

УДК 519.21

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/2.27>

Ігор МАКУШЕНКО, канд. фіз.-мат. наук

ORCID ID: 0000-0002-4313-4936

e-mail: igormakushenko@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ірина УСАР, канд. фіз.-мат. наук

ORCID ID: 0000-0002-3639-5505

e-mail: iryna.usar@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ганна ЛІВІНСЬКА, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ORCID ID: 0000-0001-9676-7932

e-mail: hanna.livinska@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ГІСТЕРЕЗИСНА СТРАТЕГІЯ ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЧЕРГОЮ ТА ПОВТОРНИМИ ВИКЛИКАМИ

Розглянуто систему обслуговування марковського типу з повторними викликами, що складається з одного обслуговуючого приладу і в якій передбачено одне місце в черзі. Для оптимізації роботи системи використано гістерезисну стратегію. Основна ідея цього типу керування пов'язана із залежністю інтенсивності вхідного потоку від кількості джерел повторних викликів у системі. Роботу такої системи змодельовано тривимірним процесом міграції. Для нього встановлено умови існування стаціонарного режиму та досліджено імовірнісні характеристики процесу. Метод дослідження базується на апроксимації вихідного процесу процесом з обмеженим простором станів. Для імовірнісних характеристик процесу у стаціонарному режимі одержано явні формули скалярного типу, для знаходження яких використано метод прирівнювання потоків імовірностей через границі областей, що обираються спеціальним чином. Для ілюстрації отриманих результатів наведено приклад розрахунку стаціонарних імовірностей.

Ключові слова: стохастична система, повторні виклики, змінна інтенсивність вхідного потоку, стаціонарний розподіл, процес міграції.

Класифікація відповідно до AMS 2020: 62H30, 34C60.

Вступ

Нині дослідження систем з повторними викликами є одним з найактуальніших напрямків сучасної теорії масового обслуговування, що активно розвивається. Ці системи детально розглянуті в монографії (Falin, & Templeton, 1997). Їхню популярність пояснюють тим, що такі системи мають широке застосування як математичні моделі для реальних систем у практиці проектування комп'ютерних мереж, дослідженні систем обробки інформації та сучасних систем зв'язку, для опису процесу посадки повітряних суден тощо (Artalejo, & Gomez-Corral, 2008; Yang, & Templeton, 1987). Характерна особливість систем з повторними викликами полягає в тому, що у випадку зайнятості всіх обслуговуючих приладів вимоги надходять на віртуальну орбіту і потім знову через випадковий проміжок часу повторюють спробу потрапити на обслуговування.

У роботі розглянуто систему із чергою та повторними викликами. У таких системах, якщо всі обслуговуючі прилади зайняті, вимоги, що надходять у систему, стають у чергу обмеженої довжини. Якщо всі місця в черзі зайняті, то такі вимоги надходять на віртуальну орбіту і потім, через випадковий проміжок часу повторюють спробу потрапити на обслуговування. Такі вимоги стають джерелами повторних викликів і генерують вторинний потік. Одне з важливих застосувань моделей із чергою та повторними викликами полягає в тому, що з їхньою допомогою можна ставити і розв'язувати задачі оптимального керування параметрами системи (Makushenko et al., 2023). Складність дослідження таких систем пов'язана з їхнім необмеженим фазовим простором. У роботі (Jonin, & Sedol, 1970) використовували ідею заміни нескінченної системи на скінченну. Проте постає питання про точність наближення характеристик нескінченної системи за допомогою отриманого стаціонарного розподілу урізаної системи (Falin, & Gomez-Corral, 2000). Розв'язання цієї задачі сприяє знаходженню для стаціонарних імовірностей явних формул скалярного типу.

1. Математична модель

У представленому дослідженні розглянуто систему обслуговування типу $[M / M / 1 / 1 + 1]^{(\infty)}$ з повторними викликами, що складається з одного обслуговуючого приладу і в якій передбачено одне місце у черзі. Час обслуговування має показниковий розподіл із параметром μ . На вхід обслуговуючого пристрою надходить пуассонівський потік вимог, інтенсивність якого функціонально залежить від числа джерел повторних викликів. Якщо вимога надійшла до системи, але виявилось, що всі прилади зайняті, то вона стає в чергу, як у класичних системах з очікуванням. Після звільнення обслуговуючого приладу, вимога із черги одразу займає його. Тобто зайнятість місця в черзі означає і зайнятість обслуговуючого приладу. У такій ситуації вимога, що надходить до системи, стає джерелом повторних викликів і генерує вторинний пуассонівський потік вимог інтенсивності ν .

Алгоритм керування роботою такої системи визначається на основі гістерезисної стратегії, яку можна описати так. Нехай $h_1 \leq h_2$ – два натуральні числа, які ми будемо називати порогами. Якщо кількість повторних викликів $j \leq h_1 - 1$, то система буде працювати в першому режимі й інтенсивність вхідного потоку дорівнює $\lambda_1(j)$. Якщо $j \geq h_2$, то в другому режимі з інтенсивністю вхідного потоку $\lambda_2(j)$. А якщо $h_1 \leq j < h_2$, то система зберігає той режим, у якому вона працювала в

© Макушенко Ігор, Усар Ірина, Лівінська Ганна, 2025

попередній момент часу. Клас порогових стратегій є підмножиною класу гістерезисних стратегій, який можна отримати за $h_1 = h_2$. Такі системи розглянуто в роботах (Lebedev, & Usar, 2013; Lebedev et al., 2017; Makushenko et al., 2023).

Процес обслуговування будемо моделювати тривимірним процесом міграції $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t))$ у фазовому просторі $S = S^{(1)} \cup S^{(2)}$, $S^{(1)} \cap S^{(2)} = \emptyset$, де

$$S^{(1)} = \{(i, j, 1) : i = 0, 1, 2, j = 0, 1, \dots, h_2 - 1\}, \quad S^{(2)} = \{(i, j, 2) : i = 0, 1, 2, j = h_1, \dots\},$$

$Q_1(t)$ – сумарне число зайнятих приладів та місць у черзі в момент часу t , $Q_2(t)$ – число джерел повторних вимог, $Q_3(t)$ – режим роботи системи в момент часу t . Якщо $Q_3(t) = 1$, то система працює в першому режимі, якщо $Q_3(t) = 2$, то у другому режимі. Інфінітезимальні характеристики $q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')}$ процесу $Q(t)$ визначаємо так:

1) якщо $(i = 0, 1, j = 0, 1, \dots, h_2 - 1, r = 1) \vee (i = 0, 1, j = h_1 + 1, \dots, r = 2)$, то

$$q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')} = \begin{cases} \lambda_r(j), & \text{за } (i', j', r') = (i + 1, j, r), \\ \mu, & \text{за } (i', j', r') = (i - 1, j, r), \\ j\nu, & \text{за } (i', j', r') = (i + 1, j - 1, r), \\ -(\lambda_r(j) + i\mu + j\nu), & \text{за } (i', j', r') = (i, j, r), \\ 0, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

2) якщо $(i = 2, j = 0, 1, \dots, h_2 - 2, r = 1) \vee (i = 2, j = h_1 + 2, \dots, r = 2)$, то

$$q_{(2,j,r)}^{(i',j',r')} = \begin{cases} \lambda_r(j), & \text{за } (i', j', r') = (2, j + 1, r), \\ \mu, & \text{за } (i', j', r') = (1, j, r), \\ -(\lambda_r(j) + \mu), & \text{за } (i', j', r') = (2, j, r), \\ 0, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

3) якщо $i = 2, j = h_2 - 1, r = 1$, то

$$q_{(2,h_2-1,1)}^{(i',j',r')} = \begin{cases} \lambda_1(h_2 - 1), & \text{за } (i', j', r') = (2, h_2, 2), \\ \mu, & \text{за } (i', j', r') = (1, h_2 - 1, 1), \\ -(\lambda_1(h_2 - 1) + \mu), & \text{за } (i', j', r') = (2, h_2 - 1, 1), \\ 0, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

4) якщо $i = 0, 1, j = h_1, r = 2$, то

$$q_{(i,h_1,2)}^{(i',j',r')} = \begin{cases} \lambda_2(h_1), & \text{за } (i', j', r') = (i + 1, h_1, 2), \\ \mu, & \text{за } (i', j', r') = (i - 1, h_1, 2), \\ h_1\nu, & \text{за } (i', j', r') = (i + 1, h_1 - 1, 1), \\ -(\lambda_2(h_1) + \mu + h_1\nu), & \text{за } (i', j', r') = (i, h_1, 2), \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

2. Умови існування та явні формули для стаціонарного розподілу

З'ясуємо умови існування стаціонарного режиму для тривимірного процесу Маркова $Q(t)$, $t \geq 0$.

Лема 1. Нехай $\lambda_2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_2(j) < \infty$. Тоді за $\frac{\lambda_2}{\mu} < 1$ існує стаціонарний режим для процесу $Q(t)$.

Доведення. Доведення цієї леми базується на застосуванні теореми Твіді (Falin, & Templeton, 1997, р. 97). Розглянемо в ролі тест-функцій Ляпунова такі функції, як:

$$\phi(i, j, r) = ai + j + r, \quad (i, j, r) \in S,$$

де параметр "a" буде визначено пізніше.

Якщо ми покажемо, що параметр "a" можна вибрати так, щоб середній перенос для цих функцій, який визначається за формулою

$$y_{ijr} = \sum_{(i',j',r') \neq (i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')} (\phi(i', j', r') - \phi(i, j, r)) = \sum_{(i',j',r') \neq (i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')} (a(i' - i) + j' - j + r' - r),$$

буде рівномірно менше нуля відносно (i, j, r) , за винятком, можливо, скінченної кількості точок, то із цього буде випливати наша лема.

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $\lambda_2(j) \leq \mu\lambda_2$, де $\lambda_2 < 1$. Маємо

$$y_{ijr} = \sum_{(i',j',r') \neq (i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')} (ai' + j' - j) = \lambda_2(j)a + j\nu(a - 1) \leq \lambda_2\mu a + j\nu(a - 1), \quad j = h_1 + 1, \dots$$

$$y_{ijr} = \sum_{(i',j',r') \neq (i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')} (ai' + j' - a - j) = \lambda_2(j)a - \mu a + j\nu(a - 1) =$$

$$= a(\lambda_2(j) - \mu) + jv(a-1) \leq a\mu(2\lambda_2 - 1) + jv(a-1), \quad j = h_1 + 1, \dots$$

$$y_{ijr} = \sum_{(i', j', r') \neq (i, j, r)} q_{(i, j, r)}^{(i', j', r')} (a(i' - i) + j' - j) = \lambda_2(j) - \mu a \leq \mu(\lambda_2 - a), \quad j = h_1 + 1, \dots$$

Умови теореми Твіді будуть виконані, якщо ми вкажемо, що $\varepsilon > 0$ та $a > 0$ і що будуть виконуватися нерівності

$$\begin{cases} \lambda_2 a + jv(a-1) \leq -\varepsilon; \\ a\mu(2\lambda_2 - 1) + jv(a-1) \leq -\varepsilon; \\ \mu(\lambda_2 - a) \leq -\varepsilon, \end{cases}$$

для всіх j за винятком, можливо, скінченної їхньої кількості.

Нехай $\lambda_2 < a < 1$. Тоді легко зрозуміти, що для таких a ліві частини нерівностей у системі будуть меншими за $-\varepsilon$ з деяким $\varepsilon > 0$ для всіх достатньо великих j .

Лемму 1 доведено.

Для знаходження стаціонарного розподілу спочатку розглянемо урізану систему, у якій кількість джерел повторних викликів буде обмеженою деяким числом $N > h_2$. Таку систему ми позначатимемо як $[M / M / 1 / 1 + 1]^{(N)}$. Якщо $N < \infty$, то стаціонарний розподіл $\pi_{ij}^{(r)}(N) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Q_1(t) = i, Q_2(t) = j, Q_3(t) = r)$ для процесу $Q^{(N)}(t)$ завжди існує. Для спрощення позначень вважатимемо $\pi_{ij}^{(r)}(N) = \pi_{ij}^{(r)}$.

Введемо такі позначення:

$$\beta_i(j) = \lambda_i(j) + jv; \quad \alpha_i(j) = \lambda_i(j) [\beta_i^2(j) + jv\mu]; \quad \gamma_i(j) = jv\mu(\lambda_i(j-1) + 2\beta_i(j) + \mu);$$

$$B_i(j) = \begin{cases} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{\alpha_i(k)}{\gamma_i(k+1)}, & \text{для } i=1, j=1, \dots, h_2-1, \\ \prod_{k=h_1}^{j-1} \frac{\alpha_2(k)}{\gamma_2(k+1)}, & \text{для } i=2, j=h_1+1, \dots \end{cases}$$

Позначимо матрицю розміром $(h_2 - h_1) \times (h_2 - h_1)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{h_2-h_1-1, h_2-h_1-2} & a_{h_2-h_1-1, h_2-h_1-1} & a_{h_2-h_1-1, h_2-h_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{h_2-h_1, h_2-h_1-1} & a_{h_2-h_1, h_2-h_1} \end{pmatrix}, \text{ де } a_{ij} = \begin{cases} \gamma_1(h_1-1+i) + \alpha_1(h_1-1+i), & \text{якщо } i=j, \\ -\alpha_1(h_1-2+i), & \text{якщо } i=j+1, \\ -\gamma_1(h_1-1+j), & \text{якщо } j=i+1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Нехай $\bar{1}$ позначає вектор-стовпчик з $h_2 - h_1$ координатами, перша координата якого дорівнює одиниці, а решта – нулю. Уведемо величини $A(j), j = h_1, \dots, h_2 - 1$ так:

$$A^{-1}\bar{1} = (A(h_1), \dots, A(h_2-1))'.$$

Покладемо

$$b(h_1) = \alpha_1(h_1)A(h_1) - \gamma_1(h_1+1)A(h_1+1),$$

$$Q(j) = \alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)B_2(j) \left[\frac{1 - \alpha_1(h_1)A(h_1)}{\mu h_1 v(\mu + \beta_2(h_1))} + b(h_1) \sum_{l=h_1}^{j-1} \frac{1}{\gamma_2(l+1)B_2(l+1)} \right],$$

$$D(h_1, h_2) = \frac{\alpha_2(h_2-1)Q(h_2-1) + \alpha_1(h_1-1)\alpha_1(h_2-1)A(h_2-1)B_1(h_1-1)}{\gamma_2(h_2)}.$$

Теорема 1. Якщо $\lambda_1(j), \lambda_2(j) > 0, j = 0, 1, \dots, N$, то для системи $[M / M / 1 / 1 + 1]^{(N)}$ справедливі наступні формули для стаціонарного розподілу

$$\frac{\pi_{0j}^{(1)}}{\pi_{00}^{(1)}} = \begin{cases} B_1(j), & \text{за } j=1, \dots, h_1-1; \\ \alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)A(j), & \text{за } j=h_1, \dots, h_2-1; \end{cases}$$

$$\frac{\pi_{1j}^{(1)}}{\pi_{00}^{(1)}} = \begin{cases} \frac{\beta_1(j)B_1(j)}{\mu}, & \text{за } j=0, \dots, h_1-1; \\ \frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)\beta_1(j)A(j)}{\mu}, & \text{за } j=h_1, \dots, h_2-1; \end{cases}$$

$$\frac{\pi_{2j}^{(1)}}{\pi_{00}^{(1)}} = \begin{cases} \frac{(j+1)v(\mu + \beta_1(j+1))B_1(j+1)}{\mu\lambda_1(j)}, & \text{за } j = 0, \dots, h_1 - 2; \\ \frac{\alpha_1(h_1 - 1)B_1(h_1 - 1)[1 - h_1 v \mu \lambda_1(h_1 - 1)A(h_1)]}{\mu^2 \lambda_1(h_1 - 1)}, & \text{за } j = h_1 - 1; \\ \frac{\alpha_1(h_1 - 1)B_1(h_1 - 1)[\alpha_1(j)A(j) - (j+1)v\mu\lambda_1(j)A(j+1)]}{\mu^2 \lambda_1(j)}, & \\ \text{за } j = h_1, \dots, h_2 - 2; \\ \frac{\alpha_1(h_1 - 1)B_1(h_1 - 1)\alpha_1(h_2 - 1)A(h_2 - 1)}{\mu^2 \lambda_1(h_2 - 1)}, & \text{за } j = h_2 - 1; \end{cases}$$

$$\frac{\pi_{0j}^{(2)}}{\pi_{00}^{(1)}} = \begin{cases} Q(j), & \text{за } j = h_1, \dots, h_2 - 1; \\ \frac{B_2(j)D(h_1, h_2)}{B_2(h_2)}, & \text{за } j = h_2, \dots, N; \end{cases}$$

$$\frac{\pi_{1j}^{(2)}}{\pi_{00}^{(1)}} = \begin{cases} \frac{\beta_2(j)Q(j)}{\mu}, & \text{за } j = h_1, \dots, h_2 - 1; \\ \frac{\beta_2(j)B_2(j)D(h_1, h_2)}{\mu B_2(h_2)}, & \text{за } j = h_2, \dots, N; \end{cases}$$

$$\frac{\pi_{2j}^{(2)}}{\pi_{00}^{(1)}} = \begin{cases} \frac{\alpha_2(j)Q(j) - (j+1)v\mu\lambda_2(j)Q(j+1)}{\mu^2 \lambda_2(j)}, & \text{за } j = h_1, \dots, h_2 - 2; \\ \frac{\alpha_2(h_2 - 1)Q(h_2 - 1) - h_2 v \mu \lambda_2(h_2 - 1)D(h_1, h_2)}{\mu^2 \lambda_2(h_2 - 1)}, & \text{за } j = h_2 - 1; \\ \frac{(j+1)v(\mu + \beta_2(j+1))B_2(j+1)D(h_1, h_2)}{\mu\lambda_2(j)B_2(h_2)}, & \text{за } j = h_2, \dots, N - 1; \\ \frac{\alpha_2(N)B_2(N)D(h_1, h_2)}{\mu^2 \lambda_2(N)B_2(h_2)}, & \text{за } j = N, \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} \pi_{00}^{(1)} = & \left[1 + \mu^{-1}\beta_1(0) + \sum_{j=1}^{h_1-1} (1 + \mu^{-1}\beta_1(j))B_1(j) + \mu^{-1}v \sum_{j=0}^{h_1-2} \frac{(j+1)(\mu + \beta_1(j+1))B_1(j+1)}{\lambda_1(j)} + \right. \\ & + \frac{\alpha_1(h_1 - 1)B_1(h_1 - 1)}{\mu^2} \left\{ \mu^2 \sum_{j=h_1}^{h_2-1} (1 + \mu^{-1}\beta_1(j))A(j) + \sum_{j=h_1}^{h_2-2} \frac{[\alpha_1(j)A(j) - (j+1)v\mu\lambda_1(j)A(j+1)]}{\lambda_1(j)} \right\} + \\ & + \frac{1 - h_1 v \mu \lambda_1(h_1 - 1)A(h_1)}{\lambda_1(h_1 - 1)} + \frac{\alpha_1(h_2 - 1)A(h_2 - 1)}{\lambda_1(h_2 - 1)} \left. \right] + \sum_{j=h_1}^{h_2-1} (1 + \mu^{-1}\beta_2(j))Q(j) + \frac{1}{\mu^2} \sum_{j=h_1}^{h_2-2} \frac{\alpha_2(j)Q(j) - (j+1)v\mu\lambda_2(j)Q(j+1)}{\lambda_2(j)} \\ & + \frac{\alpha_2(h_2 - 1)Q(h_2 - 1) - h_2 v \mu \lambda_2(h_2 - 1)D(h_1, h_2)}{\mu^2 \lambda_2(h_2 - 1)} + \frac{D(h_1, h_2)}{B_2(h_2)} \left\{ \sum_{j=h_2}^N (1 + \mu^{-1}\beta_2(j))B_2(j) + \right. \\ & \left. + \frac{v}{\mu} \sum_{j=h_2}^{N-1} \frac{(j+1)(\mu + \beta_2(j+1))B_2(j+1)}{\lambda_2(j)} + \frac{\alpha_2(N)B_2(N)}{\mu^2 \lambda_2(N)} \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Доведення. Запишемо рівняння для стаціонарних імовірностей системи, використовуючи теорему про рівність потоків імовірностей через замкнений контур (Walrand, 1988, Section II). Проте окремо потрібно розглядати три області: область, де діє лише перший режим, тобто $0 \leq j \leq h_1 - 1$; область де діє лише другий режим, тобто $h_2 \leq j \leq N$ і область, де можуть діяти обидва режими, тобто $h_1 \leq j \leq h_2 - 1$. Для спрощення позначень будемо вважати $\pi_{ij}^{(r)}(N) = \pi_{ij}^{(r)}$. Отримаємо такі рівняння:

$$(j+1)v(\pi_{0j+1}^{(1)} + \pi_{1j+1}^{(1)}) = \lambda_1(j)\pi_{2j}^{(1)}, \quad j = 0, 1, \dots, h_1 - 2, \quad (1)$$

$$(\lambda_1(j) + jv)\pi_{0j}^{(1)} = \mu\pi_{1j}^{(1)}, \quad j = 0, 1, \dots, h_1 - 2, \quad (2)$$

$$(\lambda_1(j) + \mu + jv)\pi_{1j}^{(1)} = \lambda_1(j)\pi_{0j}^{(1)} + (j+1)v\pi_{0j+1}^{(1)} + \mu\pi_{2j}^{(1)}, \quad j = 0, 1, \dots, h_1 - 2. \quad (3)$$

З рівнянь (1), (3) маємо

$$(\lambda_1(j) + \mu + jv)\pi_{1j}^{(1)} = \lambda_1(j)\pi_{0j}^{(1)} + \frac{(j+1)v(\lambda_1(j) + \mu)}{\lambda_1(j)}\pi_{0j+1}^{(1)} + \frac{\mu(j+1)v}{\lambda_1(j)}\pi_{1j+1}^{(1)}, \quad j = 0, 1, \dots, h_1 - 2.$$

Якщо тепер урахувати (2) та введені позначення, то останнє рівняння можемо переписати так:

$$\alpha_1(j) \pi_{0j}^{(1)} = \gamma_1(j+1) \pi_{0j+1}^{(1)}, \quad j = 0, 1, \dots, h_1 - 2.$$

Позначимо $a(j) = \frac{\alpha_1(j)}{\gamma_1(j+1)}$. Тоді отримаємо рекурентне співвідношення

$$\pi_{0j+1}^{(1)} = a(j) \pi_{0j}^{(1)}, \quad j = 0, 1, \dots, h_1 - 2.$$

Звідки

$$\pi_{0j}^{(1)} = \prod_{k=1}^j a(j-k) \pi_{00}^{(1)} = \prod_{k=0}^{j-1} a(k) \pi_{00}^{(1)}, \quad j = 0, 1, \dots, h_1 - 2. \quad (4)$$

Тепер із (2) маємо

$$\pi_{1j}^{(1)} = \frac{\lambda_1(j) + j\nu}{\mu} \prod_{k=0}^{j-1} a(k) \pi_{00}^{(1)}, \quad j = 0, 1, \dots, h_1 - 2. \quad (5)$$

Аналогічно з (1) та (4), (5) випливає

$$\pi_{2j}^{(1)} = \frac{(j+1)\nu(\lambda_1(j+1) + \mu + (j+1)\nu)}{\lambda_1(j)\mu} \prod_{k=0}^j a(k) \pi_{00}^{(1)}, \quad j = 0, 1, \dots, h_1 - 2. \quad (6)$$

Ураховуючи введені позначення, отримаємо

$$\begin{aligned} \pi_{0j}^{(1)} &= B_1(j) \pi_{00}^{(1)}, \quad j = 1, \dots, h_1 - 1, \\ \pi_{1j}^{(1)} &= \frac{\beta_1(j) B_1(j)}{\mu} \pi_{00}^{(1)}, \quad j = 0, 1, \dots, h_1 - 2, \\ \pi_{2j}^{(1)} &= \frac{(j+1)\nu(\mu + \beta_1(j+1)) B_1(j+1)}{\lambda_1(j)\mu} \pi_{00}^{(1)}, \quad j = 0, 1, \dots, h_1 - 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Напишемо рівняння для точок області, де можуть діяти обидва режими.

$$(\lambda_1(j) + j\nu) \pi_{0j}^{(1)} = \mu \pi_{1j}^{(1)}, \quad j = h_1 - 1, \dots, h_2 - 1. \quad (8)$$

$$(\lambda_1(j) + \mu + j\nu) \pi_{1j}^{(1)} = \lambda_1(j) \pi_{0j}^{(1)} + (j+1)\nu \pi_{0j+1}^{(1)} + \mu \pi_{2j}^{(1)}, \quad j = h_1, \dots, h_2 - 2. \quad (9)$$

$$(\lambda_1(h_1 - 1) + \mu + (h_1 - 1)\nu) \pi_{1h_1-1}^{(1)} = \lambda_1(h_1 - 1) \pi_{0h_1-1}^{(1)} + h_1 \nu (\pi_{0h_1}^{(1)} + \pi_{0h_1}^{(2)}) + \mu \pi_{2h_1-1}^{(1)}. \quad (10)$$

$$(\lambda_1(h_2 - 1) + \mu + (h_2 - 1)\nu) \pi_{1h_2-1}^{(1)} = \lambda_1(h_2 - 1) \pi_{0h_2-1}^{(1)} + \mu \pi_{2h_2-1}^{(1)}. \quad (11)$$

$$(\lambda_1(j) + \mu) \pi_{2j}^{(1)} = \lambda_1(j) \pi_{1j}^{(1)} + \lambda_1(j-1) \pi_{2j-1}^{(1)} + (j+1)\nu \pi_{1j+1}^{(1)}, \quad j = h_1, \dots, h_2 - 2. \quad (12)$$

$$(\lambda_1(h_2 - 1) + \mu) \pi_{2h_2-1}^{(1)} = \lambda_1(h_2 - 1) \pi_{1h_2-1}^{(1)} + \lambda_1(h_2 - 2) \pi_{2h_2-2}^{(1)}. \quad (13)$$

$$(\lambda_1(h_1 - 1) + \mu) \pi_{2h_1-1}^{(1)} = \lambda_1(h_1 - 1) \pi_{1h_1-1}^{(1)} + \lambda_1(h_1 - 2) \pi_{2h_1-2}^{(1)} + h_1 \nu (\pi_{1h_1}^{(1)} + \pi_{1h_1}^{(2)}). \quad (14)$$

Другий режим задіяний лише в рівняннях (10) та (14). Тому спочатку розглянемо інші рівняння. З (8) маємо

$$\pi_{1j}^{(1)} = \frac{\beta_1(j)}{\mu} \pi_{0j}^{(1)}, \quad j = h_1 - 1, \dots, h_2 - 1 \quad (15)$$

і, вилучивши за допомогою (15) з решти рівнянь $\pi_{1j}^{(1)}$, після нескладних перетворень отримаємо такі рівняння

$$\frac{\alpha_1(j)}{\lambda_1(j)\mu} \pi_{0j}^{(1)} = (j+1)\nu \pi_{0j+1}^{(1)} + \mu \pi_{2j}^{(1)}, \quad j = h_1, \dots, h_2 - 2, \quad (16)$$

$$\frac{\alpha_1(h_2 - 1)}{\lambda_1(h_2 - 1)\mu} \pi_{0h_2-1}^{(1)} = \mu \pi_{2h_2-1}^{(1)}, \quad (17)$$

$$(\lambda_1(j) + \mu) \pi_{2j}^{(1)} = \frac{\lambda_1(j) \beta_1(j)}{\mu} \pi_{0j}^{(1)} + \lambda_1(j-1) \pi_{2j-1}^{(1)} + \frac{(j+1)\nu \beta_1(j+1)}{\mu} \pi_{0j+1}^{(1)}, \quad j = h_1, \dots, h_2 - 2, \quad (18)$$

$$(\lambda_1(h_2 - 1) + \mu) \pi_{2h_2-1}^{(1)} = \frac{\lambda_1(h_2 - 1) \beta_1(h_2 - 1)}{\mu} \pi_{0h_2-1}^{(1)} + \lambda_1(h_2 - 2) \pi_{2h_2-2}^{(1)}. \quad (19)$$

За допомогою формули (16) вилучимо $\pi_{2j}^{(1)}$ з рівняння (18). Після відповідних перетворень отримаємо

$$\gamma_1(j+1) \pi_{0j+1}^{(1)} - (\alpha_1(j) + \gamma_1(j)) \pi_{0j}^{(1)} + \alpha_1(j-1) \pi_{0j-1}^{(1)} = 0, \quad j = h_1, \dots, h_2 - 2,$$

що дає нам $h_2 - h_1 - 1$ рівнянь для $h_2 - h_1 + 1$ невідомих $\pi_{0h_1-1}^{(1)}, \dots, \pi_{0h_2-2}^{(1)}$. Нам потрібно ще одне рівняння, яке ми отримаємо із (17), (19) та (16) за $j = h_2 - 2$. Після відповідних обчислень матимемо:

$$\alpha_1(h_2 - 2) \pi_{0h_2-2}^{(1)} - (\alpha_1(h_2 - 1) + \gamma_1(h_2 - 1)) \pi_{0h_2-1}^{(1)} = 0.$$

Отже, ми отримали таку систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} (\alpha_1(h_1) + \gamma_1(h_1))\pi_{0h_1}^{(1)} - \gamma_1(h_1 + 1)\pi_{0h_1+1}^{(1)} = \alpha_1(h_1 - 1)\pi_{0h_1-1}^{(1)}, \\ -\alpha_1(j - 1)\pi_{0j-1}^{(1)} + (\alpha_1(j) + \gamma_1(j))\pi_{0j}^{(1)} - \gamma_1(j + 1)\pi_{0j+1}^{(1)} = 0; \quad j = h_1 + 1, \dots, h_2 - 2, \\ -\alpha_1(h_2 - 2)\pi_{0h_2-2}^{(1)} + (\alpha_1(h_2 - 1) + \gamma_1(h_2 - 1))\pi_{0h_2-1}^{(1)} = 0, \end{cases} \quad (20)$$

де $\pi_{0h_1-1}^{(1)}$ будемо вважати величиною відомою.

Позначимо матрицю

$$A(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}(h_1) & -\gamma_1(h_1 + 1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\alpha_1(h_1) & \bar{\alpha}(h_1 + 1) & -\gamma_1(h_1 + 2) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1(h_1 + 1) & \bar{\alpha}(h_1 + 2) & \gamma_1(h_1 + 3) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_1(h_2 - 2) & \bar{\alpha}(h_2 - 1) \end{pmatrix}, \text{ де } \bar{\alpha}(j) = \alpha_1(j) + \gamma_1(j).$$

Нехай

$$A^{-1}(h_1, h_2) \bar{1} = (A(h_1), A(h_1 + 1), \dots, A(h_2 - 1))', \quad \pi_0^{(1)} = (\pi_{0h_1}^{(1)}, \pi_{0h_1+1}^{(1)}, \dots, \pi_{0h_2-1}^{(1)})'.$$

Тепер систему (20) запишемо так:

$$A(h_1, h_2) \pi_0^{(1)} = \alpha(h_1 - 1) \pi_{0h_1-1}^{(1)} \bar{1}.$$

Звідси, з урахуванням (7) маємо

$$\pi_{0j}^{(1)} = \begin{cases} B_1(j) \pi_{00}^{(1)}, & \text{за } j = 1, \dots, h_1 - 1; \\ \alpha_1(h_1 - 1) B_1(h_1 - 1) A(j) \pi_{00}^{(1)}, & \text{за } j = h_1, \dots, h_2 - 1. \end{cases} \quad (21)$$

Із формул (7) і (15) отримаємо

$$\pi_{1j}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\beta_1(j) B_1(j)}{\mu} \pi_{00}^{(1)}, & \text{за } j = 0, \dots, h_1 - 1; \\ \frac{\alpha_1(h_1 - 1) B_1(h_1 - 1) \beta_1(j) A(j)}{\mu} \pi_{00}^{(1)}, & \text{за } j = h_1, \dots, h_2 - 1. \end{cases} \quad (22)$$

Запишемо тепер формули для $\pi_{2j}^{(1)}$ за $j = h_1 - 1, \dots, h_2 - 2$.

Із (16), (21) та (22) маємо

$$\pi_{2j}^{(1)} = \frac{\alpha_1(h_1 - 1) B_1(h_1 - 1) [\alpha_1(j) A(j) - (j + 1) \nu \mu \lambda_1(j) A(j + 1)]}{\mu^2 \lambda_1(j)} \pi_{00}^{(1)}, \quad j = h_1, \dots, h_2 - 2.$$

Залишилося знайти $\pi_{2h_1-1}^{(1)}$ та $\pi_{2h_2-1}^{(1)}$. Із (18) за $j = h_1$ одержимо

$$\pi_{2h_1-1}^{(1)} = \frac{\alpha_1(h_1 - 1) B_1(h_1 - 1)}{\mu^2 \lambda_1(h_1 - 1)} \{ [\gamma_1(h_1) + \alpha_1(h_1) - h_1 \nu \mu \lambda_1(h_1 - 1)] A(h_1) - \gamma_1(h_1 + 1) A(h_1 + 1) \} \pi_{00}^{(1)}. \quad (23)$$

З очевидної рівності

$$A(h_1, h_2) (A(h_1), A(h_1 + 1), \dots, A(h_2 - 1))' = \bar{1}$$

отримаємо, що

$$\begin{aligned} & [\gamma_1(h_1) + \alpha_1(h_1)] A(h_1) - \gamma_1(h_1 + 1) A(h_1 + 1) = 1, \\ & -\alpha_1(j - 1) A(j - 1) + (\alpha_1(j) + \gamma_1(j)) A(j) - \gamma_1(j + 1) A(j + 1) = 0, \quad j = h_1 + 1, \dots, h_2 - 2, \\ & -\alpha_1(h_2 - 2) A(h_2 - 2) + (\alpha_1(h_2 - 1) + \gamma_1(h_2 - 1)) A(h_2 - 1) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

З урахуванням (17) та (24) можемо записати (23) так:

$$\pi_{2h_2-1}^{(1)} = \frac{\alpha_1(h_1 - 1) B_1(h_1 - 1) \alpha_1(h_2 - 1) A(h_2 - 1)}{\mu^2 \lambda_1(h_2 - 1)} \pi_{00}^{(1)}, \quad \text{за } j = h_2 - 1.$$

Отже, маємо

$$\pi_{2j}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\alpha_1(h_1 - 1) B_1(h_1 - 1) [1 - h_1 \nu \mu \lambda_1(h_1 - 1) A(h_1)]}{\mu^2 \lambda_1(h_1 - 1)} \pi_{00}^{(1)}, & \text{за } j = h_1 - 1; \\ \frac{\alpha_1(h_1 - 1) B_1(h_1 - 1) [\alpha_1(j) A(j) - (j + 1) \nu \mu \lambda_1(j) A(j + 1)]}{\mu^2 \lambda_1(j)} \pi_{00}^{(1)}, & \text{за } j = h_1, \dots, h_2 - 2; \\ \frac{\alpha_1(h_1 - 1) B_1(h_1 - 1) \alpha_1(h_2 - 1) A(h_2 - 1)}{\mu^2 \lambda_1(h_2 - 1)} \pi_{00}^{(1)}, & \text{за } j = h_2 - 1. \end{cases}$$

Виходячи з аналогічних міркувань, шляхом переходу до інших частин фазового простору, ми отримаємо подання для всіх стаціонарних імовірностей через $\pi_{00}^{(1)}$. Для того, щоб знайти $\pi_{00}^{(1)}$ використовуємо умову нормування.

Теорему 1 доведено.

Якщо $N = \infty$, то за умови $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\lambda_2(j)}{\mu} < 1$ існує стаціонарний розподіл нашої системи. Щоб отримати формули для стаціонарного розподілу, потрібно в теоремі 1 перейти до границі за $N \rightarrow \infty$. У зв'язку із цим покажемо, що ряд

$$\sum_{j=h_2}^{\infty} (\mu + \beta_2(j)) B_2(j)$$

є збіжний. Маємо, що

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(\mu + \beta_2(j+1)) B_2(j+1)}{(\mu + \beta_2(j)) B_2(j)} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\lambda_2(j+1) + \mu + (j+1)v}{\lambda_2(j) + \mu + jv} \times \frac{\lambda_2(j) [(\lambda_2(j) + jv)^2 + \mu jv]}{\mu (j+1)v [2(j+1)v + \mu + \lambda_2(j) + 2\lambda_2(j)]} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\lambda_2(j)}{\mu} < 1,$$

що й означає збіжність ряду. Аналогічно доводимо збіжність ряду

$$\sum_{j=h_2}^{\infty} \frac{(j+1)(\mu + \beta_2(j+1))}{\lambda_2(j)} B_2(j+1).$$

3. Приклад

Наведемо приклад розрахунків для конкретної системи. Для цього розглянемо систему $[M / M / 1 / 1 + 1]^{(20)}$ з такими параметрами:

$$h_1 = 6, h_2 = 15, \mu = 1, v = 0, 3, \lambda_1(j) = 1, \lambda_2(j) = 2j / (1 + 1,5j).$$

Для цієї системи отримано такі результати розрахунків для стаціонарних імовірностей:

$\pi_{0j}^{(1)}$	0.133	0.079	0.042	0.021	0.011	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\pi_{1j}^{(1)}$	0.133	0.102	0.067	0.041	0.024	0.013	0.007	0.004	0.001	0.000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\pi_{2j}^{(1)}$	0.054	0.066	0.057	0.042	0.029	0.019	0.011	0.007	0.002	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$\pi_{0j}^{(2)}$	0	0	0	0	0	0.00001	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0	0	0	0	0
$\pi_{1j}^{(2)}$	0	0	0	0	0	0.00005	0.00007	0.00009	0.00009	0.00009	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00005	0	0	0	0	0
$\pi_{2j}^{(2)}$	0	0	0	0	0	0.00007	0.00012	0.00016	0.00018	0.00020	0.00021	0.00022	0.00023	0.00024	0.00017	0	0	0	0	0

Дискусія і висновки

Розглянуто одноканальну стохастичну систему із чергою і повторними викликами та вхідним потоком змінної інтенсивності. Зміна інтенсивності вхідного потоку відбувається на основі гістерезисної стратегії. Робота такої системи моделюється тривимірним процесом міграції з неперервним часом. Для нього встановлено умови існування стаціонарного режиму та досліджено імовірнісні характеристики процесу. Метод дослідження базується на апроксимації вихідного процесу процесом з обмеженим простором станів. Дослідження стаціонарного режиму використовує рівність потоків імовірностей через границю замкненого контуру фазового простору. За відповідного вибору системи контурів для стаціонарних імовірностей отримано явні формули скалярного типу. Це дає змогу розв'язати задачу оцінки точності наближення характеристик нескінченної системи за допомогою отриманого стаціонарного розподілу урізаної системи. Одержані результати надають можливість ставити і розв'язувати задачі оптимального керування параметрами системи.

Внесок авторів: Ігор Макушенко – концептуалізація, методика, теоретичні основи дослідження; Ірина Усар – методика, збір і перевірка даних, емпіричне дослідження; Ганна Лівінська – методика, аналіз джерел, підготовка огляду літератури.

Джерела фінансування. Дослідження частково профінансоване Київським національним університетом імені Тараса Шевченка.

Список використаних джерел

- Artalejo, J. R., & Gómez-Corral, A. (2008). *Retrial queueing systems*. Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78725-9>
- Falin, G. I., & Gómez-Corral, A. (2000). On a bivariate Markov process arising in the theory of single-server retrial queues. *Statistica Neerlandica*, 54, 67–78. <https://doi.org/10.1111/1467-9574.00126>
- Falin, G. I., & Templeton, J. G. C. (1997). *Retrial queues*. Chapman & Hall.
- Jonin, G. L., & Sedol, J. J. (1970). *Telephone systems with repeated calls*. Proceedings of 6 International Teletraffic Congress.
- Lebedev, E., Makushenko, I., Livinska, H., & Usar, I. (2017). On steady-state analysis of $[M|M|m|m + n]$ -type retrial queueing systems. In: Dudin, A., Nazarov, A., Kirpichnikov, A. (Eds), *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications: Vol. 800. Communications in Computer and Information Science* (pp. 133–146). Springer. https://doi.org/10.1007/9783-319-68069-9_11
- Lebedev, E., Usar, I. (2013). Retrial queueing systems with variable arrival rate, *Cybernetics and Systems Analysis*, 49(3), 457–464. <https://doi.org/10.1007/s10559-013-9529-9>
- Makushenko, I., Usar, I., Livinska, H., & Sharapov, M. (2023). Optimal threshold strategies for retrial systems with a queue. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 427, 115–136. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115136>
- Walrand, J. (1988). *An introduction to queueing networks*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Yang, T., & Templeton, J. G. C. (1987). A survey on retrial queues. *Queueing Systems*, 2, 201–233. <https://doi.org/10.1007/BF01158899>

References

- Artalejo, J. R., & Gómez-Corral, A. (2008). *Retrial queueing systems*. Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78725-9>
- Falin, G. I., & Gómez-Corral, A. (2000). On a bivariate Markov process arising in the theory of single-server retrial queues. *Statistica Neerlandica*, 54, 67–78. <https://doi.org/10.1111/1467-9574.00126>
- Falin, G. I., & Templeton, J. G. C. (1997). *Retrial queues*. Chapman & Hall.
- Jonin, G. L., & Sedol, J. J. (1970). *Telephone systems with repeated calls*. Proceedings of 6 International Teletraffic Congress.
- Lebedev, E., Makushenko, I., Livinska, H., & Usar, I. (2017). On steady-state analysis of $[M|M]m|m + n$ -type retrial queueing systems. In: Dudin, A., Nazarov, A., Kirpichnikov, A. (Eds), *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications: Vol. 800. Communications in Computer and Information Science* (pp. 133–146). Springer. https://doi.org/10.1007/9783-319-68069-9_11
- Lebedev, E., Usar, I. (2013). Retrial queueing systems with variable arrival rate, *Cybernetics and Systems Analysis*, 49(3), 457–464. <https://doi.org/10.1007/s10559-013-9529-9>
- Makushenko, I., Usar, I., Livinska, H., & Sharapov, M. (2023). Optimal threshold strategies for retrial systems with a queue. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 427, 115–136. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115136>
- Walrand, J. (1988). *An introduction to queueing networks*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Yang, T., & Templeton, J. G. C. (1987). A survey on retrial queues. *Queueing Systems*, 2, 201–233. <https://doi.org/10.1007/BF01158899>

Отримано редакцією журналу / Received: 07.04.25

Прорецензовано / Revised: 23.06.25

Схвалено до друку / Accepted: 10.10.25

Igor MAKUSHENKO, PhD (Phys. & Math.)

ORCID ID: 0000-0002-4313-4936

e-mail: igormakushenko@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Iryna USAR, PhD (Phys. & Math.)

ORCID ID: 0000-0002-3639-5505

e-mail: iryna.usar@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Hanna LIVINSKA, PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof.

ORCID ID: 0000-0001-9676-7932

e-mail: hanna.livinska@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

HYSTERESIS STRATEGY FOR A SINGLE-CHANNEL SYSTEM WITH A QUEUE AND REPEATED CALLS

A Markov-type service system with repeated calls is considered. The system consists of one service device, and one place in the queue is provided. A hysteresis strategy is used to optimize the system operation. The main idea of this type of control is related to the dependence of the intensity of the input flow on the number of sources of repeated calls in the system. The operation of such a system is modeled by a three-dimensional migration process. The conditions for the existence of a stationary regime are established for it, and the probabilistic characteristics of the process are investigated. The research method is based on the approximation of the initial process by a process with a limited state space. Explicit formulas of the scalar type are found for the probabilistic characteristics of the process in the stationary regime. With this aim, the method of equalizing probability flows through the boundaries of regions that are chosen in a special way is used. To illustrate the obtained results, an example of calculating stationary probabilities is given.

Keywords: stochastic system, repeated calls, variable rate of external flow, stationary distribution, migration process.

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.