Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Затула Дмитро Васильович

УДК 519.21

ОЦІНКИ РОЗПОДІЛУ НАПІВНОРМ ГЕЛЬДЕРА ВІД ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка МОН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Козаченко Юрій Васильович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, професор кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, доцент
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна,
Ужгородський національний університет, професор кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу;

кандидат фізико-математичних наук
Ільєнко Марина Костянтинівна,
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей.

Захист відбудеться «27» березня 2017 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 03022 м. Київ, просп. Академіка Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий «18» лютого 2017 р.

Вчений секретар

спеціалізованої вченої ради Моклячук М. П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Вивчення різних класів випадкових процесів, дослідження їх загальних властивостей та отримання оцінок розподілу функціоналів від них є актуальними задачами теорії випадкових процесів. Наскільки б не був досконалий метод, згідно із яким проводяться спостереження, виміри чи досліди, практично не можливо уникнути впливу на нього певних випадкових чинників. І спочатку вважалося, що всі ці фактори мають гауссовий розподіл. З кінця 60-х років XX століття науковці почали враховувати специфіки впливу чинників і виявилось, що не всі вони підпорядковуються гауссовому розподілу. Відтак з’явились такі класи випадкових величин як субгауссові, строго субгауссові, передгауссові, строго передгауссові, φ-субгауссові, квадратично гауссові та деякі інші.

Класичні результати щодо властивостей гаусових випадкових процесів, а також дослідження властивостей розподілів функціоналів від них містяться у роботах Н. Вінера, А. М. Колмогорова, Н. Коно, Ж. П. Кахана, М. Р. Лідбеттера та Д. Ліндгрена. Аналітичні властивості вибіркових функцій стаціонарних та нестаціонарних процесів досліджували А. В. Скороход, Г. Крамер, М. Р. Лідбеттер, К. Фернік та інші. Р. М. Дадлі досліджував питання про отримання оцінок розподілу напівнорм Гельдера та розподілу супремума від гаусових процесів, визначених на компакті. Його результати були узагальнені та доповнені для деяких класів процесів з просторів Орліча Ю. В. Козаченком. Слід зауважити, що у всіх цих роботах як правило розглядалися процеси, визначені на компакті.

Теорія випадкових процесів із просторів Орліча, просторів $Sub_\varphi(\Omega)$ та $D_{V,W}(\Omega)$-просторів пов'язана із проблемою знаходження норм в цих просторах. Задля вирішення задачі замість норм у цих просторах використовуються еквівалентні їм моментні норми. При оцінюванні розподілів різних функціоналів від процесів із цих просторів оцінки дещо погіршуються, тому виникає необхідність розглядати банахові простори з моментними нормами. Це дає можливість у багатьох випадках отримати кращі оцінки, ніж із використанням, наприклад, норм із просторів Орліча.

Банахові простори випадкових величин, що задовольняють певним моментним нерівностям, $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ були введені С. В. Єрмаковим та Є. І. Островським. В їхній роботі розглядались граничні теореми для випадкових процесів із цих просторів. У роботах Ю. В. Козаченка та Ю. Ю. Млавця досліджено основні властивості випадкових величин та процесів з просторів

$\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, а також показано, що простори $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ можна використовувати для знаходження оцінок наближення при підрахунку інтегралів методом Монте-Карло. Тому вивчення цих просторів є актуальною задачею.

Основним завданням дисертаційної роботи є знаходження оцінок розподілу напівнорм Гельдера від випадкових процесів із просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ та $L_p(\Omega), p \geq 1$, визначених на компакті та на нескінченному проміжку, а також покращення подібних результатів для процесів з просторів Орліча. Також у дисертації знайдено умови, за яких для таких процесів виконується умова Гельдера. Актуальність досліджень в цьому напрямку зумовлена застосуванням отриманих результатів. Зокрема, побудовано наближення процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ та $L_p(\Omega), p \geq 1$, визначених на нескінченному проміжку, за допомогою цілих функцій експоненціального типу і т. і.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках державної бюджетної науково-дослідної теми №11БФ038-02 "Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей" (номер державної реєстрації 0111U006561) і №16БФ038-02 "Дослідження та статистичний аналіз асимптотичної поведінки складних стохастичних неоднорідних динамічних систем" (номер державної реєстрації 0116U002530) кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, що входить до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт «Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів».

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є подальший розвиток теорії випадкових процесів з просторів випадкових величин $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, $L_p(\Omega)$ та процесів з просторів Орліча, а також розширення кола теоретичних і практичних застосувань даної теорії, зокрема, до задачі наближення випадкових процесів цілими функціями експоненціального типу. В роботі досліджуються наступні задачі:

• дослідження аналітичних властивостей банахових просторів з моментними нормами $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$;

• знаходження оцінок розподілів напівнорм Гельдера від випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, $L_p(\Omega)$ та Орліча, визначених на компакті;

• знаходження модулів неперервності та умов, за яких виконується умова Гельдера, для випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, $L_p(\Omega)$ та Орліча, визначених на компакті;

• знаходження оцінок розподілів напівнорм Гельдера та модулів неперервності від випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ та $L_p(\Omega)$, визначених на нескінченному проміжку;

• наближення процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ та $L_p(\Omega)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу.

Об'єктом дослідження є випадкові процеси з просторів випадкових величин $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, $L_p(\Omega)$ та Орліча.

Предметом дослідження є оцінки розподілу напівнорм Гельдера, модулі неперервності та умови Гельдера для випадкових процесів з просторів випадкових величин $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, $L_p(\Omega)$ та Орліча.

Методи дослідження. В роботі використано методи теорії випадкових процесів, функціонального аналізу, а також теорії випадкових процесів з просторів Орліча та аналітичний апарат математичного аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

• знайдено умови, за яких в просторах випадкових величин $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ є певні допущення про розподіл максимума скінченного числа випадкових величин;

• отримано оцінки розподілів напівнорм Гельдера від випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, $L_p(\Omega)$ та Орліча, визначених на компакті;

• знайдено умови, за яких виконується умова Гельдера, та знайдено модулі неперервності для випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, $L_p(\Omega)$ та Орліча, визначених на компакті;

• вперше отримано оцінки розподілів напівнорм Гельдера та модулі неперервності від випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ та $L_p(\Omega)$, визначених на нескінченному проміжку;

• отримані результати вперше застосовано для побудови точності та надійності наближення процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ та $L_p(\Omega)$, визначених на нескінченному проміжку, за допомогою цілих функцій експоненціального типу.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Результати, отримані в дисертації, можуть застосовуватись у теорії випадкових процесів, а також у багатьох природничих та соціально-економічних науках, зокрема, у фінансовій математиці, метеорології, геофізиці, геології, радіотехніці, теорії кодування інформації, стохастичному моделюванні тощо.

Особистий внесок здобувача. Доведення всіх нових результатів, що виносяться на захист дисертації, отримані автором самостійно. За результатами дисертаційного дослідження опубліковано 5 робіт, з яких одна у співавторстві з науковим керівником, професором Ю. В. Козаченком. У цій роботі керівнику належать: постановка задачі, пропозиції щодо методів її розв'язання та загальне керівництво роботою.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на таких наукових конференціях:

• П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (м. Київ, Україна, 2014);
• Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Івано-Франківськ, Україна, 2015);
• Міжнародна міждисциплінарна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна — 2015" (м. Київ, Україна, 2015);
• International Conference "Probability, Reliability and Stochastic Optimization" (Kyiv, Ukraine, 2015);
• International scientific and practical conference "Economics, Science, Education: Integration and Synergy" (Bratislava, Slovak Re-public, 2016);
• Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Івано-Франківськ, Україна, 2016);
• Міжнародна наукова конференція "Методика викладання та методи дослідження в математиці" (м. Берегове, 2016);

та наукових семінарах:

• засіданні наукового семінару кафедри вищої математики фізи-ко-математичного інституту Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова під керівництвом проф. М. В. Працьовитого (м. Київ, Україна, 2016);
• засіданні наукового семінару "Теорія стохастичних процесів та їх застосування" кафедри теоретичної та прикладної статистики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка під керівництвом проф. Я. І. Єлейка (м. Львів, Україна, 2016);
• засіданні наукового семінару "Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів" кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-

математичного факультету Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" під керівництвом проф. О. І. Клесова та проф. О. В. Іванова (м. Київ, Україна, 2016);

• засіданні наукового семінару відділу математичних методів дослідження операцій Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України під керівництвом проф., члена-кореспондента НАН України П. С. Кнопова (м. Київ, Україна, 2016);

• засіданні наукового семінару "Теорія ймовірностей та математична статистика" кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Ю. С. Мішури та проф. Ю. В. Козаченка (м. Київ, Україна, 2016).

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 13 робіт, а саме:

• 5 статей, одну з яких [2] надруковано у фаховому виданні, переклад якої індексований в наукометричній базі SCOPUS, дві статті [3, 5] опубліковано в міжнародних журналах та дві статті [1, 4] опубліковано в наукових виданнях з переліку фахових видань, затвердженого МОН України;

• 8 тез доповідей на міжнародних і вітчизняних наукових конференціях [6]-[13].

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, які містять підрозділи, висновків та списку використаних джерел, який нараховує 142 найменування. Повний обсяг роботи становить 167 сторінок, із них список використаних джерел займає 14 сторінок.

Подяка. Автор дисертації висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Юрію Васильовичу Козаченку за постановку розглянутих у дисертації задач, постійну увагу та підтримку в роботі.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність обраної теми, сформульовано мету і завдання дослідження, об'єкт, предмет та методи дослідження, висвітлено наукову новизну, коротко викладені основні результати роботи та окреслено можливі практичні застосування одержаних результатів, наведено відомості про публікації, особистий внесок здобувача і ступінь апробації роботи.

У **першому розділі** наведено огляд літератури за темою дисертаційного дослідження та по спорідненим питанням. Висвітлено сучасний стан вивчення проблем, близьких до тих, що розглядаються у дисертаційній роботі.

Другий розділ присвячено знаходженню оцінок розподілу напівнорм Гельдера від випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ та їх застосуванню.

У підрозділі 2.1 наведено необхідні для подальшої роботи означення та твердження, зокрема, означення модуля неперервності функції, метричної масивності та деякі відомі результати стосовно властивостей просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$.

Означення 1. Нехай $\psi(u) > 0, u \geq 1$ — деяка монотонно зростаюча функція така, що $\psi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується наступна умова:

$$\sup_{u\geq 1} \frac{(\mathrm{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

Подібне означення було сформульоване в роботі С. В. Єрмакова та Є. І. Островського. Але там вимагалось, щоб $\mathrm{E}\xi = 0$, якщо $\xi \in \mathbb{F}_\psi(\Omega)$. Крім того, розглядались такі випадкові величини, що $\mathrm{E}|\xi|^u = \infty$ при певному $u > 0$.

Також у їх роботі доведено, що $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ є простором Банаха з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\geq 1} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}.$$

Теорема 1. Якщо випадкова величина ξ належить простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, то $\forall x > 0$ виконується наступна нерівність:

$$\mathrm{P}\{|\xi| > x\} \leq \inf_{u\geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u \cdot (\psi(u))^u}{x^u}.$$

Далі досліджується властивість Z просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ для різних класів функцій ψ.

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — випадкові величини з простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$. Позначимо $\eta_n = \max_{1\leq k\leq n} |\xi_k|$, $a_n = \max_{1\leq k\leq n} \| \xi_k \|_\psi$.

Означення 2. Простір $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ має властивість Z, якщо існують монотонно неспадна функція $z(x) > 0$, монотонно зростаюча функція $U(n)$ та дійсне число $x_0 > 0$ такі, що для будь-якої послідовності випадкових величин $(\xi_k, k = \overline{1,n})$ з простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, $\forall x > x_0$ і для всіх $n \geq 2$ виконується наступна нерівність:

$$\mathrm{P}\{\eta_n > x \cdot a_n \cdot U(n)\} \leq \frac{1}{n}\exp\{-z(x)\}.$$

Теорема 2. Нехай $\psi(u) = u^\alpha, \alpha > 0$. Тоді наступна нерівність виконується $\forall x > \max\left\{\frac{1}{(\ln 3)^\alpha}, \left(\frac{2e\ln 3}{\alpha(\ln 3 - 1)}\right)^\alpha\right\}$:

$$\mathrm{P}\{\eta_n > x \cdot a_n \cdot (\ln(n+2))^\alpha\} \leq \frac{1}{n}\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}x^{1/\alpha}\right\},$$

тобто $z(x) = \frac{\alpha}{e}x^{1/\alpha}, U(n) = (\ln(n+2))^\alpha$.

Теорема 3. Нехай $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda, \lambda > 0$. Тоді наступна нерівність виконується $\forall x \geq \left(e \cdot \ln\frac{2\ln(2+e^{\lambda/2})}{\lambda(\ln(2+e^{\lambda/2})-1)} \cdot \left(\ln\frac{2}{\lambda}\right)^{-1}\right)^\lambda$:

$$\mathrm{P}\left\{\eta_n > x \cdot a_n \cdot \left(\ln\ln\left(n+1+e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right)^\lambda\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\exp\left\{-\lambda\left(\exp\left\{\frac{x^{1/\lambda}\ln\frac{2}{\lambda}}{e}\right\} - 1\right)\right\},$$

тобто $z(x) = \lambda\left(\exp\left\{\frac{x^{1/\lambda}\ln\frac{2}{\lambda}}{e}\right\} - 1\right), U(n) = \left(\ln\ln\left(n+1+e^{\lambda/2}\right)^{2/\lambda}\right)^\lambda$.

Теорема 4. Нехай $\psi(u) = e^{\alpha u^\beta}, \alpha > 0, \beta > 0$. Тоді наступна нерівність виконується при $\forall x \geq \exp\left\{\left(\frac{\ln 3}{b\sqrt[\beta]{2}(\ln 3 - 1)}\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}$, $b = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \times \times (\beta+1)^{-\frac{\beta+1}{\beta}}$:

$$\mathrm{P}\left\{\eta_n > x \cdot a_n \cdot \exp\left\{(\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot \left(\frac{2}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}(\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}}\right\},$$

тобто $z(x) = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot \left(\frac{2}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}(\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}}, U(n) = \exp\left\{(\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}$.

Теорема 5. Нехай $\psi(u) = \exp\{c\,(\ln u)^\alpha\}, \alpha > 1, c > 0$. Тоді наступна нерівність виконується при $\forall x \geq \exp\left\{c \cdot \left(\ln\frac{2\ln 3}{\ln 3 - 1}\right)^\alpha + 1\right\}$:

$$\mathrm{P}\{\eta_n > x \cdot a_n \cdot (\exp\{(\ln\ln(n+2))^\alpha\})^c\} \leq \frac{1}{n}\exp\left\{-\exp\left\{\left(\frac{1}{c}\ln\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}\right\},$$

тобто $z(x) = \exp\left\{\left(\frac{1}{c}\ln\frac{x}{e}\right)^{1/\alpha}\right\}, U(n) = (\exp\{(\ln\ln(n+2))^{\alpha}\})^{c}$.

Означення 3. Нехай $(\mathbb{T},\rho)$ — метричний простір. Метричною масивністю $N_{(\mathbb{T},\rho)}(u) := N(u)$ називається найменше число замкнених ρ-околів, діаметр яких не перевищує $2u$, якими можна покрити $\mathbb{T}$.

Означення 4. Функція $q = \{q(t), t \in \mathbb{R}\}$ називається модулем неперервності, якщо $q(t) \geq 0$, $q(0) = 0$ та $q(t+s) \leq q(t) + q(s)$ при $t > 0, s > 0$.

Нехай $(\mathbb{T},\rho)$ — деякий метричний простір.

Означення 5. Функція $v(x)$ задовольняє умові Гельдера з показником $\alpha \in (0,1]$, якщо наступна величина є скінченною:

$$[v]_{\alpha,\mathbb{T}} = \sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T} \\ t\neq s}} \frac{|v(t)-v(s)|}{|t-s|^{\alpha}}.$$

Простір Гельдера $C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{T}})$ є простором всіх неперервних функцій, для яких виконується умова Гельдера з показником α в $\mathbb{T}$.

У подальших дослідженнях матимемо справу із узагальненням напівнорми $[v]_{\alpha,\mathbb{T}}$ у просторі $C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{T}})$ — функціоналами виду

$$[v]_{q,\rho,\mathbb{T}} = \sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T} \\ t\neq s}} \frac{|v(t)-v(s)|}{q(\rho(t,s))},$$

де ρ — метрика у просторі $\mathbb{T}$, а $q = \{q(t), t \in \mathbb{T}\}$ — модуль неперервності такий, що $\exists\, \alpha \in (0,1]\ \forall t,s \in \mathbb{T}, t \neq s$: $q(\rho(t,s)) \leq |t-s|^{\alpha}$.

Далі розглядається задача оцінювання розподілу напівнорм Гельдера від випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ випадкових величин, визначених на компакті або на нескінченному проміжку.

В підрозділі 2.2 розглядається випадок, коли випадкові процеси визначені на компакті. Отримано наступну теорему.

Теорема 6. Нехай $(\mathbb{T},\rho)$ — деякий компактний метричний простір. Розглянемо сепарабельний випадковий процес $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ з банахового простору $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$, що має властивість Z з функціями $U(n)$, $z(x)$ та $x_0 > 0$. Припустимо, що існує монотонно зростаюча неперервна функція $\sigma = \{\sigma(h), h \geq 0\}$ така, що $\sigma(0) = 0$ та виконується наступна нерівність:

$$\sup_{\rho(t,s)\leq h} \| X(t) - X(s) \|_{\psi} \leq \sigma(h).$$

Нехай $N(\varepsilon) = N_{\rho}(\mathbb{T},\varepsilon)$ — метрична масивність простору $(\mathbb{T},\rho)$. Також нехай $\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)}\left(\sup_{t,s\in\mathbb{T}} \rho(t,s)\right)$, де $\sigma^{(-1)}(h)$ є оберненою функцією до функції $\sigma(h)$, та $g_B(\varepsilon) = \int_0^{\sigma(\varepsilon)} U(B^2 N^2(\sigma^{(-1)}(t)))dt < \infty$, $\varepsilon > 0$. Тоді для

$x > x_0, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ виконується наступна нерівність:

$$P\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon} \frac{|X(t)-X(s)|}{(6+4\sqrt{2})f_B(\rho(t,s))+(5+2\sqrt{6})g_B(\rho(t,s))} > x\right\} \le$$
$$\le \frac{2B(2B+1)}{(B^2-1)N(\varepsilon)} \cdot \exp\{-z(x)\},$$

де $B > 1$ — деяке число, $f_B(\varepsilon) = \int_0^{\sigma(\varepsilon)} U(BN(\sigma^{(-1)}(t)))dt, \varepsilon > 0$.

Формулюється властивість Z_1 та отримано наслідок з цієї теореми.

Означення 6. Простір $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ має властивість Z_1, якщо він має властивість Z з функціями $z(x)$ та $U(n)$ при $x > x_0$, та якщо існує така константа $b_0 > 0$, що $\forall n \ge 1$:

$$U(n^2) \le b_0\, U(n).$$

Наслідок 1. Нехай виконуються усі припущення теореми 6 та простір $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ має властивість Z_1. Тоді для $x > x_0, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ та $B > 1$ виконується наступна нерівність:

$$P\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon} \frac{|X(t)-X(s)|}{(6+4\sqrt{2}+b_0(5+2\sqrt{6}))f_B(\rho(t,s))} > x\right\} \le$$
$$\le \frac{2B(2B+1)}{(B^2-1)N(\varepsilon)} \cdot \exp\{-z(x)\},$$

де $f_B(\varepsilon) = \int_0^{\sigma(\varepsilon)} U(BN(\sigma^{(-1)}(t)))dt, \varepsilon > 0$.

В підрозділі 2.3 сформульовано наступну теорему про модуль неперервності випадкового процесу з простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$.

Теорема 7. Нехай виконуються усі припущення теореми 6. Тоді з ймовірністю 1:

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\Delta(X;\varepsilon)}{x_0((6+4\sqrt{2})f_B(\varepsilon)+(5+2\sqrt{6})g_B(\varepsilon))} \le 1,$$

де $\Delta(X;\varepsilon) = \sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon} |X(t)-X(s)|, t, s \in \mathbb{T}$.

Наслідок 2. Нехай виконуються умови теореми 6. Тоді для достатньо малих v:

$$\sup_{\rho(t,s)\le v} |X(t)-X(s)| \le x_0((6+4\sqrt{2})f_B(v)+(5+2\sqrt{6})g_B(v))$$

з ймовірністю 1.

У підрозділі 2.4 наведено декілька прикладів до теорем 6 та 7.

Підрозділ 2.5 присвячений оцінюванню розподілу напівнорм Гельдера від випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин, визначених на інтервалі $[0, \infty)$. Отримано наступну теорему.

Теорема 8. Нехай сепарабельний випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0,\infty)\}$ належить банаховому простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, що має властивість Z з функціями $U(n)$, $z(x)$ та $x_0 > 0$. Нехай $[0,\infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, де $A_i = [a_i, a_{i+1}]$, $\{a_i, i = 0,1,\dots,\infty\}$ — деяка зростаюча послідовність, $a_0 = 0$. Позначимо $\alpha_i = a_{i+1} - a_i$, $D_i = [a_i, a_{i+1} + \theta]$, $\theta \in \left(0, \min_{i\geq 0} \alpha_i\right)$. Припустимо, що існують монотонно зростаючі неперервні функції $\sigma_i = \{\sigma_i(h), h \geq 0\}$ такі, що $\sigma_i(0) = 0, i = 0,1,\dots$ та $\forall i = 0,1,\dots$ виконуються наступні нерівності:

$$\sup_{\substack{|t-s|\leq h \\ t,s\in D_i}} \| X(t) - X(s) \|_\psi \leq \sigma_i(h), \qquad 0 < h < \alpha_i + \theta. \tag{1}$$

Нехай $N_i(\varepsilon)$ — метричні масивності для $D_i, i = 0,1,\dots$ з метрикою $\rho(t,s) = |t-s|, t,s \in [0,\infty)$. Також нехай $\varepsilon_0 = \min_{i\geq 0}\left\{\sigma_i^{(-1)}(\alpha_i + \theta)\right\}$, де $\sigma_i^{(-1)}(h)$ — обернена функція до функції $\sigma_i(h), i = 0,1,\dots$, та

$$g_{B,i}(\varepsilon) = \int_0^{\sigma_i(\varepsilon)} U(B^2 N_i^2(\sigma_i^{(-1)}(t)))dt < \infty,\ \forall i = 0,1,\dots;$$

$$f_{B,i}(\varepsilon) = \int_0^{\sigma_i(\varepsilon)} U(BN_i(\sigma_i^{(-1)}(t)))dt,\ \forall i = 0,1,\dots, \varepsilon > 0.$$

Позначимо $w_{B,i}(t,s) = (6+4\sqrt{2})f_{B,i}(|t-s|) + (5+2\sqrt{6})g_{B,i}(|t-s|)$, $t,s \in D_i$, а $w_B(t,s)$ — така функція, що

$$w_B(t,s) = \{w_{B,i}(t,s) \mid t,s \in A_i \text{або} \min\{t,s\} \in A_i, \max\{t,s\} \in A_{i+1}\}.$$

Припустимо, що $\theta > \varepsilon$. Тоді для $x > x_0$, $\varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_0, \theta\})$ та за умови, що $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} < \infty$, виконується наступна нерівність:

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{\substack{0<|t-s|\leq\varepsilon \\ t,s\in[0,\infty)}} \frac{|X(t)-X(s)|}{w_B(t,s)} > x\right\} \leq$$
$$\leq \frac{4\varepsilon B(2B+1)}{B^2-1} \cdot \exp\{-z(x)\} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i + \varepsilon}.$$

Зауваження 1. Нехай виконуються усі припущення теореми 8. Також нехай $\forall i = 0,1,\dots : \sigma_i(h) = \sigma(h)$, тобто умова (1) набуває наступного вигляду:

$$\sup_{\substack{|t-s|\le h\\ t,s\in D_i}} \| X(t)-X(s) \|_{\psi} \le \sigma(h), \qquad 0<h<\alpha_i+\theta, i=0,1,\dots$$

Тоді

$g_{B,i}(\varepsilon)=\int_0^{\sigma(\varepsilon)} U(B^2N_i^2(\sigma^{(-1)}(t)))dt, f_{B,i}(\varepsilon)=\int_0^{\sigma(\varepsilon)} U(BN_i(\sigma^{(-1)}(t)))dt,$

$\varepsilon>0$; $\varepsilon_0=\min\limits_{i\ge 0}\{\sigma^{(-1)}(\alpha_i+\theta)\}=\sigma^{(-1)}\left(\min\limits_{i\ge 0}\alpha_i+\theta\right)$.

Наслідок 3. Нехай виконуються усі припущення теореми 8 та простір $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ має властивість Z_1. У такому разі функції

$$w_{B,i}(t,s)=(6+4\sqrt{2})f_{B,i}(|t-s|)+(5+2\sqrt{6})g_{B,i}(|t-s|)\le$$
$$\le(6+4\sqrt{2}+b_0(5+2\sqrt{6}))f_{B,i}(|t-s|):=v_{B,i}(t,s), t,s\in D_i,$$

та

$$w_B(t,s)\le$$
$$\le v_B(t,s)=\{v_{B,i}(t,s)\mid t,s\in A_i \text{або} \min\{t,s\}\in A_i, \max\{t,s\}\in A_{i+1}\}.$$

Тоді для $x>x_0$, $\varepsilon\in\left(0,\min\left\{\sigma^{(-1)}\left(\min\limits_{i\ge 0}\alpha_i+\theta\right),\theta\right\}\right)$ та за умови, що $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_i}<\infty$, виконується наступна нерівність:

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{\substack{0<|t-s|\le\varepsilon\\ t,s\in[0,\infty)}}\frac{|X(t)-X(s)|}{v_B(t,s)}>x\right\}\le$$
$$\le\frac{4\varepsilon B(2B+1)}{B^2-1}\cdot\exp\{-z(x)\}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_i+\varepsilon}.$$

Теорема 9. Нехай справджуються усі припущення наслідку 3. Якщо функція $\psi(u)=u^{\alpha},\alpha>0$ та для всіх $i=0,1,\dots$ функції $\sigma_i(h)=dh^{ù},h,ù,d>0$, то для $\varepsilon\in\left(0,\min\left\{\frac{1}{\sqrt[ù]{d}}\sqrt[ù]{\min\limits_{i\ge 0}\alpha_i+\theta},\theta\right\}\right)$, $B>1$, $\mu<\frac{ù}{\alpha}$, $\forall x>\max\left\{\frac{1}{(\ln 3)^{\alpha}},\left(\frac{2e\ln 3}{\alpha(\ln 3-1)}\right)^{\alpha}\right\}$, та за умови $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_i}<\infty$ виконується наступна нерівність:

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{\substack{0<|t-s|\le\varepsilon\\ t,s\in[0,\infty)}}\frac{|X(t)-X(s)|}{v_B(t,s)}>x\right\}\le$$

$$\le\frac{4\varepsilon B(2B+1)}{B^2-1}\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}x^{1/\alpha}\right\}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_i+\varepsilon},$$

де $v_B(t,s)=\{v_{B,i}(t,s)\mid t,s\in A_i\,\text{або}\min\{t,s\}\in A_i,\max\{t,s\}\in A_{i+1}\}$,

$$v_{B,i}(t,s)=\left(6+4\sqrt{2}+(5+2\sqrt{6})\cdot 2^{\alpha}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\frac{B(\alpha_i+\theta)}{2}+(B+1)\cdot|t-s|}{\mu}\right)^{\alpha}\cdot\frac{\text{ù}}{\text{ù}-\alpha\mu}\cdot d^{\frac{\text{ù}-\alpha(\mu-1)}{\text{ù}}}\cdot|t-s|^{\text{ù}-\alpha\mu}.$$

Теорема 10. Нехай справджуються усі припущення теореми 8. Якщо функція $\psi(u)=(\ln(u+1))^{\lambda},\lambda>0$ та для всіх $i=0,1,\ldots$ функції $\sigma_i(h)=\sigma(h)=\frac{d}{\left(\ln\left(\frac{1}{h}+1\right)\right)^{\text{ù}}},h,\text{ù},d>0$, то для $\beta<\min\left\{1,\frac{\text{ù}}{\lambda}\right\}$, $B>1$, $\varepsilon\in(0,\min\{\varepsilon_0,\theta\})$, $\varepsilon_0=\left(\exp\left\{\sqrt[\text{ù}]{d\left(\min\limits_{i\ge0}\alpha_i+\theta\right)^{-1}}\right\}-1\right)^{-1}$, $x>\left(e\cdot\ln\frac{2\ln(2+e^{\lambda/2})}{\lambda(\ln(2+e^{\lambda/2})-1)}\cdot\left(\ln\frac{2}{\lambda}\right)^{-1}\right)^{\lambda}$ та за умови, що $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_i}<\infty$, виконується наступна нерівність:

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{\substack{0<|t-s|\le\varepsilon\\ t,s\in[0,\infty)}}\frac{|X(t)-X(s)|}{v_B(t,s)}>x\right\}\le$$

$$\le\frac{4\varepsilon B(2B+1)}{B^2-1}\cdot\exp\left\{-\lambda\left(\exp\left\{\frac{x^{1/\lambda}\ln\frac{2}{\lambda}}{e}\right\}-1\right)\right\}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_i+\varepsilon},$$

де

$$v_B(t,s)=C_B(\min\{\varepsilon_0,\theta\})\cdot\frac{1}{\left(\ln\left(\frac{1}{|t-s|}+1\right)\right)^{\text{ù}-\lambda\beta}},$$

$$C_B(\varepsilon)=\frac{\text{ù}d^{\frac{\text{ù}+\lambda(1-\beta)}{\text{ù}}}}{\beta^{\lambda}(\text{ù}-\lambda\beta)}\times$$

$$\times\left((6+4\sqrt{2})\left(\frac{\ln\left(B\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\varepsilon(2-\theta)}{2(1+\varepsilon)}\right)+\frac{\varepsilon\left(1+e^{\lambda/2}\right)}{(1+\varepsilon)}\right)^{2/\lambda}-1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)}+\frac{2}{\lambda}\right)^{\lambda}+\right.$$

$$+\ (5+2\sqrt{6})\left(\left(\frac{\ln\left(B^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\varepsilon(2-\theta)}{2(1+\varepsilon)}\right)^2+\frac{\varepsilon^2\left(1+e^{\lambda/2}\right)}{(1+\varepsilon)^2}\right)^{2/\lambda}-1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)}+\frac{4}{\lambda}\right)^{\lambda}\right)\right).$$

Теорема 11. Нехай справджуються усі припущення теореми 8. Якщо функція $\psi(u)=e^{\alpha u^{\beta}}, \alpha>0, \beta>0$ та для всіх $i=0,1,\ldots$ функції $\sigma_i(h)=\sigma(h)=dh^{\grave{u}}, h, \grave{u}, d>0,$ то $\forall x\geq \exp\left\{\left(\frac{\ln 3}{b\sqrt[\beta]{2}(\ln 3-1)}\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}$, $b=\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}\cdot(\beta+1)^{-\frac{\beta+1}{\beta}}$, $\varepsilon\in\left(0,\min\left\{\frac{1}{\sqrt[\grave{u}]{d}}\sqrt[\grave{u}]{\min_{i\geq 0}\alpha_i+\theta},\theta\right\}\right)$, $\beta\in(0,1)$, $B>1$, та за умови, що $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_i}<\infty$, виконується наступна нерівність:

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{\substack{0<|t-s|\leq\varepsilon\\ t,s\in[0,\infty)}}\frac{|X(t)-X(s)|}{v_B(t,s)}>x\right\}\leq$$

$$\leq\frac{4\varepsilon B(2B+1)}{B^2-1}\cdot\exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}\left(\frac{2}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}(\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}}\right\}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_i+\varepsilon},$$

де $v_B(t,s)=\{v_{B,i}(t,s)\mid t,s\in A_i \text{або} \min\{t,s\}\in A_i, \max\{t,s\}\in A_{i+1}\}$,

$$v_{B,i}(t,s)=m_{B,i}\left(\min\left\{\frac{1}{\sqrt[\grave{u}]{d}}\sqrt[\grave{u}]{\min_{i\geq 0}\alpha_i+\theta},\theta\right\}\right)\cdot|t-s|^{\grave{u}},$$

$$m_{B,i}(\varepsilon)=$$

$$=d\left((6+4\sqrt{2})\cdot\exp\left\{\left(\ln\left(\sqrt[\grave{u}]{d}\left(\frac{B(\alpha_i+\theta)}{2}+\varepsilon(B+2)\right)\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}+\right.$$

$$+(5+2\sqrt{6})\cdot\exp\left\{\left(\ln\left(B^2\sqrt[\grave{u}]{d}(\alpha_i+\theta)\left(\frac{\sqrt[\grave{u}]{d}(\alpha_i+\theta)}{4}+1\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+\ \max\{1,\varepsilon\sqrt[\grave{u}]{d}\}\cdot(B^2+2)\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}\right).$$

До теорем 9 та 11 наводяться приклади, зокрема для стаціонарного процесу X.

В останньому підрозділі другого розділу наведено застосування отриманих результатів: до наближення процесів з просторів $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ цілими функціями екпоненціального типу, до задач теорії пружності та до розв’язання диференціальних рівнянь з початковими умовами.

Означення 7. Цілими функціями екпоненціального типу називаються цілі функції $f(t)$, для яких виконується нерівність типу $|f(t)| \le Ae^{B|t|}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, де числа A та B не залежать від t. Точна нижня границя константи B, для якої виконується наведена нерівність, називається типом функції $f(t)$ та знаходиться за формулою $\sigma = \overline{\lim_{|t|\to\infty}} \frac{\ln|f(t)|}{|t|}$.

Означення 8. Розглянемо деякий лінійний нормований простір E, елементами якого є функції на всій числовій осі. Оберемо деяку множину M функцій $f(x), -\infty < x < \infty$, які можуть і не належати E. Кожній функції $f(x)$ з множини M поставимо у відповідність множину всіх цілих функцій $F(x)$ екпоненціального типу $\le \gamma$ $(\gamma > 0)$, для яких $f(x) - F(x) \in E$. Позначимо цю множину як N_f та покладемо

$$A_\gamma[f] = \begin{cases} \infty, & \text{якщо} N_f \text{порожня;} \\ \inf\limits_{F\in N_f} \| f - F \|, & \text{якщо} N_f \text{непорожня.} \end{cases}$$

Позначимо $\delta_\gamma(f) := A_{\gamma-0}[f]$.

Теорема 12. Нехай виконуються умови теореми 8, причому процес $\{X(t), t \in [0,\infty)\}$ — інтегровний на кожному скінченному проміжку та рівномірно неперервний на $[0,\infty)$. Припустимо, що функція $w_B(t,s)$ така, що має місце наступна нерівність:

$$\sup_{\substack{0<|t-s|\le\varepsilon \\ t,s\in[0,\infty)}} |X(t) - X(s)| \le w_{B,\varepsilon} \cdot \sup_{\substack{0<|t-s|\le\varepsilon \\ t,s\in[0,\infty)}} \frac{|X(t)-X(s)|}{w_B(t,s)},$$

де $w_{B,\varepsilon} = \max\limits_{\substack{0<|t-s|\le\varepsilon \\ t,s\in[0,\infty)}} w_B(t,s)$. Тоді для $x > 3x_0 \cdot w_{B,\frac{1}{\gamma}}$, $\gamma \in \left(0, \frac{1}{\min\{\varepsilon_0,\theta\}}\right)$ та за умови, що $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} < \infty$, справджується наступна нерівність:

$$\mathrm{P}\{\delta_\gamma(X) > x\} \le \frac{4B(2B+1)}{\gamma(B^2-1)} \cdot \exp\left\{-z\left(\frac{x}{3w_{B,\frac{1}{\gamma}}}\right)\right\} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{\gamma}}.$$

Наслідок 4. Нехай виконуються умови наслідку 3, причому процес $\{X(t), t \in [0,\infty)\}$ — інтегровний на кожному скінченному проміжку та рівномірно неперервний на $[0,\infty)$. Припустимо, що функція $v_B(t,s)$ така, що має місце наступна нерівність:

$$\sup_{\substack{0<|t-s|\le\varepsilon \\ t,s\in[0,\infty)}} |X(t) - X(s)| \le v_{B,\varepsilon} \cdot \sup_{\substack{0<|t-s|\le\varepsilon \\ t,s\in[0,\infty)}} \frac{|X(t)-X(s)|}{v_B(t,s)},$$

де $v_{B,\varepsilon} = \max\limits_{\substack{0<|t-s|\le\varepsilon \\ t,s\in[0,\infty)}} v_B(t,s)$. Тоді для $x > 3x_0 \cdot v_{B,\frac{1}{\gamma}}$, $\gamma \in \left(0, \frac{1}{\min\{\varepsilon_0,\theta\}}\right)$,

$\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)}\left(\min\limits_{i\geq 0}\alpha_i + \theta\right)$ та за умови, що $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_i} < \infty$, справджується наступна нерівність:

$$\mathrm{P}\{\delta_\gamma(X) > x\} \leq \frac{4B(2B+1)}{\gamma(B^2-1)} \cdot \exp\left\{-z\left(\frac{x}{3v_{B,\frac{1}{\gamma}}}\right)\right\} \cdot \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{\gamma}}.$$

Зокрема, якщо функція $\psi(u) = u^{\alpha}, \alpha > 0$ та функції $\sigma_i(h) = \sigma(h) = dh^{\grave{u}}, h, \grave{u}, d > 0$, то, згідно із теоремою 9, значення $v_{B,\varepsilon}$ набуває вигляду:

$$v_{B,\varepsilon} = \left(6 + 4\sqrt{2} + (5 + 2\sqrt{6}) \cdot 2^{\alpha}\right) \cdot \left(\frac{\frac{B}{2}(\alpha_i+\theta) + \varepsilon(B+1)}{\beta}\right)^{\alpha} \times$$
$$\times \frac{\grave{u}}{\grave{u} - \alpha\beta} \cdot d^{\frac{\grave{u}-\alpha(\beta-1)}{\grave{u}}} \cdot \varepsilon^{\grave{u}-\alpha\beta}, \quad t, s \in D_i.$$

У **третьому розділі** отримано оцінки розподілу напівнорм Гельдера від випадкових процесів з просторів $L_p(\Omega)$ випадкових величин, визначених на компакті та на нескінченному проміжку.

Означення 9. Випадкова величина ξ належить простору $L_p(\Omega), 1 \leq p < \infty$, якщо виконується наступна умова:

$$(\mathrm{E}|\xi|^p)^{1/p} < \infty.$$

Теорема 13. Нехай $(\mathbb{T}, \rho)$ – деякий метричний компактний простір. Розглянемо сепарабельний випадковий процес $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ з простору $L_p(\Omega), 1 \leq p < \infty$. Припустимо, що існує монотонно зростаюча неперервна функція $\sigma = \{\sigma(h), h \geq 0\}$ така, що $\sigma(0) = 0$ та виконується наступна нерівність:

$$\sup_{\rho(t,s)\leq h} \| X(t) - X(s) \|_{L_p} \leq \sigma(h).$$

Нехай $N(\varepsilon) = N_\rho(\mathbb{T}, \varepsilon)$ — метрична масивність простору $(\mathbb{T}, \rho)$. Також нехай $\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)}\left(\sup\limits_{t,s\in\mathbb{T}}\rho(t,s)\right)$, де $\sigma^{(-1)}(h)$ — обернена функція до функції $\sigma(h)$, та

$$g(\varepsilon) = \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \left(N(\sigma^{(-1)}(t))\right)^{4/p} dt < \infty, \qquad \varepsilon > 0.$$

Тоді для $x > 0, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ виконується наступна нерівність:

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\leq\varepsilon} \frac{|X(t)-X(s)|}{(6+4\sqrt{2})B^{2/p}f(\rho(t,s)) + (5+2\sqrt{6})B^{4/p}g(\rho(t,s))} > x\right\} \leq$$
$$\leq \frac{2B(2B+1)}{(B^2-1)N(\varepsilon)\cdot x^{p}},$$

де $B>1$ — деяке число, $f(\varepsilon)=\int_0^{\sigma(\varepsilon)}\left(N(\sigma^{(-1)}(t))\right)^{2/p}dt, \varepsilon>0$.

Наслідок 5. Нехай виконуються усі припущення теореми 13. Тоді для $y>0, \varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ має місце наступна нерівність:

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon}\frac{|X(t)-X(s)|}{(6+4\sqrt{2})f(\rho(t,s))+(5+2\sqrt{6})g(\rho(t,s))}>y\right\}\le\frac{C_0}{N(\varepsilon)\cdot y^p},$$

де $f(\varepsilon)=\int_0^{\sigma(\varepsilon)}\left(N(\sigma^{(-1)}(t))\right)^{2/p}dt$, $g(\varepsilon)=\int_0^{\sigma(\varepsilon)}\left(N(\sigma^{(-1)}(t))\right)^{4/p}dt$, $C_0=\frac{2B_0^5(2B_0+1)}{B_0^2-1}$, $B_0=\frac{\sqrt{33}}{4}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{8\sqrt{41}}{37}\right)\right)-\frac{1}{8}$.

У підрозділі 3.3 наведено теорему про модуль неперервності та наслідок щодо умови Гельдера для випадкових процесів з просторів $L_p(\Omega)$ випадкових величин.

Теорема 14. Нехай виконуються усі припущення теореми 13. Тоді з ймовірністю 1 має місце:

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\Delta(X;\varepsilon)}{(6+4\sqrt{2})B^{2/p}f(\varepsilon)+(5+2\sqrt{6})B^{4/p}g(\varepsilon)}\le 1,$$

де $\Delta(X;\varepsilon)=\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon}|X(t)-X(s)|, t,s\in\mathbb{T}$.

Наслідок 6. Нехай виконуються умови теореми 14. Тоді для достатньо малих v:

$$\sup_{\rho(t,s)\le v}|X(t)-X(s)|\le(6+4\sqrt{2})B^{2/p}f(v)+(5+2\sqrt{6})B^{4/p}g(v)$$

з ймовірністю 1.

Також наведено приклад із конкретною функцією σ.

Підрозділ 3.4 присвячений оцінюванню розподілу напівнорм Гельдера від випадкових процесів з просторів $L_p(\Omega)$ випадкових величин, визначених на інтервалі $[0,\infty)$. Отримано наступну теорему.

Теорема 15. Нехай сепарабельний випадковий процес $X=\{X(t), t\in[0,\infty)\}$ з простору $L_p(\Omega)$, $1\le p<\infty$. Нехай $[0,\infty)=\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$, де $A_i=[a_i,a_{i+1}]$, $\{a_i, i=0,1,\ldots,\infty\}$ — деяка зростаюча послідовність, $a_0=0$. Позначимо $\alpha_i=a_{i+1}-a_i$, $D_i=[a_i,a_{i+1}+\theta], \theta\in\left(0,\min_{i\ge 0}\alpha_i\right)$. Припустимо, що існують монотонно зростаючі неперервні функції $\sigma_i=\{\sigma_i(h), h\ge 0\}$ такі, що $\sigma_i(0)=0, i=0,1,\ldots$ та $\forall i=0,1,\ldots$ виконуються наступні нерівності:

$$\sup_{\substack{|t-s|\le h\\ t,s\in D_i}}\|X(t)-X(s)\|_{L_p}\le\sigma_i(h),\qquad 0<h<\alpha_i+\theta. \tag{2}$$

Нехай $N_i(\varepsilon)$ — метричні масивності для $D_i, i=0,1,\ldots$ з метрикою $\rho(t,s)=|t-s|, t,s\in[0,\infty)$. Також нехай

$$\varepsilon_0 = \min_{i\geq 0}\left\{\sigma_i^{(-1)}\left(\sup_{t,s\in D_i}\rho(t,s)\right)\right\} = \min_{i\geq 0}\left\{\sigma_i^{(-1)}(\alpha_i+\theta)\right\},$$

де $\sigma_i^{(-1)}(h)$ — обернена функція до функції $\sigma_i(h), i = 0,1,\ldots$, та $\forall i = 0,1,\ldots$:

$$g_i(\varepsilon) = \int_0^{\sigma_i(\varepsilon)}\left(N_i\left(\sigma_i^{(-1)}(t)\right)\right)^{4/p} dt < \infty;$$

$$f_i(\varepsilon) = \int_0^{\sigma_i(\varepsilon)}\left(N_i\left(\sigma_i^{(-1)}(t)\right)\right)^{2/p} dt, \varepsilon > 0.$$

Позначимо $z_i(t,s) = (6+4\sqrt{2})f_i(|t-s|) + (5+2\sqrt{6})g_i(|t-s|), t,s \in D_i$, а $z(t,s)$ — така функція, що

$$z(t,s) = \{z_i(t,s) \mid t,s \in A_i \text{або} \min\{t,s\} \in A_i, \max\{t,s\} \in A_{i+1}\}.$$

Припустимо, що $\theta > \varepsilon$. Тоді для $y > 0, \varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_0, \theta\})$ та за умови, що $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_i} < \infty$, виконується наступна нерівність:

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{\substack{0<|t-s|\leq\varepsilon \\ t,s\in[0,\infty)}}\frac{|X(t)-X(s)|}{z(t,s)} > y\right\} \leq \frac{2C_0\varepsilon}{y^p}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_i+\varepsilon},$$

де $C_0 = \frac{2B_0^5(2B_0+1)}{B_0^2-1}, B_0 = \frac{\sqrt{33}}{4}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{8\sqrt{41}}{37}\right)\right) - \frac{1}{8}$.

Наслідок 7. Нехай виконуються усі припущення теореми 15. Також нехай $\forall i = 0,1,\ldots: \sigma_i(h) = \sigma(h)$, тобто умова (2) набуває наступного вигляду:

$$\sup_{\substack{|t-s|\leq h \\ t,s\in D_i}}\| X(t)-X(s)\|_{L_p} \leq \sigma(h), \qquad 0 < h < \alpha_i + \theta, i = 0,1,\ldots$$

Тоді $g_i(\varepsilon) = \int_0^{\sigma(\varepsilon)}\left(N_i\left(\sigma^{(-1)}(t)\right)\right)^{4/p} dt$, $f_i(\varepsilon) = \int_0^{\sigma(\varepsilon)}\left(N_i\left(\sigma^{(-1)}(t)\right)\right)^{2/p} dt$ $\forall i = 0,1,\ldots, \varepsilon > 0$; $\varepsilon_0 = \min_{i\geq 0}\{\sigma^{(-1)}(\alpha_i+\theta)\} = \sigma^{(-1)}\left(\max_{i\geq 0}\alpha_i + \theta\right)$.

Позначимо i_0 номер такого α_i, для якого $\forall i \geq 0: \alpha_i \leq \alpha_{i_0}$. Відповідною метричною масивністю є $N_{i_0}(\varepsilon)$. Тоді справедливою є наступна нерівність:

$$g_i(\varepsilon) \leq \int_0^{\sigma(\varepsilon)}\left(\max_{i\geq 0}\{N_i\left(\sigma^{(-1)}(t)\right)\}\right)^{4/p} dt =$$

$$-15pt = \int_0^{\sigma(\varepsilon)}\left(N_{i_0}\left(\sigma^{(-1)}(t)\right)\right)^{4/p} dt = g_{i_0}(\varepsilon).$$

Аналогічно $f_i(\varepsilon) \le f_{i_0}(\varepsilon)$. Отже, у такому випадку

$$z(t,s) = (6+4\sqrt{2})f_{i_0}(|t-s|) + (5+2\sqrt{6})g_{i_0}(|t-s|),\ t,s \in [0,\infty).$$

Згідно з теоремою 15, для $y > 0, \varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_0, \theta\})$ та за умови, що $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} < \infty$, виконується наступна нерівність:

$$\mathrm{P}\left\{ \sup_{\substack{0<|t-s|\le\varepsilon \\ t,s\in[0,\infty)}} \frac{|X(t)-X(s)|}{(6+4\sqrt{2})f_{i_0}(|t-s|)+(5+2\sqrt{6})g_{i_0}(|t-s|)} > y \right\} \le$$

$$\le \frac{2C_0\varepsilon}{y^p} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i+\theta},$$

де $C_0 = \frac{2B_0^5(2B_0+1)}{B_0^2-1}$, $B_0 = \frac{\sqrt{33}}{4}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{8\sqrt{41}}{37}\right)\right) - \frac{1}{8}$.

Також наведено приклад із конкретною функцією σ.

В останньому підрозділі третього розділу наведено теорему про наближення процесів з просторів $L_p(\Omega)$ цілими екпоненціальними функціями типу. **Теорема 16.** Нехай виконуються умови теореми 15, причому процес $\{X(t), t \in [0,\infty)\}$ — інтегровний на кожному скінченному проміжку та рівномірно неперервний на $[0,\infty)$. Припустимо, що функція $w_B(t,s)$ така, що має місце наступна нерівність:

$$\sup_{\substack{0<|t-s|\le\varepsilon \\ t,s\in[0,\infty)}} |X(t)-X(s)| \le w_{B,\varepsilon} \cdot \sup_{\substack{0<|t-s|\le\varepsilon \\ t,s\in[0,\infty)}} \frac{|X(t)-X(s)|}{w_B(t,s)},$$

де $w_{B,\varepsilon} = \max\limits_{\substack{0<|t-s|\le\varepsilon \\ t,s\in[0,\infty)}} w_B(t,s)$. Тоді для $x > 3x_0 \cdot w_{B,\frac{1}{\gamma}}$, $\gamma \in \left(0, \frac{1}{\min\{\varepsilon_0,\theta\}}\right)$ та за умови, що $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} < \infty$, справджується наступна нерівність:

$$\mathrm{P}\{\delta_\gamma(X) > x\} \le \frac{2B(2B+1)}{\gamma(B^2-1)} \cdot \exp\left\{-z\left(\frac{x}{3w_{B,\frac{1}{\gamma}}}\right)\right\} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i+\frac{1}{\gamma}},$$

де $\delta_\gamma(X)$ визначено у підрозділі 2.6.

Четвертий розділ присвячено отриманню оцінок розподілу напівнорм Гельдера від випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин, визначених на відрізку $[0,T]$ з евклідовою метрикою.

Означення 10. Неперервна парна опукла функція $U = \{U(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається C-функцією Орліча, якщо $U(0) = 0$ та $U(x)$ монотонно зростає при $x > 0$.

За означенням, $\mathbb{C}$–функція $U(x), x \ge 0$ має обернену функцію.

Означення 11. $\mathbb{C}$–функція U задовольняє Δ^2–умову, якщо $U \sim U^2$, тобто

$\exists\, x_0 \ge 0,\ \exists L > 1,\ \forall x \ge x_0$:

$$U^2(x) \le U(Lx).$$

Означення 12. Нехай U — довільна C– функція. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називається сім'я випадкових величин, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа $r_\xi > 0$, що

$$\mathrm{E}U\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty.$$

Простір Орліча — це простір Банаха з нормою

$$\| \xi \|_U = \inf\left\{r > 0; EU\left(\frac{\xi}{r}\right) \le 1\right\}.$$

Розглянемо стохастичний процес $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ з $L_U(\Omega)$–приро-стами. Тоді

$$\rho_X(t,s) = \| X(t) - X(s) \|_U, \qquad t,s \in \mathbb{T}$$

є псевдометрикою, побудованою процесом X. Припустимо, що процес X є сепарабельним на $(\mathbb{T},\rho)$.

Покладемо $N(u) = N_\rho(\mathbb{T},u)$ — метрична масивність простору $(\mathbb{T},\rho)$. Нехай $\sigma(u), u > 0$ — деяка неперервна функція така, що $\sigma(u) \to 0$ при $u \to 0$. Введемо умову на псевдометрику ρ_X:

$$\sup_{\rho(t,s)\le u} \| X(t) - X(s) \|_U \le \sigma(u), \quad \forall u > 0.$$

Теорема 17. Покладемо $\varepsilon_0 = \sup\limits_{t,s\in\mathbb{T}} \rho(t,s) = T$;

$$f(\sigma(u)) = \int_0^{\sigma(u)} U^{(-1)}\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(p)} + 1\right) dp = [p = \sigma(t)] =$$
$$= \int_0^{u} U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t} + 1\right) d\sigma(t), \quad u > 0,$$

$z_0 = \max\{x_0, L\}$, де x_0 та L — константи з означення 13, а також $c = 3L(5+4L)$, $u_* = \sigma^{(-1)}(T)$. Тоді мають місце наступні твердження.

А) Існують функції $C(\sigma(u)), u \in (0,u_*)$ і $C_1(u), u \in (0,T)$ такі, що $C(\sigma(u)) > 0,\ \forall\, u \in (0,u_*), C_1(u) > 0 \quad \forall\, u \in (0,T), C_1(u) \to 0$ при $u \to 0$, та має місце нерівність:

$$\mathrm{P}\left\{ \sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T} \\ 0<|t-s|\le u}} \frac{|X(t)-X(s)|}{C(\sigma(u)) f(\sigma(|t-s|))} > x \right\} \le \frac{C_1(u)}{U(x)},$$

$\forall\, x \ge z_0, u \in (0, \sigma^{(-1)}(T))$. Якщо u таке, що $N(u) > U(z_0)$, то $C_1(u) \le 3 + \sqrt{2}$ і $C(\sigma(u)) \le c$.

Б) Виконується нерівність

$$\limsup_{u\downarrow 0} \frac{\Delta(X;u)}{cz_0 f(\sigma(u))} \le 1$$

майже напевно, де

$$\Delta(X;u) = \sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\ 0<|t-s|\le u}} |X(t) - X(s)|.$$

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено оцінки розподілів напівнорм Гельдера від випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, $L_p(\Omega)$ та Орліча для випадків компактного метричного простору та нескінченного проміжку.

Основні результати дисертаційної роботи:

1. Знайдено умови, за яких в просторах випадкових величин $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ є певні допущення про розподіл максимума скінченного числа випадкових величин;
2. Доведено теореми, у яких отримано оцінки розподілів напівнорм Гельдера від випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, $L_p(\Omega)$ та Орліча, визначених на компакті;
3. Знайдено умови, за яких виконується умова Гельдера, та знайдено модулі неперервності для випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, $L_p(\Omega)$ та Орліча, визначених на компакті;
4. Доведено теореми, у яких отримано оцінки розподілів напівнорм Гельдера та модулі неперервності від випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ та $L_p(\Omega)$, визначених на нескінченному проміжку;
5. Отримані результати застосовано для побудови точності та надійності наближення процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ та $L_p(\Omega)$, визначених на нескінченному проміжку, за допомогою цілих функцій експоненціального типу.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] Затула Д. В. Модулі неперервності випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин, визначених на інтервалі / Д. В. Затула // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. "— 2013. "— 2. "— . 23–28.

[2] Затула Д. В. Умови Ліпшиця для випадкових процесів з банахових просторів $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ випадкових величин / Д. В. Затула, Ю. В. Козаченко // Теорія ймовірностей та математична статистика. "— 2014. "— . 91. " — . 38–54, (english translation in Theory Probability and Mathematical Statistics "— 2015. "— Vol. 91. — P. 43–60).

[3] Zatula D. Lipschitz conditions for random processes from $L_p(\Omega)$ spaces of random variables / D. Zatula // Journal of Classical Analysis. "— 2015. "— Vol. 6(1). "— . 59–72.

[4] Затула Д. В. Про розподіл норм випадкових процесів у просторах Гельдера / Д. В. Затула // Науковий вісник Ужгородського національного університету. Серія: матем. і інформ. "— 2015. "— . 26. "— . 54 – 64.

[5] Zatula D. Estimates for the distribution of semi-norms of $L_p(\Omega)$ processes in Hölder spaces / D. Zatula // Journal of Applied Mathematics and Statistics. "— 2015. "— Vol. 2(1). "— . 9 – 20.

[6] Zatula D. Lipschitz conditions for random processes from Banach spaces $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ / D. Zatula // International conference "Education and Science and their Role in Soc. and Ind. Progr. of Society". Book of Abstracts." — Kyiv, 2014. "— P. 64.

[7] Затула Д. В. Умови Ліпшиця для випадкових процесів з банахових просторів $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ випадкових величин / Д. В. Затула // Тези доповідей п'ятнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука." — . 3. "— К.: НТУУ «КПІ», 2014. "— . 62–63.

[8] Затула Д. В. Умови Ліпшиця для випадкових процесів з просторів $L_p(\Omega)$ випадкових величин / Д. В. Затула // Тези доповідей всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу». " — Івано-Франківськ, 2015."— . 23–24.

[9] Затула Д. В. Оцінки для розподілів норм випадкових процесів з банахових просторів $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ / Д. В. Затула // Матеріали XIII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна - 2015». Математика та механіка. Прикладна математика та комп'ютерні науки. " — Київ, 2015." — . 12-15.

[10] Zatula D. V. Lipschitz conditions for random processes from $L_p(\Omega)$ spaces of random variables / D. V. Zatula // International conference "Probability, reliability and stochastic optimization". Conference materials." — K.: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2015. "— P. 87–88.

[11] Затула Д. В. Оцінки розподілу півнорм $L_p(\Omega)$ процесів у просторах Гельдера / Д. В. Затула // Матеріали міжнародної науково-практичної конференції «Економіка, наука, освіта: інтеграція та синергія». " — . 3. "— Братислава, 2016."— . 58–59.

[12] Затула Д. В. Про розподіл півнорм $L_p(\Omega)$ процесів у просторах Гельдера / Д. В. Затула // Тези доповідей всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу». " — Івано-Франківськ, 2016."— . 30–31.

[13] Затула Д. В. Оцінки розподілу півнорм випадкових процесів у просторах Гьольдера / Д. В. Затула // Матеріали міжнародної наукової математичної конференції «Методика викладання та методи дослідження в математиці». " — Берегове, 2016."— . 34.

АНОТАЦІЯ

Затула Д. В. Оцінки розподілу напівнорм Гельдера від випадкових процесів та їх застосування. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2016.

Дисертаційна робота присвячена оцінюванню розподілів деяких функціоналів від випадкових процесів. Зокрема, в роботі отримано оцінки розподілів напівнорм Гельдера від випадкових процесів із просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ та $L_p(\Omega), p \geq 1$, визначених на компакті або на нескінченному проміжку, а також покращення результатів для процесів з просторів Орліча.

На основі отриманих оцінок було знайдено модулі неперервності та умови, за яких для перерахованих процесів виконується умова Гельдера.

Також за допомогою отриманих оцінок було доведено теореми про точність та надійність наближення процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ та $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, визначених на нескінченному проміжку, за допомогою цілих функцій експоненціального типу.

Крім цього, в дисертаційній роботі досліджено деякі властивості просторів випадкових величин $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$.

Ключові слова: простір $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин, простір $L_p(\Omega)$, простір Орліча, напівнорма Гельдера, модуль неперервності.

АННОТАЦИЯ

Затула Д. В. Оценки распределения полунорм Гёльдера от случайных процессов и их применение. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика. — Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Министерство образования и науки Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена оцениванию распределений некоторых функционалов от случайных процессов. В частности, в работе найдены оценки распределений полунорм Гёльдера от случайных процессов из пространств $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ и $L_p(\Omega), p \geq 1$, определённых на компакте или на бесконечном промежутке, а также улучшения результатов для процессов из пространств Орлича.

На основании полученных оценок были найдены модули непрерывности и условия, при которых для перечисленных процессов выполняется условие Гёльдера.

Также с помощью полученных оценок было доказано теорему про точность и надёжность приближения процессов из пространств $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ и $L_p(\Omega), p \geq 1$, определённых на бесконечном промежутке, с помощью целых функций экспоненциального типа.

Кроме этого, в диссертационной работе исследовано некоторые свойства пространств случайных величин $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$.

Ключевые слова: пространство $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ случайных величин, простра-нство $L_p(\Omega)$, пространство Орлича, полунорма Гёльдера, модуль непрерывности.

ABSTRACT

Zatula D. V. Estimates for the distribution of Hölder semi-norms of random processes and their applications. — Manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.05 — Probability Theory and Mathematical Statistics. — Taras Shevchenko National University of Kyiv, MES of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to estimates of the distributions of some functionals of random processes. In particular, estimates for the distributions of Hölder semi-norms of random processes from $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ and $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, spaces, defined on a compact or an infinite interval, and also improving results for processes from Orlicz spaces are obtained in the thesis.

On the basis of obtained estimations the moduli of continuity and conditions under which the Hölder condition satisfies for above processes were found.

Also, basing on obtained estimates, theorems on accuracy and reliability of approximation of processes from $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ and $L_p(\Omega), p \geq 1$ spaces, defined on an infinite interval, were proved using entire functions of exponential type.

We consider random processes belonging to $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ spaces, where $\psi(u)$, $u \geq 1$ are some monotonically increasing positive functions such that $\psi(u) \to \infty$ as $u \to \infty$. Conditions under which there are some assumptions on the distribution of maximum of finite number of random variables belonging to $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ spaces are investigated. Theorems on the estimates for the distribution of Hölder semi-norms of random processes from $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ spaces are proved in cases when processes defined on a compact and on an infinite interval. The moduli of continuity and conditions under which the Hölder condition satisfies for above processes are established as well. With the help of obtained estimates we prove the theorem on approximation of processes belonging to $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ spaces, defined on an infinite interval, by entire functions of exponential type with given accuracy and reliability. Also there are applications to problems of theory of elasticity and to solving differential equations with initial conditions.

Also we consider random processes belonging to $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, spaces. Theorems on the estimates for the distribution of Hölder semi-norms of random processes from $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, spaces are proved in cases when processes defined on a compact and on an infinite interval. The moduli of continuity and conditions under which the Hölder condition satisfies for above processes are established as well. With the help of obtained estimates we prove the theorem on approximation of processes belonging to $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, spaces, defined on an infinite interval, by entire functions of exponential type with given accuracy and reliability.

We consider random processes belonging to Orlicz spaces of random variables. Theorem on the estimates for the distribution of Hölder semi-norms of random processes from Orlicz spaces is proved in case when processes defined on an interval $[0, T]$. The moduli of continuity and conditions under which the Hölder condition satisfies for above processes are established.

Key words: $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ space of random variables, $L_p(\Omega)$ space, Orlicz space, Hölder semi-norm, modulus of continuity.