та інші науковці.

З іншого боку, деякі задачі прикладної математики (точкове, точково-імпульсне керування) потребують дослідження відповідних початково-крайових задач з правими частинами у вигляді розподілів скінченного порядку. Актуальними проблемами є встановлення існування і єдиності розв'язків таких задач, а також побудова методів наближеного знаходження цих розв'язків. Вказані проблеми для класичних і деяких некласичних типів рівнянь у частинних похідних досліджувались Ж.-Л. Ліонсом, Ю.М. Березанським, С.І. Ляшком, Д.А. Номіровським, В.В. Семеновим, А.В. Анікушиним, V.J. Ervin, J.P. Roop та іншими науковцями. Проте чимало таких проблем для інтегро-диференціальних рівнянь і рівнянь дробових порядків досі є відкритими. Особливо це стосується одного з новітніх класів моделей математичної фізики - рівнянь змінних порядків.

Слід зазначити, що не для усіх перелічених вище класів рівнянь відомі аналітичні розв'язки. Навіть у випадках, коли вдається одержати такі розв'язки у за допомогою спеціальних функцій, вони часто виявляються малопридатними для безпосереднього обчислення. Тому саме коректна й ефективна побудова наближених розв'язків цих рівнянь може відігрaти значну роль у дослідженні фізичних властивостей ередитарних систем. Слід зазначити, що часова нелокальність досліджуваних рівнянь ускладнює їх чисельне розв'язування.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано в рамках тем наукових досліджень «Моделювання та оптимізація диференціальних та інтегро-диференціальних систем з розподіленими параметрами» (№ДР 0115U000165) і «Методи якісного аналізу та алгоритми для некласичних варіаційних задач» (№ДР 0112U008252) факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є одержання теоретичних і обчислювальних результатів, які стосуються якісного характеру розв'язків інтегро-диференціальних і дробових диференціальних рівнянь. Досягнення мети пов'язане з розв'язанням таких задач:

– встановлення існування узагальнених розв'язків параболічних, псевдопараболічних і псевдогіперболічних інтегро-диференціальних рівнянь;
– побудова й обґрунтування чисельних методів розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь;
– обґрунтування збіжності чисельного методу для рівняння повільної дифузії з негладкою правою частиною;
– доведення розв'язності рівняння дифузії з похідною змінного порядку за часом;
– побудова чисельних методів для дробових рівнянь дифузії, зокрема змінного порядку.

Об'єкт дослідження: інтегро-диференціальні й дробові диференціальні (з дробовими похідними за часом) рівняння у частинних похідних.

Предмет дослідження: слабка розв'язність і наближене обчислення розв'зків початково-крайових задач для вказаних рівнянь.

Методи дослідження: розв'язність інтегро-диференціальних рівнянь встановлено за домомогою abc-методу і теорії операторів. При дослідженні рівнянь дробового порядку використано відомості з функціонального аналізу і дробового числення. Крім того, застосовано метод обчислювального експерименту.

Наукова новизна одержаних результатів.

– вперше досліджено слабку розв'язність рівняння субдифузії змінного порядку;
– вперше запропоновано й реалізовано чисельний метод для рівняння субдифузії змінного порядку;
– доведено неперервність слабких розв'язків рівняння субдифузії сталого порядку і слабкої збіжності напівдискретного методу Гальоркіна з негладкими правими частинами;
– в апріорних нерівностях, відомих для параболічних інтегро-диференціальних рівнянь, знято суттєві обмеження на коефіцієнти, що дало змогу поширити ці результати (і відповідні теореми узагальненої розв'язності й керованості) на більшість практично важливих рівнянь вказаного типу. Крім того, спрощено доведення допоміжних нерівностей;
– вперше обґрунтовано збіжність напівдискретного методу Гальоркіна для інтегро-диференціальних рівнянь з негладкими правими частинами. Шляхом обчислювального експерименту показано, що результати його роботи узгоджуються з теоретичними відомостями про властивості розв'язків.

Практична цінність і впровадження результатів роботи. Результати дисертаційної роботи може бути використано для чисельного моделювання процесів аномальної дифузії, динаміки пружних тіл, дифузії у в'язко-пружних середовищах. Крім цього, елементи дисертаційної роботи було впроваджено у навчальний процес кафедри обчислювальної математики в рамках дисциплін «Математичне моделювання еволюційних процесів» і «Теорія оптимізації у функціональних просторах». Окремі результати роботи було використано при виконанні науково-дослідних тем «Моделювання та оптимізація диференціальних та інтегро-диференціальних систем з розподіленими параметрами» (№ДР 0115U000165) і «Методи якісного аналізу та алгоритми для некласичних варіаційних задач» (№ДР 0112U008252) факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації одержано автором самостійно. Роботи [2]-[4] виконані здобувачем без співавторів. У роботі [1] здобувачу належать леми 1-5 і теореми 1-2, а співавтору - постановка задачі й означення 1. У роботі [5] здобувачу належать леми 4-6 і теорема 1, співавтору належать лема 2 і теорема 2; леми 1-3 одержано здобувачем і співавтором спільно.

Апробація результатів дисертації. Матеріали дисертаційної роботи доповідались на науковому семінарі кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (2016 р.), науковому семінарі відділу нелінійного аналізу Інституту математики НАН України (Київ, 2016), науковому семінарі відділу математичних систем моделювання проблем екології та енергетики інституту кібернетики НАН України (Київ, 2016), а також на міжнародних наукових конференціях:

1. IX Міжнародна міждисциплінарна науково-практична конференція "`Шевченківська весна-2011"' (Київ, 2011).
2. XV Міжнародна конференція "`Dynamical System Modelling and Stability Investigation"' (Київ, 2011).
3. XV Міжнародна конференція "`Dynamical System Modelling and Stability Investigation"' (Київ, 2011).
4. Гумбольдт-Колег "`The Education and Science and their Role in Social and Industrial Progress of Society"' (Київ, 2014).
5. VII Міжнародна наукова конференція імені І. І. Ляшка "`Обчислювальна та прикладна математика"' (Київ, 2014).
6. III Європейсько-українська конференція "`Mathematics for Life Sciences"' (Рівне, 2015).
7. VIII Міжнародна наукова конференція імені І. І. Ляшка "`Обчислювальна та прикладна математика"' (Київ, 2015).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 5 статтях у наукових журналах [1-5], з них 4 статті у фахових виданнях, затверджених МОН України, і 1 стаття у іноземному фаховому виданні, що входить до міжнародних наукометричних баз даних, а також у 7 тезах доповідей на міжнародних наукових конференціях [6-12].

Структура та обсяг роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, трьох додатків (на 3 сторінках) і списку використаних джерел (125 найменувань на 14 сторінках). Крім того, дисертація містить 5 таблиць і 6 рисунків. Обсяг дисертації становить 120 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовується актуальність теми дисертації, формулюється мета роботи, висвітлюється наукова новизна і практична цінність одержаних результатів, описується особистий внесок здобувача.

У першому розділі проведено огляд літератури за тематикою дисертації. У **підрозділі 1.1** виствітлено теорії слабкої розв'язності операторних рівнянь. **Підрозділи 1.2** й **1.3** присвячено відповідно вольтеррівським інтегро-диференціальним рівнянням і рівнянням з дробовими похідними за часом. У кожному з цих підрозділів розглянуто фізичний зміст і методи аналізу (зокрема, чисельного розв'язування) відповідних рівнянь.

Другий розділ стосується дослідження розв'язності і чисельним методам для різних типів інтегро-диференціальних рівнянь.

Під $u = u(x,t)$ розуміється шукана функція, $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$, де Ω - обмежена замкнена область з гладкою межею $\partial\Omega$, $t \cup 0,T$; A - диференціальний оператор другого порядку:

$$\mathrm{A}\boldsymbol{u} = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x)\, u_{x_j} \right)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i} + a(x)\, u,$$

I - вольтерівський інтегральний оператор:

$$\mathrm{I}\, u = \int_0^t \left[-\sum_{i,j=1}^{n} \left(k_{ij}(x,t,\tau)\, u_{x_i}(x,\tau) \right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} k_i(x,t,\tau)\, u_{x_i}(x,\tau) + k(x,t,\tau)\, u(x,\tau) \right] d\tau.$$

Якщо у рівнянні присутній оператор B, то його структура аналогічна оператору A. Під L_2 розумітимемо простір $L_2(Q)$, а під C - додатну сталу.

Підрозділ 2.1 присвячено рівнянням параболічного типу.

Розглянемо початково-крайову задачу

$$u_t + \mathrm{A}u + \mathrm{I}\, u = f, \tag{1}$$

$$u|_{t=0}=0, u|_{\partial\Omega}=0. \qquad (2)$$

Вважатимемо, що функції $a_{ij}=a_{ji}, a_i, \dfrac{\partial a_i}{\partial x_i}, a$ вимірні й обмежені у Ω, а $k_{ij}=k_{ji}, k_i, \dfrac{\partial k_i}{\partial x_i}, k, \dfrac{\partial k_{ij}\ \ x,t,\tau}{\partial\tau}, \dfrac{\partial k_i\ \ x,t,\tau}{\partial\tau}, \dfrac{\partial k\ \ x,t,\tau}{\partial\tau}$ вимірні й обмежені в $\Omega\times\ 0,T\ \times\ 0,T$.

Нехай $C_s^\infty, s\in\ 0,T$ - лінійні множини нескінченно диференційованих функцій, які задовольняють крайові умови:

$$u|_{x\in\partial\Omega}=0, u|_{t=s}=0.$$

Позначимо через W^+ і H^+ поповнення C_0^∞ за нормами

$$\|u\|_{W^+}=\left(\int_Q u_t^2+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\, dQ\right)^{\frac{1}{2}}, \|u\|_{H^+}=\left(\int_Q\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\, dQ\right)^{\frac{1}{2}},$$

а через W_*^+ - поповнення C_T^∞ за нормою $\|\cdot\|_{W^+}$.

Розглянемо лінійний оператор

$$\mathrm{L}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{A}+\mathrm{I}\ ,$$

визначений спочатку на множині C_0^∞, і формально спряжений до нього оператор, який позначимо через L^*. Множиною визначення L^* спочатку вважатимемо C_T^∞.

Лема 1. *Справедливі нерівності*

$$\|\mathrm{L}u\|_{W_*^-}\geq C\|u\|_{W^+}, \|\mathrm{L}^*v\|_{W^-}\leq C\|v\|_{W_*^+},$$

де $u\in C_0^\infty, v\in C_T^\infty$.

Ця лема дає змогу розширити оператори L і L^* до лінійних неперервних операторів, що діють з W^+ в W_*^- і з W_*^+ в W^- відповідно.

Лема 2. *Справедливі нерівності*

$$\|\mathrm{L}u\|_{W_*^-}\geq C\|u\|_{L_2}, \|\mathrm{L}^*v\|_{W^-}\geq C\|v\|_{L_2}.$$

Лема 3. *Справедливі нерівності*

$$\|\mathrm{L}u\|_{H^-}\geq C\|u\|_{H^+}, \|\mathrm{L}^*v\|_{H^-}\geq C\|v\|_{H^+}.$$

Означення 1. Узагальненим розв’язком крайової задачі (1) - (2) називається розв’язок операторного рівняння $\mathrm{L}u=f$ (рівність розуміється у просторі W_*^-).

Означення 2. Узагальненим розв'язком крайової задачі (1) – (2) називається елемент u, для якого існує така послідовність $\{u_i\}$, $u_i \in C_0^\infty$, що

$$\| u_i - u \|_{H^+} \to 0, \| \mathrm{L} u_i - f \|_{W_*^-} \to 0, i \to \infty.$$

Теорема 1. *Для довільного функціоналу $f \in H^-$ існує є єдиний розв'язок $u \in H^+$ задачі (1) – (2) в розуміння означення 1.*

Теорема 2. *Для довільного $f \in W_*^-$ існує і єдиний розв'язок $u \in L_2$ задачі (1) – (2) в розумінні означення 2.*

Зауваження 1. Єдиними обмеженням на коефіцієнти рівняння, окрім умов гладкості, є рівномірна еліптичність оператора A.

Зауваження 2. Задачу з неоднорідною початковою умовою $u|_{t=0} = u_0$, де $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, можна звести до задачі вигляду (1) – (2) шляхом заміни $\bar{u} = u - u_0$.

Розглянемо напівдискретний чисельний метод для задачі (1) – (2).

Виберемо базис $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ у просторі $H_0^1(\Omega)$. Через H_m позначимо лінійну оболонку системи $\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$. Наближений розв'язок будемо шукати у вигляді лінійної комбінації

$$u^m = \sum_{l=1}^{m} g_l(t)\,\omega_l; \tag{3}$$

коефіцієнти $g_l(t)$ знаходяться зі співвідношень

$$\begin{gathered}
\left(u_t^m(t), v\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i}^m(t), v_{x_j}\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}^m(t), v\right)_{L_2(\Omega)} + \left(a u^m(t), v\right)_{L_2(\Omega)} + \\
+ \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t k_{ij} u_{x_i}^m(s)\, ds, v_{x_j}\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \int_0^t k_i u_{x_i}^m(s)\, ds, v\right)_{L_2(\Omega)} + \\
+ \left(\int_0^t k u_{x_i}^m(s)\, ds, v\right)_{L_2(\Omega)} = \left(f(t), v\right)_{L_2(\Omega)},
\end{gathered} \tag{4}$$

де v - довільний елемент H_m. Переписавши ці рівності з $v = \omega_l$, $l = \overline{1,m}$, одержимо систему звичайних інтегро-диференціальниї рівнянь відносно $g_l(t)$:

$$LG(t) \equiv PG'(t) + AG(t) + \int_0^t K(t,s)\,G(s)\, ds = F(t) \tag{5}$$

з початковими умовами

$$G(0) = 0, \tag{6}$$

де $G(t) = \left(g_1(t),\ldots,g_m(t)\right)^T$, $F(t) = \left(\left(f(t),\omega_1\right)_{L_2(\Omega)},\ldots,\left(f(t),\omega_m\right)_{L_2(\Omega)}\right)^T$, P - матриця Грама системи $\{\omega_i\}_{i=1}^m$ у просторі $L_2(\Omega)$, а A і K - матриці, елементи яких визначаються так:

$$A_{ql} = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}\omega_{l_{x_i}},\omega_{q_{x_j}}\right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left(a_i\omega_{l_{x_i}},\omega_q\right)_{L_2(\Omega)} + \left(a\omega_l,\omega_q\right)_{L_2(\Omega)},$$

$$K_{ql}(t,s) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(k_{ij}\omega_{l_{x_i}},\omega_{q_{x_j}}\right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left(k_i\omega_{l_{x_i}},\omega_q\right)_{L_2(\Omega)} + \left(k\omega_l,\omega_q\right)_{L_2(\Omega)}.$$

Легко бачити, що $F \in \left(L_2(0,T)\right)^m$, тобто $\left(f(t),\omega_q\right) \in L_2(0,T)$, $q=\overline{1,m}$.

Доведення того, що система (5) - (6) має єдиний розв'язок достатньої гладкості, здійснено у два етапи. Спочатку показано, що існування і єдиність мають місце для неперервно диференційовних правих частин, що обертаються в нуль у початковий момент часу (така множина щільна у просторі $\left(L_2(0,T)\right)^m$, а потім це твердження поширено на весь простір $\left(L_2(0,T)\right)^m$ за допомогою апріорних нерівностей.

Теорема 3. *Оператор L допускає розширення до гомеоморфізму між $\left(H_0^1(0,T)\right)^m$ і $\left(L_2(0,T)\right)^m$.*

Основним результатом стосовно чисельного методу є

Теорема 4. *Нехай $f \in H^-$. Тоді послідовність $\{u^m\}$ слабко збігається до розв'язку u задачі (1) - (2) у просторі H^+.*

Обчислювальний експеримент для задачі (1) – (2) виконано для випадку одновимірної області $\Omega = (0,1)$. Кожній точці рівномірної сітки $x_j = jh,\ j=\overline{1,m}$ з кроком $h = \dfrac{1}{m+1}$, поставимо у відповідність скінченноелементну базисну функцію першого порядку:

$$\omega_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x_{j-1}}{h}, & x_{j-1} \le x \le x_j \\ 1-\dfrac{x-x_j}{h}, & x_j \le x \le x_{j+1} \end{cases} \tag{7}$$

Різницеве співвідношення для системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь (5) - (6) складемо інтегро-інтерполяційним методом. Шляхом заміни інтегралів квадратурними формулами одержано систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\left(I + \frac{\tau}{2}A + \frac{\tau^2}{2}K(t_i,t_i)\right)G_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(s)\,ds - \frac{\tau}{2}K(t_i,0)\,G_0 - \tau^2\sum_{l=1}^{i} K(t_i,t_l)\,G_l \tag{8}$$

Спосіб обчислення доданка $\int_{t_{i-1}}^{t_i} F\ s\ ds$ залежить від припущень щодо гладкості та інших властивостей функції f.

У дисертації наведено результати тестування (похибки за нормами L_2 і H^+) побудованого алгоритму на кількох наборах вхідних даних, для яких відомі аналітичні розв'язки. Результати обчислювального експерименту ілюструють факт збіжності методу. Крім того, показано, що розв'язки інтегро-диференціальних рівнянь параболічного типу за своїми властивостями суттєво відрізняються від розв'язків диференціальних параболічних рівнянь. Наприклад, розв'язок задачі (1) - (2) з $f=0$ і невід'ємним початковим станом u_0 може набувати від'ємних значень та/або необмежено зростати за модулем.

Підрозділ 2.2 присвячений псевдо параболічним рівнянням.

Розглянемо початково-крайову задачу

$$\mathrm{A}u_t + \mathrm{B}u + \mathrm{I}\,u = f, \tag{9}$$

$$u\,|_{t=0} = 0,\ u\,|_{\partial\Omega} = 0. \tag{10}$$

Вимагатимемо виконання умов:

- Функції $a_{ij} = a_{ji,} b_{ij} = b_{ji}, a_i, b_i$ неперервно диференційовні, а a і b неперервні в замкненій області $\overline{\Omega}$;
- Ядра k_{ij}, k_i, k обмежені, а k_{ij} й k_i диференційовні за просторовими змінними;
- Оператори А й В рівномірно еліптичні, тобто $\exists \alpha > 0, \beta > 0 : \forall x \in \Omega, \xi_i \in \mathbf{R}$ виконуються нерівності
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ x\ \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\ x\ \xi_i \xi_j \geq \beta \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2;$$
- $$\forall x \in \Omega\ \ a\ x\ \geq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\ x\ + \sum_{i=1}^{n} \left| b_i\ x\ \right| \right),\ b\ x\ \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\ x\ , b\ x\ \geq 0.$$

Нехай $C_s^\infty, s \in\ 0,T$ - лінійні множини нескінченно дифренційовних функцій, які задовольняють крайові умови:

$$u\,|_{x\in\partial\Omega} = 0,\ u\,|_{t=s} = 0.$$

Позначимо через W^+ і H^+ поповнення C_0^∞ за нормами

$$\|\,u\,\|_{W^+} = \left(\sum_{i=1}^{n} u_{tx_i}^2 dQ \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\,u\,\|_{H^+} = \left(\int_Q \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dQ \right)^{\frac{1}{2}},$$

а через W_*^+ - поповнення C_T^∞ за нормою $\|\cdot\|_{W^+}$.

Розглянемо лінійно лінійний оператор

$$\mathrm{L} = \mathrm{A}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + \mathrm{B} + \mathrm{I}\ ,$$

визначений спочатку на множині C_0^∞, і формально спряжений до нього, який позначимо через L^*. Множиною визначення L^*спочатку вважатимемо C_T^∞.

Лема 4. *Справедливі нерівності*

$$\| \mathrm{L}u \|_{W_*^-} \le C \| u \|_{H^+}, \| \mathrm{L}^* v \|_{W^-} \le C \| v \|_{H^+},$$

де $u \in C_0^\infty, u \in C_T^\infty$.

Лема 5. *Справедливі нерівності*

$$\| \mathrm{L}u \|_{W_*^-} \ge C \| u \|_{H^+}, \| \mathrm{L}^* v \|_{W^-} \ge C \| v \|_{H^+}.$$

Означення 3. Узагальненим розв’язком крайової задачі (9) – (10) називається розв’язок операторного рівняння $\mathrm{L}u = f$ (рівність розуміється у просторі W_*^-).

Означення 4. Узагальненим розв’язком крайової задачі (9) – (10) називається елемент u, для якого існує така послідовність u_i $,u_i \in C_0^\infty$, що

$$\| u_i - u \|_{H^+} \to 0, \| \mathrm{L}u_i - f \|_{W_*^-} \to 0,\ i \to \infty.$$

Теорема 5. *Для довільного функціоналу* $f \in H^-$ *існує і єдиний розв'язок* $u \in W_*^-$ *задачі (9) - (10) в розумінні означення 3.*

Теорема 6. *Для довільного* $f \in W_*^-$ *існує і єдиний розв'язок* $u \in H^+$ *задачі (9) - (10) в розумінні означення 4.*

Зауваження 3. Леми 4 і 5 означають, що оператор L можна розширити за неперервністю до гомеоморфізму між H^+ і W_*^-. Отже, для довільного функціонала $f \in W_*^-$ існує єдиний розв'язок рівняння $\mathrm{L}u = f$, причому $u \in W^+ \Leftrightarrow f \in H^-$.

Зауваження 4. Простір W_*^- для псевдопараболічного рівняння містить функціонали, які моделюють точково-імпульсні впливи.

Для псевдопараболічного рівняння побудовано й програмно реалізовано напівдискретний метод Гальоркіна. Одержана при цьому система звичайних диференціальних рівнянь має такий самий вигляд, як система (5).

У дисертації наведено таблиці відносних похибок побудованого методу за нормами L_2 й H^+, обчислених на тестовому прикладі. Результати ілюструють факт збіжності методу.

Праві частини з простору W_*^- 0,1 містять дельта-функції, зосереджені в точках відрізка в окремі моменти часу. Наведемо графіки наближеного розв'язку, для $f(x,t) = 2\sin(\pi x)(t + \pi^2 e^t - \pi^2 - \pi^2 t) + 0.002\delta\left(x - \frac{1}{2}\right)$ на останній ітерації перед імпульсом і на першій ітерації після нього.

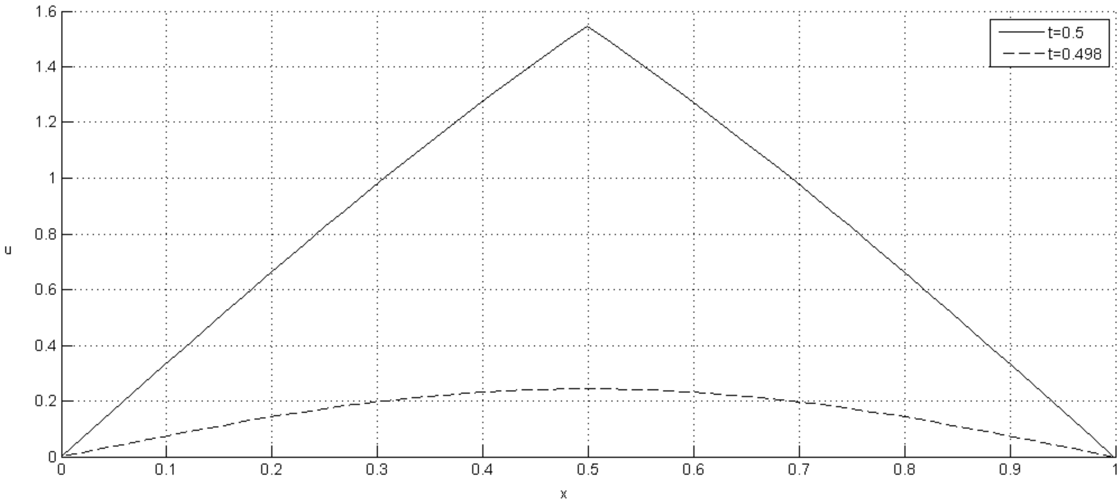

Рис. 1. Розв’язок псевдо параболічного рівняння перед точково-імпульсним впливом і після нього.

Підрозділ 2.3 містить побудову соболєвських просторів і апріорні нерівності для модельного псевдо гіперболічного оператора вигляду

$$\mathrm{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - \Delta + \mathrm{I}\ ,$$

де

$$\mathrm{I}\,u = -\int_0^t m(t,s)\,\Delta u(x,s)\,ds.$$

Нехай $C_s^\infty,\ s \in [0,T]$ - лінійні множини нескінченно диференційовних функцій, що задовольняють умови:

$$u|_{x\in\partial\Omega} = 0,\ \ u|_{t=s} = 0,\ \ u_t|_{t=s} = 0.$$

Позначимо через W^+ (W_*^+) і H^+ (H_*^+) поповнення C_0^∞ (C_T^∞) за нормами

$$\|u\|_{W^+} = \left(\sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2\,dQ\right)^{\frac{1}{2}},\ \ \|u\|_{H^+} = \left(\int_Q \sum_{i=1}^n u_t^2 + u_{x_i}^2\,dQ\right)^{\frac{1}{2}},$$

а через W^-, W_*^-, H^-, H_*^- негативні простори.

Лема 6. *Для* $u \in W^{+}$, $v \in W_{*}^{+}$ *справедливі нерівності*

$$\| \mathrm{L}u \|_{H_{*}^{-}} \le C \| u \|_{W^{+}}, \| \mathrm{L}^{*}v \|_{H^{-}} \le C \| u \|_{W_{*}^{+}} .$$

Лема 7. *Для* $u \in H^{+}$ *мають місце оцінки*

$$\| \mathrm{L}u \|_{H_{*}^{-}} \ge C \| u \|_{H^{+}}, \| \mathrm{L}^{*}v \|_{H^{-}} \ge C \| v \|_{H_{*}^{+}} .$$

Теорема 7. *Для довільного* $f \in H_{*}^{-}$ *рівняння* $\mathrm{L}u = f$ *має єдиний розв'язок.*

Зауваження 5. Усі теореми узагальненої розв'язності операторних рівнянь $\mathrm{L}u = f$ з інтегро-диференціальними операторами L параболічного, псевдопараболічного й псевдогіперболічного типів, справедливі й для спряжених задач $\mathrm{L}^{*}v = g$.

Зауваження 6. Наслідками апріорних нерівностей у негативних нормах є теореми узагальненої керованості (як точної, так і асимптотичної).

Третій розділ присвячено дослідженню математичних моделей субдифузії (повільної дифузії) з дробовими похідними за часовою змінною.

Означення 5. Інтегралом Рімана-Ліувілля функції f порядку $\alpha \in (0,1)$ з нижньою межею 0 називається оператор

$$I_0^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds.$$

Означення 6. Похідними Рімана-Ліувілля й Капуто функції f порядку $\alpha \in (0,1)$ з нижньою межею 0 називаються відповідно оператори $D_0^{\alpha} f = \frac{d}{dt}\left(I_0^{1-\alpha} f\right)$ і ${}^{*}D_0^{\alpha} f = I_0^{1-\alpha}\left(\frac{df}{dt}\right)$.

Відомо, що якщо f абсолютно неперервна на $[0,T]$, то

$${}^{*}D_0^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds,$$

$$D_0^{\alpha} f(t) = {}^{*}D_0^{\alpha} f(t) + \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)\, t^{\alpha}}.$$

Підрозділ 3.1 стосується рівняння з похідною Капуто сталого порядку $\alpha \in (0,1)$.

Розглянемо задачу

$${}^{*}D_0^{\alpha} u + \mathrm{A}u = f, \tag{11}$$

$$u|_{t=0} = 0. \tag{12}$$

Тут $u: (0,T) \to H$ - невідома функція зі значеннями у гільбертовому просторі функцій змінної $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$, ${}^*D_0^\alpha$ - похідна Капуто порядку α за часом з початком у точці 0; A - еліптичний диференціальний оператор другого порядку, що діє за змінною x. Вважатимемо, що A визначений на просторі $H_0^1(\Omega)$ і задається коерцитивною білінійною формою $a(\cdot,\cdot)$. Через $\langle \cdot,\cdot \rangle$ позначимо двоїстість між $H_0^{-1}(\Omega)$ і $H_0^1(\Omega)$.

Введемо еволюційні дробові за часом соболєвські простори

$$W_0^{\alpha,p}((0,T),H) = \{u \in L_p((0,T),H) \mid {}^*D_0^\alpha u \in L_p((0,T),H), u(0) = 0\},$$

де H - гільбертів простір, з нормою

$$\| u \|_{W_0^{\alpha,p}((0,T),H)} = \| {}^*D_0^\alpha u \|_{L_p((0,T),H)}.$$

Розглянемо випадок негладкої правої частини рівняння.

Означення 6. Слабким розв'язком задачі (11) - (12) з правою частиною $f \in L_p((0,T),H_0^{-1}(\Omega))$ назвемо елемент $u \in L_p((0,T),H_0^1(\Omega)) \cap W_0^{\alpha,p}((0,T),H_0^{-1}(\Omega))$, що задовольняє тотожність

$$\left\langle {}^*D_0^\alpha u(t), v \right\rangle + a(u(t), v) = \left\langle f(t), v \right\rangle \tag{13}$$

для довільного $v \in C_0^\infty(\Omega)$ та майже всіх $t \in (0,T)$, а також початкову умову $u(0) = 0$.

Існування і єдиність слабкого розв'язку задачі (11) - (12) можна встановити, користуючись відомими теоремами максимальної L_p-регулярності. Надалі вважатимемо, що $p > \frac{2}{\alpha}$.

Побудуємо для задачі (11) - (12) напівдискретний проекційний метод. Виберемо базис $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$ у просторі $H_0^1(\Omega)$. Задля простоти викладення припустимо, що цей базис ортонормований у просторі $L_2(\Omega)$. Розв'язок шукатимемо у вигляді $u_m(t) = \sum_{i=1}^m \psi_{im}(t) \cdot \omega_i$; підставивши його у (13) з $v = \omega_j$, одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь дробового порядку з невідомими $\psi_{im}(t)$, $i = 1,\ldots,m$, $t \in (0,T)$:

$$ {}^*D_0^\alpha \psi_{im}(t) + \sum_{i=1}^m a(\omega_i,\omega_j)\psi_{im}(t) = \left\langle f(t),\omega_j \right\rangle, \quad j = 1,\ldots,m \tag{14}$$

$$\psi_{im}|_{t=0} = 0.$$

Розв’язність системи (14) у потрібній парі просторів забезпечує

Теорема 8. *Нехай* $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ *і* $g \in (L_p(0,T))^n$, *де* $n \in \mathbf{N}$. *Тоді задача Коші*

$$ {}^*D_0^\alpha z(t) + Az(t) = g(t),$$

$$z(0) = 0.$$

має єдиний розв'язок $z \in W_p^{\alpha}(0,T)^n$, *де через*

$$W_p^{\alpha}(0,T)^n = \left\{ y = (y_1, \ldots, y_n)^T \mid {}^*D_0^{\alpha} y_i \in L_p(0,T) \wedge y_i(0) = 0,\ i = \overline{1,n} \right\}$$

позначимо векторний дробовий простір Соболєва порядку α.

Для дослідження збіжності побудованого проекційного методу сформульована й доведена

Теорема 9. *Нехай* $u : (0,T) \to H_+$ *- абсолютно неперервне відображення,* $H_+ \subset H_0 \subset H_-$ *- гільбертове оснащення. Тоді для майже всіх* $t \in (0,T)$ *справедлива нерівність*

$${}^*D_0^{\alpha} \| u(t) \|_{H_0}^2 \le 2 \left\langle {}^*D_0^{\alpha} u(t), u(t) \right\rangle,$$

де через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *позначимо двоїстість між* H_+ *і* H_-.

Аналогічна нерівність відома з літератури для дійснозначних функцій. Надалі у розділі припускатимемо, що вона виконується для гальоркінських наближень u_m.

Теорема 10. *Послідовність* $\{u_m\}$ *збігається до розв'язку задачі (11) – (12) слабко в* $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *і *-слабко в* $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$.

Важливим результатом, зокрема для застосування в теорії оптимального керування, є

Теорема 11. *Слабкий розв'язок* u *задачі (11) – (12) належить простору* $C([0,T];L_2(\Omega))$.

Темою **підрозділу 3.2** є слабка розв'язність і гальоркінська дискретизація рівняння змінного порядку.

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta\left(K(x) D_0^{1-\alpha(x)} u\right) = f \tag{15}$$

з початковою й крайовою умовами

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{16}$$

де $u = u(x,t)$, $f = f(x,t)$, Δ - оператор Лапласа за просторовими змінними, а $D_0^{1-\alpha(x)}$ - похідна Рімана-Ліувілля порядку $1-\alpha(x)$ за часом. Припустимо також, що $\alpha, K \in C^2(\overline{\Omega})$, причому для усіх $x \in \overline{\Omega}$ $\frac{1}{2} < \alpha(x) < 1$.

За допомогою заміни невідомої функції задачу (15) – (16) можна звести до задачі

$$\frac{1}{K(x)} D_0^{\alpha(x)} v - \Delta v = F, \tag{17}$$

$$I_0^{1-\alpha(x)} v|_{t=0} = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \tag{18}$$

де $F = f + \Delta\left(K(x)\, D_0^{1-\alpha(x)} u_0\right)$.

Розв'язки цих початково-крайових задач пов'язані співвідношенням

$$u = u_0 + \frac{1}{K(x)} I_0^{1-\alpha(x)} v.$$

Нехай $C_0^\infty(Q)$ - множина нескінченно диференційовних функцій з компактним носієм у Q, а $W^{\beta(x),1}$ - поповнення $C_0^\infty(Q)$ за нормою

$$\| u \|^2_{\beta(x),1} = \int_Q \left[\left(D_0^{\beta(x)} u(x,t)\right)^2 + \sum_{i=1}^{N} u_{x_i}^2(x,t)\right] dQ,$$

де $D_0^{\beta(x)}$ - правобічна похідна Рімана-Ліувілля за змінною t з нижньою межею 0, а β є функцією просторових змінних. Через $W^{-\beta(x),-1}$ позначатимемо простір, спряжений до $W^{\beta(x),1}$.

Лема 8. *Якщо $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, то $\left(D_0^{1-\alpha(x)} u_0\right) \in W^{-\frac{\alpha(x)}{2},-1}(Q)$.*

З цієї леми видно, що простір $W^{-\beta(x),-1}$ є достатньо широким, щоб у ньому можна було розглядати праві частини, які виникають при переході перетвореного від рівняння (15) до (17).

Розглянемо слабку постановку (17) – (18). Позначимо

$$b(v,w) = \int_Q \frac{1}{K(x)} D_0^{\frac{\alpha(x)}{2}} v \cdot D_T^{\frac{\alpha(x)}{2}} w + \nabla v \cdot \nabla w \; dQ,$$

де ∇ - градієнт за просторовими змінними.

Означення 8. Під слабким розв’язком задачі (17) - (18) розумітимемо елемент v, для якого

$$b(v,w) = \langle F, w\rangle_{\frac{\alpha(x)}{2},1}. \tag{19}$$

У дисертації доведено, що якщо задача (17) – (18) має класичний розв'язок, то він задовольняє також і тотожність (19).

Теорема 12. *Нехай $F \in W^{-\frac{\alpha(\cdot)}{2},-1}(Q)$. Тоді задача (17) – (18) має єдиний слабкий розв'язок $v \in W^{\frac{\alpha(x)}{2},1}(Q)$, причому*

$$\| v \|_{W^{\frac{\alpha(x)}{2},1}(Q)} \le C \| F \|_{W^{-\frac{\alpha(x)}{2},-1}(Q)}$$

Виконання початкової умови забезпечує

Теорема 13. *Якщо $v \in W^{\frac{\alpha(x)}{2},1}(Q)$, то $\left(I_0^{1-\alpha(x)} v\right)\big|_{t=0} = 0$ у $L_2(\Omega)$.*

Побудуємо схему просторово-часової дискретизації системи (17) – (18). Виберемо базис $\{\vartheta_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ у просторі $W^{\frac{\alpha(x)}{2},1}(Q)$, позначимо через $W^{m,n}$ лінійну оболонку $\{\vartheta_{1,1},\ldots,\vartheta_{m,n}\}_{i,j=1}^{\infty}$ й розглянемо наближення

$$v^{m,n}(x,t)=\sum_{i,j=1}^{m,n}c_{i,j}\,\vartheta_{i,j}(x,t),$$

де $c_{i,j}$ – невідомі коефіцієнти, які визначаються з системи

$$b(v^{i,j},w^{k,l})=\left\langle F,w^{k,l}\right\rangle_{\frac{\alpha(x)}{2},1}\quad \forall w^{k,l}\in W^{m,n},$$

яка є системою лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i,j=1}^{m,n}c_{i,j}\,b(\vartheta_{i,j},\vartheta_{k,l})=\left\langle F,\vartheta_{k,l}\right\rangle_{\frac{\alpha(x)}{2},1},\quad i,k=\overline{1,m},\ \ j,l=\overline{1,n} \tag{20}$$

Тоді наближений розв'язок задачі (15) – (16) виражається формулою

$$u^{m,n}(x,t)=u_0(x)+\frac{1}{K(x)}\sum_{i,j=1}^{m,n}c_{i,j}\left(I_0^{1-\alpha(x)}\vartheta_{i,j}\right)(x,t) \tag{21}$$

Описаний метод реалізовано з $\vartheta_{i,j}(x,t)=\psi_i(t)\omega_j(x)$, де $\psi_i(t)=\tilde{P}_{i-1}(t)$ - зміщенні многочлени Лежандра на [0,1], а ω_j задаються виразом (7). Такий вибір зумовлено тим, що для степеневої функції відомі аналітичні формули дробового диференціювання й інтегрування, що дає змогу легко застосувати формулу (21). Крім того, многочлени Лежандра ортогональні у просторі $L_2(0,1)$, що спрощує обчислення білінійної форми $b\left(\tilde{P}_i(t)\omega_j(x),\tilde{P}_k(t)\omega_l(x)\right)$.

Обчислено похибки для кількох тестових прикладів (з відомими аналітичними розв'язками), а також розв'язок задачі (15) – (16) для $K(x)=1$, $\alpha(x)=0.6+0.3\exp\left(-8(x-0.5)^2\right)$ й $u_0(x)=\sin(\pi x)$. Цей розв'язок більш швидко спадає у центрі просторової області, аніж посередині між центром і межами. Розв'язками аналогічних задач з похідною за часом сталого порядку (як першого, так і дробового) ця властивість не притаманна.

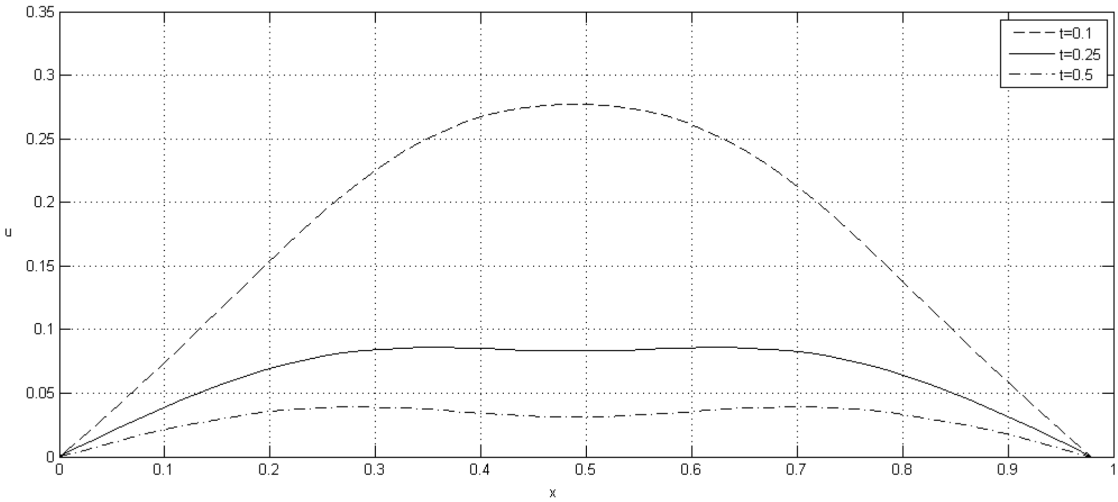

Рис. 2. Розв’язок змінно порядкового рівняння дифузії в моменти $t = 0.1$, $t = 0.25$, і $t = 0.5$.

Цей ефект є наслідком просторової неоднорідності дифузії, яка описується рівняннями змінного порядку. Чисельні розрахунки підтверджують таку фізичну властивість: на достатньо великих часових проміжках швидкість дифузії є тим більшою, чим більше значення функції $\alpha(x)$. Слід зазначити, що цей висновок узгоджується з фізичною інтерпретацією порядку рівняння субдифузії.

ВИСНОВКИ

Для декількох типів нелокальних за часом рівнянь математичної фізики одержано теореми існування та єдиності розв'язку, а також збіжності методу Гальоркіна. А саме:

- abc-методом одержано апріорні нерівності у негативних нормах для параболічного, псевдопараболічного й псевдогіперболічного інтегро-диференціальних операторів. Наслідками цих нерівностей є теореми існування та єдиності розв'язків у різних соболєвських просторах;

- для параболічного й псевдопараболічного інтегро-диференціальних рівнянь у слабкій постановці побудовано й реалізовано метод Гальоркіна, а також доведено його збіжність;

- доведено неперервність (зі значеннями у просторі інтегровних з квадратом функцій просторової змінної) розв'язку рівняння субдифузії з похідною Капуто, чим обґрунтовано можливість розглядати задачі фінального керування. Доведено слабку збіжність методу Гальоркіна у випадку правої частини з класу L_p;

- за допомогою леми Вішика-Лакса-Мільґрама одержано теорему слабкої розв'язності рівняння субдифузії змінного порядку;

- для рівняння субдифузії змінного порядку запропоновано й реалізовано чисельний метод, який дав змогу проілюструвати нетривіальні властивості розв'язку, пов'язані з просторовою неоднорідністю порядку рівняння.

Одержані результати можуть бути використані для моделювання й оптимізації ередитарних систем. Підхід, застосований у дисертаційній роботі, може бути поширений на рівняння більш загального вигляду.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових фахових виданнях України:

1. Гуляницький А.Л. Інтегро-диференціальні системи псевдопараболічного типу: апріорні оцінки та імпульсно-точкова керованість / А.Л. Гуляницький, В.В. Семенов // Доповіді НАН України. – 2012. – № 4. – С.43–49.
2. Гуляницький А.Л. Збіжність методу Гальоркіна для параболічних інтегро-диференціальних рівнянь / А.Л. Гуляницький // Журн. обчисл. та приклад. математики. – 2014. – № 1. – С.105–112.
3. Гуляницький А.Л. Слабкі розв'язки і збіжність методу Гальоркіна для дробового рівняння дифузії / А.Л. Гуляницький // Доповіді НАН України. – 2015. – № 3. – С.32–39.
4. Гуляницький А.Л. Слабка розв'язність і просторово-часова дискретизація для зміннопорядкового рівняння дифузії / А.Л. Гуляницький // Журн. обчисл. та приклад. математики. – 2015. – № 3. – С.116–126.

Статті у іноземних виданнях:

5. Anikushyn A.V. Generalized Solvability of Parabolic Integro-Differential Equations / A.V. Anikushyn, A.L. Hulianytskyi // Differential Equations. – 2014. – Vol. 50, No. 1. – P. 98-109.

Тези наукових доповідей:

6. Гуляницький А.Л. Узагальнена розв'язність інтегро-диференціальних рівнянь псевдопараболічного типу / А.Л. Гуляницький // IX міжнародна міждисциплінарна науково-практична конференція "Шевченківська весна-2011". – Київ, 2011. – С. 37-38.
7. Hulianytskyi A.L. A priori estimates for Sobolev-type integro-differential operators / A.L. Hulianytskyi, V.V. Semenov // XV Internetional Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation". – Kyiv, 2011. – P. 35.

8. Гуляницкий А.Л. Слабая разрешимость и сходимость метода Галёркина для дробного уравнения диффузии [Електронний ресурс] / А.Л. Гуляницкий // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2013» / МГУ имени Ломоносова. – Москва, 2013. – Режим доступу: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2013/2188/62015_4f82.pdf. – \\ Дата звернення: 13.04.2016. – Назва з екрана.
9. Hulianytskyi A.L. On the convergence of the Galerkin method for equations with memory / A.L. Hulianytskyi // The Humboldt Kolleg "The Education and Science and their Role in Social and Industrial Progress of Society" (young scientists poster section). – Kyiv, 2014. – P. 16.
10. Гуляницький А.Л. Збіжність методу Гальоркіна для параболічних інтегро-диференціальних рівнянь / А.Л. Гуляницький // VII Міжнародна наукова конференція імені І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика". – Київ, 2014. – С. 45.
11. Hulianytskyi A.L. Weak Solvability and Galerkin Discretization of a Variable-order Diffusion Equation / A.L. Hulianytskyi // Mathematics for Life Sciences. – Rivne, 2015. – P. 17.
12. Гуляницький А.Л. Слабка розв'язність і метод Гальоркіна для змінноспорядкового рівняння дифузії / А.Л. Гуляницький // VIII Міжнародна наукова конференція імені І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика". – Київ, 2015. – С. 44.

АНОТАЦІЯ

Гуляницький А. Л. Якісний аналіз і чисельне моделювання систем з пам'яттю. - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи. - Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2016.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню розв'язності й побудові чисельних методів для інтегро-диференціальних (параболічних, псевдопараболічних і псевдогіперболічних) та дробових диференціальних рівнянь у частинних похідних. Задачі розглядаються у слабкій постановці, що допускає праві частини з негативних соболєвських прострів. Теореми слабкої розв'язності для інтегро-диференціальних рівнянь одержано як наслідки апріорних нерівностей у негативних нормах; ці нерівності доведено abc-методом, доопрацьованим з урахуванням особливостей цього типу рівнянь. Також доведено слабку збіжність методу Гальоркіна для рівняння субдифузії і для інтегро-диференціальних рівнянь параболічного й псевдопараболічного типів. Окремо доведено результат, який покращує відомі

теореми про гладкість слабкого розв'язку рівняння субдифузії. Для рівняння змінних порядків одержано теорему слабкої розв'язності у соболєвських просторах змінних порядків, а також побудовано метод Гальоркіна. Теоретичні результати проілюстровано результатами обчислювального експерименту.

Ключові слова: апріорні оцінки, дробові диференціальні рівняння, ередитарні системи, інтегро-диференціальні рівняння, метод Гальоркіна, слабкі розв'язки, чисельне моделювання.

АННОТАЦИЯ

Гуляницкий А. Л. Качественный анализ и численное моделирование систем с памятью. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 - математическое моделирование и вычислительные методы. - Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко Министерства образования и науки Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена исследованию разрешимости и построению численных методов для интегро-дифференциальных (параболических, псевдопараболических и псевдогиперболических) и дробных дифференциальных (с дробной производной по времени) уравнений в частных производных. Задачи рассмотрены в слабой постановке, допускающей правые части из негативных соболевских пространств. Теоремы слабой разрешимости для интегро-дифференциальных уравнений получены как следствия априорных неравенств в негативных нормах. Неравенства доказаны abc-методом, модифицированным с учётом особенностей данного класса уравнений. Для параболических операторов, по сравнению с ранее известными результатами, удалось снять принципиальные с точки приложений ограничения на коэффициенты. Для других рассмотренных типов интегро-дифференциальных уравнений данные результаты получены впервые. Следствиями доказанных неравенств являются также теоремы точной и асимптотической управляемости.

Доказана теорема о слабой сходимости метода Галёркина (с дискретизацией по пространственной переменной) для интегро-дифференциальных уравнений параболического и псевдопараболического типов, а также для уравнения субдиффузии. Отдельно доказан результат, улучшающий известные теоремы о гладкости слабого решения уравнения субдиффузии, что позволяет рассматривать, в частности, задачи финального управления. Для уравнений переменного порядка (с производной Римана-Лиувилля по времени, порядок которой зависит от пространственной переменной) с помощью дробного интегрирования по частям и леммы Вишика-Лакса-Мильграма доказана теорема о слабой разрешимости в

соболевских пространствах переменного порядка, а также построен метод Галёркина с пространственно-временной дискретизацией.

Теоретические результаты проиллюстрированы результатами вычислительного эксперимента, в том числе с правыми частями с дельта-функцией Дирака. Для тестовых примеров приведены таблицы погрешностей. Результаты вычислительного эксперимента для модельных интегро-дифференциальных уравнений иллюстрируют принципиальный различия между свойствами их решений (знакопеременность, поведение на бесконечности) и решений дифференциальных уравнений соответствующих типов. Полученные численные решения уравнений переменного порядка позволяют обнаружить нетривиальные свойства данного класса уравнений.

Ключевые слова: априорные оценки, дробные дифференциальные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения, метод Галёркина, слабые решения, численное моделирование, эредитарные системы.

ABSTRACT

Hulianytskyi A. L. Qualitative analysis and numerical simulation of hereditary systems. - Manuscript.

Dissertation for the Candidate of Science degree in Physics and Mathematics, speciality 01.05.02 - mathematical modelling and computational methods. - Taras Shevchenko National University of Kyiv of Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2016.

The dissertation deals with the solvability and numerical approximation for partial integro-differential and fractional differential equations. Weak statements of the initial-boundary value problems are studied. By modifying the abc-method, we prove the a priori estimates for parabolic, pseudoparabolic, and pseudohyperbolic integro-differential operators. We also prove the convergence of semidiscrete Galerkin approximations for integro-differential as well as constant-order fractional differental equations. For the constant-order subdiffusion equation, we additionally prove the continuity of the solution. For the variable-order subdiffusion equation, we construct an appropriate pair of variable-order Sobolev spaces and establish the existence and uniqueness of the weak solution. Also, a fully discrete Galerkin method is suggested, and the approximate solutions are computed. The computational results exhibit some non-trivial properties of variable-order equations.

Key words: a priori estimates, fractional differential equations, Galerkin method, hereditary systems, integro-differential equations, numerical simulation, weak solutions.