

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Нечипорук Сергій Анатолійович

УДК 519.7

ДИСЕРТАЦІЯ
МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ПОРОГОВИХ ПРОЦЕСІВ З
ДОПОМОГОЮ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ІТО ТА ІТО-
СКОРОХОДА

113 Прикладна математика

11 Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня *доктора філософії*
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ С. А. Нечипорук

Наукові керівники:

Зінько Петро Миколайович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Нікітін Анатолій Володимирович,
доктор фізико-математичних наук, професор

АНОТАЦІЯ

Нечипорук С. А. Моделювання та аналіз порогових процесів з допомогою стохастичних рівнянь Іто та Іто-Скорохода. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 113 Прикладна математика. – Національний університет «Острозька академія» – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2026.

Метою даної дисертаційної роботи є побудова математичної та комп'ютерної моделі для оцінювання двопорогових процесів на базі рівнянь Іто та Іто-Скорохода.

Актуальність дослідження визначається зростаючою потребою в математичному описі та статистичному аналізі стохастичних процесів із пороговою поведінкою, які широко використовуються для моделювання реальних систем у різних галузях науки і техніки.

Теоретичні та прикладні аспекти дослідження стохастичних процесів висвітлені у працях відомих учених, зокрема О. Г. Наконечного, Я. М. Чабанюка та А. В. Скорохода, результати яких використано як теоретичне підґрунтя даного дослідження.

В даній дисертаційній роботі було виконано побудову та аналіз математичної моделі стохастичних процесів на основі рівнянь Іто та Іто-Скорохода з двома порогамі, а також виконано комп'ютерне моделювання для оцінювання параметрів таких процесів з метою розширити наявні на даний момент дослідження.

В основі запропонованої методики для опису та оцінювання параметрів двопорогових процесів покладено використання наближеної функції максимальної правдоподібності (AMLE), яка дала можливість використовувати чисельні методи для отримання оцінених значень. Такий підхід обрано, оскільки саме AMLE дає вищу обчислювальну стабільність, у

порівнянні із іншими відомими підходами, серед яких можна відмітити байєсівські методи, алгоритм очікування максимізації (ЕМ) [51] та інші. Основна відмінність AMLE від згаданих вище методів це те, що він не вимагає попередніх припущень щодо розподілу параметрів, а це спрощує розрахунки.

Запропоновані у роботі методи дають можливість аналізувати стохастичні процеси, які містять два пороги, та проводити оцінювання їх поведінки у трьох режимах. В роботі представлено дослідження моделі на основі рівнянь Іто та Іто-Скорохода, що дозволило додати стрибкову складову, наблизившись до відтворення більш реалістичної динаміки реальних процесів, які можуть містити різкі зміни.

Наукова новизна роботи полягає у розробці та дослідженні двопорогової моделі стохастичних процесів на основі рівнянь Іто та Іто–Скорохода з трьома режимами динаміки. Запропоновано метод оцінювання параметрів моделі на основі наближеного методу максимальної правдоподібності та її узагальнення шляхом введення стрибкової компоненти. Доведено консистентність та асимптотичну нормальність отриманих оцінок параметрів і розроблено програмне забезпечення для моделювання та аналізу таких процесів.

Напрацьовані результати даної роботи не тільки розширюють наявні на даний момент наукові результати, а і дають змогу в подальшому використати напрацювання у практичній сфері, наприклад у фінансових, економічних або технічних системах де процеси можуть утворювати пороги і формувати різні режими поведінки.

Робота складається з теоретичного блоку (опис математичної моделі, встановлення тверджень для коректних оцінок параметрів моделі, процедур ітераційного оцінювання параметрів, перевірки збіжності) та програмного модуля, реалізованого мовою R. Програмна частина автоматизує розрахунки, візуалізує динаміку процесів і результати оцінювання у вигляді графічних поверхонь правдоподібності, що полегшує інтерпретацію знайдених рішень.

Сформована методика дає можливість аналізувати двопорогові процеси, рахувати оцінені значення параметрів дрейфу, дифузії та стрибкової компоненти, порогів а також отримувати візуальне представлення отриманих результатів. Таке рішення може бути використано як основа для побудови інструменту по оцінювання змін поведінки стохастичних процесів, що містять порогові значення.

Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, присвячених повному викладу результатів дослідження дисертанта, висновків та списку використаних джерел.

У вступі обґрунтовано актуальність проблеми дослідження, визначено об'єкт, предмет, методологічні основи, мету та завдання дослідження, відзначено наукову новизну, практичну цінність дослідження, наведено дані щодо апробації отриманих результатів, а також описано структуру дисертації, виходячи з послідовності розв'язання поставлених завдань.

У першому розділі розв'язано задачу оцінювання параметрів порогових стохастичних процесів на основі рівняння Іто. За основу взято процес Орнштейна-Уленбека (ОУ), який описується стохастичним диференціальним рівнянням:

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t.$$

Досліджено дифузійний процес типу ОУ із трьома режимами та двома порогамі, який має вигляд:

$$\begin{aligned} dX_t = & \{(\beta_{10} + \beta_{11}X_t)I(X_t \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21}X_t)I(r_2 > X_t \geq r_1) \\ & + (\beta_{30} + \beta_{31}X_t)I(X_t \geq r_2)\}dt \\ & + \{\sigma_1 I(X_t \leq r_1) + \sigma_2 I(r_2 > X_t \geq r_1) + \sigma_3 I(X_t > r_2)\}dW_t. \end{aligned}$$

Для вибірки $X = \{X_0, X_1, \dots, X_q\}$, що спостерігається в моменти часу $\{t_0, t_1, \dots, t_q\}$, побудовано подвоєну від'ємну наближену логарифмічну функцію правдоподібності, яка використовується для оцінювання параметрів моделі.

На основі цієї функції виведено систему рівнянь для параметрів процесу:

$$\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{30}, \beta_{31}, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2.$$

Для чисельного розрахунку параметрів моделі в роботі запропоновано ітераційний алгоритм, який на кожному кроці оновлює значення параметрів і завершує розрахунок при досягненні умов збіжності. Здійснено аналіз збіжності ітераційного алгоритму при оцінці параметрів моделі.

Як результат, за допомогою представленого AMLE-підходу було проведено оцінювання різних наборів даних із пороговими значеннями зміни динаміки поведінки. Алгоритм правильно визначав пороги, що підтвердило його ефективність і точність для моделювання процесів типу Орнштейна-Уленбека.

В другому розділі було побудовано та проаналізовано двопорогову модель на основі рівнянь Іто-Скорохода. В рамках даної моделі в математичні розрахунки, а в подальшому і в сам алгоритм було додано стрибкову компоненту. Це дозволило проводити аналіз більш реалістичних процесів, які можуть містити різкі зміни поведінки.

Рівняння Іто–Скорохода має вигляд:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t + \int_U \gamma(X_t, t)\tilde{v}(dt, du), X_0 = 0.$$

Двopоговий трpежимний процес типу Леві описується таким чином:

$$\begin{aligned} X_t = & \{(\beta_{10} + \beta_{11}X_t)I(X_t \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21}X_t)I(r_1 < X_t \leq r_2) \\ & + (\beta_{30} + \beta_{31}X_t)I(X_t > r_2)\}dt \\ & + \{\sigma_1 I(X_t \leq r) + \sigma_2 I(r_1 < X_t \leq r_2) + \sigma_3 I(X_t > r_2)\}dW_t \\ & + \int_U \{\gamma_1 I(X_t \leq r) + \gamma_2 I(r_1 < X_t \leq r_2) + \gamma_3 I(X_t > r_2)\}\tilde{v}(dt, du). \end{aligned}$$

Для цієї моделі розроблено метод оцінювання параметрів на основі максимальної правдоподібності (AMLE):

$$\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{30}, \beta_{31}, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3,$$

на основі вибірки $X = \{X_0, X_1, \dots, X_q\}$, що спостерігається у моменти часу $\{t_0, t_1, \dots, t_q\}$.

Обґрунтовано коректність отриманих статистичних оцінок параметрів.

Запропоновано обчислювальний алгоритм для знаходження оцінок параметрів та проведено аналіз збіжності ітераційного процесу.

Тестування моделі на синтетично згенерованих даних підтвердило її ефективність. Алгоритм коректно визначав порогові значення r_1 і r_2 , а включення стрибкової компоненти значно підвищило реалістичність опису динаміки процесу. Отримані результати показали, що модель адекватно відтворює зміни поведінки системи, що робить її перспективною для подальшого практичного застосування.

У третьому розділі описано розробку та результати тестування програмного забезпечення для оцінювання процесів типу Орштейна-Уленбека та Леві із двома порогамі. Така система може застосовуватися у фінансовому аналізі для прогнозування змін ринку, в економічних моделях для виявлення режимів нестабільності, у технічних системах для контролю параметрів, що змінюються з різною інтенсивністю, а також у природничих процесах, де поведінка об'єкта залежить від критичних меж чи зовнішніх збурень.

Бекенд системи реалізовано мовою R, що забезпечує обчислення, статистичний аналіз та побудову графічних візуалізацій результатів. На етапі розробки використовувалося середовище RStudio, яке дало можливість не лише виконати обрахунки, а й представити результати роботи програмного коду у зручній візуальній формі.

В рамках даної роботи проведено тести, щодо оцінювання параметрів моделей на основі рівнянь Іто та Іто-Скорохода з використанням синтетично згенерованих даних. Набори даних представляли собою часові ряди. Результати показали, що алгоритм правильно оцінює порогові значення і може визначати зміну поведінки динаміки процесу. Подальший розвиток на матеріалах даного дослідження може включати доопрацювання клієнтської частини програмного забезпечення, оптимізацію ітераційного алгоритму та інше.

Останній розділ роботи це загальні висновки по проведеному дослідженню і отриманих результатах. Було проведено оцінку наукових та прикладних результатів після проведення тестування алгоритму на основі запропонованої математичної моделі.

Ключові слова: метод наближеної максимальної правдоподібності, двопороговий дифузійний процес, стохастичне диференціальне рівняння, математичне моделювання, комп'ютерне моделювання.

ABSTRACT

Nechyporuk S. A. Modelling and Analysis of Threshold Processes Using Itô and Itô–Skorokhod Stochastic Equations. - Qualifying scientific work submitted as a manuscript.

Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the field of knowledge 11 Mathematics and Statistics, speciality 113 Applied Mathematics. – The National University of Ostroh Academy – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2026.

The aim of this dissertation is to develop a mathematical and computational model for estimating two-threshold stochastic processes based on the Itô and Itô–Skorokhod equations.

The relevance of the research is determined by the growing need for the mathematical description and statistical analysis of stochastic processes exhibiting threshold behaviour, which are widely used for modelling real-world systems in various fields of science and engineering.

The theoretical and applied aspects of stochastic process research have been extensively studied in the works of renowned scholars, including Oleksandr H. Nakonechnyi, Yaroslav M. Chabaniuk, and Anatoliy V. Skorokhod, whose results have served as the theoretical foundation of this study.

This dissertation presents the development and analysis of a mathematical model of stochastic processes with two thresholds based on the Itô and Itô–Skorokhod equations. In addition, computational modelling was carried out to estimate the parameters of such processes with the aim of extending the current body of research in this area.

The proposed methodology for describing and estimating the parameters of two-threshold processes is based on the Approximate Maximum Likelihood Estimation (AMLE) approach, which enables the application of numerical methods for obtaining parameter estimates. This approach was selected because AMLE provides greater computational stability than other well-known approaches,

including Bayesian methods, the Expectation–Maximisation (EM) algorithm [51], and others. The principal advantage of AMLE over the aforementioned methods is that it does not require prior assumptions regarding parameter distributions, thereby considerably simplifying the computational procedure.

The methods proposed in this dissertation make it possible to analyse stochastic processes with two thresholds and to estimate their behaviour across three distinct regimes. The study presents a model based on the Itô and Itô–Skorokhod equations, in which a jump component is incorporated, allowing for a more realistic representation of real-world processes that may exhibit abrupt changes.

The scientific novelty of the dissertation lies in the development and investigation of a two-threshold stochastic process model with three dynamic regimes based on the Itô and Itô–Skorokhod equations. A parameter estimation method based on the Approximate Maximum Likelihood Estimation (AMLE) approach is proposed, together with its generalisation through the introduction of a jump component. The consistency and asymptotic normality of the resulting parameter estimates are established, and software for modelling and analysing such processes has been developed.

The results obtained in this study not only extend the existing body of scientific knowledge but also provide a foundation for future practical applications in financial, economic, and engineering systems, where threshold effects may arise and lead to different behavioural regimes.

The dissertation consists of a theoretical component, including the description of the mathematical model, the derivation of theoretical results ensuring the validity of parameter estimation, iterative parameter estimation procedures, and convergence analysis, together with a software module implemented in the R programming language. The software automates the computational procedures, visualises process dynamics, and presents parameter estimation results as graphical likelihood surfaces, thereby facilitating the interpretation of the obtained results.

The developed methodology makes it possible to analyse two-threshold processes, compute the estimated values of the drift, diffusion, jump component, and threshold parameters, as well as obtain a visual representation of the results. Such a solution may serve as the basis for developing a tool for assessing changes in the behaviour of stochastic processes that exhibit threshold values.

The dissertation consists of an introduction, three chapters presenting the author's research findings in a comprehensive manner, conclusions, and a list of references.

The introduction substantiates the relevance of the research problem, defines the object and subject of the study, its methodological foundations, aim, and objectives, highlights the scientific novelty and practical significance of the research, provides information on the validation of the obtained results, and describes the structure of the dissertation in accordance with the sequence of addressing the stated research objectives.

The first chapter addresses the problem of estimating the parameters of threshold stochastic processes based on the Itô equation. The analysis is based on the Ornstein–Uhlenbeck (OU) process, which is described by the following stochastic differential equation:

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t.$$

A three-regime, two-threshold OU-type diffusion process of the following form is investigated:

$$\begin{aligned} dX_t = & \{(\beta_{10} + \beta_{11}X_t)I(X_t \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21}X_t)I(r_2 > X_t \geq r_1) \\ & + (\beta_{30} + \beta_{31}X_t)I(X_t \geq r_2)\}dt \\ & + \{\sigma_1I(X_t \leq r_1) + \sigma_2I(r_2 > X_t \geq r_1) + \sigma_3I(X_t > r_2)\}dW_t. \end{aligned}$$

For the sample $X = \{X_0, X_1, \dots, X_q\}$, observed at the time points $\{t_0, t_1, \dots, t_q\}$ a negative twice (doubled) approximate log-likelihood function is constructed and used for estimating the model parameters.

Based on this function, a system of equations is derived for the process parameters:

$$\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{30}, \beta_{31}, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2.$$

For the numerical estimation of the model parameters, the dissertation proposes an iterative algorithm that updates the parameter values at each iteration and terminates once the convergence criteria have been satisfied. A convergence analysis of the iterative algorithm for parameter estimation is also carried out.

As a result, the proposed AMLE approach was applied to estimate the parameters of various datasets exhibiting threshold-induced changes in behavioural dynamics. The algorithm correctly identified the threshold values, thereby confirming its effectiveness and accuracy in modelling Ornstein–Uhlenbeck-type processes.

The second chapter presents the development and analysis of a two-threshold model based on the Itô–Skorokhod equations. Within this model, a jump component is incorporated into the mathematical formulation and subsequently into the estimation algorithm itself. This makes it possible to analyse more realistic processes that may exhibit abrupt changes in behaviour.

The Itô–Skorokhod equation is given by

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t + \int_U \gamma(X_t, t)\tilde{v}(dt, du), X_0 = 0.$$

A two-threshold, three-regime Lévy-type process is described as follows:

$$\begin{aligned} X_t = & \{(\beta_{10} + \beta_{11}X_t)I(X_t \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21}X_t)I(r_1 < X_t \leq r_2) \\ & + (\beta_{30} + \beta_{31}X_t)I(X_t > r_2)\}dt \\ & + \{\sigma_1 I(X_t \leq r) + \sigma_2 I(r_1 < X_t \leq r_2) + \sigma_3 I(X_t > r_2)\}dW_t \\ & + \int_U \{\gamma_1 I(X_t \leq r) + \gamma_2 I(r_1 < X_t \leq r_2) + \gamma_3 I(X_t > r_2)\} \tilde{v}(dt, du). \end{aligned}$$

For this model, a parameter estimation method based on the Approximate Maximum Likelihood Estimation (AMLE) approach was developed for estimating the parameters

$$\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{30}, \beta_{31}, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3,$$

based on the sample $X = \{X_0, X_1, \dots, X_q\}$, observed at the time points $\{t_0, t_1, \dots, t_q\}$

The validity of the obtained statistical parameter estimates is theoretically justified.

A computational algorithm for obtaining the parameter estimates is proposed, and the convergence of the iterative estimation procedure is analysed.

Testing the model on synthetically generated data confirmed its effectiveness. The algorithm correctly identified the threshold values r_1 and r_2 , while the inclusion of the jump component significantly enhanced the realism of the process dynamics. The obtained results demonstrated that the model adequately reproduces changes in the system's behaviour, making it a promising tool for further practical applications.

Chapter Three describes the development and testing results of the software designed for the estimation of Ornstein–Uhlenbeck and Lévy-type processes with two thresholds. Such a system can be applied in financial analysis to forecast market fluctuations, in economic models to detect regimes of instability, in engineering systems to monitor parameters changing at varying intensities, as well as in natural processes where the behaviour of an object depends on critical boundaries or external perturbations.

The backend of the system is implemented in the R programming language, which provides computations, statistical analysis, and the graphical visualisation of the results. During the development stage, the RStudio environment was utilised, enabling not only the execution of computations but also the presentation of the source code output in a convenient visual form.

As part of this work, tests were conducted to estimate model parameters based on Itô and Itô–Skorokhod equations using synthetically generated data. The datasets were structured as time series. The results demonstrated that the algorithm correctly estimates the threshold values and is capable of identifying changes in the behavioural dynamics of the process. Further developments based on the material of

this study may encompass the refinement of the software frontend, the optimisation of the iterative algorithm, and other enhancements.

The final chapter of the thesis presents the general conclusions regarding the conducted research and the obtained results. An evaluation of both scientific and applied outcomes was performed following the testing of the algorithm based on the proposed mathematical model.

Keywords: approximate maximum likelihood method, two-threshold diffusion process, stochastic differential equation, mathematical modelling, computer simulation.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових фахових виданнях:

1. Нечипорук С. А. Наближений метод максимальної вірогідності для оцінювання двопорогового процесу Орнштейна-Уленбека. *Науковий журнал Херсонського національного технічного університету. Прикладні питання математичного моделювання*. 2024. Том 7. №2. С. 117-124.
2. Нечипорук С. А. Approximate maximum likelihood estimation for a two-threshold Levy process: convergence assessment and data applications. *Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія математичне та комп'ютерне моделювання*. 2025. №27. С. 29-38.
3. Bekesiene S., Nikitin A., Nechyporuk S. *MDPI. Mathematics*. Modeling Dynamic Regime Shifts in Diffusion Processes: Approximate Maximum Likelihood Estimation for Two-Threshold Ornstein–Uhlenbeck Models. 2025. №13(21).
4. Нікітін А., Хімка У., Нечипорук С. *Кібернетика і системний аналіз*. Оцінка параметрів двопорогового процесу Леві за методом наближеної максимальної правдоподібності. 2026. №62(3). С.139-151.

Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

5. Нікітін А. В., Нечипорук С. А. Наближений метод максимальної вірогідності для оцінювання двопорогового процесу Орнштейна-Уленбека. *Тези доповідей всеукраїнської наукової конференції «Диференціальні рівняння і аналіз даних» Differential Equations and Data Analysis (DEDAL-2025)*. Lviv. 2025. С. 72.
6. Nikitin A.V., Nechyporuk S.A. Approximate maximum likelihood estimation to estimate the parameters of a two-regime threshold discrete Ornstein–Uhlenbeck process. *Abstracts XL International Conference Problems of decision making under uncertainties (PDMU- 2025)*. Bielsko-Biala, Poland. 2025. P. 96.

7. Зінько П. М., Нечипорук С. А. Програмна реалізація алгоритму оцінки параметрів двопорогової моделі на основі процесу Орнштейна-Уленбека. *Proceeding of XXII International Scientific-Practical Conference «Shevchenkivska Vesna – 2026»*. 2026.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ.....	17
ВСТУП.....	178
РОЗДІЛ 1. ПОРОГОВІ МОДЕЛІ НА БАЗІ РІВНЯННЯ ІТО.....	28
1.1. Постановка задачі	28
1.2. Рівняння Іто та процес типу Орнштейна-Уленбека	29
1.3. Двопороговий процес типу Орнштейна-Уленбека.....	32
1.4. Модель для оцінки параметрів двопорогового процесу типу Орнштейна-Уленбека	37
1.5. Квазіправдоподібне оцінювання параметрів у дифузійних процесах Іто	45
1.6. Обчислювальний алгоритм	53
1.7. Аналіз отриманих результатів для моделювання і оцінки параметрів процесів типу Орнштейна-Уленбека	56
РОЗДІЛ 2. ПОРОГОВІ МОДЕЛІ НА БАЗІ РІВНЯННЯ ІТО-СКОРОХОДА.....	65
2.1. Порогові моделі на базі рівняння Іто–Скорохода	65
2.2. Модель процесу, що розглядається у цій роботі	72
2.3. Двопороговий трирежимний процес типу Леві	76
2.4. Оцінювання параметрів дрейфу, дифузії та стрибків	85
2.5. Обчислювальний алгоритм	88
2.6. Числова збіжність ітераційного алгоритму.....	89
2.7. Оцінка результатів роботи алгоритму	92
РОЗДІЛ 3. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ.....	100
3.1. Технічний стек та реалізація.....	100
3.2. Структура програмної реалізації.....	102
3.3. Апробація моделі на реальних даних	107
ВИСНОВКИ	124
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	127
ДОДАТКИ.....	134

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

СДР - стохастичне диференціальне рівняння;

ОУ - Орнштейна-Уленбека;

W_t – процес Вінера;

β, μ – коефіцієнт дрейфу;

σ – коефіцієнт дифузії;

γ – стрибова компонента;

$\mathbf{E}$ – математичне сподівання;

$\mathbb{R}$ – множина всіх дійсних чисел;

$\mathbb{N}$ – множина всіх натуральних чисел;

$\hat{\theta}$ – оцінюваний вектор параметрів моделі;

$\{X_0, X_1, \dots, X_q\}$ – часовий ряд;

$\{t_0, t_1, \dots, t_q\}$ – моменти часу;

$\hat{r}_i$ – оцінюванні порогові значення;

$\hat{l}_X$ – наближена оцінка максимальної правдоподібності;

$\tilde{\nu}(dt, du)$ – компенсована міра Пуассона;

$\mathbf{Q}$ – генератор переходів між пороговими режимами D_k ;

$\mathbf{R}_0$ – потенціальний оператор для генератора $\mathbf{Q}$;

$N_j, \Delta p_n$ – кількість стрибків на інтервалі Δ_j ;

Δ_j – інтервал часу;

$I_i(t)$ – індикатори перебування процесу в i -му режимі, визначеному відомими порогоми;

Ω – ймовірнісний простір.

ВСТУП

Дисертація присвячена розробці та аналізу математичної та комп'ютерної моделі для оцінки двопорогових процесів за допомогою рівнянь Іто та Іто-Скорохода. За результатами моделювання встановлені математичні твердження та розроблено програмне забезпечення, яке дозволяє оцінювати параметри двопорогових процесів і розраховувати значення порогів за яких відбувається зміна динаміки процесів. У подальшому таке рішення може бути використане в системі підтримки прийняття рішень, наприклад, у сфері економіки та фінансів.

Актуальність теми.

Реальні процеси в більшості випадків є неоднорідними в часі, вони можуть містити як дрібний шум, так і різку зміну динаміки з певним пороговим значенням, яка може сформувати новий режим процесу. Тому використання у цьому дослідженні двопорогових стохастичних процесів, що базуються на рівняннях Іто та Іто-Скорохода є актуальним в контексті опису реальних процесів в сфері фінансів або економіки. Саме таку поведінку систем можна описати, використовуючи порогові моделі.

Процеси з пороговою поведінкою можуть траплятися у фінансових і економічних явищах, наприклад, під час аналізу ціни на певний актив упродовж визначеного часу. Також такі процеси можуть трапитися в технічній сфері, де порогові значення параметрів є індикатором гранично допустимого рівня роботи певної системи.

Окремо можна відзначити й порогові процеси із стрибковою компонентою, коли модель оцінки охоплює не тільки неперервну дифузійну складову, а й раптові зміни стану системи (шоки, аварійні події та інші фактори, які не можна описати лише з використанням неперервного шуму). Поєднання дифузійної та стрибкової компонент у межах порогових процесів робить модель значно ближчою до реальних спостережень.

Практична користь цього дослідження полягає в отриманні інструменту для оцінювання параметрів двопорогових процесів на основі рівнянь Іто та Іто-Скорохода. Насамперед це оцінювання порогів, дрейфу, дифузії та стрибкової компоненти в кожному із трьох режимів моделі. Правильний розрахунок дозволяє краще аналізувати модель, дає можливість знаходити порогові значення та прогнозувати поведінку процесу.

Використання у цьому дослідженні методів максимальної правдоподібності для обчислень складних моделей із трьома режимами на основі рівнянь Іто та Іто-Скорохода має і свою методологічну цінність, оскільки робить свій внесок у розвиток та побудову чисельних методів й алгоритмів оцінювання подібних процесів.

Отже, актуальність дослідження полягає як у можливостях практичного застосування запропонованих методів оцінювання і аналізу двопорогових стохастичних процесів із дифузійними та стрибковими компонентами, так і подальшого розвитку самих підходів для оцінювання таких моделей.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Основні дослідження за темою дисертації було виконано у рамках науково-дослідної роботи “Математичні методи, моделі та інформаційні технології в освіті, науці, бізнесі” (номер державної реєстрації: 0123U103522, термін виконання 09.2023 - 08.2028 рр.) на кафедрі економіко-математичного моделювання та інформаційних технологій Національного університету “Острозька академія”.

Мета та завдання дослідження.

Метою цієї дисертаційної роботи є побудова математичної та комп'ютерної моделі для оцінювання двопорогових процесів на базі рівнянь Іто та Іто-Скорохода. Побудова інструменту для оцінювання параметрів двопорогових процесів, що описуються рівняннями Іто та Іто-Скорохода.

У роботі зроблено акцент на моделюванні процесів із трьома режимами динаміки, розділеними порогами, та на розробці наближеного методу

оцінювання параметрів, який у подальшому можна було б використовувати для аналізу стохастичних процесів, які трапляються у прикладних задачах. У результаті моделювання передбачено побудову системи оцінки параметрів поведінки процесів із різною динамікою.

Для досягнення встановленої мети в роботі було передбачено розв'язання таких основних завдань:

1. Розробити математичну модель, щоб отримати наближений числовий розв'язок порогових значень моделей на базі рівнянь Іто та Іто-Скорохода з врахуванням можливої різної динаміки поведінки процесів і наявності, наприклад, стрибкової компоненти. Обґрунтувати вибір наближених підходів до проведення оцінки параметрів моделей.
2. Описати оцінки параметрів математично.
3. Провести аналіз і вибір програмного середовища та підходів до реалізації комп'ютерного моделювання оцінки параметрів побудованої моделі. У межах роботи обґрунтувати вибір мови R та середовища RStudio, як ефективного та поширеного інструменту для проведення чисельних розрахунків і візуалізації результатів.
4. Спроекувати структуру програми на основі розробленого алгоритму (згідно математичної моделі) із включенням модулів генерації даних, оцінювання параметрів, перевірки збіжності, графічного представлення та обробки помилок.
5. Провести чисельні випробування розробленої моделі на основі різних наборів даних, що описують різну динаміку стохастичних процесів (включаючи модель із стрибковими компонентами). Провести аналіз отриманих результатів, оцінити точність і стабільність розроблених методів із використанням числових характеристик та візуального аналізу.

Об'єктом дослідження.

Об'єктом дослідження у цій роботі є стохастичні процеси, що описуються рівняннями Іто та Іто-Скорохода з двопороговою структурою, динаміка яких

може змінюватись та охоплювати як неперервну дифузійну складову, так і стрибкову компоненти. Параметри таких процесів змінюються після досягнення певних порогових значень. Подібні процеси можуть трапитися в фінансовій, економічній та технічній сфері.

Предметом дослідження.

Предметом дослідження є математичні моделі стохастичних процесів, описуваних рівняннями Іто та Іто–Скорохода з двопороговою структурою, їх якісні характеристики та параметри, а також задачі їх ідентифікації та оцінювання. Особливу увагу приділено розробці наближеного методу максимальної правдоподібності для оцінювання параметрів таких процесів, зокрема значень порогів і характеристик дифузійної та стрибкової складових. Окремо розглянуто питання розробки чисельного алгоритму та аналізу збіжності ітераційного алгоритму.

Методи дослідження.

Основною вимогою для вирішення задачі дослідження було створення алгоритму на основі математичної моделі та програмного коду для моделювання та оцінки двопорогових процесів на основі рівнянь Іто та Іто–Скорохода.

Спочатку було проаналізовано вимоги до моделей та програмного коду та визначено набір необхідних параметрів, які будуть оцінюватись, спосіб їх оцінки, а також можливість розширення алгоритму під різні типи процесів. Під час розробки математичної і програмної моделі було враховано й обмеження, пов'язані із обчислювальною складністю поставленої задачі, оскільки двопорогові моделі з трьома режимами потребують великої кількості повторних чисельних обчислень.

Під час проведення наукового дослідження використовувались методи стохастичного аналізу та теорії випадкових процесів, зокрема процесів, що описуються рівняннями Іто та Іто–Скорохода, а також чисельні методи моделювання з використанням диференціальних рівнянь. Для оцінки

параметрів моделей використовувались наближені методи максимальної правдоподібності, які дають змогу отримувати результати оцінювання навіть за відсутності аналітичного вигляду функції правдоподібності.

Програмна частина дослідження розроблялась з використанням мови R та середовища для розробки RStudio, що дало змогу зручно об'єднати математичні обчислення, статистичний аналіз та графічну візуалізацію отриманих результатів. Вибір мови R базувався на наявності різних бібліотек, включаючи рішення для роботи із стохастичними моделями, наявності засобів для роботи з даними (включаючи перегляд отриманих результатів в інтерфейсі RStudio) та зручності швидкої перевірки розроблюваних чисельних експериментів.

Алгоритм, запропонований у роботі, базується на ітераційному підході, тому важливим було пропрацювати умови для зупинки прорахунку і зроблено це на основі збіжності. Для оптимізації роботи програмного коду в ньому було впроваджено систему перевірок, що контролюють коректність даних, що опрацьовуються. Окремо опрацьовувались помилки з відображенням їх вмісту в консоль RStudio.

У результаті дослідження було отримано функціональне програмне рішення, що дозволяє моделювати різні реалізації стохастичних процесів на основі рівнянь Іто та Іто-Скорохода з різною динамікою. Також оцінювати параметри для різних наборів даних, візуально аналізувати поведінку процесу в різних режимах та відображати на графіках знайдені точки переходу між режимами (порогові значення).

Як результат - у роботі вдалося об'єднати методи аналізу двопорогових процесів на основі рівнянь Іто та Іто-Скорохода, побудувати алгоритм і розробити програмний модуль для тестування запропонованої методики. Такий підхід дозволив оцінити запропоновану методику на реальних даних на основі часових рядів і показати її ефективність.

Наукова новизна отриманих результатів.

У дисертаційній роботі проаналізовано наявні методики моделювання та оцінювання параметрів стохастичних процесів і на цій основі розроблено математичну та комп'ютерну модель двопорогових процесів, що описуються за допомогою рівнянь Іто та Іто-Скорохода, з метою подальшого практичного використання.

Основні наукові результати, що додають новизни роботі, складаються з таких пунктів:

1. Уперше проаналізовано та змодельовано стохастичний процес, що можна описати рівняннями Іто та Іто-Скорохода з двома порогамі та трьома режимами динаміки. Параметри такої моделі змінюються в залежності від положення відносно порогових значень. Таке рішення дає можливість гнучко описувати динаміку процесів із кількома стабільними та перехідними режимами.

2. Уперше розроблено алгоритм оцінювання параметрів двопорогових стохастичних процесів, що можна описати рівняннями Іто та Іто-Скорохода, на основі наближеного методу максимальної правдоподібності. Ця методика дає можливість оцінювати параметри динаміки процесу у кожному режимі та визначати значення порогів. Особливу увагу приділено аналізу збіжності запропонованого ітераційного алгоритму з використанням чисельних методів, зокрема перевірка збіжності за спектральним радіусом матриці Якобі.

3. У модель двопорогового процесу було додано стрибкову компоненту. Це дозволило наблизити опис моделі до реальних процесів, шляхом врахування раптових змін стану системи.

4. Обґрунтовано коректність отриманих оцінок параметрів досліджуваних процесів.

5. Уперше розроблено програмне забезпечення для аналізу двопорогових стохастичних процесів на основі рівнянь Іто та Іто-

Скорохода. Програмне рішення дозволяє моделювати динаміку процесу, оцінювати параметри моделі у різних режимах, знаходити наближені значення порогів та візуально представляти отримані результати у вигляді графіків.

6. Проведено оцінювання невідомих параметрів дрейфу та дифузії при фіксованих порогах. Доведено консистентність та асимптотичну нормальність отриманих оцінок.

Отже, наукова новизна полягає у комплексному поєднанні математичного моделювання, чисельних методів оцінювання та програмного забезпечення, що дозволяє оцінювати двопорогові стохастичні процеси, що описуються рівняннями Іто та Іто-Скорохода з різною структурою динаміки їх поведінки.

Практичне значення одержаних результатів.

Практичне значення отриманих результатів дослідження - це розробка алгоритму та програмного забезпечення для оцінювання параметрів стохастичних процесів на базі рівнянь Іто та Іто-Скорохода, які містять як дифузійну, так і стрибкову компоненту та характеризуються наявністю порогових значень, на основі яких визначається зміна режиму динаміки.

Розроблене програмне рішення з функціоналом оцінювання параметрів процесу та пошуком порогових значень може бути застосоване в різних прикладних задачах.

Першою прикладною областю, де може бути використано запропоновану методику – це фінансова сфера, насамперед для аналізу цін різних активів упродовж різних проміжків часу. Процеси формування цін на активи можуть містити порогові значення і формувати три режими поведінки. Запропонована методика дає можливість визначити перехідні значення, біля яких відбувається зміна динаміки процесу, що в подальшому може бути використаним, наприклад, у сфері інвестицій.

Друга прикладна область – це технічна сфера. Як об'єкт досліджень тут можуть використовуватись набори даних, які містять граничні значення,

наприклад, під час переходу системи у аварійний режим. У таких процесах можуть бути і стрибкові компоненти, що описують функціональні порушення або раптові навантаження. Запропонований алгоритм може бути використаний для виявлення зміни динаміки процесу та для подання сигналу про його наближення до критичного рівня.

Запропонована методика може бути використана в економічній та соціальній сфері, для аналізу часових рядів процесів в період кризових явищ, різкої зміни попиту та інших факторів.

Із практичної сторони розроблене програмне забезпечення дає можливість таким діям: проводити оцінювання динаміки процесу на основі реальних або синтетичних даних; виконувати прогнозування подальшої поведінки системи з урахуванням змін режимів; вираховувати порогові точки переходів між режимами; візуально відображати отримані результати.

Результати цього дослідження можуть бути використаними в якості інструменту для аналізу та прогнозування поведінки двопорогових стохастичних процесів на основі рівнянь Іто та Іто-Скорохода.

Особистий внесок здобувача.

Визначення напрямку досліджень та постановка задачі належить доктору фіз.-мат. наук, професору А. В. Нікітіну. Із результатів, надрукованих у сумісних статтях, в основну частину дисертації увійшли лише такі, які отримані здобувачем особисто. В англомовних та україномовних статтях, тезах конференцій з А. В. Нікітіним, П. М. Зінько, Bekesiene S., Хімкою У. Т. постановка задач належить А. В. Нікітіну здобувачем отримано частину результатів та проведено комп'ютерне моделювання та інтерпретація результатів.

Апробація матеріалів дисертації.

Основні задачі та отримані результати дисертаційного дослідження обговорювались на наукових семінарах кафедри економіко-математичного моделювання та інформаційних технологій економічного факультету

Національного університету “Острозька академія” та кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка і отримали схвальні висновки.

Результати дисертаційного дослідження пройшли арпобацію, їх було опубліковано у доповідях міжнародних і всеукраїнських конференцій:

- А. В. Нікітін, С. А. Нечипорук Наближений метод максимальної вірогідності для оцінювання двопорогового процесу Орнштейна-Уленбека. Всеукраїнська наукова конференція Диференціальні рівняння і аналіз даних (DEDAL-2025). 8 – 9 травня. 2025. Львів, Україна.
- A.V. Nikitin, S.A. Nechiporuk Approximate maximum likelihood estimation to estimate the parameters of a two-regime threshold discrete Ornstein–Uhlenbeck process. Abstracts XL International Conference Problems of decision making under uncertainties (PDMU- 2025). Bielsko-Biala, Poland. 2025. P. 96.
- П. М. Зінько, С. А. Нечипорук Програмна реалізація алгоритму оцінки параметрів двопорогової моделі на основі процесу Орнштейна-Уленбека. Proceeding of XXII International Scientific-Practical Conference «Shevchenkivska Vesna – 2026». 2026.

Публікації. Результати та висновки наукових досліджень оприлюднено у 7 наукових працях, зокрема в 1 статті, опублікованій у міжнародному журналі, що належить до квартиля Q1, 3 статтях у фахових виданнях України (одна з яких опублікована у виданні квартиля Q3), а також у 3 тезах доповідей на українських та міжнародних наукових конференціях.

Структура та обсяг дисертаційної роботи. Робота складається зі змісту, вступу, трьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел.

Обсяг роботи: 110 сторінок основного тексту, 21 рисуноків та 6 таблиць; список використаних джерел зі 71 найменування на 7 сторінках. Загальний обсяг роботи складає 147 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ПОРОГОВІ МОДЕЛІ НА БАЗІ РІВНЯННЯ ІТО

1.1. Постановка задачі

Стохастичні дифузійні моделі, які базуються на рівняннях Іто, використовують у математичній статистиці, фінансовій математиці та прикладних дослідженнях. У цій роботі за основу було взято процес Орнштейна-Уленбека (ОУ), який є корисною моделлю для опису явищ, що схильні до коливань навколо деякого рівноважного стану з наявністю випадкових шумів [1]. Процес має низку корисних властивостей (стаціонарність, гауссовість [58], марковська властивість) [2].

Аналітично такий процес дає можливість визначити точні перехідні розподіли, здатності процесу відтворювати свої статистичні характеристики через довготривале спостереження, цей процес можна використати, наприклад, для моделювання динаміки відсоткових ставок, спредів фінансових активів, результатів роботи технічних, фізичних чи біологічних систем.

На практиці поведінка такого процесу не є однорідною по всьому діапазону значень, наприклад, зміна курсу Рис. 1.1.



Рис. 1.1 Процес зміни курсу долара до гривні (НБУ) за 2024 – 2026 роки

Для проведення аналізу реальних процесів, у тій же фінансовій сфері, можна використовувати часові ряди [52], що містять порогові значення і формують різну поведінку у трьох режимах динаміки процесів. Одним із рішень для цього підходу є використання варіацій класичного процесу ОУ. У таких процесах параметри дрейфу та дифузії можуть змінювати свої значення в залежності від того в якому режимі вони знаходяться.

У цій роботі за основу взято двопороговий процес типу Орнштейна-Уленбека. Динаміка такого процесу поділяється на три режими, кожний з яких має власні параметри дрейфу та дисперсії. Такий підхід забезпечує можливість цієї моделі враховувати більш складні закономірності часових рядів (даних на основі спостережень). У той же час відсутність аналітичного виразу для перехідної функції розподілу ускладнює статистичне оцінювання параметрів.

У зв'язку з цим для можливості побудови функцій для ефективної оцінки параметрів дискретних спостережень у цій роботі використовується наближений метод максимальної правдоподібності. У роботах [3], [4], [5] розглянуто декілька підходів, до оцінки параметрів таких моделей.

1.2. Рівняння Іто та процес типу Орнштейна-Уленбека

1.2.1. Стохастичні дифузійні рівняння Іто. Основним інструментом для моделювання неперервних у часі випадкових процесів є стохастичні диференціальні рівняння (СДР) у формі Іто (1.1) [7]:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, X_0 = x_0, \quad (1.1)$$

де b – функція дрейфу, σ – коефіцієнт дифузії, а W_t - стандартний вінерівський процес.

За умови, що b, σ задовольняють умови локальної ліпшицевості та лінійного зростання, гарантується існування єдиного розв'язку цього рівняння [6]. Даний результат є основою для створення широкого набору стохастичних моделей.

1.2.2. Класичний процес Орнштейна-Уленбека. Процес ОУ [57] є розв'язком лінійного СДР (1.2) та має низку важливих властивостей:

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t, \quad (1.2)$$

де X_t — значення процесу в момент часу t ; θ — швидкість повернення до середнього значення μ ; σ — стандартне відхилення (визначає інтенсивність шуму); W_t — броунівський процес (він же процес Вінера), який моделює випадкові зміни.

Рівняння включає лінійний дрейф, величина якого прямує до певного рівноважного значення, а дифузія моделюється гаусівським шумом.

Основні характеристики процесу Орнштейна-Уленбека. Траєкторія процесу Орнштейна-Уленбека має гладку динаміку, без різких стрибкових значень, а його траєкторії є неперервними. Значення цього процесу в кожен момент часу мають нормальний (гаусівський) розподіл. Це спрощує статистичний аналіз, оскільки нормальний розподіл добре вивчений і дозволяє застосовувати стандартні статистичні методи для оцінювання параметрів [7].

Перехідна динаміка. Розподіл ймовірностей майбутніх значень процесу визначається його поточним станом. Із часом цей вплив згасає експоненційно, чим довший часовий інтервал, тим ближче процес наближається до свого стаціонарного рівня [8].

Стаціонарність та ергодичність. За умови додатної швидкості повернення до середнього процес має сталий нормальний розподіл, який не змінюється в часі. Окрім того, процес є ергодичним, тобто середні значення за довгими траєкторіями збігаються до математичного сподівання цього стаціонарного розподілу [9].

Дискретні спостереження. У реальних задачах спостереження фіксуються через певні інтервали часу. Якщо розглядати процес у дискретні моменти часу з рівними інтервалами, він поводить себе аналогічно авторегресійному процесу першого порядку. Це створює прямий зв'язок між теорією дифузій та класичними інструментами часових рядів [10].

З огляду на властивості процесу Орнштейна-Уленбека, його широко застосовують для моделювання стохастичних процесів у фінансовій та

економічній сферах. Цей процес універсальний і має простий аналітичний вигляд, що робить його хорошою основою для побудови більш складних процесів, у тому числі і двопорогових.

Існування та єдиності розв'язку рівняння з процесом ОУ. ОУ процес визначається стохастичним диференціальним рівнянням:

$$dX_t = (\beta_0 + \beta_1 X_t)dt + \sigma dW_t. \quad (1.3)$$

Розв'язок рівняння (1.3) може бути записаний як:

$$X_t = e^{\beta_1 t} X_0 + \beta_0 \int_0^t e^{\beta_1(t-u)} du + \sigma \int_0^t e^{\beta_1(t-u)} dW_u. \quad (1.4)$$

Доведення за схемою [7, р. 110].

Достатньо показати, що X_t , визначений правою частиною рівняння (1.4), відповідає інтегральному рівнянню визначеному в (1.3), що надалі буде перевірено.

$$\int_0^t (\beta_0 + \beta_1 X_s) ds + \int_0^t \sigma dW_s = I + II, \quad (1.5)$$

де

$$\begin{aligned} I &= \beta_0 t + \int_0^t \beta_1 \left\{ e^{\beta_1 s} X_0 + \beta_0 \int_0^s e^{\beta_1(s-u)} du + \sigma \int_0^s e^{\beta_1(s-u)} dW_u \right\} ds \\ &= (e^{\beta_1 t} - 1) X_0 + \frac{\beta_0}{\beta_1} (e^{\beta_1 t} - 1) \\ &\quad + \left\{ \sigma \int_0^t e^{\beta_1(t-u)} dW_t - \sigma W_t \right\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Останній вираз, взятий у фігурні дужки, впливає з рівності, що

$$\begin{aligned} &\int_0^t \beta_1 \sigma \int_0^s e^{\beta_1(s-u)} dW_u ds \\ &= \sigma \beta_1 \int_0^t \int_u^t e^{\beta_1(s-u)} ds dW_u = \sigma \int_0^t \{e^{\beta_1(t-u)} - 1\} dW_u, \end{aligned} \quad (1.7)$$

заміна порядку інтегрування обґрунтована рівнянням (2.2) у Norros [46].

Разом

$$I + II = (e^{\beta_1 t} - 1)X_0 + \frac{\beta_0}{\beta_1}(e^{\beta_1 t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\beta_1(t-u)} dW_u. \quad (1.8)$$

З іншого боку, якщо X_t визначено правою частиною (1.4), то

$$\begin{aligned} X_t - X_0 &= (e^{\beta_1 t} - 1)X_0 + \beta_0 \int_0^t e^{\beta_1(t-u)} du + \sigma \int_0^t e^{\beta_1(t-u)} dW_u \\ &= (e^{\beta_1 t} - 1)X_0 + \frac{\beta_0}{\beta_1}(e^{\beta_1 t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\beta_1(t-u)} dW_u, \end{aligned} \quad (1.9)$$

показуючи, що $\{X_t\}$, визначений у (1.4), є розв'язком рівняння (1.3).

1.3. Двопороговий процес типу Орнштейна-Уленбека

1.3.1. Поняття порогових дифузій

Порогові дифузійні процеси є варіацією класичних моделей Іто, у яких параметри динаміки змінюються при досягненні випадковим процесом певних порогових рівнів [39]. У таких типах моделей параметри дрейфу і дифузії розраховуються окремо на кожному режимі, що формується порогами. Це дозволяє описувати різні режими поведінки процесу залежно від поточного стану. Такі моделі досліджуються у фінансовій сфері [28] та прикладних статистичних задачах [3], [4].

Задачі з одним порогом розглядались у працях [11], [12], [31].

1.3.2. Двопороговий процес типу Орнштейна-Уленбека

Він заснований на класичному процесі Орнштейна-Уленбека, але містить поділ стану процесу на три режими Рис 1.2.

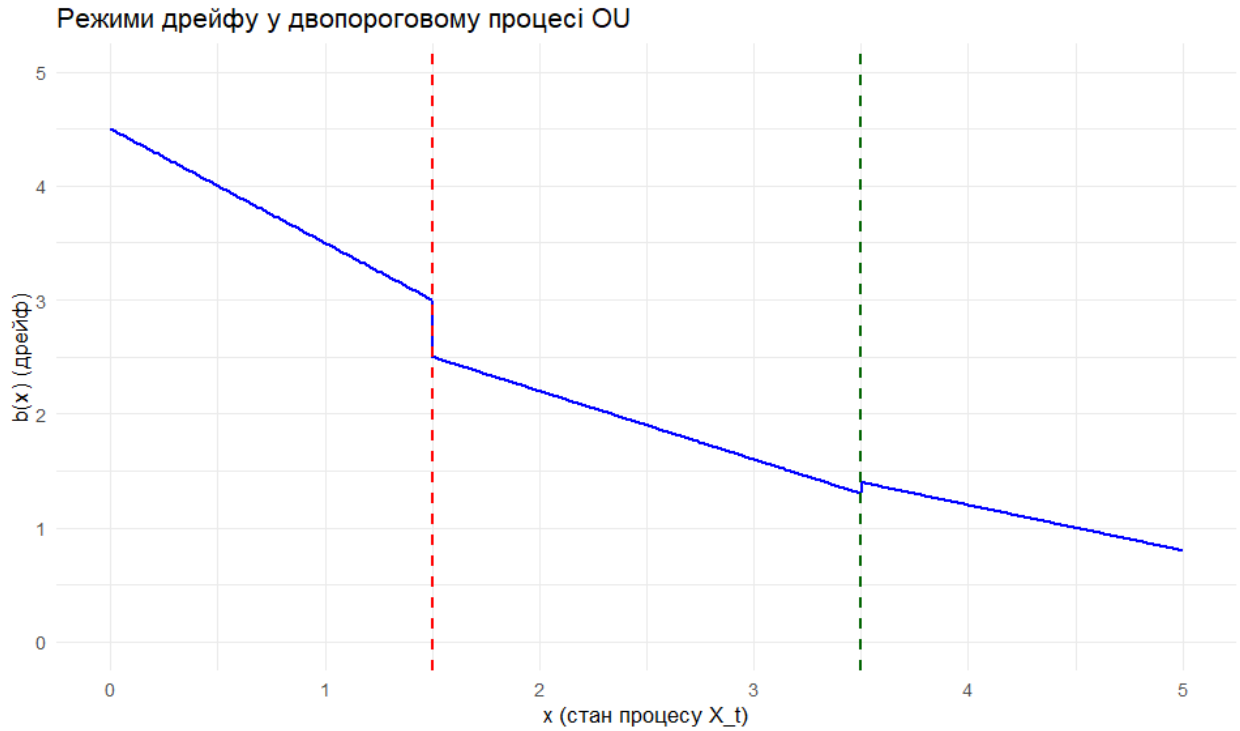


Рис. 1.2 Приклад режимів у допороговому процесі типу Орнштейна-Уленбека

Тут при $X < r_1$, перший режим; при $r_1 \leq X < r_2$, другий режим; при $X \geq r_2$, третій режим.

Виходячи з цього, коли процес знаходиться в межах двох порогових значень, то його поведінку можна описати стандартним процесом ОУ. Якщо ж випадкова величина виходить за межі діапазону, то поведінка процесу змінюється, а швидкість відновлення до рівноважного стану може змінюватись. Це дозволяє описувати асиметрії у поведінці процесу та враховувати статистичні закономірності, які не можуть бути змодельовані лінійним процесом.

Двопороговий процес типу Орнштейна-Уленбека описується набором параметрів, які визначають динаміку в кожному з режимів [20]. Для трьох режимів, які утворюються порогами задаються власні швидкості повернення до середнього θ_i , значення дрейфу β та спільний коефіцієнт дифузії σ . Вектор параметрів такого процесу можна представити як:

$$\{\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{30}, \beta_{31}, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, r_1, r_2\}.$$

Для моделювання прикладних задач така структура дає змогу описувати асиметричну динаміку та відмінності між нормальним й екстремальними станами системи. У той же час зростання кількості параметрів ускладнює статистичне оцінювання таких систем та потребує перевірки того, чи можна на основі наявних даних однозначно визначити значення кожного параметра моделі [32].

На практиці існують певні обмеження щодо можливості однозначного визначення параметрів моделі.

Різниця між режимами. Щоб модель працювала коректно і змогла визначити відповідні порогові значення потрібно, щоб параметри в режимах реально відрізнялися. Якщо, наприклад, $\beta_1 = \beta_2$, то нижній поріг стає статистично непомітним і модель перетворюється на простішу - з одним порогом або ж взагалі без порогів.

Перебування процесу у кожному режимі (тривалість). Щоб оцінити параметри моделі потрібно, щоб процес хоча б іноді потрапляв у всі три режими. Якщо у певний інтервал він майже не потрапляє, то даних для оцінювання параметрів цього режиму буде просто недостатньо. У результаті оцінка таких параметрів буде не точною або ж оцінити їх взагалі не вдасться. Цей факт було в подальшому враховано під час розробки програмного коду, в якому виконується перевірка вхідних часових даних на належність до різних режимів, із виводом попереджувального тексту, що провести оцінку параметрів неможливо, у випадку недостатності спостережуваних даних у якомусь із режимів.

Дискретність спостережень. У прикладних задачах ми не спостерігаємо процес неперервно, а заміряємо його значення через визначені інтервали часу. Якщо ці інтервали досить значні, то момент перетину порогового значення може бути не зафіксованим на рівні спостереження. Тобто процес уже перейшов в інший режим, але на рівні даних це не було зафіксовано.

Через такі особливості двопорогової моделі на основі процесу типу ОУ стає досить складно точно визначити положення порогів і параметри у кожному режимі. У таких випадках доводиться використовувати наближені методи оцінювання, наприклад, Approximate Maximum Likelihood Estimation (AMLE) [55].

Двопороговий процес типу Орнштейна-Уленбека має низку корисних властивостей, але його аналіз на практиці не такий простий і має низку складнощів.

Неможливість отримати аналітичний вираз для **перехідної функції** зумовлена тим, що упродовж одного кроку дискретного спостереження процес може змінювати режим, що ускладнює опис точних розподілів.

Складність оцінювання параметрів. Традиційний метод максимальної правдоподібності не може бути застосований безпосередньо, а тому необхідно використовувати наближені методи.

Ідентифікація порогів. Порогові значення часто невідомі наперед і повинні оцінюватися разом із параметрами процесу, що створює додаткове навантаження на статистичні процедури.

Ці проблеми обґрунтовують необхідність застосування наближеного методу максимальної правдоподібності.

У випадку класичного процесу Орнштейна-Уленбека параметри підлягають оцінюванню за допомогою стандартного методу максимальної правдоподібності, оскільки ймовірнісна функція переходу є нормальною та має відомий аналітичний вираз. У порогових моделях, зокрема в двопороговому процесі типу Орнштейна-Уленбека [49], аналітичної форми ймовірнісної функції переходу не існує, тому пряме застосування класичних методів оцінювання виявляється неможливим.

Це призводить до потреби у спеціальних методах, які дозволяють замінити недоступну точну функцію правдоподібності її апроксимацією. Одним із найбільш поширених підходів у цьому напрямку є **Approximate**

Maximum Likelihood Estimation (AMLE) – наближений метод максимальної вірогідності [4], [35].

Метод AMLE ґрунтується на використанні наближеної функції переходу для кожної пари сусідніх спостережень $(X_t, X_{t+\Delta})$, яка відображає локальні характеристики процесу. Побудова такої апроксимації може здійснюватися різними методами: через локальне спрощення дрейфового компоненту з подальшим наближенням нормальним розподілом, через розклади щільності у степеневі ряди [13], через симуляційні або числові методи, що наближують ймовірність перетину порогів.

Функція правдоподібності набуває вигляду:

$$L(\vartheta) = \prod_{n=0}^{N-1} \tilde{p}_{\Delta}(X_{t_{n+1}} | X_{t_n}; \vartheta), \quad (1.10)$$

де $\tilde{p}_{\Delta}$ - наближення функції переходу, а ϑ - вектор параметрів моделі.

Максимізація цієї функції дозволяє отримати оцінки параметрів, які за певних умов є узгодженими та асимптотично нормальними.

У контексті двопорогового процесу типу Орнштейна-Уленбека метод AMLE має низку особливостей. **Обчислення порогових значень.** Порогові значення r_1 та r_2 часто оцінюють окремо, використовуючи покрокові процедури або методи правдоподібності. **Багаторежимність задачі оптимізації.** Функція наближеної правдоподібності може мати кілька локальних максимумів, тому рекомендується поєднувати числову оптимізацію з попереднім грубим пошуком значень. **Обчислювальне навантаження.** Якість апроксимації залежить від складності використовуваного методу. На практиці чим точніше вибудовувати підхід для оцінювання параметрів [30], щоб отримати кращі статистичні властивості оцінок, треба розраховувати на те, що такий алгоритм буде вимагати значно більших обчислювальних ресурсів.

У роботі [61] пороговий процес типу Орнштейна-Уленбека задається у вигляді:

$$dX_t = \sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i X_t) I(\theta_{i-1} < X_t \leq \theta_i) dt + \sigma dW_t.$$

У цій же роботі показано, що стаціонарний розподіл процесу існує тоді й тільки тоді, коли виконуються умови

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\alpha_1 x^2 + 2\beta_1 x) < 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (-\alpha_m x^2 + 2\beta_m x) < 0.$$

Для двопорогового трирежимного випадку це означає, що на крайніх режимах процес не повинен віддалятися до нескінченності, а має повертатися до центральної області. У цій роботі дрейф у кожному режимі записується у вигляді $\beta_{0i} + \beta_{1i}X_t$. Порівнюючи цей запис із формою, наведеною в [61], отримуємо відповідність $\beta_{0i} = \beta_i, \beta_{1i} = -\alpha_i$. Отже, умова $\alpha_i > 0$, яка використовується в [61], у наших позначеннях є еквівалентною умові $\beta_{1i} < 0$. Отже, для двопорогового трирежимного процесу типу Орнштейна-Уленбека доцільно вважати, що мають виконуватися умови $\beta_{11} < 0, \beta_{21} < 0, \beta_{31} < 0$. Це означає, що в кожному режимі процес має властивість повернення до свого локального середнього, тобто при відхиленні від цього рівня дрейф спрямовує процес назад, а не відштовхує його далі. Інакше кажучи, від'ємний коефіцієнт при X_t забезпечує спадання дрейфової складової зі зростанням X_t , що і створює механізм повернення процесу до середнього рівня.

1.4. Модель для оцінки параметрів двопорогового процесу типу Орнштейна-Уленбека

Нехай $X = \{X_0, X_1, \dots, X_q\}$ - це дані, що спостерігаються в моменти часу $\{t_0, t_1, \dots, t_q\}$.

Двопороговий процес типу Орнштейна-Уленбека характеризується набором параметрів, які визначають динаміку в кожному з режимів, у цьому випадку це $\beta = (\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{20}, \beta_{21})$, $\sigma^2 = (\sigma_1^2, \sigma_2^2)$, і $\theta = (\beta, \sigma^2)$.

У практичних застосуваннях подібна гнучка побудова дозволяє враховувати асиметрію в динаміці та розрізняти звичайні й екстремальні режими функціонування системи.

Наша мета полягає в оцінюванні невідомого параметра $\eta = (r_1, r_2, \theta)$. Далі ми розглянемо простий випадок дифузійного процесу з двома режимами і двома порогами.

$$\begin{aligned} dX_t = & \{(\beta_{10} + \beta_{11}X_t)I(X_t \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21}X_t)I(r_1 < X_t \leq r_2) \\ & + (\beta_{30} + \beta_{31}X_t)I(X_t > r_2)\}dt \\ & + \{\sigma_1I(X_t \leq r_1) + \sigma_2I(r_1 < X_t \leq r_2) + \sigma_3I(X_t > r_2)\}dW_t. \end{aligned} \quad (1.11)$$

У цій роботі пропонується апроксимувати стохастичне диференціальне рівняння [59] різницеvim рівнянням, використовуючи метод Ейлера [37]. Це дає зручну, але наближену функцію правдоподібності, з якої можна обчислити наближену оцінку максимальної правдоподібності (AMLE). Метод Ейлера є однією із найуживаніших схем наближення, що використовується для побудови розв'язків детермінованих диференціальних рівнянь [9]. Ідею цього методу можна представити таким способом. Нехай задано процес Іто $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$, який є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad (1.12)$$

з початковим детермінованим значенням $X_{t_0} = X_0$ і розбиттям $\Pi_N = \Pi_N([0, T])$ інтервалу $[0, T]$, де

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T.$$

Апроксимацією Ейлера процесу X є неперервний стохастичний процес Y , який задовольняє ітераційну схему

$$Y_{i+1} = Y_i + b(t_i, Y_i)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(t_i, Y_i)(W_{i+1} - W_i), \quad (1.13)$$

для $i = 0, 1, \dots, N - 1$, причому $Y_0 = X_0$. Позначення у формулі вище спрощено, поклавши,

$$Y(t_i) = Y_i, W(t_i) = W_i.$$

Зазвичай часовий крок

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i,$$

вважається сталим (тобто $\Delta t = 1/N$). Між будь-якими двома моментами часу t_i та t_{i+1} процес можна визначити по-різному. Одним із підходів полягає в тому, щоб розглядати лінійну інтерполяцію, так, що $Y(t)$ визначається як

$$Y(t) = Y_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} (Y_{i+1} - Y_i) \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \quad (1.14)$$

Із формули (1.13) видно, що для моделювання процесу Y достатньо лише змодельовати приріст вінерівського процесу.

Схема Ейлера має порядок сильної збіжності $\gamma = \frac{1}{2}$.

У цій роботі також розглядається процес, що є розв'язком загального стохастичного диференціального рівняння

$$dX_t = b(X_t, \theta)dt + \sigma(X_t, \theta)dW_t. \quad (1.15)$$

Якщо коефіцієнти, наведеного вище стохастичного диференціального рівняння, є сталими на малих інтервалах $[t, t + \Delta t]$, то схема Ейлера дає дискретизацію

$$X_{t+\Delta t} - X_t = b(X_t, \theta)\Delta t + \sigma(X_t, \theta)(W_{t+\Delta t} - W_t), \quad (1.16)$$

а прирости $X_{t+\Delta t} - X_t$ тоді є незалежними гаусівськими випадковими величинами з математичним сподіванням $b(X_t, \theta)\Delta t$ і дисперсією $\sigma^2(X_t, \theta)\Delta t$.

Тому перехідну щільність процесу можна записати у такому вигляді:

$$p_\theta(t, y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t \sigma^2(x, \theta)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(y - x - b(x, \theta)t)^2}{t \sigma^2(x, \theta)} \right\}. \quad (1.17)$$

Це наближення є добрим, якщо Δt дуже мале, інакше виникає певне зміщення. Стохастичне диференціальне рівняння (1.11) можна апроксимувати різницеvim рівнянням, використовуючи узагальнений метод Ейлера:

$$\begin{aligned} X_j - X_{j-1} = & \Delta_j \{ (\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})I(X_{j-1} \leq r_1) \\ & + (\beta_{20} + \beta_{21}X_{j-1})I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) \\ & + (\beta_{30} + \beta_{31}X_{j-1})I(X_{j-1} > r_2) \} \\ & + \{ \sigma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) \\ & + \sigma_3 I(X_{j-1} > r_2) \} (W_j - W_{j-1}), \end{aligned} \quad (1.18)$$

де $W_j - W_{j-1} \sim N(0, \Delta_j)$ і $\Delta_j = t_j - t_{j-1}$.

Функція правдоподібності.

$$\begin{aligned}
 & f(X_0, X_1, \dots, X_q | \theta) \\
 &= \prod_{j=1}^q f(X_j | X_{j-1}) \\
 &= C \\
 & \cdot \prod_{j=1}^q \frac{1}{\sqrt{2\pi\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} \Delta_j}} \\
 & \times \exp \left[- \sum_{j=1}^q \frac{\left\{ X_j - X_{j-1} - \Delta_j \left[\frac{(\beta_{10} + \beta_{11} X_{j-1}) I(X_{j-1} \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21} X_{j-1}) I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\beta_{30} + \beta_{31} X_{j-1}) I(X_{j-1} > r_2)}{2\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\}} \right]^2 \right\}}{2\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} \Delta_j} \right]. \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

За умови, що X_0 і r_1, r_2 відомі, рівняння (1.19) може бути використане для отримання $-2l_x(\theta)$, що є подвоєною від'ємною наближеною логарифмічною функцією правдоподібності для X .

$$\begin{aligned}
 -2l_x(\theta) &= C + \sum_{j=1}^q \log \left\{ \frac{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)}{\Delta_j} \right\} + \\
 &+ \sum_{j=1}^q \frac{\left[X_j - X_{j-1} - \Delta_j \left\{ \frac{(\beta_{10} + \beta_{11} X_{j-1}) I(X_{j-1} \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21} X_{j-1}) I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\beta_{30} + \beta_{31} X_{j-1}) I(X_{j-1} > r_2)}{2\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\}} \right\} \right]^2}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} \Delta_j}, \quad (1.20)
 \end{aligned}$$

для деякої постійної C , яка не залежить від θ .

Диференціювання рівняння (1.20) за параметрами $\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{30}, \beta_{31}, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$.

Диференціювання за β_{10}, β_{11} для випадків, коли $X_{j-1} \leq r_1$:

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{10}} \\
& = -2 \sum_{j=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})) I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\} \Delta_j}, \\
& -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{11}} \\
& = -2 \sum_{j=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})) X_{j-1} I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\} \Delta_j}. \tag{1.21}
\end{aligned}$$

Диференціювання за β_{20}, β_{21} для випадків, коли $r_2 > X_{j-1} \geq r_1$:

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{20}} = -2 \sum_{j=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{20} + \beta_{21}X_{j-1})) I(r_2 > X_{j-1} \geq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\} \Delta_j}, \\
& -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{21}} = -2 \sum_{j=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{20} + \beta_{21}X_{j-1})) X_{j-1} I(r_2 > X_{j-1} \geq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\} \Delta_j}. \tag{1.22}
\end{aligned}$$

Диференціювання за β_{30}, β_{31} для випадків, коли $X_{j-1} > r_2$:

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{30}} \\
& = -2 \sum_{j=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{30} + \beta_{31}X_{j-1})) I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\} \Delta_j}, \\
& -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{31}} \\
& = -2 \sum_{j=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{30} + \beta_{31}X_{j-1})) X_{j-1} I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\} \Delta_j}. \tag{1.23}
\end{aligned}$$

Диференціювання за $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$:

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \sigma_1^2} \\
& = \sum_{j=1}^q \frac{I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\}} \\
& \quad - \frac{\left(X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})\right)^2 I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^4 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^4 I(X_{j-1} > r_2))\Delta_j}, \\
& -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \sigma_2^2} \\
& = \sum_{j=1}^q \frac{I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\}} \\
& \quad - \frac{\left(X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{20} + \beta_{21}X_{j-1})\right)^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^4 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^4 I(X_{j-1} > r_2))\Delta_j}, \\
& -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \sigma_3^2} \\
& = \sum_{j=1}^q \frac{I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\}} \\
& \quad - \frac{\left(X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{30} + \beta_{31}X_{j-1})\right)^2 I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^4 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^4 I(X_{j-1} > r_2))\Delta_j}.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Під час прирівнювання результатів диференціювання до нуля отримаємо матричну форму системи рівнянь для основних параметрів:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{11} \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(X_{j-1} \leq r_1)}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{array} \right\}} & \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(X_{j-1} \leq r_1)}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{array} \right\}} X_{j-1}^{-1} \\ \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(X_{j-1} \leq r_1)}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{array} \right\}} X_{j-1}^{-1} & \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(X_{j-1} \leq r_1)}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{array} \right\}} X_{j-1}^{-2} \end{bmatrix}^{-1} \\
& * \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1}) I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\}} \\ \sum_{i=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1}) I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} X_{j-1}^{-1}} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \beta_{20} \\ \beta_{21} \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{array} \right\}} & \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{array} \right\}} X_{j-1}^{-1} \\ \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{array} \right\}} X_{j-1}^{-1} & \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{array} \right\}} X_{j-1}^{-2} \end{bmatrix}^{-1} \\
& * \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1}) I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\}} \\ \sum_{i=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1}) I(r_2 > X_{j-1} \geq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} X_{j-1}^{-1}} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \beta_{30} \\ \beta_{31} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(X_{j-1} > r_2)}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{array} \right\}} & \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(X_{j-1} > r_2)}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{array} \right\}} X_{j-1}^{-1} \\ \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(X_{j-1} > r_2)}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{array} \right\}} X_{j-1}^{-1} & \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(X_{j-1} > r_2)}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{array} \right\}} X_{j-1}^{-2} \end{bmatrix}^{-1} \\
&\quad * \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1}) I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\}} \\ \sum_{i=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1}) I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} X_{j-1}^{-1}} \end{bmatrix}, \\
\sigma_1^2 &= \frac{\sum_{i=1}^q \frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})\}^2 I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1} \leq r) + \sigma_2^4 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^4 I(X_{j-1} > r_2)\} \Delta_j}}{\sum_{i=1}^q \frac{I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1} \leq r_1)\}}}, \\
\sigma_2^2 &= \frac{\sum_{i=1}^q \frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{20} + \beta_{21}X_{j-1})\}^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1} \leq r) + \sigma_2^4 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^4 I(X_{j-1} > r_2)\} \Delta_j}}{\sum_{i=1}^q \frac{I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\{\sigma_2^4 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)\}}}, \\
\sigma_3^2 &= \frac{\sum_{i=1}^q \frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{30} + \beta_{31}X_{j-1})\}^2 I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1} \leq r) + \sigma_2^4 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^4 I(X_{j-1} > r_2)\} \Delta_j}}{\sum_{i=1}^q \frac{I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_3^4 I(X_{j-1} > r_2)\}}}. \tag{1.25}
\end{aligned}$$

1.5. Квазіправдоподібне оцінювання параметрів у дифузійних процесах Іто

Розглянемо дифузійний процес у вигляді стохастичного диференціального рівняння,

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t), \quad (1.26)$$

де функція $\mu(x, t)$ – це коефіцієнт дрейфу, $\sigma(x, t)$ – це коефіцієнт дифузії, а $W(t)$ є стандартним процесом Вінера.

Зосередимося на випадку, коли обидва члени (дрейфу та дифузії) є однорідними за часом, тобто $\mu(x, t) = \mu(x)$, $\sigma(x, t) = \sigma(x)$.

Розглянемо далі випадок рівняння (1.26) з двома порогами:

$$\begin{aligned} dX_t = & \{(\beta_{10} + \beta_{11}X_t)I(X_t \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21}X_t)I(r_2 > X_t \geq r_1) \\ & + (\beta_{30} + \beta_{31}X_t)I(X_t \geq r_2)\}dt \\ & + \{\sigma_1 I(X_t \leq r_1) + \sigma_2 I(r_2 > X_t \geq r_1) + \sigma_3 I(X_t > r_2)\}dW_t, \end{aligned}$$

або

$$dX(t) = \sum_{i=1}^3 \left\{ \beta_i^\top \begin{pmatrix} 1 \\ X(t) \end{pmatrix} dt + \sigma_i dW(t) \right\} I(r_{i-1} < X(t) \leq r_i),$$

де вважаємо, що

$$0 = r_0 < r_1 < r_2 < r_3 = n.$$

Іншими словами, доданок дрейфу є кусково-лінійним, а доданок дифузії є кусково сталим, і обидві функції мають однакові точки розриву.

Зокрема,

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \sum_{i=1}^3 (\beta_{i,0} + \beta_{i,1}x) I(r_{i-1} < x \leq r_i), \\ \sigma(x) &= \sum_{i=1}^3 \sigma_i I(r_{i-1} < x \leq r_i). \end{aligned}$$

Отже, модель описує ситуацію, коли базовий процес керується підпроцесами Орнштейна–Уленбека, причому i -й ОУ-процес діє щоразу, коли процес $X(t)$ перебуває в i -му режимі, тобто $X(t) \in (r_{i-1}, r_i]$. Для існування стаціонарного розв'язку моделі підмоделі двох крайніх режимів повинні бути стаціонарними. Використаємо твердження [63].

Теорема 1. Нехай $\sigma_i > 0, i = 1, \dots, m$. Тоді процес має стаціонарний розподіл тоді й тільки тоді, коли

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mu(x) < 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \mu(x) > 0.$$

Тобто $\beta_{1,1} < 0, \beta_{m,1} < 0$, або $\beta_{1,1} = 0 \Rightarrow \beta_{1,0} > 0, \beta_{m,1} = 0 \Rightarrow \beta_{m,0} < 0$.

Окрім того, якщо умова стаціонарності виконана, стаціонарна щільність визначається як

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^3 k_i \exp \left\{ \frac{\beta_{i,1}x^2 + 2\beta_{i,0}x}{\sigma_i^2} \right\} I(r_{i-1} < x \leq r_i),$$

де константи k_i визначаються умовами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi(x) dx = 1,$$

$$\sigma_i^2 \pi(r_i-) = \sigma_{i+1}^2 \pi(r_i+), i = 1, \dots, m-1.$$

Тобто функція $\sigma^2(x)\pi(x)$ є неперервною в усіх точках порогів, а сама щільність $\pi(x)$ є неперервною лише тоді, коли $\sigma^2(x)$ неперервна.

Функція квазіправдоподібного оцінювання

Оскільки функціональна форма дифузійного коефіцієнта моделі загалом невідома, бо вона може бути кусково-сталою, кусково-степеневою або мати іншу кусково-гладку форму. Тому становить інтерес розробка методу оцінювання параметрів дрейфу, який не потребує попередніх знань про функціональну форму дифузійного доданку. Розглянута нижче функція квазі-логіфічної правдоподібності [64] використовується для досягнення цієї мети.

Уважаємо, що спостереження $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ є реалізацією загального дифузійного процесу X , що задовольняє рівняння

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t),$$

де доданок дрейфу μ_θ параметризований невідомим параметром θ .

Припустимо, що коефіцієнт дифузії σ , а також пороги r_1, r_2 відомі. Нехай P – ймовірнісна міра, породжена стандартним броунівським процесом $W(t)$, а P_θ – міра, породжена процесом X .

Згідно з теоремою Гірсанова для семімартингалів [напр. 65] логарифмічна функція правдоподібності має вигляд:

$$\log(\Lambda) = \log\left(\frac{dP_\theta}{dP}\right) = \int_0^T \frac{\mu_\theta(X(t), t)}{\sigma^2(X(t), t)} dX(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\mu_\theta^2(X(t), t)}{\sigma^2(X(t), t)} dt.$$

У випадку сталого коефіцієнта дифузії $\log(\Lambda)$ пропорційна до

$$l(\theta) = \int_0^T \mu_\theta(X(t), t) dX(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \mu_\theta^2(X(t), t) dt.$$

У загальному випадку несталого коефіцієнта дифузії $l(\theta)$ більше не є точною логарифмічною функцією правдоподібності. Однак її можна інтерпретувати як квазі-логарифмічну функцію правдоподібності, а квазіправдоподібна оцінка $\hat{\theta}$ – це аргумент, що максимізує $l(\cdot)$.

Якщо коефіцієнт дрейфу є гладкою функцією від θ і, припускаючи можливість перестановки диференціювання та інтегрування, а також коректність стохастичних інтегралів, квазіправдоподібна оцінка задовольняє оціночне рівняння:

$$0 = \int_0^T \frac{\partial \mu_\theta}{\partial \theta}(X(t), t) \{dX(t) - \mu_\theta(X(t), t)dt\}.$$

Обчислене при істинному параметрі θ , права частина дорівнює

$$\int_0^T \frac{\partial \mu_{\theta_0}}{\partial \theta}(X(t), t) \sigma(X(t), t) dW(t),$$

що має нульове математичне сподівання, отже - це незміщене оціночне рівняння.

Доданок дрейфу трирежимної моделі може бути записаний як:

$$\mu(X(t)) = \beta_1^T Y(t) I(X(t) \leq r_1) + \beta_2^T Y(t) I(r_1 < X(t) \leq r_2) + \beta_3^T Y(t) I(X(t) > r_2),$$

де

$$Y(t) = (1, X(t))^T, \beta_i^T = (\beta_{i0}, \beta_{i1}), i = 1, 2, 3.$$

Тоді процедура оцінювання здійснюється безпосереднім обчислення параметрів β .

$$\hat{\beta}_i = \left(\int_0^T \frac{Y(t)Y(t)^T I_i(t)}{T} dt \right)^{-1} \left(\int_0^T \frac{Y(t) I_i(t)}{T} dX(t) \right),$$

де $I_i(t)$ - індикатори перебування процесу в i -му режимі, визначеному відомими порогами.

Очевидно, що на практиці дані часто цифруються або вимірюються шляхом дискретної вибірки з базового неперервного процесу у формі $\{X(t_i), 0 \leq i \leq n\}$, і в такому разі стохастичні інтеграли можуть бути апроксимовані за допомогою апроксимації Ейлера. Схема апроксимації Ейлера або її модифікації будуть прийняті в усіх числових дослідженнях, описаних далі.

Квазіправдоподібна оцінка параметра дрейфу трирежимного порогового процесу, згенерованого за відповідним стохастичним диференціальним рівнянням на основі спостережень

$$\{X(t), 0 \leq t \leq T\},$$

позначатиметься як $\hat{\theta}$, тоді як істинний параметр у нашому випадку визначається як

$$\theta = (\beta_{10,0}, \beta_{11,0}, \beta_{20,0}, \beta_{21,0}, \beta_{30,0}, \beta_{31,0})^T.$$

де простір параметрів $\Omega = \mathbb{R}^6$.

Оцінювання вектора параметрів

Встановимо асимптотичні властивості вектора параметрів $\hat{\theta}$ при $T \rightarrow \infty$. Розглянемо випадок, коли $\sigma^2(x)$ є додатна з обмеженою кількістю точок розриву та має не більше ніж лінійний ріст.

Нехай виконуються умови:

(А) Параметри дрейфу в суміжних режимах відрізняються ($\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3$).

(В) Процес $\{X(t)\}$ є стаціонарним та геометрично ергодичним зі скінченними четвертими моментами (Процес $\{X(t)\}$ називається геометрично ергодичним, якщо він ергодичний, а також збігається до стаціонарного розподілу з експоненціальною швидкістю).

(С) Процес $\{X(t)\}$ допускає стаціонарну щільність ймовірності, яка майже напевно є неперервною з можливими розривами першого роду в точках порогів.

Насамперед покажемо, що оцінки лежать у компактній підмножині простору параметрів. Скористаємось відомим твердженням **Лема 1.** [65]

За припущення (В) наступні середні задовольняють рівномірний закон великих чисел:

$$\frac{1}{T} \int_0^T X^k(t) I(X(t) \leq r) dt \xrightarrow{P} \mathbf{E}[X^k I(X \leq r)] \text{ для } k = 0, 1, 2.$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T X^k(t) I(X(t) \leq r) \sigma(X(t)) dW(t) \xrightarrow{P} 0 \text{ для } k = 0, 1.$$

Лема 2. Припустимо, що припущення (А)–(С) виконуються. Тоді при $T \rightarrow \infty$ квазіправдоподібна оцінка $\hat{\theta}_T$ лежить у компактній підмножині C_1 простору параметрів:

$$C_1 = \{ \beta : | \beta_i - \beta_{i,0} | \leq M \}, i = 1, 2, 3,$$

для деякої скінченної константи M .

Доведення. Логарифмічна функція правдоподібності $l(\theta)$ є квадратичною щодо параметрів дрейфу β_i . Нормована функція $T^{-1}l(\theta)$ може бути представлена у вигляді

$$T^{-1}l(\theta) = \frac{1}{T} \int_0^T \mu_\theta(X_t) dX_t - \frac{1}{2T} \int_0^T \mu_\theta^2(X_t) dt.$$

Оскільки $\mu_\theta(x)$ лінійно залежить від β , другий інтеграл поводить як від’ємна квадратична форма відносно β .

Згідно з Лемою 1, при $T \rightarrow \infty$ функція $T^{-1}l(\theta)$ рівномірно збіжна до $L(\theta)$. Оскільки границя $L(\theta) \rightarrow -\infty$, коли $|\beta| \rightarrow \infty$, то для будь-якого фіксованого значення порогів максимум функції не може досягатися на нескінченності.

Теорема 2 Нехай виконуються припущення (A)–(C). Тоді оцінка $\hat{\theta}_T = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ є спроможною, тобто

$$\hat{\theta}_T \xrightarrow{P} \theta_0,$$

при $T \rightarrow \infty$.

Доведення. Розглянемо нормовану логарифмічну функцію правдоподібності $T^{-1}l(\theta)$.

Згідно з Лемою 1, інтеграли

$$\frac{1}{T} \int_0^T X^k(t) I(X(t) \leq r) dt,$$

збігаються до своїх математичних сподівань

$$\mathbf{E}[X^k I(X \leq r)],$$

рівномірно за всіма $r \in [a, b]$. Крім того, інтеграли

$$\frac{1}{T} \int_0^T X^k(t) I(X(t) \leq r) \sigma(X(t)) dW(t),$$

збігаються до нуля за ймовірністю. Отже, ми маємо рівномірну збіжність:

$$\sup_{\theta \in \Omega} |T^{-1}l(\theta) - L(\theta)| \xrightarrow{P} 0,$$

де $L(\theta)$ – детермінована гранична функція, яка досягає свого єдиного глобального максимуму в точці істинних параметрів θ_0 .

Це забезпечується припущенням (A), згідно з яким дрейф має розриви в істинних точках порогів $r_{1,0}, r_{2,0}$.

Оскільки оціночне рівняння є незміщеним, будь-яке відхилення θ від θ_0 призводить до зменшення значення $L(\theta)$

Згідно з лемою 2, оцінка $\hat{\theta}_T$ з імовірністю 1, лежить у компактній множині Ω .

Оскільки:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_T &= \operatorname{argmax}_{\theta \in \Omega} T^{-1}l(\theta), \\ T^{-1}l(\theta) &\xrightarrow{P} L(\theta) \text{ рівномірно за } \theta \in \Omega, \\ \theta_0 &= \operatorname{argmax}_{\theta \in \Omega} L(\theta),\end{aligned}$$

то за стандартною теоремою про збіжність максимізаторів послідовність $\hat{\theta}_T$ збігається до θ_0 за ймовірністю.

Теорема 3. Нехай виконуються припущення (A)–(C). Тоді для оцінки вектора параметрів дрейфу $\hat{\beta}_T$ виконується:

$$\hat{\beta}_T - \beta_0 = O_p(1/\sqrt{T}).$$

Окрім того, величина

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_T - \beta_0),$$

є асимптотично нормально розподіленою з розподілом $N(0, \Sigma)$.

Тут

$$\Sigma = E^{-1}(H_{\beta_0}) E(G_{\beta_0} G_{\beta_0}^T) E^{-1}(H_{\beta_0})^T,$$

G_{β_0} є вектором перших похідних, а H_{β_0} — матрицею других похідних функції квазіправдоподібності за параметрами β .

Доведення. Оцінка $\hat{\beta}$ максимізує функцію квазіправдоподібності, що еквівалентно розв'язанню системи рівнянь:

$$S_T(\beta) = 0.$$

Використовуючи розклад Тейлора для S_T навколо істинного значення β_0

$$\begin{aligned} 0 &= S_T(\hat{\beta}) \\ &= S_T(\beta_0) + \frac{\partial S_T}{\partial \beta^\top}(\bar{\beta})(\hat{\beta} - \beta_0), \end{aligned}$$

де $\hat{\beta} < \bar{\beta} < \beta_0$.

після множення на $\sqrt{T}$ отримуємо:

$$\begin{aligned} &\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta_0) \\ &= \left(-\frac{1}{T} \frac{\partial S_T}{\partial \beta^\top}(\bar{\beta}) \right)^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} S_T(\beta_0) \right). \end{aligned}$$

Матриця H_{β_0} є блочно-діагональною матрицею розміром 6×6 . При $T \rightarrow \infty$

$$-\frac{1}{T} \frac{\partial S_T}{\partial \beta^\top} \xrightarrow{p} \text{diag}(M_1, M_2, M_3),$$

де кожен блок можна записати у вигляді:

$$M_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \int_0^T I_i(t) dt & \frac{1}{T} \int_0^T X(t) I_i(t) dt \\ \frac{1}{T} \int_0^T X(t) I_i(t) dt & \frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) I_i(t) dt \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3.$$

де $I_1 = I(X_t \leq r_1)$, $I_2 = I(r_1 < X_t \leq r_2)$, $I_3 = I(X_t > r_2)$ – індикатори режимів, які базуються на відомих порогах.

Матриця $E(G_{\beta_0} G_{\beta_0}^\top)$ також є блочно-діагональною. Блоки мають вигляд:

$$Q_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \int_0^T I_i(t) \sigma^2(X_t) dt & \frac{1}{T} \int_0^T X(t) I_i(t) \sigma^2(X_t) dt \\ \frac{1}{T} \int_0^T X(t) I_i(t) \sigma^2(X_t) dt & \frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) I_i(t) \sigma^2(X_t) dt \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\frac{1}{\sqrt{T}} S_T(\beta_0),$$

збігається до нормального розподілу за центральною граничною теоремою для мартингалів.

Отже, за теоремою Слуцького [67]

$$\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta_0) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma),$$

з матрицею коваріації:

$$\Sigma = E^{-1}(H_{\beta_0}) E(G_{\beta_0} G_{\beta_0}^T) E^{-1}(H_{\beta_0})^T.$$

1.6. Обчислювальний алгоритм

Представимо алгоритм як узагальнену ітераційну процедуру, яку можна застосувати для обчислення наближеної оцінки максимальної правдоподібності, використовуючи модель на основі оцінок (1.25).

Крок 1. Набір даних для моделі.

Часовий ряд $\{X_0, X_1, \dots, X_q\}$, для якого обчислюються порядкові статистики $\{X_{(0)}, X_{(1)}, \dots, X_{(q)}\}$, де $X_{(0)} \leq X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(q)}$.

Нехай $a = X_{(q/5)}$, $b = X_{(4q/5)}$, $\hat{r} = a + \frac{i}{s}$, $i = 0, 1, \dots, \lambda$, де $b = \hat{r}_\lambda$, $s \in \mathbb{N}$.

Крок 2.

2.1. Зафіксуємо $\hat{r}$ для $i = 0, 1, \dots, \lambda$. Визначимо $\sigma_1^2(0), \sigma_2^2(0), \sigma_3^2(0)$.

Для двопорогового трирежимного процесу початкові значення параметрів $\sigma_1^2(0), \sigma_2^2(0), \sigma_3^2(0)$ доцільно задавати окремо для кожного режиму. Для розрахунку стартових значень дисперсій використовується квадрати режимних приростів, згідно з [3]. Такий підхід дозволяє отримати стартові

оцінки, які краще відображають локальну інтенсивність випадкових коливань процесу.

Стартові оцінки $\hat{\sigma}_i^2(0)$ для двопорогового процесу можна задати так:

$$\hat{\sigma}_1^2(0) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^q \{X_j I(X_j \leq r_1) - X_{j-1} I(X_{j-1} \leq r_1)\}^2,$$

$$\hat{\sigma}_2^2(0) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^q \{X_j I(r_1 < X_j \leq r_2) - X_{j-1} I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)\}^2,$$

$$\hat{\sigma}_3^2(0) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^q \{X_j I(X_j > r_2) - X_{j-1} I(X_{j-1} > r_2)\}^2.$$

2.2. Для $k \geq 1$ обчислимо

$\theta(k) = (\hat{\beta}_{10}(k), \hat{\beta}_{11}(k), \hat{\beta}_{20}(k), \hat{\beta}_{21}(k), \hat{\beta}_{30}(k), \hat{\beta}_{31}(k), \hat{\sigma}_1^2(k), \hat{\sigma}_2^2(k), \hat{\sigma}_3^2(k))$,
рекурсивно, як у рівняннях (номер рівняння), замінивши відповідно у правих частинах β_{10} на $\hat{\beta}_{10}(k-1)$, β_{11} на $\hat{\beta}_{11}(k-1)$, β_{20} на $\hat{\beta}_{20}(k-1)$, β_{21} на $\hat{\beta}_{21}(k-1)$, β_{30} на $\hat{\beta}_{30}(k-1)$, β_{31} на $\hat{\beta}_{31}(k-1)$, σ_1^2 на $\hat{\sigma}_1^2(k-1)$, σ_2^2 на $\hat{\sigma}_2^2(k-1)$, σ_3^2 на $\hat{\sigma}_3^2(k-1)$.

2.3. Повторимо крок 2.2 доки $\hat{\theta}(k)$ не буде збіжною. Детальна інформація, щодо оцінки збіжності алгоритму розглянута у розділі 2.6 наукової роботи.

Нехай збіжна оцінка буде мати вигляд:

$$\hat{\theta}_i = (\hat{\beta}_{10,i}(k), \hat{\beta}_{11,i}(k), \hat{\beta}_{20,i}(k), \hat{\beta}_{21,i}(k), \hat{\beta}_{30,i}(k), \hat{\beta}_{31,i}(k), \hat{\sigma}_{1,i}^2(k), \hat{\sigma}_{2,i}^2(k), \hat{\sigma}_{3,i}^2(k)).$$

Крок 3.

Для $i = 0, 1, \dots, \lambda$ обчислимо $-2l_X(\hat{\theta}_i)$. Тоді $\tau = \operatorname{argmin}_i \{-2l_X(\hat{\theta}_i)\}$ і наближеною оцінкою максимальної правдоподібності $\eta = (r, \theta)$ буде $\hat{\eta} = (\hat{r}_\tau, \hat{\theta}_\tau)$.

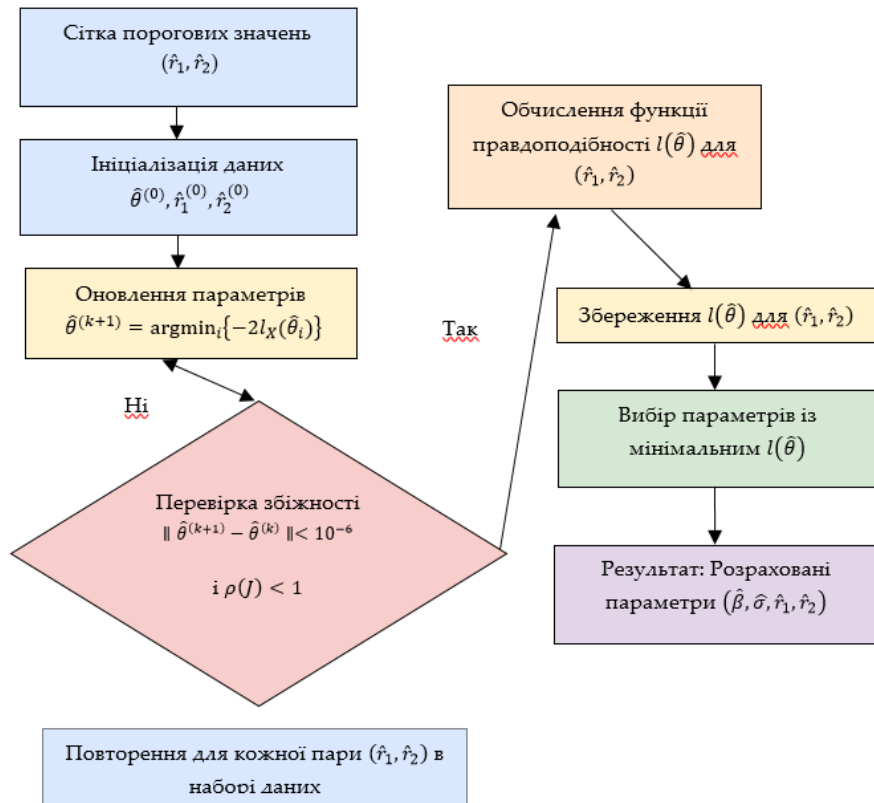


Рис. 1.3 Графічне представлення алгоритму.

Вплив зміни дифузії на точність оцінювання параметрів

Одним із ключових параметрів двопорогового процесу типу Орнштейна-Уленбека є коефіцієнт дифузії σ , який визначає інтенсивність випадкових збурень. Зміна цього параметра суттєво впливає як на властивості самого процесу, так і на точність роботи статистичних алгоритмів, що застосовуються для оцінювання його параметрів.

Вплив на поведінку процесу. Малі значення σ . Траєкторії процесу стають більш «згладженими», коливання навколо рівноважних рівнів є невеликими. У цьому випадку спостереження рідше перетинають порогові значення, що зменшує статистичну інформативність даних для оцінювання порогів r_1 та r_2 .

Велике значення σ . Процес демонструє сильніші коливання, траєкторії частіше переходять між режимами. Це збільшує ймовірність отримати інформацію про всі три режими динаміки, але водночас ускладнює відокремлення сигналу від шуму, що може підвищувати дисперсію оцінок.

Згладжування дисперсії як інструмент підвищення точності. Одним із підходів до підвищення надійності оцінювання параметрів у порогових моделях є застосування методів згладжування дисперсії. Ідея полягає у тому, що замість використання «сирих» дискретних даних із високим рівнем шуму, на попередньому етапі здійснюється локальне усереднення або фільтрація варіацій.

На практиці можна буде отримати зменшення дисперсії оцінок параметрів дрейфу, підвищення стабільності алгоритмів AMLE при високих σ та покращення ідентифікації порогів завдяки кращому співвідношенню сигнал/шум.

1.7. Аналіз отриманих результатів для моделювання і оцінки параметрів процесів типу Орнштейна-Уленбека

На основі запропонованого алгоритму було розроблене програмне забезпечення в середовищі R, для оцінки параметрів двопорогового процесу типу Орнштейна-Уленбека. Використовуючи це програмне забезпечення, було проведено серію обчислювальних експериментів.

Тестування проводилося на синтетично згенерованих даних, із наперед заданими значеннями порогів, що в результаті дозволило порівняти істинні значення порогів з отриманими в результаті обрахунку алгоритмом.

У межах експерименту оцінювались такі параметри: положення порогів r_1 та r_2 , параметри дрейфу β , коефіцієнт дифузії σ .

Додатково було змодельовано процеси із різним рівнем дисперсії, щоб оцінити здатність алгоритму аналізувати та правильно визначати оцінки для процесів із більшим шумом.

Нижче подані отримані результати щодо оцінки параметрів процесів типу Орнштейна-Уленбека.

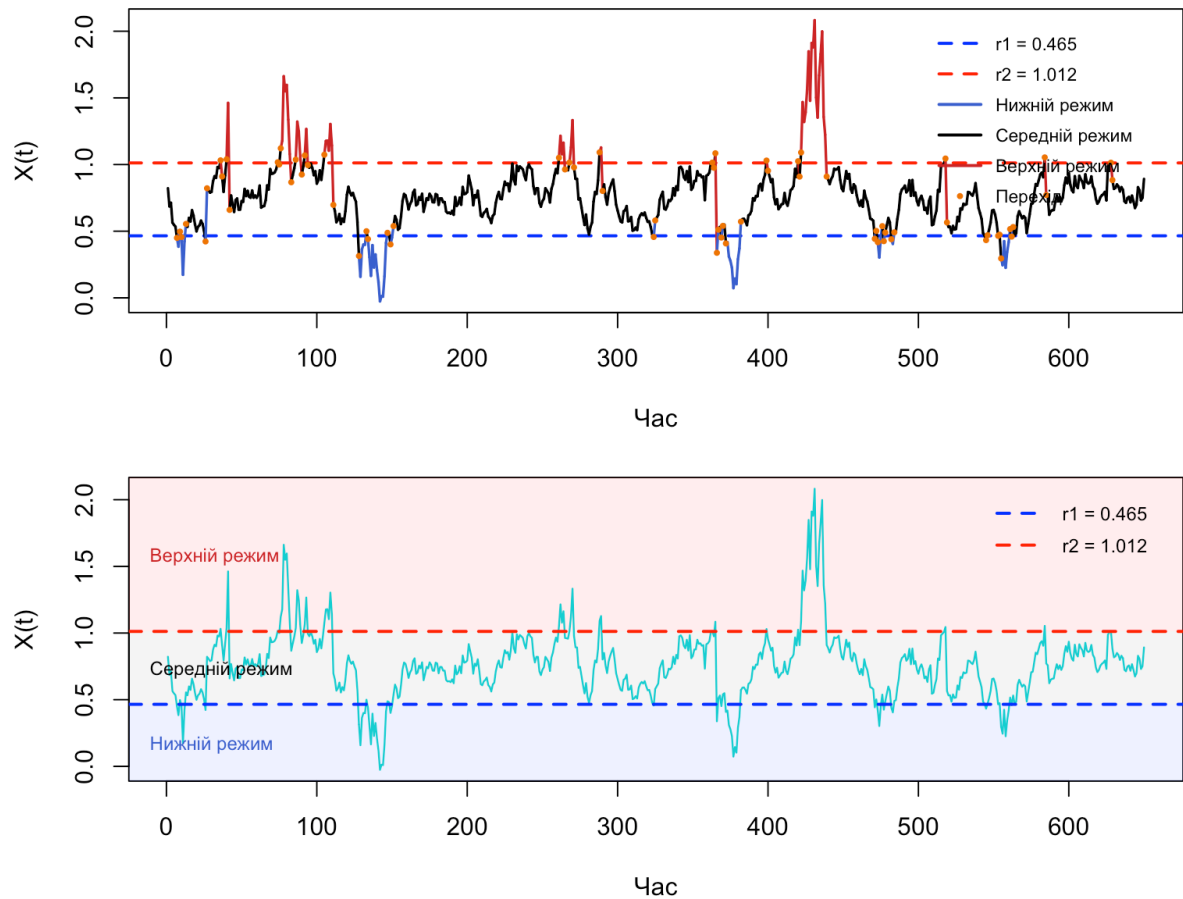


Рис. 1.4 Отримані результати тестування $r_1 \approx 0.465, r_2 \approx 1.012$

Як видно із Рис. 1.4 було визначено порогові значення $r_1 \approx 0.465$ та $r_2 \approx 1.012$. За реальних значень, які були задані під час моделювання процесу, $r_1 = 0.48$ та $r_2 = 1.02$. Тобто відносна похибка склала для $r_1 \approx 0.014$, а для $r_2 \approx 0.008$.

Для перевірки правильності роботи алгоритму оцінки параметрів двопорогового процесу типу Орнштейна-Уленбека було використано метод Монте Карло. Використання цього методу дало можливість багаторазово відтворювати різні вибірки даних з наперед заданими істинними параметрами моделі. Це дало змогу оцінити наскільки точно запропонована методика може оцінювати порогові значення та параметри дрейфу та дифузії. На відміну від проведення одиничного числового експерименту, метод Монте Карло дає можливість оцінити стійкість алгоритму, середню точність та варіативність отриманих оцінок.

Для аналізу впливу довжини вибірки на точність оцінювання було розглянуто три часові горизонти спостереження: $T = 10, T = 50, T = 100$. Використання кількох значень T дозволяє порівняти поведінку алгоритму на коротких, середніх і довших реалізаціях процесу. Така перевірка є важливою, оскільки в задачах параметричного оцінювання збільшення обсягу інформації, як правило, має сприяти покращенню якості оцінок. Тому порівняння результатів для $T = 10, T = 50$ та $T = 100$ дає можливість з'ясувати, чи спостерігається зменшення зміщення оцінок і їх розсіювання зі збільшенням довжини траєкторії. Метод Монте Карло виступив в якості інструменту числової верифікації запропонованої методики.

Параметр	Істинне	$T10$	$T50$	$T100$
r_1	0.48	0.5028(0.1042)	0.4902(0.0228)	0.4895(0.0240)
r_2	1.02	1.0044(0.0515)	1.0009(0.0239)	0.9978(0.0234)
β_{10}	0.684	1.5620(1.3630)	0.7637(0.3503)	0.7566(0.2577)
β_{11}	-1.9	-4.7266(3.4650)	-2.1303(0.9767)	-2.0174(0.8415)
β_{20}	1.053	0.8666(2.0290)	0.9560(0.2729)	1.0444(0.2524)
β_{21}	-1.35	-1.0538(2.0524)	-1.2200(0.3539)	-1.3281(0.3293)
β_{30}	2.204	6.0266(4.3159)	3.3615(1.5864)	2.3689(1.2306)
β_{31}	-1.9	-4.643(3.4876)	-2.6486(1.1133)	-1.9971(0.8339)
σ_1	0.58	0.5341(0.0772)	0.5653(0.0351)	0.5661(0.0324)
σ_2	0.3	0.3169(0.0760)	0.3016(0.0085)	0.3031(0.0092)
σ_3	1.28	1.1858(0.1715)	1.2192(0.0948)	1.2039(0.0764)

Таблиця 1.1. Результати тестування алгоритму

Як видно із Таблиці 1.1, порогові значення відтворюються досить точно. На наступному кроці було проведено оцінювання двопорогового процесу типу Орнштейна-Уленбека з вищим рівнем дифузії. Це необхідно, чи може алгоритм коректно відтворювати значення параметрів для більш «шумних» моделей.

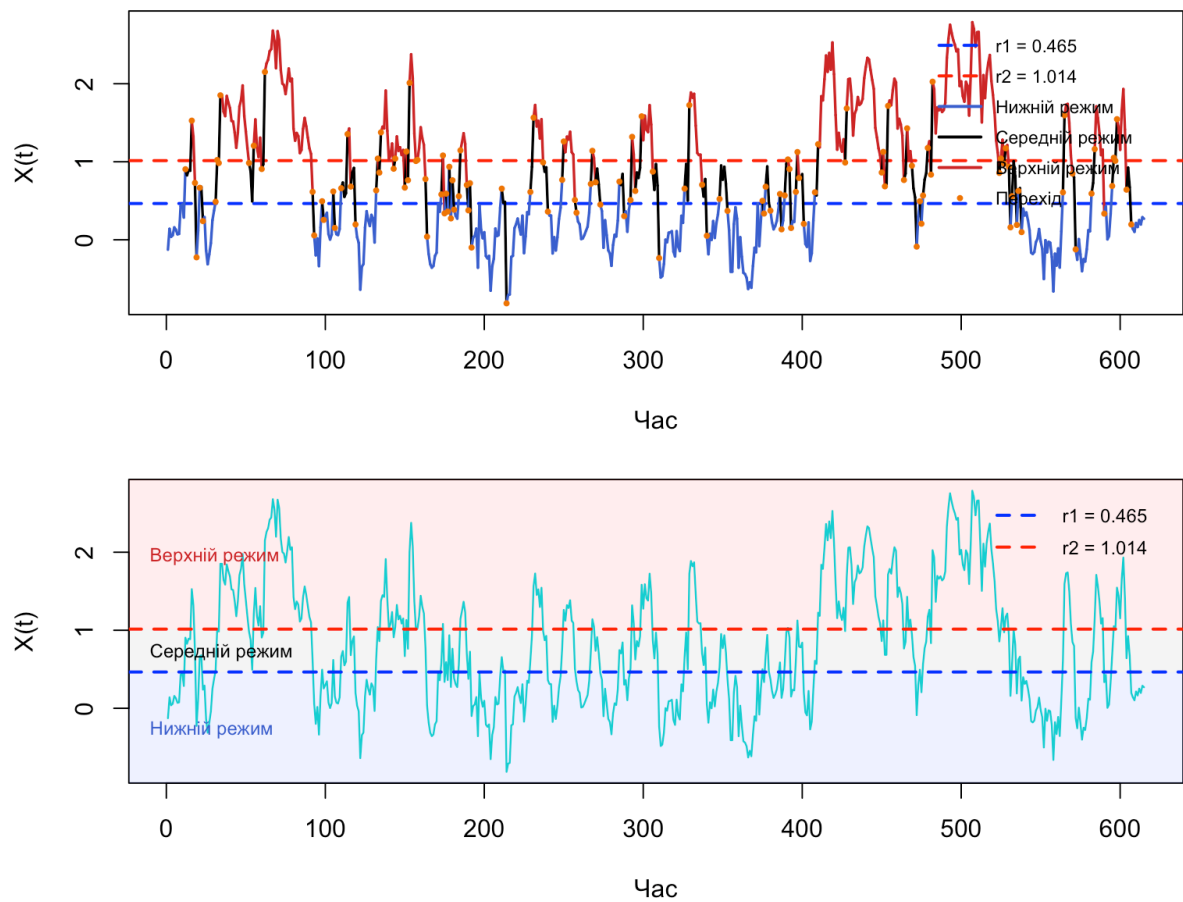


Рис. 1.5 Отримані результати тестування $r_1 \approx 0.465, r_2 \approx 1.014$

На Рис. 1.5 відображено результати оцінки параметрів для двопорогового процесу типу Орнштейна-Уленбека, для якого було змодельовано вищий рівень шуму. Було отримано значення $r_1 \approx 0.465$ та $r_2 \approx 1.014$. При реальних значеннях, які були задані під час моделювання процесу $r_1 = 0.48$ та $r_2 = 1.02$. Тобто відносна похибка склала для $r_1 \approx 0,031$, а для $r_2 \approx 0.005$.

Для тестування процесу з підвищеним рівнем шуму було також використано метод Монте Карло для трьох часових горизонтів спостережень: $T = 10, T = 50, T = 100$.

Параметр	Істинне	$T10$	$T50$	$T100$
r_1	0.48	0.4150(0.2148)	0.4660(0.0345)	0.4543(0.0348)

r_2	1.02	1.0182(0.3046)	1.0313(0.0444)	1.0384(0.0348)
β_{10}	0.684	0.6415(1.6352)	0.7290(0.2411)	0.6843(0.1801)
β_{11}	-1.9	-3.1971(2.7827)	-2.0558(0.7124)	-2.0197(0.4928)
β_{20}	1.053	3.2335(12.7674)	1.0048(3.7645)	0.3462(2.4934)
β_{21}	-1.35	-5.1825(17.9668)	-1.3463(4.7754)	-0.4288(3.4593)
β_{30}	2.204	3.4661(4.2512)	2.4016(1.1488)	2.4631(0.8764)
β_{31}	-1.9	-2.7536(2.3054)	-2.0309(0.6952)	-2.0632(0.5076)
σ_1	1.08	1.0562(0.1001)	1.0833(0.0373)	1.0830(0.0269)
σ_2	2.3	1.9928(0.4718)	2.1901(0.1629)	2.2213(0.1249)
σ_3	1.28	1.2806(0.1469)	1.2814(0.0476)	1.2769(0.0338)

Таблиця 1.2 Результати тестування алгоритму

Як видно із Таблиці 1.2, порогові значення теж відтворюються досить точно.

Візуальний аналіз графіків також демонструє, що алгоритм в загальному визначає області зміни режимів.

Порівняння наближених істинних та оцінених значень порогів r_1 та r_2 для синтетичних наборів даних. Істинні пороги визначено за точками переходу між трьома режимами (n_1, n_2, n_3) у згенерованих даних. У більшості випадків спостерігається близькість оцінених параметрів до реальних значень, що підтверджує стабільність алгоритму оцінювання, а незначні розбіжності пояснюються стохастичною природою процесу та неконвексністю функції правдоподібності.

Дослідження поверхні функції правдоподібності. Для більш детального аналізу роботи алгоритму на прикладі набору було додатково досліджено поведінку функції правдоподібності у просторі порогових параметрів r_1 та r_2 .

На тепловій карті відображено значення критерію $-2\log L$ для різних комбінацій порогів r_1 та r_2 у межах заданої сітки.

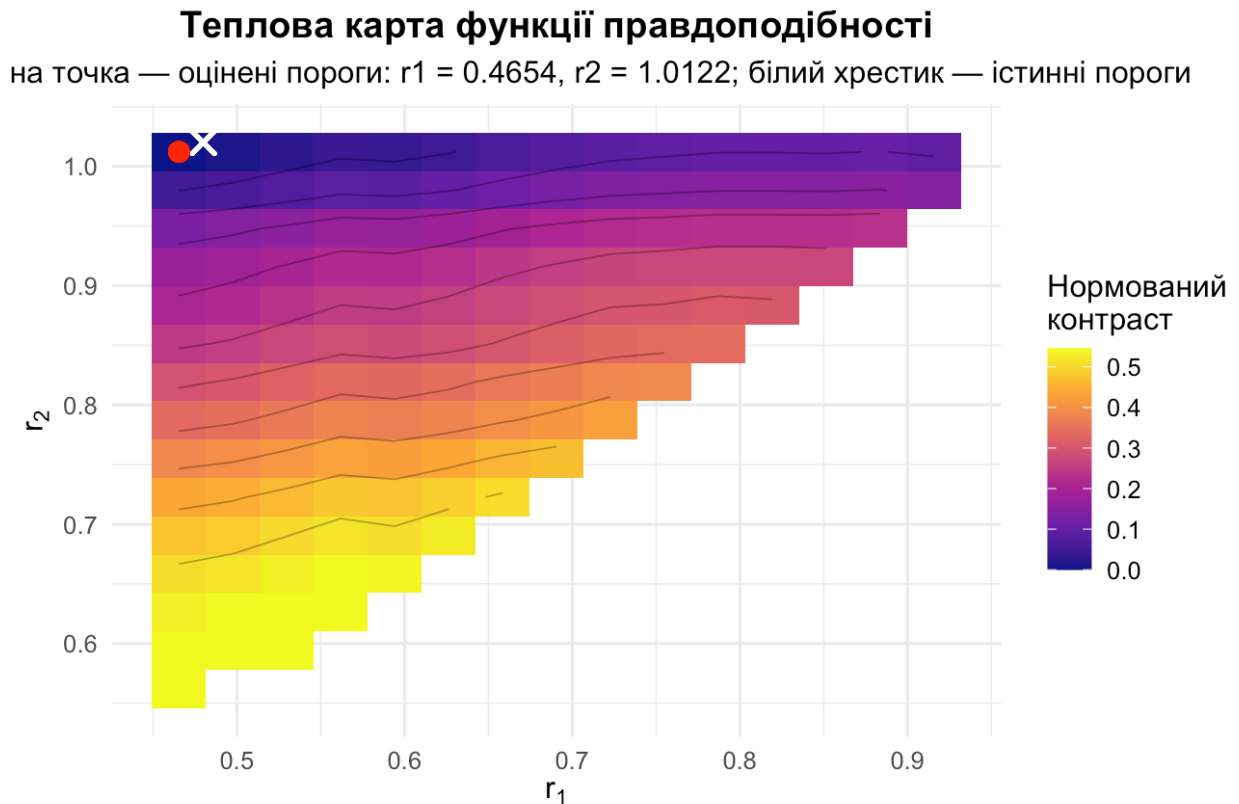


Рис. 1.6 Теплова карта функції правдоподібності у просторі порогових параметрів

На рис. 1.6 зображено карту функції правдоподібності у просторі порогових параметрів порогів r_1 та r_2 . Кольорова шкала відображає нормоване значення функції правдоподібності, усереднене на одне спостереження: світлі області відповідають високим (гіршим) значенням критерію, тоді як темніші ділянки сигналізують про кращу відповідність моделі даним. Червона точка позначає розрахований мінімум, що відповідає знайденим оптимальним порогам. Біла позначка – істинні значення порогів. Як видно з рисунку, поверхня має виразно неконвексний характер: більшість області параметрів дає погану відповідність, тоді як глобальний мінімум концентрується у вузькій локалізованій зоні.

Ця ілюстрація демонструє, по-перше, інтерпретованість знайдених порогів у часовій динаміці, а, по-друге, підтверджує коректність обраної процедури оптимізації навіть за умов неконвексної поверхні правдоподібності.

Для кращого розуміння структури функції правдоподібності було побудовано тривимірну поверхню залежності $-2\log L$ від параметрів r_1 та r_2 .

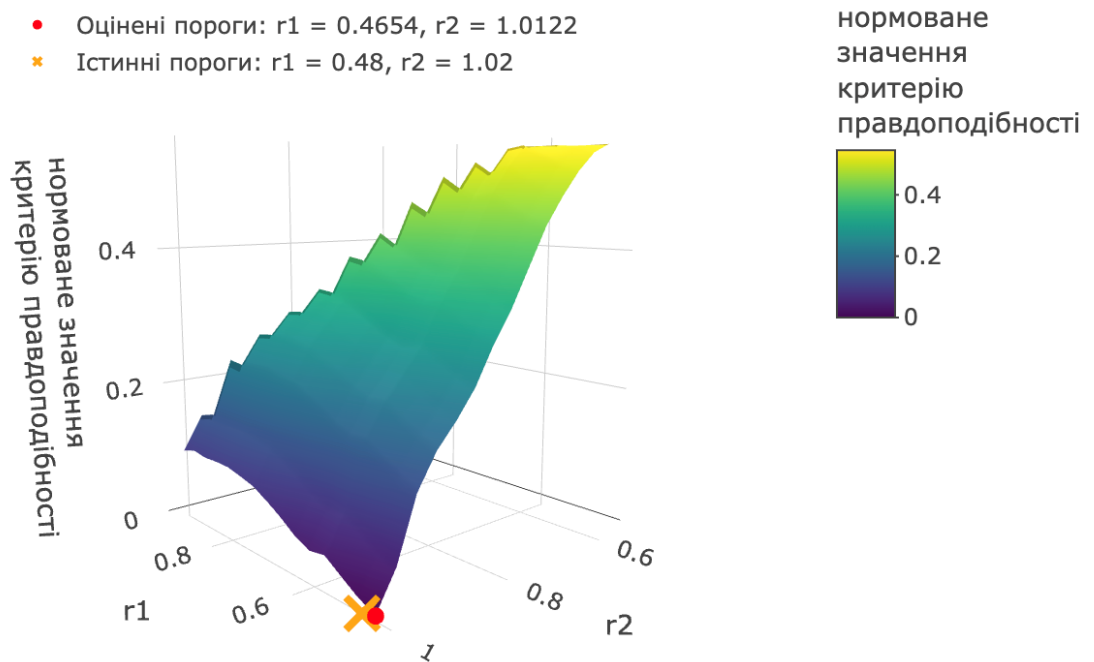


Рис. 1.7 3D поверхня ландшафту функції правдоподібності у просторі порогових параметрів

На рис. 1.7 об'ємна поверхня відображає ландшафт функції правдоподібності у просторі параметрів r_1 та r_2 . Червона точка позначає оптимальні значення порогів r_1 та r_2 , що відповідають глобальному мінімуму функції. Помаранчева позначка відображає істинні значення порогів.

Такий формат наочно демонструє форму поверхні, розташування локальних мінімумів та дозволяє візуально оцінити структуру (неконвексність) задачі оптимізації.

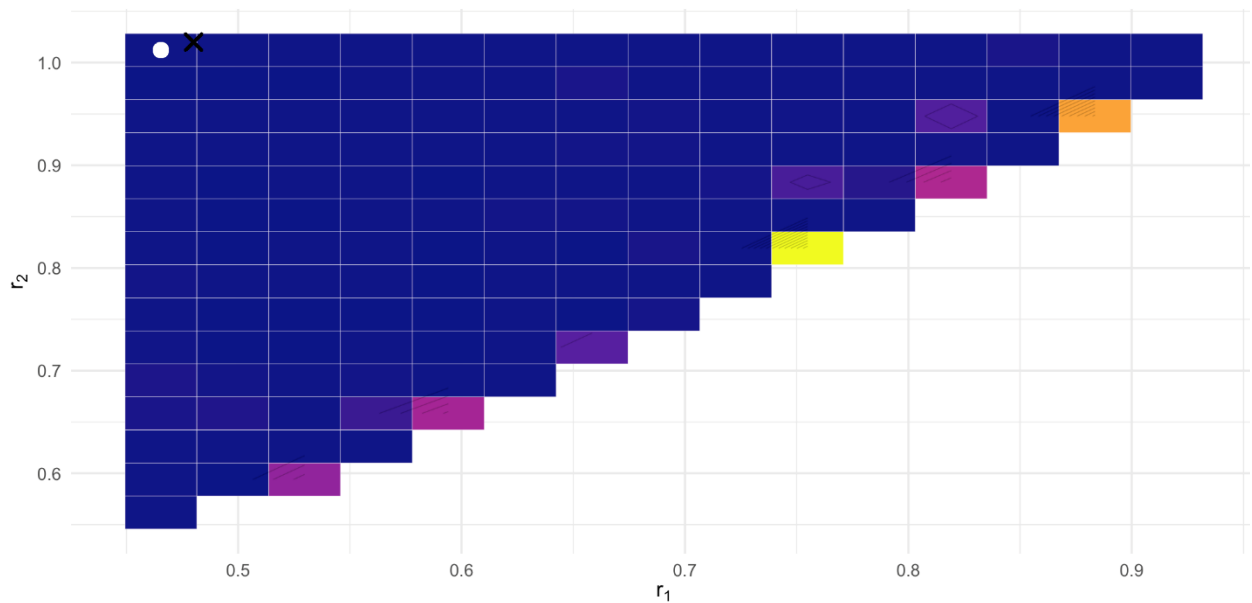


Рис. 1.8 Графік області локальної збіжності ітераційного алгоритму

На Рис. 1.8 показано область локальної збіжності ітераційного алгоритму для набору даних, що тестувався. Синім позначено область для комбінації порогів r_1 та r_2 , для яких прорахунків спектрального радіусу матриці Якобі дає кращий результат, що, своєю чергою, забезпечує локальну збіжність. Біла крапка показує результат розрахунку оптимальних значень порогів, а чорна позначка – істинні пороги.

Висновки до Розділу 1

Було проаналізовано теоретичні та прикладні підходи побудови та оцінки двопорогового процесу типу Орнштейна-Уленбека. Також було розроблено методику оцінки параметрів таких процесів з використанням наближеного методу максимальної правдоподібності.

Використання варіації у вигляді двопорогової моделі на основі процесу типу Орнштейна-Уленбека дозволяє описувати й аналізувати нелінійну динаміку у трьох режимах, що не дозволяє зробити модель на основі класичного процесу ОУ. Двопорогову модель процесу типу ОУ більш складно використати для оцінювання параметрів, через те, що відсутній аналітичний вигляд перехідної функції для роботи у трьох режимах.

У цьому розділі було аргументовано, чому застосовується саме наближений метод максимальної правдоподібності в якості інструменту для оцінки параметрів моделі. У межах дослідження було зроблено висновок, що на точність значень отриманих параметрів впливає рівень дисперсії, частота переходів між різними режимами та величина набору даних.

Було запропоновано алгоритм оцінки параметрів моделі на базі процесу типу Орнштейна-Уленбека. Розроблено програмний код на основі алгоритму та згенеровано набір синтетичних даних, що імітують процес з пороговими значеннями. Було проведено тестування на п'яти наборах даних з різною динамікою, і отримані результати підтверджують здатність відтворення динаміки процесу й оцінки його параметрів, насамперед порогових значень. Було проведено аналіз теплових карт та тривимірної моделі поверхонь функції.

Наукова новизна цього розділу в тому, що він робить свій внесок у розвиток досліджень для оцінки параметрів порогових дифузійних моделей. У прикладній сфері запропоновано алгоритм оцінки, розроблено код і приведено результати його роботи. Із погляду аналітики проведено дослідження впливу основних параметрів моделі (зокрема дисперсії) на точність отриманих результатів.

Отримані результати цього розділу містять у собі як теоретичне, так і практичне значення, оскільки в подальшому можуть слугувати як один із підходів для більш детального вивчення методів оцінювання більш складних стохастичних моделей, а також тестування їх на реальних даних.

РОЗДІЛ 2. ПОРОГОВІ МОДЕЛІ НА БАЗІ РІВНЯННЯ ІТО-СКОРОХОДА

У даному розділі наукової роботи проведено дослідження з подальшою розробкою моделі для оцінки порогових моделей, що описуються рівнянням Іто-Скорохода. У цьому розділі було удосконалено модель, розглянуту в попередньому розділі, доповнено алгоритм, на основі якого будується програмне забезпечення для оцінки таких стохастичних процесів.

2.1. Порогові моделі на базі рівняння Іто–Скорохода

За допомогою порогових моделей можна описувати й аналізувати динаміку стохастичних процесів, що змінюється при досягненні певних критичних рівнів. Такі моделі можуть містити у своїй основі дифузійну та стрибкову складову. Наявність стрибкової складової робить модель більш наближеною до опису реальних процесів, що відбуваються у фінансах та економіці упродовж різних проміжків часу.

Порогова модель на основі рівняння Іто–Скорохода розглядає випадковий процес X_t , динаміка якого описується стохастичним диференціальним рівнянням (СДР) з пороговими умовами. Загальний вигляд моделі можна подати як:

$$dX_t = \beta(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t + d\gamma_t, \quad (2.1)$$

де $\beta(X_t)$ - компонент дрейфу, що може змінюватися залежно від положення процесу відносно порогів, $\sigma(X_t)$ - коефіцієнт дифузії, W_t – процес Вінера, γ_t - стрибкова компонента.

Наявність у таких процесах порогів означає, що β та σ та γ можуть мати різні значення в залежності від того в якому режимі перебуває процес.

Процес Леві, який є розв’язком рівняння Іто-Скорохода містить низку характеристик, які описують класичний процес Орнштейна-Уленбека, такі як: стаціонарність, ергодичність, експоненційне зниження впливу початкових умов. Однак це рівняння розширене включенням стрибкової компоненти [27], яка описує дискретні збурення у поведінці процесу. На відміну від класичної дифузійної моделі, таке розширення дозволяє враховувати раптові зміни в

процесі та екстремальні події, які неможливо описати лише гаусівським шумом, [14] та забезпечує можливість моделювання асиметрії у розподілах, що характерні для фінансових і економічних часових рядів [15].

Огляд напрацювань і публікацій

Дослідження порогових моделей на основі рівняння Іто-Скорохода ґрунтується на декількох наукових напрямках. Перш за все були проаналізовані фундаментальні праці з теорії процесів Леві та стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибками, де розглянуті їхні аналітичні властивості та методи інтегрування [15]. Цей теоретичний аспект можна доповнити працями [14], в яких розглянуто систематизований огляд моделей із стрибками у фінансовій сфері, чисельні підходи [26], [54]. На основі цих праць можна зробити висновок про актуальність включення стрибкової компоненти у порогові моделі.

Порогові моделі, які враховували дрейф, розглядались у [6], [25], [29].

Із погляду цілей цього дослідження особливу увагу було приділено пошуку праць по узагальненню класичного процесу Орнштейна-Уленбека (ОУ) до випадку з включенням стрибків. Особливу увагу в літературі приділено узагальненню класичного процесу Орнштейна-Уленбека до процесу Леві, що може охоплювати у свою структуру стрибкову компоненту. Дослідження довели існування та властивості перехідних розподілів для процесу ОУ із стрибками, що є основою для побудови правдоподібності [16], [17].

Окремий напрямок робіт направлений на вивчення часу першого досягнення порогу таких процесах, що має прикладне значення за оцінки кредитного ризику та моделюванні екстремальних подій [48]. На основі цього можна зробити заключення, що ОУ процеси із стрибками можна використовувати як для моделювання безперервної, так і дискретної динаміки, поєднуючи гаусівські та стрибкові характеристики.

Паралельним напрямком проаналізованих досліджень є теорія дифузій у неперервному часі, яка заснувалася з ідей дискретних Threshold Autoregressive model TAR моделей (Threshold Autoregressive model) [19]. У працях [47] і [9] розроблено статистичні методи оцінювання параметрів та ідентифікації порогів у дифузійних процесах, а також досліджено ергодичні властивості таких систем. Розглянуто й дослідження, які почали вбудовувати порогові ефекти у процесах Леві із стрибками, пропонуючи нові підходи до апроксимації правдоподібності та методів максимальної правдоподібності для дискретних спостережень [21]. Є опубліковані роботи, в основі яких лежить побудова тестів, які могли б виявляти наявність порогів та використанню узагальненого методу моментів для оцінювання параметрів у порогових ОУ моделях [22].

Характерною рисою цих досліджень є акцент на обчислювальних методах. Оскільки в більшості випадків не існує аналітичних виразів для перехідних функцій ймовірності, оцінювання параметрів здійснюється на основі чисельних схем, методів наближеної правдоподібності та різних способів апроксимації. Підхід Іто-Скорохода з урахуванням локального часу допомагає описати, як процес поводить себе біля порогів. У таких моделях траєкторія може ніби «торкатися» межі, затримуватися біля неї або відбиватися назад. Це суттєво для порогових процесів, адже саме в цих точках змінюється структура поведінки процесу.

Теореми існування

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння Іто-Скорохода:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t \int_U \gamma(s, X_s, \theta) \tilde{\nu}(d\theta, ds). \quad (2.2)$$

Теорема 1. Нехай коефіцієнти рівняння (2.2) задовольняють такі умови:

1.) $\mu(s, 0), \sigma(s, 0), \int |\gamma(s, 0, \theta)|^2 \tilde{\nu}(d\theta)$ локально обмежені по s ,

2.) існує зростаюча функція $l(s)$ така, що

$$\begin{aligned} & |\mu(s, x) - \mu(s, y)|^2 + \|\sigma(s, x) - \sigma(s, y)\|^2 \\ & + \int |\gamma(s, x, \theta) - \gamma(s, y, \theta)|^2 \tilde{\nu}(d\theta) \leq l(s)|x - y|^2. \end{aligned}$$

Позначимо через $\tilde{\mathcal{F}}_t$ σ -алгебру, породжену величинами $X_0, \tilde{\nu}(d\theta \times ds), W_s$ при $s \leq t$. Якщо X_0 не залежить від сукупності величин $W_s, \tilde{\nu}(d\theta \times ds)$ і $\mathbf{E}|X_0|^2 < \infty$, то рівняння (2.12) має $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -вимірний розв'язок, при чому $\mathbf{E}|X_s|^2 < \infty$.

Доведення. Доведення проведемо за схемою [62].

Будемо будувати розв'язок методом послідовних наближень. Нехай $X_{t_0} = X_0$,

$$\begin{aligned} X_{t_{n+1}} = & X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \\ & + \int_0^t \int_U \gamma(s, X_s, \theta) \tilde{\nu}(d\theta, ds). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Якщо X_{t_n} задано і $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -вимірні і $\mathbf{E}|X_{s_n}|^2$ локально обмежено, то інтеграли в правій частині (2.3) визначені і $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -вимірні. Покажемо, що $\mathbf{E}|X_{n+1}|^2$ локально обмежене. Маємо:

$$\begin{aligned} & |X_{t_{n+1}} - X_0|^2 \\ & \leq 3 \left| \int_0^t \mu(s, X_{s_n}) ds \right|^2 + 3 \left| \int_0^t \sigma(s, X_{s_n}) dW_s \right|^2 \\ & + 3 \left| \int_0^t \int_U \gamma(s, X_{s_n}, \theta) \tilde{\nu}(d\theta, ds) \right|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left| \int_0^t \mu(s, X_{s_n}) ds \right|^2 &\leq t \int_0^t \mathbf{E} |\mu(s, X_{s_n})|^2 ds \\
&\leq 2t \int_0^t |\mu(s, 0)|^2 ds \\
&\quad + 2t \int_0^t \mathbf{E} |\mu(s, X_{s_n}) - \mu(s, 0)|^2 ds \leq |X_{t_{n+1}} - X_0|^2 \\
&\leq 3 \left| \int_0^t \mu(s, X_{s_n}) ds \right|^2 + 3 \left| \int_0^t \sigma(s, X_{s_n}) dW_s \right|^2 \\
&\quad + 3 \left| \int_0^t \int_U \gamma(s, X_{s_n}, \theta) \tilde{\nu}(d\theta, ds) \right|^2, \\
\mathbf{E} \left| \int_0^t \mu(s, X_{s_n}) ds \right|^2 &\leq t \int_0^t \mathbf{E} |\mu(s, X_{s_n})|^2 ds \\
&\leq 2t \int_0^t |\mu(s, 0)|^2 ds \\
&\quad + 2t \int_0^t \mathbf{E} |\mu(s, X_{s_n}) - \mu(s, 0)|^2 ds \\
&\leq 2t \int_0^t |\mu(s, 0)|^2 ds + 2tl_t \int_0^t \mathbf{E} |X_{s_n}|^2 ds.
\end{aligned}$$

Аналогічно:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left| \int_0^t \sigma(s, X_{s_n}) dW_s \right|^2 &= \int_0^t \mathbf{E} \text{sp} \sigma(s, X_{s_n}) \sigma^*(s, X_{s_n}) ds \\
&\leq 2 \int_0^t \text{sp} \sigma(s, 0) \sigma^*(s, 0) ds \\
&\quad + 2 \int_0^t \mathbf{E} \text{sp} \left(\sigma(s, X_{s_n}) - \sigma(s, 0) \right) \times \left(\sigma(s, X_{s_n}) - \sigma(s, 0) \right)^* ds \\
&\leq 2 \int_0^t \text{sp} \sigma(s, 0) \sigma^*(s, 0) ds + 2dl_t \int_0^t \mathbf{E} |X_{n_t}|^2 ds, \\
\mathbf{E} \left| \int_0^t \int_U \gamma(s, X_{s_n}, \theta) \tilde{\nu}(d\theta, ds) \right|^2 \\
&\leq 2 \int_0^t \int_U |\gamma(s, 0, \theta)|^2 \tilde{\nu}(d\theta) ds + 2l_t \int_0^t \mathbf{E} |X_{n_s}|^2 ds.
\end{aligned}$$

Тут d – розмірність X . Із цих оцінок випливає, що існує зростаюча функція c_t , для якої

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} |X_{t_{n+1}}|^2 &\leq c_t \left[\mathbf{E} |X_0|^2 \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \left(\mathbf{E} |X_{s_n}|^2 + |\mu(s, 0)|^2 + \|\sigma(s, 0)\|^2 + \int |\gamma(s, 0, \theta)|^2 \tilde{\nu}(d\theta) \right) ds \right].
\end{aligned}$$

Оскільки X_{t_0} $\tilde{\mathfrak{F}}_t$ -вимірні, і $\mathbf{E} |X_{t_0}|^2 = \mathbf{E} |X_0|^2$, то для всіх n процеси X_{t_n} визначені, $\tilde{\mathfrak{F}}_t$ -вимірні і $\mathbf{E} |X_{t_n}|^2$ локально обмежені.

Далі:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}|X_{t_{n+1}} - X_{t_n}|^2 \\
& \leq 3\mathbf{E} \left| \int_0^t (\mu(s, X_{s_n}) - \mu(s, X_{s_{n-1}})) ds \right| \\
& + 3\mathbf{E} \left| \int_0^t (\sigma(s, X_{s_n}) - \sigma(s, X_{s_{n-1}})) dW_s \right|^2 \\
& + 3\mathbf{E} \int_0^t \int_U (\gamma(s, X_{s_n}, \theta) - \gamma(s, X_{s_{n-1}}, \theta)) \tilde{\nu}(d\theta \times ds).
\end{aligned}$$

Використовуючи умову 2) переконуємося, що для всякого $T > 0$ знайдеться така постійна k_T , що при $t \leq T$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|X_{t_{n+1}} - X_{t_n}|^2 & \leq k_T \int_0^T \mathbf{E}|X_{s_n} - X_{s_{n-1}}|^2 ds, \quad n \geq 1, \\
\mathbf{E}|X_{t_1} - X_0|^2 & \leq k_T \int_0^T \mathbf{E}|X_{s_0}|^2 ds = k_T t \mathbf{E}|X_0|^2.
\end{aligned}$$

Тому $\mathbf{E}|X_{t_{n+1}} - X_{t_n}|^2 \leq k_T^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \mathbf{E}|X_0|^2$. Оскільки для всіх $T >$

$0 \sum \sup \left(\mathbf{E}|X_{t_{n+1}} - X_{t_n}|^2 \right)^{1/2} < \infty$, то X_{t_n} збігається в середньому квадратичному до деякого процесу $\bar{X}_t$, причому для всіх $T > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \leq T} \mathbf{E}|X_{t_n} - \bar{X}_t|^2 = 0. \quad (2.4)$$

Процес $\bar{X}_t \in \tilde{\mathfrak{F}}_t$ -вимірним. Покажемо, що для всіх t з вірогідністю 1 виконується (2.2). Для цього достатньо довести, що інтеграли з правої частини (2.3) при $n \rightarrow \infty$ прямують в середньоквадратичному до відповідних інтегралів в правій частині (2.2).

Розглянемо, для прикладу, інтеграли по $\tilde{\nu}$. Маємо:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left| \int_0^t \int (\gamma(s, \bar{X}_s, \theta) - \gamma(s, X_{s_n}, \theta)) \tilde{\nu}(d\theta \times ds) \right|^2 \\ &= \int_0^t \int \mathbf{E} |\gamma(s, \bar{X}_s, \theta) - \gamma(s, X_{s_n}, \theta)|^2 \tilde{\nu}(d\theta) ds \leq l_t \int_0^t \mathbf{E} |\bar{X}_s - X_{s_n}|^2 ds. \end{aligned}$$

Вираз у правій частині прямує до нуля, виходячи з (2.4). Доведення збіжності для інших інтегралів такий же.

2.2 Модель процесу, що розглядається у цій роботі

Процес Леві – це стохастичний процес із незалежними та стаціонарними приростами [2,40]. До процесу Леві можна віднести як дифузійні приклади, наприклад, процес Вінера, так і чисті процеси, які містять стрибкову компоненту, наприклад, процес Пуассона. Завдяки можливості моделювання невеликих флуктуацій та рідкісних стрибкоподібних подій, процеси Леві стали широко використовуватись як інструмент для опису невизначеності фінансових активів, у задачах ціноутворення та інших. [4,11,12].

Стохастичні моделі, які містять пороги, активно вивчають, особливо в контексті різких змін режимів. Класичні дослідження основну увагу приділяли авторегресивним моделям [53,42] або стохастичних диференціальних рівняннях з кусково-коефіцієнтами для моделювання таких переходів [3,4,12]. При цьому більшість моделей розглядають випадок наявності одного порогу або робили акцент на ефектах пов'язаних з дрейфом, не враховуючи ролі гетероскедастичності в різних режимах [13].

У межах цього дослідження розробляється модель, яка оцінює дрейф, дифузію та стрибкову компоненту, використовуючи процес типу Леві з двома порогами [11].

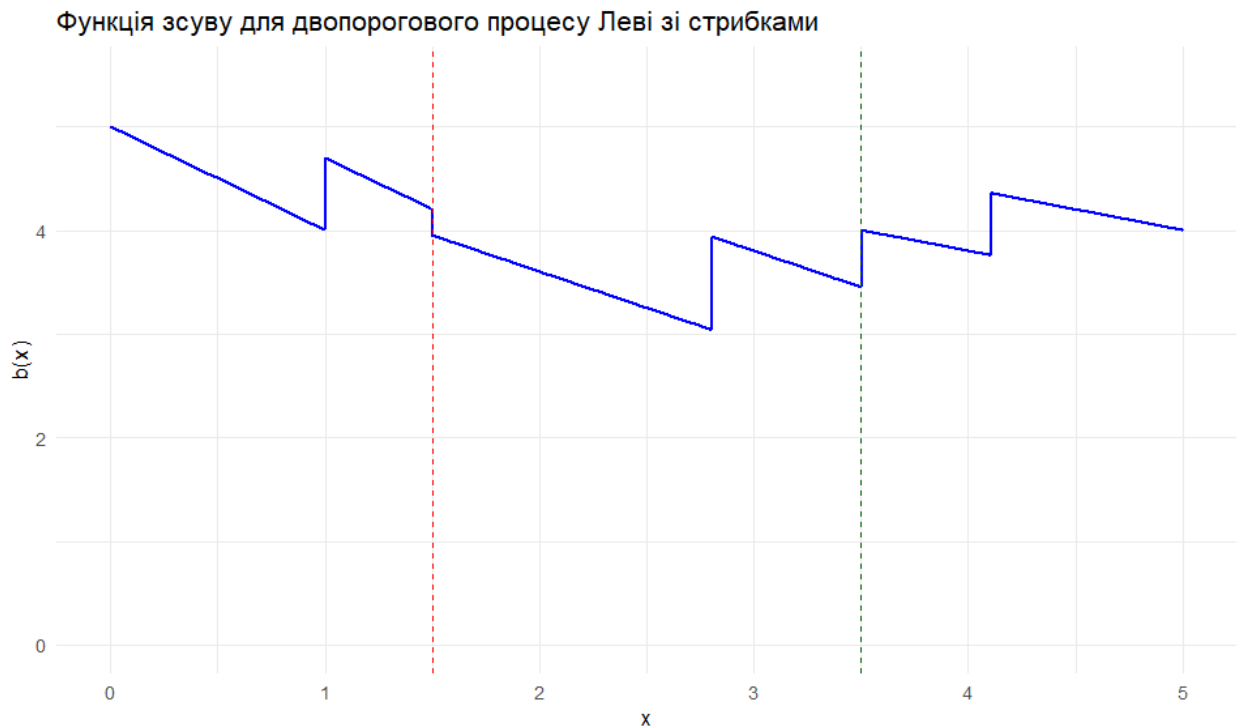


Рис. 2.1 Приклад режимів у допороговому процесі типу Леві із стрибковою компонентою

Такий підхід дав можливість побудувати процес із трьома різними режимами Рис. 2.1, кожен з яких характеризується своїми параметрами. Така модель робить можливим більш гнучко моделювати поведінку процесів, які можна спостерігати, наприклад, у фінансовій сфері.

Основною особливістю цієї моделі є апроксимація за схемою Ейлера [9,37], яка дає можливість використовувати її з даними, що спостерігаються в дискретні моменти часу. Такий підхід дав можливість побудувати логарифмічну функцію правдоподібності, що робить можливим застосування методів AMLE [4,34,53]. Проведене тестування такої моделі показує збіжність параметрів та стійкість оцінки за різних рівнях шуму.

Структура процесів, що вивчають, добре поєднується із прикладними задачами, наприклад, у фінансових часових рядах [53,42,43].

Процес $\{X_t, t \geq 0\}$ є процесом Леві у класичному сенсі, при виконанні умови: $P(X_0 = 0) = 1$. Для $S < t$ розподіли $X_t - X_S$ збігаються з розподілом X_{t-S} (стаціонарні прирости). Якщо $0 \leq s \leq t$, то розподіл $X_t - X_s$ не

залежить від $X_u, u \leq s$ (незалежні прирости). $X_t, t \geq 0$ – стохастично неперервний процес, тобто

$$\forall t \geq 0 \quad X_{t+\varepsilon} \xrightarrow{P} X_t, \varepsilon \rightarrow 0.$$

Покладемо, що процес Леві є розв'язком стохастичного рівняння Іто-Скорохода для

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t + \int_U \gamma(X_t, t)\tilde{\nu}(dt, du), X_0 = 0, \quad (2.5)$$

де: $\{W_t, t \geq 0\}$ процес Вінера, який відповідає неперервним флуктуаціям процесу, $\mu(X_t, t)$ - коефіцієнт дрейфу, що задає середню швидкість зміни процесу, $\sigma(X_t, t)$ - дифузійний компонент, що моделює величину стохастичних коливань, $\int_U \gamma(X_t, t)\tilde{\nu}(dt, du)$ - моделює стрибки процесу, де $\tilde{\nu}$ є компенсованою мірою Пуассона та $\gamma(X_t, t)$ - функція інтенсивності та розміру стрибків.

$$\{\tilde{\nu}(dt, du), t \geq t_0, u \in U \subset [0, T] \times R^1\} = \nu(dt, du) - \mathbf{E}\nu(dt, du), \quad (2.6)$$

$$\mathbf{E}\nu(dt, du) = \Pi(du)dt. \quad (2.7)$$

Наведемо ще один варіант умов існування і єдиності розв'язку (2.5):

Теорема 2. Нехай коефіцієнти (2.5) задовольняють такі умови: для кожного $c > 0$ існує константа l_c така, що

$$|\mu(s, x) - \mu(s, y)|^2 + |\sigma(s, x) - \sigma(s, y)|^2 + \int |\gamma(s, x, \theta) - \gamma(s, y, \theta)|^2 \Pi(d\theta) \leq l_c |x - y|^2, \quad (2.8)$$

при $|x| \leq r, |y| \leq r, s \leq r$. Тоді розв'язок рівняння (2.5) єдиний для x_0 .

Уважатимемо, що в (2.5) коефіцієнт дрейфу μ вже рахує компенсаційний член пуасонівської міри. Це дозволяє у подальшому перейти до розрахункової моделі з використанням звичайної пуассонової міри, не втрачаючи загальності опису динаміки процесу. Покладемо також, що процес однорідний, тобто $\mu(x, t) = \mu(x)$, $\sigma(x, t) = \sigma(x)$, $\gamma(x, t) = \gamma(x)$ та $\mu(x) = (\beta_0 + \beta_{1x})$. Важливо зазначити, що для забезпечення стаціонарності процесу необхідно, щоб $\beta_1 < 0$. [1]

Для чисельного моделювання моделі на основі процесу Леві, який містить стрибкову компоненту у цій роботі було використано схему Ейлера. Згідно з [60] розділ 4.2 схема Ейлера в одновимірному випадку задається виразом:

$$\begin{aligned}
 Y_{n+1} &= Y_n + a\Delta_n + b\Delta W_n \\
 &\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\varepsilon} c(\vartheta) p_{\varphi}(d\vartheta, dz) \\
 &= Y_n + a\Delta_n + b\Delta W_n + \sum_{i=p_{\varphi}(t_n)+1}^{p_{\varphi}(t_{n+1})} c(\xi_i),
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

для $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ з початковим значенням $Y_0 = X_0$. Треба зауважити, що $a = a(t_n, Y_n)$, $b = b(t_n, Y_n)$, $c(\vartheta) = c(t_n, Y_n, \vartheta)$, $c(\xi_i) = c(t_n, Y_n, \xi_i)$. Тут

$$\Delta_n = t_{n+1} - t_n = I_{0,n},$$

довжина часового кроку $[t_n, t_{n+1}]$ і

$$\Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n},$$

є гаусовим розподілом $N(0, \Delta_n)$ процесу Вінера, $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Окрім того,

$$p_{\varphi}(t) = p_{\varphi}(\varepsilon, [0, t]),$$

являє собою загальну кількість стрибків випадкової міри Пуассона до моменту часу t , яка має розподіл Пуассона із середнім значенням λ_t .

$$\xi_i \in \varepsilon,$$

i -та мітка випадкової міри Пуассона p_{φ} в i -й момент стрибка τ_i з функцією розподілу $F(\cdot)$. Схема Ейлера (2.9) загалом досягає сильного порядку збіжності $Y = 0.5$.

Коли ми маємо розмір стрибка, незалежний від мітки ϑ , що означає $c(t, c, \vartheta) = c(t, x)$, схема Ейлера зводиться до

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + b\Delta W_n + c\Delta p_n, \tag{2.10}$$

де

$$\Delta p_n = p_\varphi(t_{n+1}) - p_\varphi(t_n).$$

Тут Δp_n задає кількість стрибків на інтервалі $[t_n, t_{n+1}]$ і має пуассонівський розподіл з параметром, пропорційним довжині кроку дискретизації. Формула (2.10) є особливо зручною для моделювання, оскільки стрибова частина в ній зводиться до добутку розміру одного стрибка на кількість стрибків за крок.

2.3. Двопороговий трирежимний процес типу Леві

У випадку порогових моделей функції дрейфу, дифузії та стрибової складової набувають різних форм залежно від того, у якій області (режимі) перебуває процес X_t [18].

На підставі рівняння (2.5) введемо трирежимний двопороговий процес типу Леві:

$$\begin{aligned} X_t = & \{(\beta_{10} + \beta_{11}X_t)I(X_t \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21}X_t)I(r_1 < X_t \leq r_2) \\ & + (\beta_{30} + \beta_{31}X_t)I(X_t > r_2)\}dt \\ & + \{\sigma_1 I(X_t \leq r) + \sigma_2 I(r_1 < X_t \leq r_2) + \sigma_3 I(X_t > r_2)\}dW_t \\ & + \int_U \{\gamma_1 I(X_t \leq r) + \gamma_2 I(r_1 < X_t \leq r_2) \\ & + \gamma_3 I(X_t > r_2)\} \tilde{v}(dt, du). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Припустимо, що доступні спостережувані дані $X = \{X_0, X_1, \dots, X_q\}$, отримані у моменти часу $\{t_0, t_1, \dots, t_q\}$. Позначимо $\beta = (\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{30}, \beta_{31})$, $\sigma^2 = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ та $\theta = (\beta, \sigma^2, \gamma)$. Нашою метою є оцінювання невідомого параметру $\eta = (r_1, r_2, \theta)$.

Модель описує стохастичний процес, в якому динаміка поведінки змінюється від того в якому режимі знаходиться процес відносно порогових значень r_1 і r_2 . Наприклад, перший режим може відображати фазу зростання з помірною нестабільністю, другий режим - стабільність або «плато», а третій - різкі зміни у процесі, наприклад, зростання.

Такі моделі поєднують властивості класичного процесу Орнштейна-Уленбека (наявність стаціонарного розподілу та ергодичності за певних умов)

з додатковими характеристиками, що зумовлені наявністю стрибкової компоненти та порогових ефектів. Саме це робить їх перспективними для опису нелінійної та асиметричної поведінки реальних економічних і фінансових систем.

Оцінювання параметрів двопорогових процесів типу Леві – це складне завдання через відсутність аналітичних формул для перехідних розподілів. На відміну від класичного Орнштейна–Уленбека, де умовний розподіл має вигляд нормального розподілу, у випадку стрибкових та порогових моделей перехідні функції не піддаються точному аналітичному опису. Це робить неможливим пряме застосування методу максимальної правдоподібності. Тому на практиці широко використовують наближені методи, серед яких центральне місце посідає метод наближеної функції правдоподібності, що ґрунтується на дискретизації [38] рівняння Іто–Скорохода за схемою Ейлера [9].

Ідея полягає в тому, що за малим кроком дискретизації Δt процес можна апроксимувати як дискретний перехід від X_{t_i} до $X_{t_{i+1}}$. У межах кожного інтервалу вважається, що коефіцієнти дрейфу, дифузії та стрибків залишаються постійними. Це дозволяє замінити невідому справжню форму розподілу умовного приросту $(X_{t+\Delta t}|X_t)$ наближеним виразом.

Для дифузійних складових (без стрибків) такий підхід призводить до гаусівської апроксимації приростів. Якщо ж у моделі наявна стрибова частина, її вплив описує через додатковий компонент із компенсованою мірою Пуассона, що призводить до зміни дисперсії. Тоді розподіл в наближеній формі виражається через нормальний компонент із додатковими стрибковими поправками [50].

Отже, для дискретної вибірки $X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ функція правдоподібності замінюється на добуток умовних розподілів, апроксимованих за допомогою схеми Ейлера. Це дозволяє будувати наближене оцінювання [56] за методом максимальної правдоподібності (AMLE) та проводити ідентифікацію параметрів навіть у випадку порогових процесів типу Леві із стрибками [23].

Стохастичне диференціальне рівняння (2.11) можна апроксимувати різницевою схемою за допомогою модифікованого методу Ейлера [13,44,45]:

$$\begin{aligned}
 X_j - X_{j-1} = \Delta_j & \left\{ \begin{aligned} & (\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})I(X_{j-1} \leq r_1) \\ & + (\beta_{20} + \beta_{21}X_{j-1})I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ & (\beta_{30} + \beta_{31}X_{j-1})I(X_{j-1} > r_2) \end{aligned} \right\} \\
 & + \{ \sigma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2 (r_1 < X_{j-1} \leq r_2) \\
 & + \sigma_3 I(X_{j-1} > r_2) \} (W_j - W_{j-1}) \\
 & + \{ \gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 (r_1 < X_{j-1} \leq r_2) \\
 & + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2) \} \Delta v_j.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
 E\{ \gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 (r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2) \} \Delta v_j &= 0, \\
 Var\{ \gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 (r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2) \} \Delta \tilde{v}_j \\
 &= \{ \gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 (r_1 < X_{j-1} \leq r_2) \\
 &+ \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2) \}^2 \Delta v_j.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Зауважимо також, що згідно з конструкцією рівняння (2.13) маємо:

$$E(X_j | X_{j-1}) = X_{j-1} + \left\{ \begin{aligned} & (\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})I(X_{j-1} \leq r_1) \\ & + (\beta_{20} + \beta_{21}X_{j-1})I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ & (\beta_{30} + \beta_{31}X_{j-1})I(X_{j-1} > r_2) \end{aligned} \right\} \Delta_j, \tag{2.14}$$

а також

$$\begin{aligned}
 Var(X_j | X_{j-1}) &= \{ \sigma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2 (r_1 < X_{j-1} \leq r_2) \\
 &+ \sigma_3 I(X_{j-1} > r_2) \} \Delta_j \\
 &+ \{ \gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 (r_1 < X_{j-1} \leq r_2) \\
 &+ \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2) \}^2 \Delta v_j,
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

оскільки відповідні процеси Вінера та міри Пуассона незалежні.

Припускаємо, що відсутність стрибків нескінченного розміру, тобто міра

Леві має компактний носій, що гарантує виконання умови $\int_U |u|^\alpha \nu(du) < \infty$ для будь якого $\alpha > 0$, щоб виконувались стандартні умови збіжності схеми Ейлера [44,45].

Функція ймовірності тоді буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}
 f(X_0, X_1, \dots, X_q | \eta) &= \prod_{j=1}^q f(X_j | X_{j-1}) \prod_{j=1}^q P(X = X_j | X_{j-1}) = \\
 &\prod_{j=1}^q \frac{1}{\sqrt{2\pi\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} \Delta_j}} \times \\
 &\prod_{j=1}^q \exp \left[- \left[\left\{ \frac{(\beta_{10} + \beta_{11} X_{j-1}) I(X_{j-1} \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21} X_{j-1}) I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\beta_{30} + \beta_{31} X_{j-1}) I(X_{j-1} > r_2)}{2\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} \Delta_j} \right\}^2 \right] \right] \times \\
 &\prod_{j=1}^q \left(\frac{\left(\{\gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2)\}^2 \Delta_j \right)^{N_j}}{N_j!} \times e^{-\{\gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2)\}^2 \Delta_j} \right), \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

а N_j – кількість стрибків X_j , що відбулися на інтервалі Δ_j .

Тоді $-2l_X(\theta)$ – подвоєна від’ємна наближена логарифмічна функція правдоподібності:

$$\begin{aligned}
 -2l_X(\theta) &= C + \sum_{j=1}^q \log\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} + \\
 &+ \sum_{j=1}^q \frac{\left[X_j - X_{j-1} - \left\{ \frac{(\beta_{10} + \beta_{11} X_{j-1}) I(X_{j-1} \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21} X_{j-1}) I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\beta_{30} + \beta_{31} X_{j-1}) I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} \Delta_j} \right\} \Delta_j \right]^2}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} \Delta_j} - \\
 &- 2 \sum_{j=1}^q N_j \log(\Delta_j) - 4 \sum_{j=1}^q N_j \log\{\gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2)\} + \\
 &+ 2 \sum_{j=1}^q \Delta t_j \{\gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2)\}^2. \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

Тоді наближеною оцінкою максимальної правдоподібності є мінімум подвоєної від’ємної логарифмічної функції правдоподібності (2.17).

Продиференціюємо (2.17) за β, σ^2 та γ .

Диференціювання за β_{10}, β_{11} для випадків, коли $X_{j-1} \leq r_1$:

$$\begin{aligned}
 & -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{10}} \\
 &= -2 \sum_{j=1}^q \frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})\}I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\} \Delta_j}, \\
 & -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{11}} \\
 &= -2 \sum_{j=1}^q \frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})\}X_{j-1}I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\} \Delta_j}.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Диференціювання за β_{20}, β_{21} для випадків, коли $r_1 < X_{j-1} \leq r_2$:

$$\begin{aligned}
 & -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{20}} \\
 &= -2 \sum_{j=1}^q \frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{20} + \beta_{21}X_{j-1})\}I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\} \Delta_j}, \\
 & -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{21}} \\
 &= -2 \sum_{j=1}^q \frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{20} + \beta_{21}X_{j-1})\}X_{j-1}I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\} \Delta_j}.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Диференціювання за β_{30}, β_{31} для випадків, коли $X_{j-1} > r_2$:

$$\begin{aligned}
 & -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{30}} \\
 &= -2 \sum_{j=1}^q \frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{30} + \beta_{31}X_{j-1})\}I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\} \Delta_j},
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{30}} \\
& = -2 \sum_{j=1}^q \frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{30} + \beta_{31}X_{j-1})\}X_{j-1}I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\} \Delta_j}.
\end{aligned}$$

Диференціювання за $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$:

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \sigma_1^2} \\
& = \sum_{j=1}^q \frac{I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\}} \\
& \quad - \frac{\left(X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})\right)^2 I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^4 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^4 I(X_{j-1} > r_2))\} \Delta_j}, \\
& -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \sigma_2^2} \\
& = \sum_{j=1}^q \frac{I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\}} \\
& \quad - \frac{\left(X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{20} + \beta_{21}X_{j-1})\right)^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^4 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^4 I(X_{j-1} > r_2))\} \Delta_j}, \\
& -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \sigma_3^2} \\
& = \sum_{j=1}^q \frac{I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\}} \\
& \quad - \frac{\left(X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{30} + \beta_{31}X_{j-1})\right)^2 I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^4 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^4 I(X_{j-1} > r_2))\} \Delta_j}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Диференціювання за $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$:

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \gamma_1} \\
& = 4 \sum_{j=1}^q \Delta_j \{ \gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) \\
& \quad + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2) \} I(X_{j-1} \leq r) \\
& \quad - 4 \sum_{j=1}^q \frac{N_j I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{ \gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2) \}} \\
& = 4 \gamma_1 \sum_{j=1}^q \Delta_j I(X_{j-1} \leq r_1) \\
& \quad - 4 \sum_{j=1}^q \frac{N_j I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{ \gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2) \}} \\
& -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \gamma_2} \\
& = 4 \sum_{j=1}^q \Delta_j \{ \gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) \\
& \quad + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2) \} I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) \\
& \quad - 4 \sum_{j=1}^q \frac{N_j I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\{ \gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2) \}} \\
& = 4 \gamma_2 \sum_{j=1}^q \Delta_j I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) \\
& \quad - 4 \sum_{j=1}^q \frac{N_j I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\{ \gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2) \}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \gamma_3} \\
& = 4 \sum_{j=1}^q \Delta_j \{ \gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) \\
& \quad + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2) \} I(X_{j-1} > r_2) \\
& \quad - 4 \sum_{j=1}^q \frac{N_j I(X_{j-1} > r_2)}{\{ \gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2) \}} \\
& = 4 \gamma_3 \sum_{j=1}^q \Delta_j I(X_{j-1} > r_2) \\
& \quad - 4 \sum_{j=1}^q \frac{N_j I(X_{j-1} > r_2)}{\{ \gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2) \}}. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Розв'язавши систему рівнянь $\frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \theta} = 0$, отримаємо матричну форму системи рівнянь для основних параметрів:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{11} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_i I(X_{i-1} \leq r_1)}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 I(X_{i-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{i-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{i-1} > r_2) \end{array} \right\}} & \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_i I(X_{i-1} \leq r_1)}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 I(X_{i-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{i-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{i-1} > r_2) \end{array} \right\}} X_{i-1}^{-1} \\ \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_i I(X_{i-1} \leq r_1)}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 I(X_{i-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{i-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{i-1} > r_2) \end{array} \right\}} X_{i-1}^{-1} & \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_i I(X_{i-1} \leq r_1)}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 I(X_{i-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{i-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{i-1} > r_2) \end{array} \right\}} X_{i-1}^{-2} \end{bmatrix}^{-1} \\
& \quad * \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \frac{(X_i - X_{i-1}) I(X_{i-1} \leq r_1)}{\{ \sigma_1^2 I(X_{i-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{i-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{i-1} > r_2) \}} \\ \sum_{i=1}^q \frac{(X_i - X_{i-1}) I(X_{i-1} \leq r_1)}{\{ \sigma_1^2 I(X_{i-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{i-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{i-1} > r_2) \}} X_{i-1}^{-1} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \beta_{20} \\ \beta_{21} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\begin{Bmatrix} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{Bmatrix}} & \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\begin{Bmatrix} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{Bmatrix}} X_{j-1}^{-1} \\ \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\begin{Bmatrix} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{Bmatrix}} X_{j-1}^{-1} & \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\begin{Bmatrix} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{Bmatrix}} X_{j-1}^{-2} \end{bmatrix}^{-1} \\
& * \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1}) I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\}} \\ \sum_{i=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1}) I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} X_{j-1}^{-1}} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \beta_{30} \\ \beta_{31} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(X_{j-1} > r_2)}{\begin{Bmatrix} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{Bmatrix}} & \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(X_{j-1} > r_2)}{\begin{Bmatrix} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{Bmatrix}} X_{j-1}^{-1} \\ \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(X_{j-1} > r_2)}{\begin{Bmatrix} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{Bmatrix}} X_{j-1}^{-1} & \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(X_{j-1} > r_2)}{\begin{Bmatrix} \sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \\ \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \\ \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2) \end{Bmatrix}} X_{j-1}^{-2} \end{bmatrix}^{-1} \\
& * \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1}) I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\}} \\ \sum_{i=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1}) I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} X_{j-1}^{-1}} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^q \frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})\}^2 I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^4 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^4 I(X_{j-1} > r_2)\} \Delta_j}}{\sum_{i=1}^q \frac{I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1} \leq r_1)\}}},$$

$$\begin{aligned}
\sigma_2^2 &= \frac{\sum_{i=1}^q \frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{20} + \beta_{21}X_{j-1})\}^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^4 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^4 I(X_{j-1} > r_2)\} \Delta_j}}{\sum_{i=1}^q \frac{I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}{\{\sigma_2^4 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)\}}}, \\
\sigma_3^2 &= \frac{\sum_{i=1}^q \frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{30} + \beta_{31}X_{j-1})\}^2 I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^4 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^4 I(X_{j-1} > r_2)\} \Delta_j}}{\sum_{i=1}^q \frac{I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_3^4 I(X_{j-1} > r_2)\}}}, \\
\gamma_1 &= \frac{\sum_{j=1}^q \frac{N_j I(X_{j-1} \leq r_1)}{\gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2)}}{\sum_{j=1}^q \Delta_j I(X_{j-1} \leq r_1)}, \\
\gamma_2 &= \frac{\sum_{j=1}^q \frac{(N_j I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2))}{\gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2)}}{\sum_{j=1}^q \Delta_j I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)}, \\
\gamma_3 &= \frac{\sum_{j=1}^q \frac{(N_j I(X_{j-1} > r_2))}{\gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2)}}{\sum_{j=1}^q \Delta_j I(X_{j-1} > r_2)}. \tag{2.23}
\end{aligned}$$

2.4. Оцінювання параметрів дрейфу, дифузії та стрибків

Оцінювання параметрів дрейфу, дифузії та стрибків можна здійснити, використавши постановку задачі у схемі апроксимації Леві [68], [69].

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння вигляду:

$$dx^\varepsilon(t) = C(x^\varepsilon(t), r(t/\varepsilon^2))dt + d\eta^\varepsilon(t), x^\varepsilon(0) = x_0, 0 \leq t \leq T. \tag{2.24}$$

Тут функція $r(x)$ задає порогове правило перемикавання режимів і відображає фазовий простір на дискретну множину станів $E = \{1, 2, 3\}$:

$$r(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \leq r_1 \text{ (режим 1, } D_1), \\ 2, & \text{якщо } r_1 < x \leq r_2 \text{ (режим 2, } D_2), \\ 3, & \text{якщо } x > r_2 \text{ (режим 3, } D_3). \end{cases}$$

Оператор $\mathbf{Q}$ є генератором переходів між пороговими режимами D_k , при масштабуванні часу t/ε^2 . Оператор $\mathbf{Q}$ діє у просторі обмежених функцій і задається матрицею інтенсивностей переходів між зонами

$$\mathbf{Q}\varphi(k) = \sum_{j \in E} q_{kj} [\varphi(j) - \varphi(k)], k \in E$$

де q_{kj} – інтенсивності перетину порогових меж процесом. Цей оператор є ергодичним і визначає стаціонарні ймовірності $\pi_k = \pi_k(r_1, r_2)$.

Позначимо через $\mathbf{R}_0$ потенціальний оператор для генератора $\mathbf{Q}$, який визначається рівністю

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{P} - (\mathbf{P} + \mathbf{Q})^{-1},$$

де $\mathbf{P}\varphi(k) = \sum_{j=1}^3 \pi_j \varphi(j) \cdot 1(k)$ – проєктор на підпростір $N_{\mathbf{Q}} = \{\varphi: \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ нулів оператора $\mathbf{Q}$.

Імпульсний процес та умови апроксимації Леві. Для кожного з трьох порогових режимів $k \in \{1, 2, 3\}$, генератор сукупності процесів із незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t, k)$ має вигляд:

$$\Gamma^\varepsilon(k)\varphi(w) = \varepsilon^{-2} \int_{\mathbb{R}} (\varphi(w+v) - \varphi(w)) \Gamma^\varepsilon(dv, k), w \in D_k. \quad (2.25)$$

L1. Умови на перший та другий моменти Для кожного режиму $k \in \{1, 2, 3\}$

$$\int_{\mathbb{R}} v \Gamma^\varepsilon(dv, k) = \varepsilon a_1(k) + \varepsilon^2(a_2(k) + \theta_a(k)), \theta_a(k) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$\int_{\mathbb{R}} v^2 \Gamma^\varepsilon(dv, k) = \varepsilon^2(b(k) + \theta_b(k)), \theta_b(k) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0.$$

L2. Умова на функцію розподілу великих стрибків

Для функції $g(v) \in C_3(\mathbb{R})$ (що розділяє міри),

$$\int_{\mathbb{R}} g(v) \Gamma^\varepsilon(dv, k) = \varepsilon^2 \left(\int_{\mathbb{R}} g(v) \Gamma_0(dv, k) + \theta_g(k) \right), \theta_g(k) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0.$$

L3. Рівномірно квадратична інтегровність

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{|v| > c} v^2 \Gamma_0(dv, k) = 0, k \in \{1, 2, 3\}$$

Нехай також виконується умова балансу

$$\hat{a}_1 = \sum_{k=1}^3 \pi_k a_1(k) = 0. \quad (2.26)$$

Теорема 1. Нехай для еволюційної системи (2.24) виконано умову балансу (2.26) та умови апроксимації Леві L1–L3 для генераторів збурень $\Gamma^\varepsilon(k)$ порогових режимів [71]:

$$D_k, k \in E = \{1, 2, 3\}.$$

Тоді має місце слабка збіжність,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L^\varepsilon \varphi(u) = L\varphi(u),$$

де граничний оператор має структуру

$$L\varphi(u) = [\hat{C}(u) + \hat{a}_2]\varphi'(u) + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(u) + \int_{\mathbb{R}} [\varphi(u+v) - \varphi(u)] \hat{\Gamma}_0(dv),$$

де $\varphi(u) \in C_3(\mathbb{R})$,

$$\hat{C}(u) = \sum_{k \in E} \pi_k C(u, k).$$

$$\hat{a}_2 = \sum_{k \in E} \pi_k (a_2(k) - a_0(k)), a_0(k) = \int_{\mathbb{R}} v \Gamma_0(dv, k).$$

$$\sigma^2 = \sum_{k \in E} \pi_k (b(k) - b_0(k)) + 2 \sum_{k \in E} \pi_k a_1(k) R_0 a_1(k), b_0(k) = \int_{\mathbb{R}} v^2 \Gamma_0(dv, k).$$

$$\hat{\Gamma}_0(dv) = \sum_{k \in E} \pi_k \Gamma_0(dv, k).$$

Зауваження. Структура знайденого в теоремі оператора L однозначно задає коефіцієнти для відповідного граничного СДР:

$$d\hat{u}(t) = [\hat{C}(\hat{u}(t)) + \hat{a}_2]dt + \sigma dW(t) + \int_{\mathbb{R}} v \tilde{v}(dt, dv).$$

Наслідок. Нехай пороги r_1 та r_2 є відомими. Тоді, як бачимо зі структури граничного оператора L , його усереднений дрейф, гранична дифузія

та міра стрибків повністю і однозначно визначаються параметрами дограничної системи.

2.5. Обчислювальний алгоритм

Сформулюємо алгоритм [41] як загальну ітераційну процедуру, придатну для обчислення наближеної максимальної правдоподібності за допомогою моделі, що базується на оцінках (2.23).

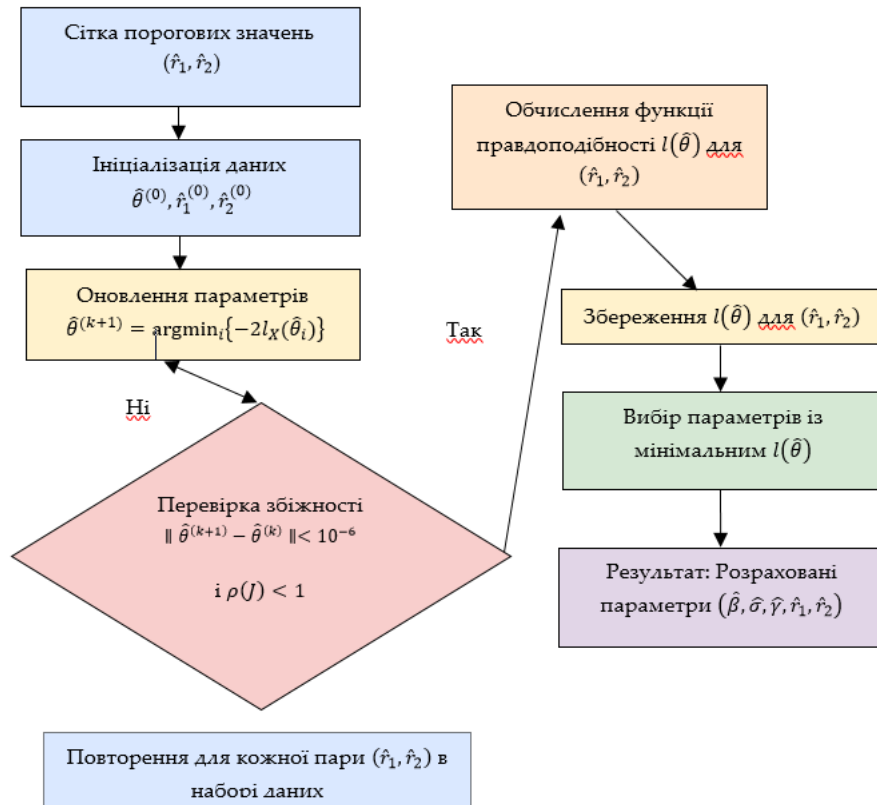


Рис. 2.2 Схема роботи алгоритму

Крок 1. Набір даних для моделі.

Часовий ряд $\{X_0, X_1, \dots, X_q\}$, для якого обчислюються порядкові статистики $\{X_{(0)}, X_{(1)}, \dots, X_{(q)}\}$, де $X_{(0)} \leq X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(q)}$.

Нехай $a = X_{(q/5)}$, $b = X_{(4q/5)}$, $\hat{r} = a + \frac{i}{s}$, $i = 0, 1, \dots, \lambda$, де $b = \hat{r}_\lambda$, $s \in \mathbb{N}$.

Крок 2.

2.1. Зафіксуємо $\hat{r}$ для $i = 0, 1, \dots, \lambda$. Визначимо $\sigma_1^2(0), \sigma_2^2(0), \sigma_3^2(0), \gamma_1(0), \gamma_2(0), \gamma_3(0)$.

2.2. Для $k \geq 1$ обчислимо

$$\theta(k) = (\hat{\beta}_{10}(k), \hat{\beta}_{11}(k), \hat{\beta}_{20}(k), \hat{\beta}_{21}(k), \hat{\beta}_{30}(k), \hat{\beta}_{31}(k), \\ \hat{\sigma}_1^2(k), \hat{\sigma}_2^2(k), \hat{\sigma}_3^2(k), \hat{\gamma}_1(k), \hat{\gamma}_2(k), \hat{\gamma}_3(k)),$$

рекурсивно, як у рівняннях (9), замінивши відповідно у правих частинах β_{10} на $\hat{\beta}_{10}(k-1)$, β_{11} на $\hat{\beta}_{11}(k-1)$, β_{20} на $\hat{\beta}_{20}(k-1)$, β_{21} на $\hat{\beta}_{21}(k-1)$, β_{30} на $\hat{\beta}_{30}(k-1)$, β_{31} на $\hat{\beta}_{31}(k-1)$, σ_1^2 на $\hat{\sigma}_1^2(k-1)$, σ_2^2 на $\hat{\sigma}_2^2(k-1)$, σ_3^2 на $\hat{\sigma}_3^2(k-1)$, γ_1 на $\hat{\gamma}_1(k-1)$, γ_2 на $\hat{\gamma}_2(k-1)$ та γ_3 на $\hat{\gamma}_3(k-1)$.

2.3. Повторимо крок 2.2 доки $\hat{\theta}(k)$ не буде збіжною.

Нехай збіжна оцінка буде мати вигляд:

$$\hat{\theta}_i = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{10,i}(k), \hat{\beta}_{11,i}(k), \hat{\beta}_{20,i}(k), \hat{\beta}_{21,i}(k), \hat{\beta}_{30,i}(k), \hat{\beta}_{31,i}(k), \\ \hat{\sigma}_{1,i}^2(k), \hat{\sigma}_{2,i}^2(k), \hat{\sigma}_{3,i}^2(k), \hat{\gamma}_{1,i}(k), \hat{\gamma}_{2,i}(k), \hat{\gamma}_{3,i}(k) \end{pmatrix}.$$

Крок 3.

Для $i = 0, 1, \dots, \lambda$ обчислимо $-2l_X(\hat{\theta}_i)$. Тоді $\tau = \operatorname{argmin}_i \{-2l_X(\hat{\theta}_i)\}$ і наближеною оцінкою максимальної правдоподібності $\eta = (r, \theta)$ буде $\hat{\eta} = (\hat{r}_\tau, \hat{\theta}_\tau)$.

2.6. Числова збіжність ітераційного алгоритму

Для оцінки параметрів допорогової моделі, яка охоплює пороги r_1 і r_2 , які, своєю чергою, ділять спостереження на три сегменти, застосовується ітераційна процедура, що дозволяє розрахувати параметри моделі: β_{i0}, β_{i1} для $i = 1, 2, 3$ та $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ та $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Вектор (набір) параметрів моделі виглядає так:

$$\theta = (\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{30}, \beta_{31}, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

У процесі роботи процедури, на k -му кроці алгоритм оновлює параметри:

$$\theta^{(k+1)} = F(\theta^{(k)}), \quad (2.27)$$

де F — функція, яка обчислює і повертає нові параметри, базуючись на значеннях поточного кроку k .

Теорема Банаха. Полягає в тому, що якщо функція F при кожній наступній ітерації робить різницю між значеннями меншою, то при

продовженні роботи алгоритму процедури все зійдеться до стабільного результату, тобто

$$\|F(\theta^{(1)}) - F(\theta^{(2)})\| \leq q \|\theta^{(1)} - \theta^{(2)}\|, 0 < q < 1, \quad (2.27)$$

то існує єдина фіксована точка θ^* , і послідовність $\theta^{(k)}$ поступово буде збігатися до неї. Для перевірки цієї властивості було використано спектральний аналіз матриці Якобі [27].

Матриця Якобі $J(\theta)$ - це набір часткових похідних:

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i(\theta)}{\partial \theta_j}, \quad (2.28)$$

тобто кожен елемент демонструє, наскільки змінюється параметр θ_i при зміні параметра θ_j .

Для моделі з двома порогами матриця Якобі має розмір 10×10 , наприклад:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_{10}^{(k+1)}}{\partial \beta_{10}^{(k)}} & \dots & \frac{\partial \beta_{10}^{(k+1)}}{\partial \sigma_3^{2,(k)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \sigma_3^{2,(k+1)}}{\partial \beta_{10}^{(k)}} & \dots & \frac{\partial \gamma^{k+1}}{\partial \gamma^k} \end{pmatrix}.$$

Для оцінки матриці Якобі на кожному кроці ітераційного алгоритму замість аналітичних похідних, було використано метод чисельного наближення на основі односторонньої скінченно-різничевої схеми (форвард-різниця [24] [25]):

$$J_{ij} \approx \frac{\theta_i^{(k+1)} - \theta_i^{(k)}}{\theta_j^{(k)}} \left(\text{для } \theta_j^{(k)} \neq 0 \right). \quad (2.29)$$

Ми обмежуємо область визначення J_{ij} умовою $|\theta_j^{(k)}| \geq \varepsilon$ (із малим пороговим значенням ε) – це забезпечує стабільну локальну апроксимацію матриці Якобі, яка використовується лише для перевірки спектрального радіуса $\rho(J) < 1$.

У чисельнику зміна значення θ_i між ітераціями, а в знаменнику попереднє значення параметра θ_j , тобто наближення відносної зміни одного параметра по відношенню до іншого.

Після побудови наближеної матриці Якобі J , обчислюється її **спектральний радіус** - максимальне за модулем власне значення серед усіх власних значень матриці $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:

$$\rho(J) = \max |\lambda_i|.$$

У процесі аналізу збіжності в ітераційному алгоритмі було визначено фактори, які суттєво впливають на швидкість і точність роботи алгоритму.

Початкові порогові значення. Значна розбіжність між початковими обраними значеннями порогів і їх реальними значеннями може сповільнити роботу алгоритму, оскільки необхідно буде проводити багато ітерацій.

Критерій зупинки. Критерій оптимальної збіжності повинен забезпечувати оптимальне співвідношення між точністю результату та часом і ресурсами для його обчислення.

Оцінка зміни параметрів між ітераціями. У запропонованому алгоритмі, додатково оцінюються значення параметрів в поточній та попередніх ітераціях. Мінімальна розбіжність у значеннях параметрів сигналізує, що алгоритм наблизився до оптимального результату.

Оцінка функції правдоподібності між ітераціями.

Ми уточнюємо, що послідовність параметрів $\{\theta(k)\}$ генерується за правилом $\theta^{(k+1)} = G(\theta^{(k)}; r_1, r_2)$. За стандартних припущень (неперервності та диференційовності функції G , локальної ідентифікованості моделі), якщо спектральний радіус матриці Якобі в точці фіксації задовольняє умову $\rho(J_G(\theta^*)) < 1$, тоді відображення G є скороченням у певній околі точки θ^* , і послідовність збігається: $\theta^{(k)} \rightarrow \theta^*$ (за теоремою Банаха про фіксовану точку).

У нашій реалізації явно перевіряється виконання умов $\rho(J^{(k)}) < 1$ та $\|\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}\| < 10^{-6}$ [26], що слугує критерієм збіжності.

Із огляду на неконвексність функції правдоподібності, ми опрацьовуємо лише локальну, а не глобальну збіжність, і для зменшення чутливості до початкових значень використовуємо багатократні ініціалізації.

В алгоритмі враховується перевірка функції правдоподібності між ітераціями $|l_X(\theta_{k+1}) - l_X(\theta_k)|$. Якщо різниця між значеннями збігається до нуля, то за наступних кроків не відбувається покращення моделі. У такому випадку фіксується порогове значення, при якому досягається максимальна правдоподібність, і наступні кроки по оптимізації не є доцільними.

Описаний підхід дозволяє математично обґрунтувати працездатність запропонованої моделі.

2.7. Оцінка результатів роботи алгоритму

Для проведення експериментів, було розроблено програмний код в середовищі RStudio, який будується на алгоритмі, що приведений вище і дає можливість рахувати параметри $\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{30}, \beta_{31}, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, а також порогові значення r_1, r_2 .

Для оцінки ефективності та збіжності методу було згенеровано синтетичний часовий ряд. Кожен режим характеризувався лінійною детермінованою компонентою дрейфу та накладеним гаусовим шумом, де дисперсія шуму змінювалася між режимами, а також стрибками. Ці режими були об'єднані для формування повного набору даних $\{X_t\}_{t=1}^n$, призначеного для представлення процесу переходу через структурні пороги з різною динамікою процесу.

Збіжність оцінок параметрів оцінювалася за допомогою спектрального радіусу матриці Якобі - $\rho(J) = \max |\lambda_i|$. Якщо $\rho(J) < 1$, то ітераційний процес локально на поточній ітерації збігається до стійкого розв'язку (теорема Банаха підтверджує це). Якщо $\rho(J) > 1$, то локальна збіжність не гарантована.

У розроблений програмний код було додано функціонал відображення результатів роботи алгоритмів у вигляді графіку, на якому відображалась динаміка процесу та знайдені значення порогів. Графіки підтвердили

відповідність значень, знайдених за допомогою алгоритму порогів та точок змін динаміки процесу (синтетично сформованого на основі набору часових даних).

Графік, наведений нижче, підтверджує здатність запропонованого алгоритму знаходити переходи у динаміці процесу. Підвищений рівень дисперсії, може впливати на точність результату (в такому випадку знайдені порогові значення будуть зміщеними в одну із сторін).

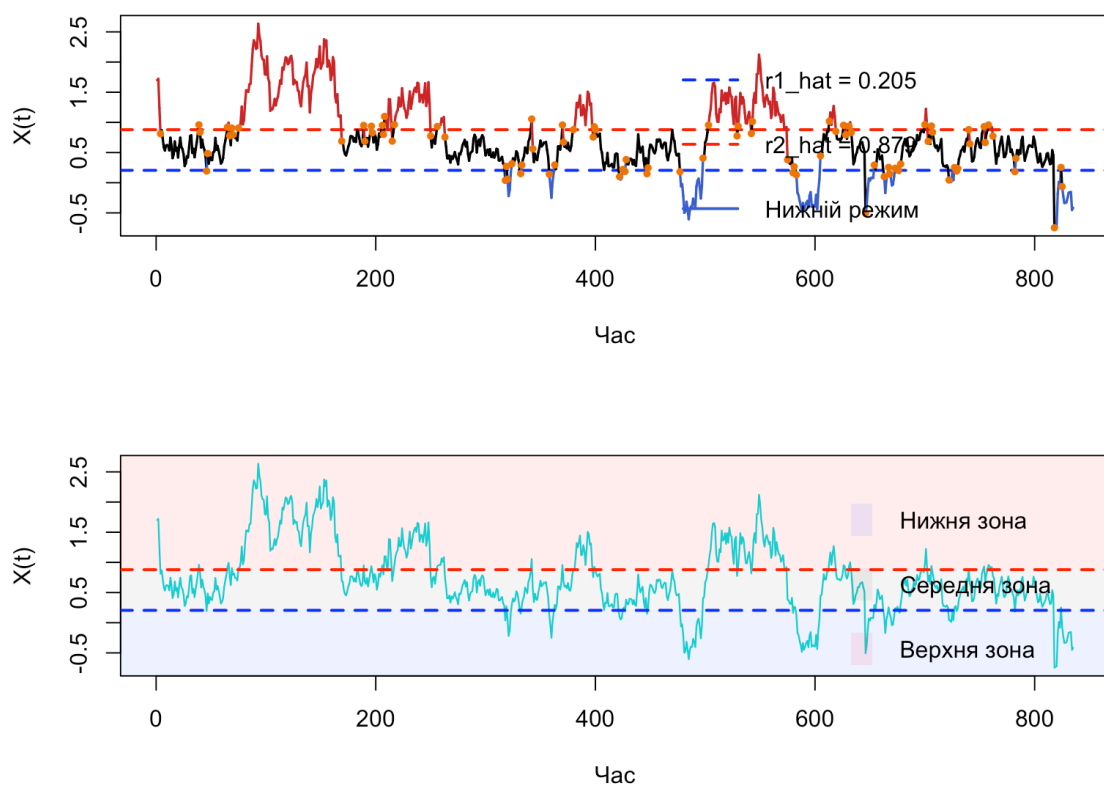


Рис.2.3 Отримані результати тестування $r_1 \approx 0.205$ та $r_2 \approx 0.879$

На Рис. 2.3 відображено результати оцінки параметрів для двопорогового процесу типу Леві, який містить стрибкову компоненту. Було отримано значення $r_1 \approx 0.205$ та $r_2 \approx 0.879$. При реальних значеннях, які були задані при моделюванні процесу $r_1 = 0.2$ та $r_2 = 0.9$. Тобто відносна похибка склала для $r_1 \approx 0,026$, а для $r_2 \approx 0.023$.

Для тестування цього набору даних було також використано метод Монте Карло для трьох часових горизонтів спостережень: $T = 10, T = 50, T = 100$.

Параметр	Істинне	$T10$	$T50$	$T100$
r_1	0.2	0.0954(0.1311)	0.1330(0.0726)	0.1283(0.0796)
r_2	0.9	0.8804(0.1329)	0.9737(0.0923)	0.9315(0.0727)
β_{10}	0.2	0.4856(0.5771)	-0.0176(0.5292)	-0.1090(0.3206)
β_{11}	-2	-4.1247(3.9312)	-2.2666(1.1109)	-2.8234(1.1962)
β_{20}	1.125	0.1632(1.1242)	0.5078(0.5576)	0.4963(0.3846)
β_{21}	-1.5	-0.4561(2.0997)	-0.6958(0.9535)	-0.5838(0.5875)
β_{30}	2.9	2.8736(2.6167)	2.8374(0.7255)	2.7557(0.5395)
β_{31}	-2	-2.1279(1.6619)	-1.9805(0.4224)	-1.9546(0.3537)
σ_1	0.75	0.8039(0.2714)	0.7971(0.0804)	0.8048(0.0632)
σ_2	0.55	0.6309(0.0989)	0.7954(0.1309)	0.6840(0.0631)
σ_3	0.85	0.8926(0.0978)	0.8864(0.0499)	0.9197(0.0536)

Таблиця 2.1 Результати тестування алгоритму

Як видно із Таблиці 2.1, верхній поріг r_2 оцінюється стабільно та демонструє збіжність при зростанні обсягу вибірки, тоді як нижній поріг r_1 має систематичне зміщення. Це пов'язано з нерівномірним розподілом спостережень по режимах та впливом стрибкової компоненти. Оцінки параметрів дрейфу неоднорідні. У першому режимі видно слабку оцінку, це може бути пов'язано з впливом стрибків або наявністю невеликої кількості точок у цьому режимі. У другому режимі значення не стабільні, це перехідний режим, тому моделі найскладніше його оцінити. Третій режим показує вже більш стабільний результат.

На практиці проводилось тестування на різних вибірках даних і візуальний аналіз отриманих графіків також демонстрував, що алгоритм в загальному визначає області зміни режимів.

Для прикладу було взято набір синтезованих даних і для нього наведено характеристики, що демонструють додаткові метрики.

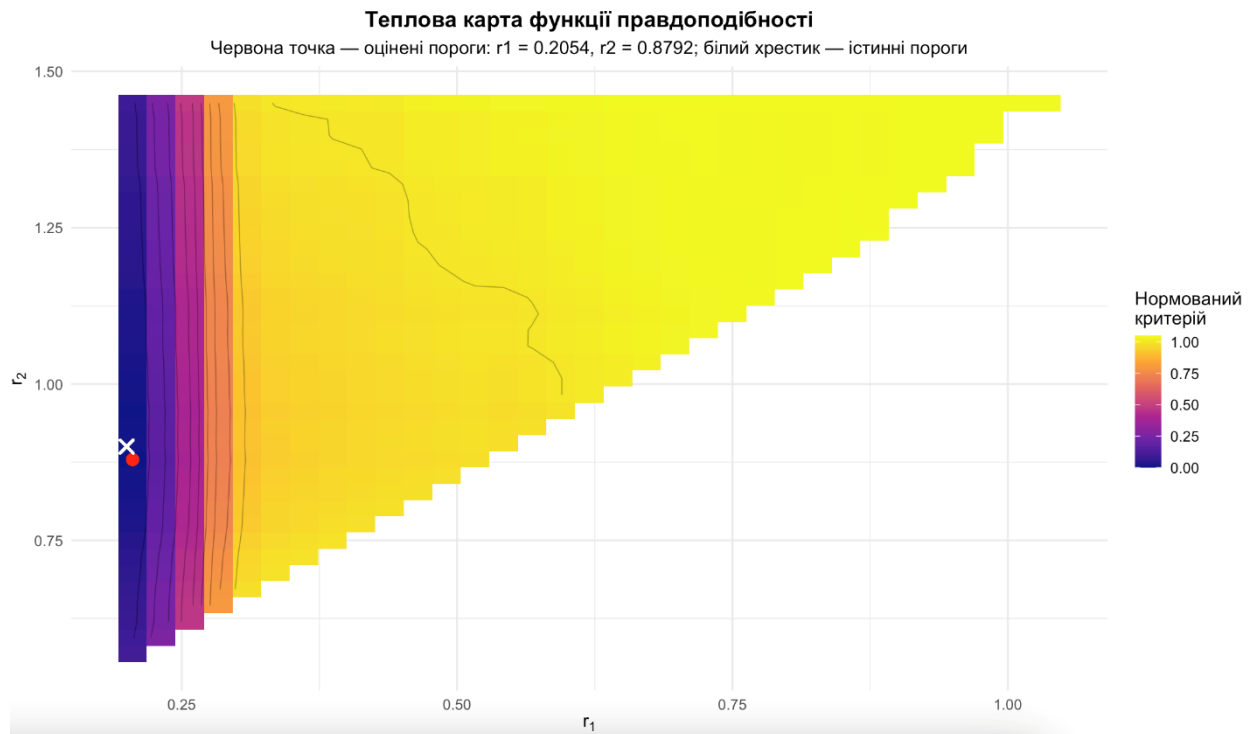


Рис. 2.4 Теплова карта значень функції правдоподібності для моделі із стрибками

На Рис. 2.4 представлено двовимірну карту значень функції правдоподібності для моделі з двома порогами, яка містить стрибкову компоненту. По осі r_1 та r_2 розміщено можливі значення першого і другого порогів, а кольорова шкала відображає значення функції правдоподібності $l(r_1, r_2)$.

Світліші кольори позначають більші значення функції правдоподібності, а темніші області описують менші значення цієї функції. Як видно з рисунка, структура поверхні функції є складною, з локальними областями мінімуму та максимуму, що формуються стрибковою компонентою у досліджуваному процесі. Червона точка на графіку відображає оптимальні оцінки порогів, значення яких були отримані шляхом чисельної реалізації запропонованого у роботі алгоритму. Біла позначка – це істинні значення. Оцінені значення для набору даних дорівнюють $r_1 = 0.205$ $r_2 = 0.879$. Точка,

розташована в області відносно малих значень функції правдоподібності, підтверджує, що знайдені параметри моделі є наближеними до оптимальних для заданого набору даних.

Включення у функцію правдоподібності стрибкової компоненти зробило її поверхню більш нерівномірною, якщо порівнювати із моделями, де враховується тільки дифузійна складова. Така нерівномірність ускладнила чисельний розрахунок параметрів моделі.

На Рис. 2.5 Відображено тривимірну модель поверхні функції правдоподібності $l(r_1, r_2)$, яка будується на різних комбінаціях порогових параметрів. Горизонтальні осі відповідають значенням порогів r_1 та r_2 , а вертикальна вісь демонструє значення функції правдоподібності. Колір наглядно відображає величину цієї функції.

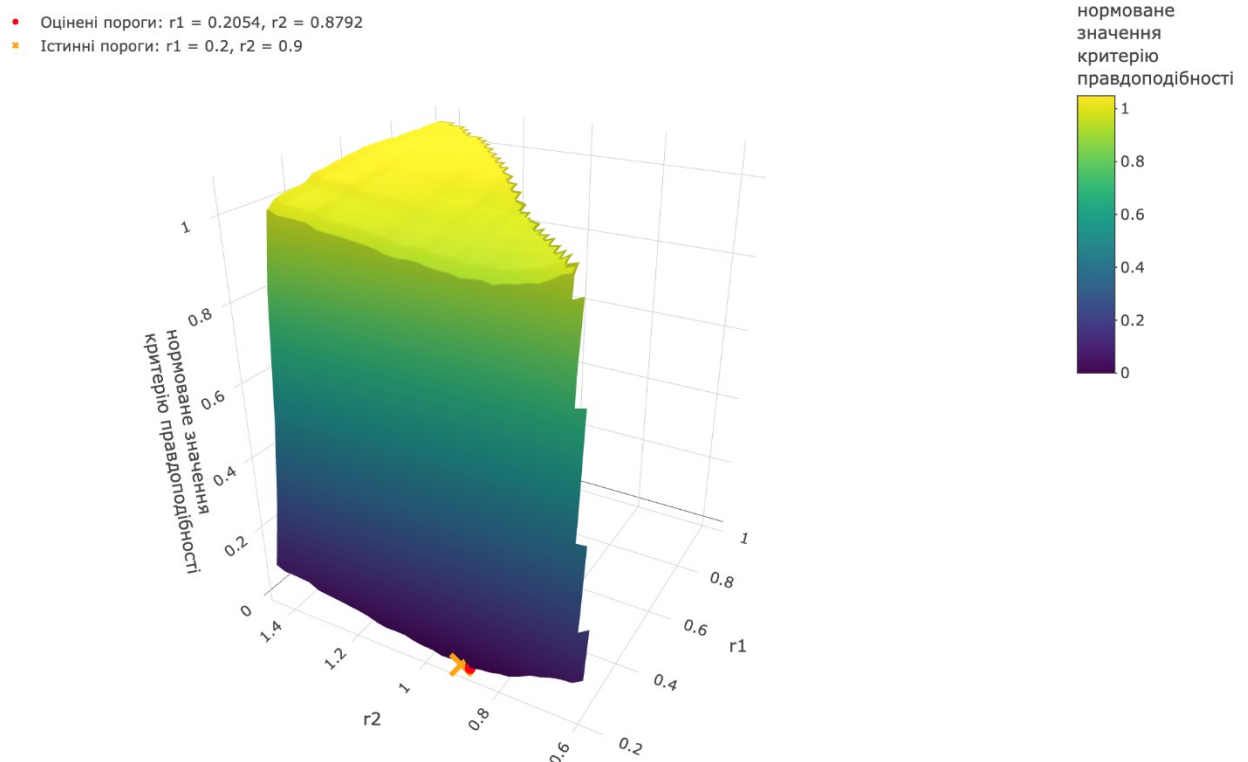


Рис. 2.5 3D графік поверхні функції правдоподібності

Як видно з 3D графіку Рис. 2.10 поверхня має складну структуру. Виходячи з отриманих результатів, можна зробити висновок, що поверхня правдоподібності має складну структуру, яка підтверджує, що задача з оцінювання порогів є нелінійною і чутливою до вибору параметрів моделі.

Така поведінка пояснюється тим, що зміна порогів перерозподіляє набір спостережень між трьома режимами, що, своєю чергою, впливає на оцінку коефіцієнтів дрейфу, дисперсій та стрибкової компоненти. Саме тому для пошуку глобального мінімуму доцільно використовувати перебір по сітці або інші чисельні методи оптимізації.

Червона точка на графіку відповідає розрахованим оптимальним порогам. Як видно точка розташована у глибокій області поверхні, яка свідчить, що знайдені параметри відповідають області мінімального значення функції правдоподібності. Отже, запропонований тривимірний графік дозволяє наочно проаналізувати поведінку функції правдоподібності та підтвердити правильність отриманих оцінок порогових параметрів для моделі стохастичного процесу зі стрибками.

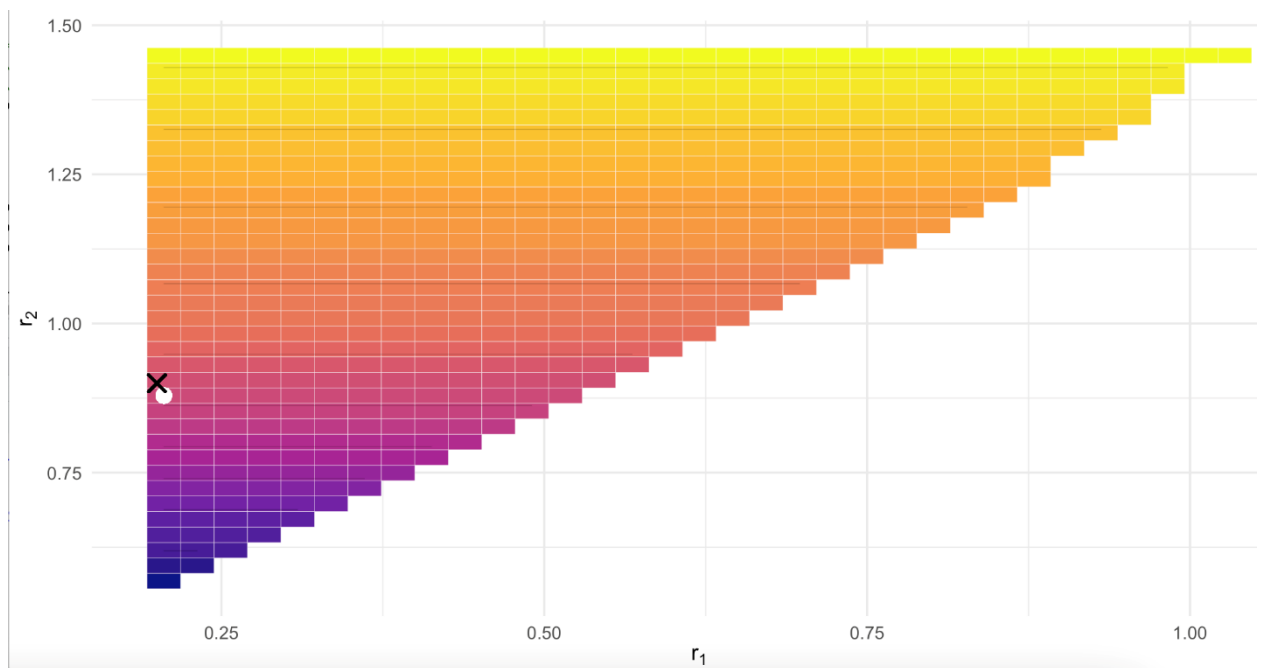


Рис. 2.6 Графік області локальної збіжності ітераційного алгоритму

На Рис. 2.6 представлено область локальної збіжності ітераційного алгоритму для набору даних, що тестувався.

По горизонтальній осі відображається можливі значення першого порогу r_1 , а по вертикальній осі значення другого порогу r_2 .

Біла точка на графіку показує оцінені пороги, які були отримані після виконання процедури оцінювання параметрів моделі. Її розташування свідчить про те, що знайдені параметри належать до області локальної збіжності, що підтверджує правильність знайдених оцінок. Отже, побудова бінарної картки дає змогу визначити області параметричного простору, в яких ітераційний алгоритм є локально більш стабільним.

За результатами чисельних експериментів можна побачити, що алгоритм відтворює положення точок (порогових) зміни динаміки процесу, але точність залежить від структури вхідного набору даних. Якщо в динаміці процесу є чітке розділення режимів, то похибка розрахунків зменшується. Якщо ж процес містить різкі точкові зміни або рівномірне плато, то похибка в такому разі може зростати. Отримані результати підтверджують здатність запропонованої методики проводити оцінювання процесів на основі рівняння Іто-Скорохода. Точність розрахунку параметрів залежить від того наскільки складною являється структура опрацьованих даних.

Висновки до Розділу 2

У розділі 2 було розглянуто та пропрацьовано підхід до моделювання стохастичних процесів на базі рівняння Іто-Скорохода на основі процесу типу Леві. Це дозволило окрім дифузійної компоненти включити в модель і стрибкову складову. На відміну від моделей, типу Орнштейна-Уленбека, такий підхід дозволив зробити опис моделі більш приближеним до реальних умов і динаміки процесу, зокрема за рахунок включення різких змін, асиметрії у розподіли.

Наукова новизна цього розділу - це формалізація двопорогові моделі на основі рівняння Іто-Скорохода, а саме процесу типу Леві, який включає стрибки, та розробка алгоритму оцінки параметрів такої моделі на базі доопрацювання алгоритму із розділу 1 із включенням стрибкової компоненти.

Алгоритм реалізується через використання наближеної функції максимальної правдоподібності та апроксимації моделі за схемою Ейлера.

Прикладне значення проведеної роботи у розділі 2 підтверджено результатами тестування розробленого коду на основі запропонованого алгоритму на згенерований даних. Отримані оцінки порогових значень наближені до їхніх реальних значень, що наведено у зведеній таблиці з фіксацією абсолютних і відносних похибок. Це на практиці підтвердило здатність алгоритму ідентифікувати параметри моделі навіть у двопорогових процесах із стрибками.

Із огляду на вищезазначене, напрацювання розділу 2 розширюють наяві методи аналізу стохастичних процесів та роблять додатковий внесок у дослідження порогових моделей на основі процесу типу Леві, що може містити стрибкову компоненту. Отримані результати можуть бути застосовані у прикладних сферах, наприклад, для аналізу часових рядів у фінансовій, економічній та інших сферах діяльності, де можуть спостерігатися нелінійні та стрибкоподібні процеси.

РОЗДІЛ 3. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

3.1. Технічний стек та реалізація

У розділі 3 розглядається програмна реалізація запропонованого алгоритму для оцінки стохастичних порогових процесів Іто та Іто-Скорохода.

У межах цього дослідження програмне рішення дозволило протестувати запропонований у роботі алгоритм оцінки параметрів, шляхом проведення чисельних експериментів.

Під час вибору технічного стеку було враховано декілька основних вимог, а саме: можливість реалізації складних чисельних розрахунків, наявність інструментів для роботи із матрицями та векторами та наявність графічної бібліотеки для візуалізації отриманих результатів.

У межах цієї роботи було використано мову програмування R та в якості середовища розробки RStudio. Ці інструменти широко використовуються для проведення чисельних обчислень та статистичного аналізу.

Мова програмування R. Під час вибору мови програмування для реалізації цієї задачі основний акцент робився на можливість виконання складних чисельних розрахунків та наявності можливості працювати із статистичними моделями. Мова програмування R якраз і стала таким інструментом, який науковці часто використовують для математичного моделювання, до того ж вона має досить широкі можливості для розширення функціоналу за рахунок набору бібліотек.

Для реалізації запропонованого у роботі алгоритму у програмній площині є необхідність використовувати різні типи даних, як для ініціалізації, так і для збереження результатів. У R є можливість працювати із векторами, матрицями, масивами, списками та фреймами, що закриває цілий спектр можливостей по роботі з даними. Конкретно для цього дослідження особливо важливою була можливість реалізації матричних операцій, які наявні в чисельних розрахунках запропонованої математичної моделі. Мова R

оптимізована для роботи з матрицями та векторами, у тому числі для роботи з великими наборами даних.

Оскільки для вирішення поставлених у дослідженні задач була необхідність візуалізації отриманих результатів, то попередньо було оцінено програмні рішення на мові R для побудови двовимірних та тривимірних графіків, гістограм.

Беручи до уваги можливість проводити складні обчислення [36], підтримку матричних функцій, наявність різних типів даних та інструментів для візуалізації, то вибір мови R як основи для програмної реалізації алгоритму оцінювання порогових моделей є обґрунтованим.

Середовище розробки RStudio. Розробка та виконання програмного коду мовою R під час проведення цього дослідження проводились у середовищі розробки RStudio. На поточному етапі розробки програмного забезпечення код запускається і виконується на клієнтській стороні в середовищі RStudio, яке дає можливості не тільки для написання і виконання коду, а і для аналізу даних, виправлень помилок, виводу даних із коду в консоль і багато іншого.

Конкретно у цьому дослідженні використовувалась програма RStudio Desktop, яку зручно завантажувати на різних ОС Windows, macOS та Linux. У подальшому можна розмістити програмний код на версії RStudio Server, що розгортається на операційній системі Linux, й мати доступ до середовища RStudio на віддаленому сервері через вебінтерфейс.

Використання у цій роботі середовища RStudio дало змогу забезпечити організацію процесу розробки програмного коду для алгоритму по оцінюванню двопорогових процесів, що описуються рівняннями Іто та Іто-Скорохода, шляхом поєднання інструментів для програмування, аналізу даних та візуалізації результатів у межах єдиної платформи.

Масштабованість. Мова R у подальшому дозволяє масштабувати розроблений програмний код у повноцінне програмне забезпечення, у тому

числі здійснити перехід від функціонального програмування до ООП. На поточному етапі програмний код використовується як дослідницький інструмент, який дозволив протестувати запропоновану в дослідженні модель та проаналізувати результати. Такий підхід вже підходить для практичного використання у задачах, щодо оцінки двопорогових моделей на основі процесів, що описуються рівняннями Іто та Іто-Скорохода. У подальшому можна доопрацювати програмне рішення створивши повноцінну клієнтську частину, що буде забезпечувати зручний інтерфейс для взаємодії користувача з програмою, який буде дозволяти долучати початковий набір даних у певному форматі, вибору типу процесу, кнопки для запуску обчислень і вікно для відображення результатів та графіків. У якості фреймворка для реалізації клієнтської частини ПЗ може бути використано Shiny, який дає можливість створювати інтерактивні вебзастосунки на основі мови R або ж може бути використаний один із популярних JavaScript фреймворків: React, Angular, Vue.js.

3.2. Структура програмної реалізації

Програмний код для запропонованого у роботі алгоритму розроблявся за модульним принципом. Модульний підхід дозволяє доопрацьовувати певний функціонал, наприклад, функцію для розрахунку дисперсій, не порушуючи код інших модулів. Це дає можливість розширювати функціонал на рівні модулів, без необхідності зміни всього програмного коду.

Розроблений код дозволяє в подальшому програмно адаптувати його для роботи з більшими наборами даних або ж з більш складною структурою математичної моделі. Код створено як набір логічно відокремлених функціональних блоків, кожен з яких реалізує певну частину етапів алгоритму. Усі помилки, які виникали під час проведення чисельних експериментів, опрацьовуються на рівні коду шляхом генерації повідомлень із вказівкою відповідної інформації щодо помилки, наприклад, щодо відсутності

необхідної кількості даних у певному режимі для проведення оцінки (для двопорогової моделі).

Використання функціонального підходу зменшує повторюваність коду та полегшує проведення тестів.

Фрагмент коду, що реалізовує алгоритм оцінювання двопорогової моделі процесів на базі рівняння Іто приведений в Додаток 1.

У загальному весь процес можна розбити на декілька блоків.

Блок 1. Генерація тестових даних. Важливим аспектом проведення чисельних експериментів було згенерувати синтетичні дані для відображення відповідного типу процесу, наприклад, дифузійного процесу або ж дифузійного процесу із стрибками. Для реалізації задуманого формувались дані для оцінки саме процесу, що містить два пороги з явними переходами між режимами. Це дозволило провести оцінювання для процесів із різною динамікою та підтвердити працездатність програмного рішення. Кожний набір даних мав різні характеристики щодо дисперсії та стрибків.

Блок 2. Далі формувались функції для оцінки збіжності ітераційного процесу.

Функція одного кроку ітераційного оновлення параметрів, яка необхідна для чисельного обчислення матриці Якобі та функція для обчислення спектрального радіусу Якобі. Після обрахунку відбувається запис до історії збіжності `jacobian_log`.

Блок 3. Оцінювання параметрів для двопорогової моделі у трьох режимах процесу. Усі формули для розрахунку брались із запропонованої математичної моделі у цьому дослідженні: для дрейфу, дисперсії, стрибків та функції правдоподібності.

Блок 4. Ітераційний алгоритм оцінювання параметрів моделі. Реалізовувався він згідно з алгоритмом представленого і покроково описаного у цій роботі.

Формування сітки можливих порогів з виключенням крайових нестабільних зон. Формувались змінні для збереження результатів. Окремо зберігались повні набори розрахованих даних та окремо значення функції правдоподібності, що було використано в подальшому для визначення оптимальної пари порогів.

Блок 5. Вибір оптимальної моделі та аналіз результатів. Після перебору всіх пар порогів й оцінювання їх параметрів визначається, яка модель є найкращою.

Блок 6. Побудова графіка на основі отриманих результатів.

Початковий набір даних. На початковому етапі використовувались синтетичні дані для тестування алгоритму на основі запропонованого AMLE. Дані генерувались відповідно до поставленої задачі, а саме із змінами динаміки процесу і формувались умови для поділу поведінки процесу на три режими.

Перед стартом ітераційного алгоритму оцінювання двопорогової моделі ініціалізуються початкові значення параметрів та порогів r_1, r_2 .

Порогові значення не задаються зарання, а визначаються методом переребору можливих значень у межах області зміни процесу. Для цих цілей використовується сітка значень:

$$r_{grid} = \{r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(50)}\}.$$

Яка визначається формулою

$$r^{(k)} [\min(X) + 0.05(\max(X) - \min(X)), \max(X)].$$

Такий підхід до формування набору можливих значень порогів дозволив виключити помилки крайніх значень, де модель може не відпрацювати. Варто зазначити, що за такого підходу покривається основна область можливих значень порогів.

Пошук пар порогів відбувається через повний перебір всіх можливих пар r_1, r_2 із множини r_{grid} . Зовнішній цикл у такому випадку перебирає усі r_1 ,

а внутрішній r_2 , при цьому встановлюється обмеження $r_1 < r_2$, що забезпечує поділ процесу на три режими.

Для кожної пари порогів формується розбиття вибірки на три підвибірки. Для режиму 1 $X_t \leq r_1$, для режиму 2 $r_1 < X_t \leq r_2$ для режиму 3 $X_t > r_2$. Додатково виконується перевірка, щоб у кожному із режимів було достатньо спостережень, що гарантує стабільність оцінювання.

Для двопорогового трирежимного процесу початкові значення параметрів $\sigma_1^2(0), \sigma_2^2(0), \sigma_3^2(0)$ доцільно задавати окремо для кожного режиму. Для розрахунку стартових значень дисперсій використовується квадрати режимних приростів, згідно з [3]. Такий підхід дозволяє отримати стартові оцінки, які краще відображають локальну інтенсивність випадкових коливань процесу.

Стартові оцінки $\hat{\sigma}_i^2(0)$ для двопорогового процесу можна задати так:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_1^2(0) &= \frac{1}{T} \sum_{j=1}^q \{X_j I(X_j \leq r_1) - X_{j-1} I(X_{j-1} \leq r_1)\}^2, \\ \hat{\sigma}_2^2(0) &= \frac{1}{T} \sum_{j=1}^q \{X_j I(r_1 < X_j \leq r_2) - X_{j-1} I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2)\}^2, \\ \hat{\sigma}_3^2(0) &= \frac{1}{T} \sum_{j=1}^q \{X_j I(X_j > r_2) - X_{j-1} I(X_{j-1} > r_2)\}^2.\end{aligned}$$

Початкові значення інтенсивностей стрибків $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ визначаються як відношення сум значень процесу до часу перебування у відповідному режимі.

$$\gamma_i^{(0)} = \frac{\sum X_t I_i}{\sum \Delta t I_i}, i = 1, 2, 3.$$

Якщо даних недостатньо, то використовуються фіксовані стартові значення $\gamma_i^{(0)} = 0.5$.

Стрибкова компонента генерується як компенсований пуасонівський процес. Для кожного моменту часу формується кількість стрибків $N_j \sim \text{Poisson}(\lambda \Delta t)$. Кожен стрибок має знак p – додатній, а $1 - p$ від’ємний.

Розмір стрибка моделюється експоненційним розподілом. Після чого виконується компенсація математичного сподівання $J_j = S_j - \lambda \Delta t E[Y]$, що забезпечує нульове середнє стрибкової компоненти. Отримана величина додається до базового процесу $X_j = X_{j-1} + \Delta X_{base} + J_j$.

У таблиці 3.1 приклад синтетично згенерованого набору початкових даних

Час, t	Значення X_t	Режим	Характеристика	Дисперсія σ^2	Стрибки γ
1	0.32	1	Спокій	0.078	0.3
2	0.28	1	Спокій	0.078	0.3
3	0.35	1	Спокій	0.078	0.3
4	0.40	1	Спокій	0.078	0.3
5	0.45	1	Перехід вгору	0.078	0.3
20	0.62	2	Нормальний стан	0.09	0.4
21	0.75	2	Нормальний стан	0.09	0.4
22	0.81	2	Нормальний стан	0.09	0.4
23	1.01	2	Перехід	0.09	0.4
40	1.12	3	Кризовий стан	0.078	0.5
41	1.20	3	Кризовий стан	0.078	0.5
42	1.30	3	Кризовий стан	0.078	0.5
43	1.05	3	Спад	0.078	0.5

Таблиця 3.1. Приклад згенерованих даних в програмному кодi

Фактори, які впливають на швидкість та точність роботи алгоритму.

Швидкість оцінювання параметрів двопорогової моделі залежить від декількох чинників. Їх можна розділити на обчислювальні, ті що безпосередньо впливають на швидкість виконання алгоритму, та статистичні, це ті, що впливають на точність отриманих результатів.

На швидкість виконання алгоритму впливає кількість можливих комбінацій порогів r_1, r_2 . Значну частину часу на виконання алгоритму займає

оцінка збіжності з використанням спектрального радіусу матриці Якобі. Вона потребує додаткових розрахунків на кожному кроці ітерацій.

На точність може впливати рівень дисперсії. При великій дисперсії складніше відрізнити режими один від одного, що може викликати помилкову ідентифікацію порогів. Сильні стрибки у поведінці процесу, також можуть ускладнити ідентифікацію порогів. Вибір початкових даних параметрів - це ще один фактор, що уповільнює або унеможлиблює збіжність. Крок дискретизації Δt . Якщо обрано надто великий крок, то це зменшує точність апроксимації, якщо ж занадто малий, то збільшує обчислювальні витрати без можливого приросту точності.

3.3. Апробація моделі на реальних даних

Після того як було проведено тестування запропонованого алгоритму оцінки параметрів порогових процесів на синтетичних даних і отримано позитивні результати його роботи, наступним логічним кроком була апробація запропонованої методики і програмного рішення вже на реальних даних. За основу було взято економічні часові ряди [33]. Перевірка алгоритму на реальних даних дає можливість підтвердити можливість методики описувати й оцінювати реальні процеси, що характеризуються нелінійною динамікою. Додатково оцінювалась стійкість до шуму та зміни структури процесу.

Підхід із генерованими даними, давав можливість керування основними параметрами процесу, що дозволяло його тестувати у різних умовах, але реальні дані можуть відрізнятися від генерованих, а саме наявністю випадкових коливань, різких структурних змін, асиметрією поведінки.

Виходячи із цього, перевірка роботи запропонованого алгоритму на реальних даних необхідна, щоб переконатися у тому, що модель здатна визначати різні режими функціонування системи та проводити оцінку основних її параметрів дрейфу, дисперсії та стрибкової компоненти в умовах невизначеності [24].

Для цього дослідження було вибрано декілька наборів часових рядів, які мають різну динаміку та порогові значення, а також потенційно можуть містити декілька режимів поведінки.

Обґрунтування вибору наборів даних

Для тестування алгоритму, необхідно було обрати набори даних, які за своєю структурою відповідали б двопороговій структурі процесу з трьома режимами.

Для тестування програмного рішення для моделі, що побудована за допомогою рівняння Іто, було обрано фінансові часові ряди. Було обрано декілька часових рядів по типу спредів процентних ставок, наприклад, T10Y2Y та T10Y3M, які були отримані із відкритої бази макроекономічних даних FRED (Federal Reserve Economic Data). Ряд T10Y2Y є спредом між дохідністю 10-річних і 2-річних державних облігацій США, а ряд T10Y3M — спредом між дохідністю 10-річних і 3-місячних державних цінних паперів США. У FRED ці ряди подаються як щоденні дані, а самі спреди обчислюються як різниця між відповідними ставками дохідності.

Вибір даних часових рядів обумовлений тим, що вони задовільняють умовам, необхідним для тестування алгоритму побудованого на основі рівняння Іто. Насамперед для цього набору даних наявна коливальна поведінка, з переходами між різними режимами динаміки. Під спредом тут розуміється різниця між двома процентними ставками однакової природи, але з різними строками погашення. Наприклад, якщо дохідність 10-річних облігацій перевищує дохідність 2-річних, то спред є додатним; якщо ж коротка ставка більша за довгу, спред стає від'ємним. Така конструкція є зручною, оскільки сам ряд уже має відносний характер і, як правило, краще виявляє зміни режимів.

Такі набори даних дозволять оцінити запропоновану модель на здатність працювати з реальними процесами, знаходити пороги та описувати досліджувані процеси.

Тепер перейдемо до результатів тестування запропонованих наборів даних за допомогою алгоритму.

На Рис. 3.1 відображено результати тестування алгоритму для часового ряду T10Y3M. Цей набір даних відображає різницю між дохідністю 10-річних казначейських облігацій США та 3-місячних казначейських векселів. По горизонтальній осі відкладено календарний час, а по вертикальній — значення процесу $X(t)$.

На програмному рівні за допомогою пакета `quantmod` у середовищі R дані щодо часового ряду T10Y3M дістаються так:

```
library(quantmod)
getSymbols("T10Y3M", src = "FRED")
data_xts <- na.omit(T10Y3M)
X <- as.numeric(data_xts)
```

На графіках нижче показано розбиття траєкторії процесу на три режими відповідно до оцінених порогових значень r_1, r_2 . Синя горизонтальна пунктирна лінія відповідає нижньому порогу r_1 , а червона пунктирна лінія — верхньому порогу r_2 . Різні кольори траєкторії відображають належність кожної ділянки часового ряду до відповідного режиму. Окремо позначено точки переходу через порогові рівні, тобто моменти, коли процес змінює режим. Додатковий графік подає ті самі реальні дані, але з візуальним виділенням порогових областей. Зафарбовані зони показують інтервали значень, які відповідають нижньому, середньому та верхньому режимам. Таке подання дозволяє наочно побачити, у яких областях значень процес перебуває найчастіше, а також як часто він переходить між режимами. Процес на графіку демонструє, що динаміка реального часового ряду не є однорідною на всій області значень. Поведінка процесу змінюється залежно від того, у якому інтервалі відносно порогів перебуває поточне значення $X(t)$.

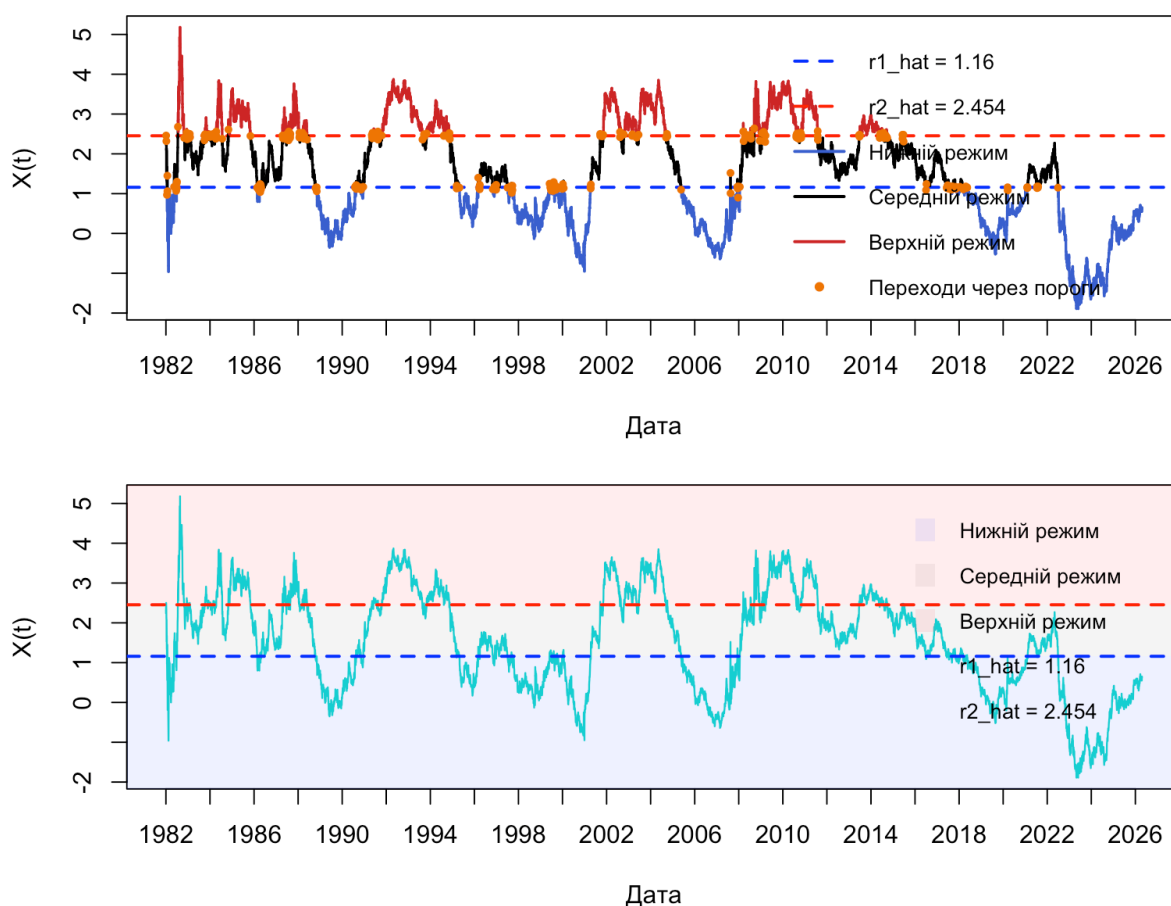


Рис. 3.1 Результати тестування алгоритму для часового ряду T10Y3M

На Рис. 3.2 представлено часовий ряд BAMLH0A0HYM2, що характеризує спред дохідності високодохідних корпоративних облігацій США. Аналізований період охоплює інтервал з 2010 року до 2026 року. По горизонтальній осі відкладено календарний час, а по вертикальній — значення процесу $X(t)$.

На програмному рівні за допомогою пакета quantmod у середовищі R дані щодо часового ряду BAMLH0A0HYM2 дістаються так:

```
library(quantmod)
getSymbols("BAMLH0A0HYM2", src = "FRED")
data <- na.omit(BAMLH0A0HYM2)
df <- data.frame(
  date = index(data),
  value = as.numeric(data$BAMLH0A0HYM2)
)
```

```
df <- df[df$date >= as.Date("2010-01-01") &
        df$date <= as.Date("2026-04-17"), ]
X <- df$value
```

Динаміка часового ряду BAMLN0A0HYM2 має виражену режимну структуру. У більш спокійні періоди значення процесу перебувають переважно в нижньому або середньому режимі, тоді як під час періодів фінансової напруженості можливі переходи до верхнього режиму.

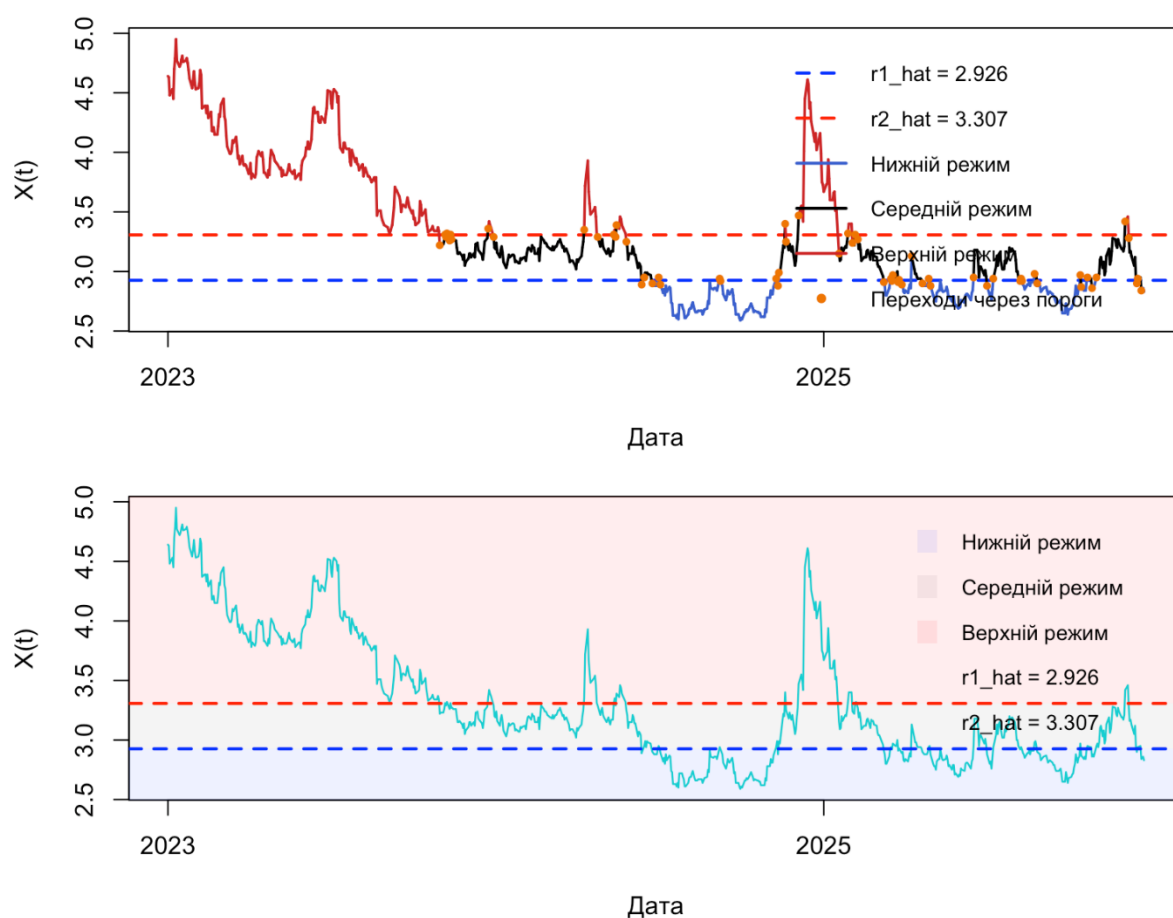


Рис. 3.2 Результати тестування для часового ряду BAMLN0A0HYM2

На Рис. 3.3 відображено часовий ряд T10Y2Y, що відображає різницю між дохідністю 10-річних та 2-річних казначейських облігацій США. Аналізований період охоплює інтервал з 2018 року до 2026 року. По горизонтальній осі відкладено календарний час, а по вертикальній — значення процесу $X(t)$.

На програмному рівні за допомогою пакета `quantmod` у середовищі R дані щодо часового ряду T10Y2Y дістаються так:

```
library(quantmod)
getSymbols("T10Y2Y", src = "FRED")
data <- na.omit(T10Y2Y)
df <- data.frame(
  date = index(data),
  value = as.numeric(data$T10Y2Y)
)
df <- df[df$date >= as.Date("2018-01-01") &
  df$date <= as.Date("2026-04-17"), ]
X <- df$value
```

Часовий ряд T10Y2Y має неоднорідну динаміку, яка може бути описана через зміну режимів залежно від рівня значення процесу. Перехід між режимами відображає зміну характеру поведінки ряду в різні періоди часу.

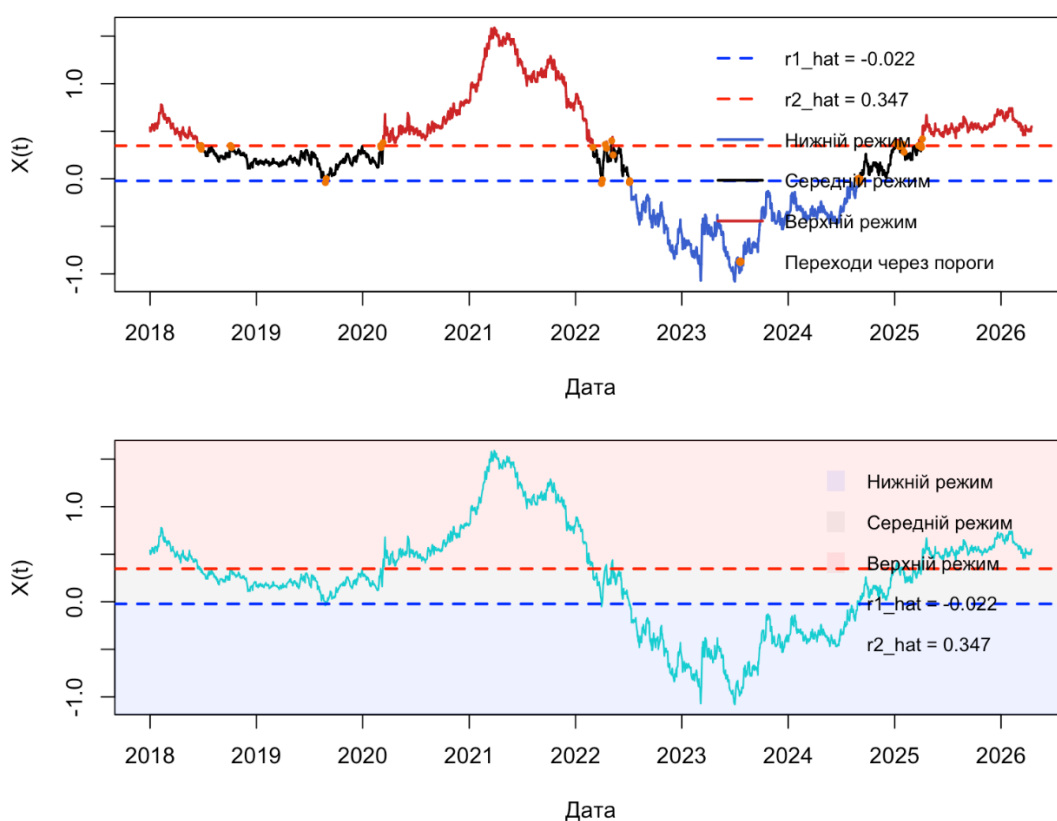


Рис. 3.3 Результати тестування для часового ряду T10Y2Y

На Рис. 3.4 зображено динаміку часового ряду $X(t)$, побудованого на основі реальних фінансових даних для ф'ючерсів на срібло. Дані завантажуються з Yahoo Finance. У коді використано позначення SI=F, яке у Yahoo Finance відповідає біржовим даним за контрактами Silver Futures.

На програмному рівні дані щодо часового ряду дістаються таким чином:

```
library(quantmod)
library(zoo)
getSymbols("SI=F", src = "yahoo")
data_raw <- na.omit(`SI=F`)
data <- data.frame(
  date = index(data_raw),
  price = as.numeric(Cl(data_raw))
)
data <- data[data$date >= as.Date("2020-04-01") &
             data$date <= as.Date("2020-11-01"), ]
data <- data[!is.na(data$price), ]
log_price <- log(data$price)
trend <- rollmean(log_price, k = 20, fill = NA, align = "right")
data2 <- data[!is.na(trend), ]
X <- log_price[!is.na(trend)] - trend[!is.na(trend)]
```

Для аналізу обрано період з 01.04.2020 по 01.11.2020. Далі ряд $X(t)$ формується як відхилення логарифмічної ціни від локального тренду.

Тобто на графіку показано не саму ціну срібла, а її коливання, очищені від впливу короткострокового тренду.

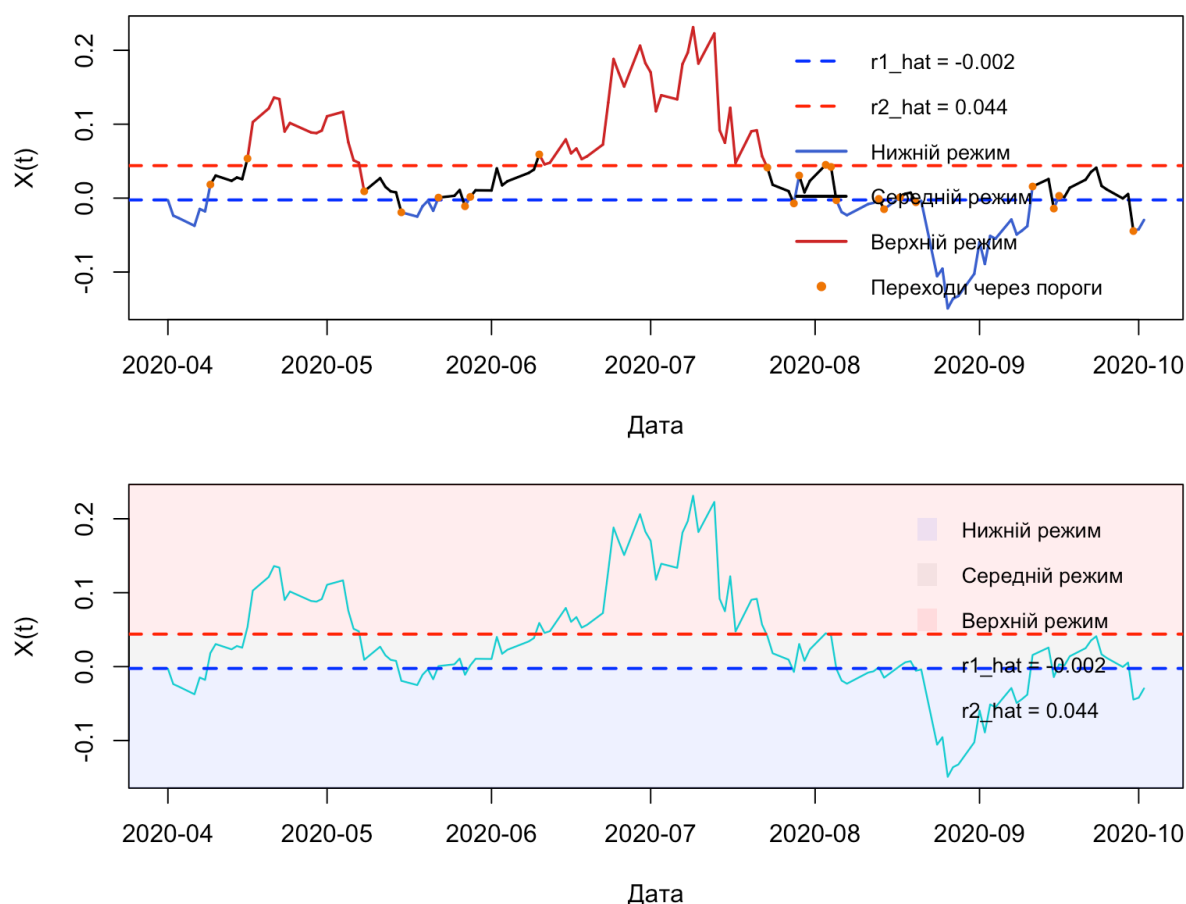


Рис. 3.4 Результати тестування для часового ряду $X(t)$, побудованого на основі реальних фінансових даних для ф'ючерсів на срібло

Загалом графік на Рис. 3.4 демонструє режимну поведінку відхилень логарифмічної ціни срібла від локального тренду.

Так за цими чотирма графіками можна зробити загальний висновок, що порогові значення були відтворені достатньо коректно з погляду візуальної інтерпретації режимів. Для всіх чотирьох наборів даних оцінені пороги $\hat{r}_1, \hat{r}_2$ поділяють траєкторію процесу на три змістовні режими: нижній, середній та верхній. На графіках видно, що ці пороги не є випадково розміщеними, а справді відокремлюють різні рівні значень процесу. Тобто модель не просто формально знаходить два числа, а дає інтерпретований поділ динаміки на області низьких, середніх і високих значень.

Разом із тим якість відтворення порогів не можна вважати однаково сильною для всіх рядів. Якщо значна частина спостережень зосереджена

переважно в середній області, а нижній або верхній режим містить відносно мало точок, то відповідний поріг може бути оцінений менш надійно. У такому випадку порогове значення все ще може виглядати логічним на графіку, але статистично воно є менш стійким, оскільки для одного з режимів бракує даних для якісного оцінювання параметрів. Якщо на графіку видно, що процес багато разів перетинає пороги, а всі три режими мають помітну кількість спостережень, то відтворення порогових значень можна вважати задовільним.

Нижче наведена таблиця 3.2 з отриманими результатами розрахунку порогових значень для представлених вище наборів даних.

Набір даних	Період	r_1	r_2
T10Y3M	1982 - 2026	~ 1.16	~ 2.454
BAMLH0A0HYM2	2023 - 2025	~ 2.926	~ 3.307
T10Y2Y	2018 - 2026	~ -0.022	~ 0.347
Срібло	04/2020 - 11/2020	~ -0.02	~ 0.044

Таблиця 3.2 Отримані результати тестування алгоритму побудованого на основі рівняння Іто

Наступний крок полягав у тому, що варто було протестувати алгоритм на основі рівняння Іто-Скорихода. Для цього також було обрано 3 набори реальних даних, що містять стрибкові компоненти.

На Рис. 3.5 відображено часовий ряд NFCI — Chicago Fed National Financial Conditions Index, який відображає загальний стан фінансових умов у США. Індекс формується на основі великої кількості фінансових показників (грошовий ринок, кредитні спреди, фондовий ринок, банківський сектор) і використовується як інтегральний індикатор рівня фінансового стресу в економіці. У роботі використано вибірку даних за тривалий період — приблизно з кінця 1990-х років до останньої доступної дати (близько 2024-2025 року).

На програмному рівні у середовищі R дані щодо часового ряду NFCI дістаються таким чином:

```

library(zoo)
series_id <- "NFCI"
fred_id <- series_id
value_name <- "NFCI"
asset_name <- "Chicago Fed National Financial Conditions Index"
url <- paste0("https://fred.stlouisfed.org/graph/fredgraph.csv?id=",
series_id)
data <- read.csv(url, stringsAsFactors = FALSE)

if ("observation_date" %in% names(data)) {
  names(data)[names(data) == "observation_date"] <- "DATE"
}
if (!series_id %in% names(data)) {
  names(data)[2] <- series_id
}
data$DATE <- as.Date(data$DATE)
names(data)[names(data) == series_id] <- value_name
data[[value_name]] <-
suppressWarnings(as.numeric(data[[value_name]]))
data <- data[!is.na(data$DATE), ]
data <- data[!is.na(data[[value_name]]), ]
start_date <- as.Date("2000-01-01")
data <- data[data$DATE >= start_date, ]
data$X <- data[[value_name]]
X <- as.numeric(data$X)

```

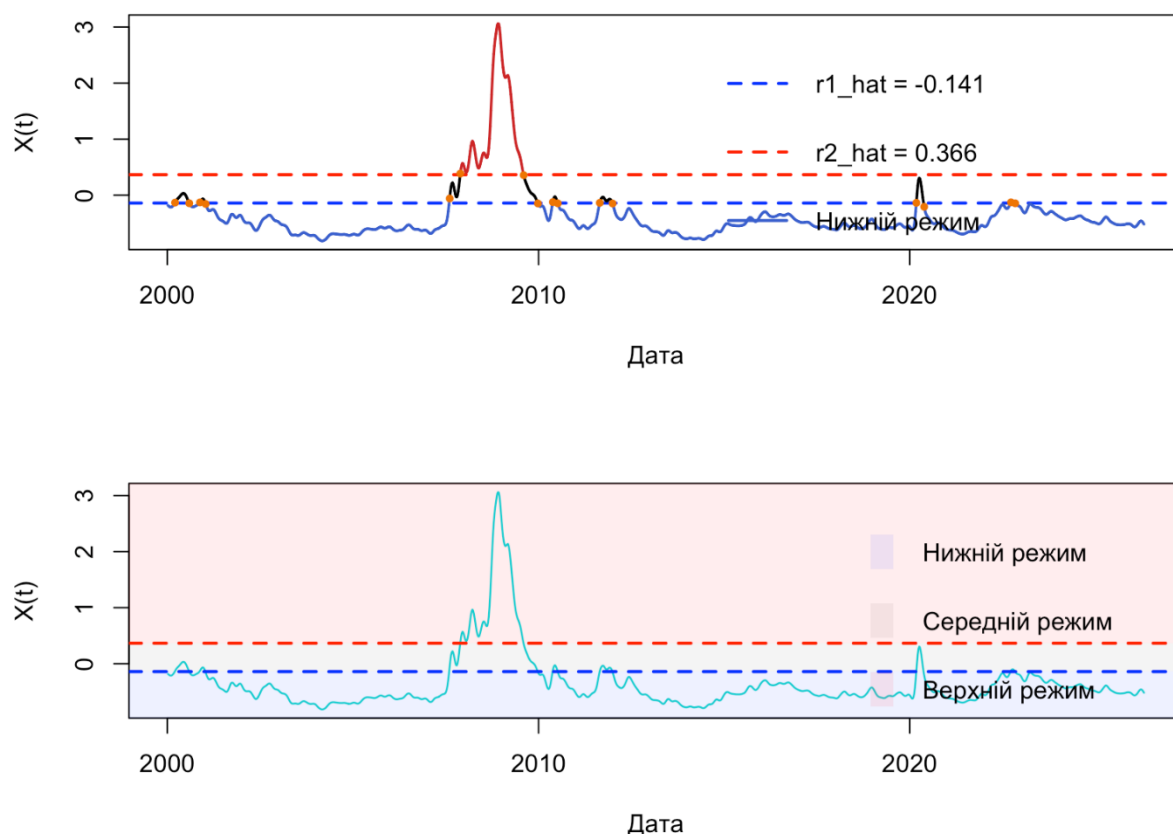


Рис. 3.5 Результати тестування для набору даних NFCI

Для індексу NFCI отримано чітко виражену трирежимну структуру. Нижній режим відповідає періодам м'яких фінансових умов, середній – нормальному стану ринку, а верхній – кризовим періодам.

На Рис. 3.6 відображено часовий ряд BAA10Y. Цей набір даних відображає різницю між дохідністю корпоративних облігацій. У роботі використано часовий інтервал даних, починаючи з 1980-х років. Такий період дозволяє охопити кілька економічних циклів і кризових періодів.

На програмному рівні у середовищі R дані щодо часового ряду BAA10Y дістаються таким чином:

```
library(zoo)
series_id <- "BAA10Y"
fred_id   <- series_id
value_name <- "BAA10Y"
```

```

url <- paste0("https://fred.stlouisfed.org/graph/fredgraph.csv?id=",
series_id)
data <- read.csv(url, stringsAsFactors = FALSE)
if ("observation_date" %in% names(data)) {
  names(data)[names(data) == "observation_date"] <- "DATE"
}
if (!series_id %in% names(data)) {
  names(data)[2] <- series_id
}
data$DATE <- as.Date(data$DATE)
names(data)[names(data) == series_id] <- value_name
data[[value_name]] <-
suppressWarnings(as.numeric(data[[value_name]]))
data <- data[!is.na(data$DATE), ]
data <- data[!is.na(data[[value_name]]), ]
start_date <- as.Date("1986-01-01")
data <- data[data$DATE >= start_date, ]
data$X <- data[[value_name]]
X <- as.numeric(data$X)

```

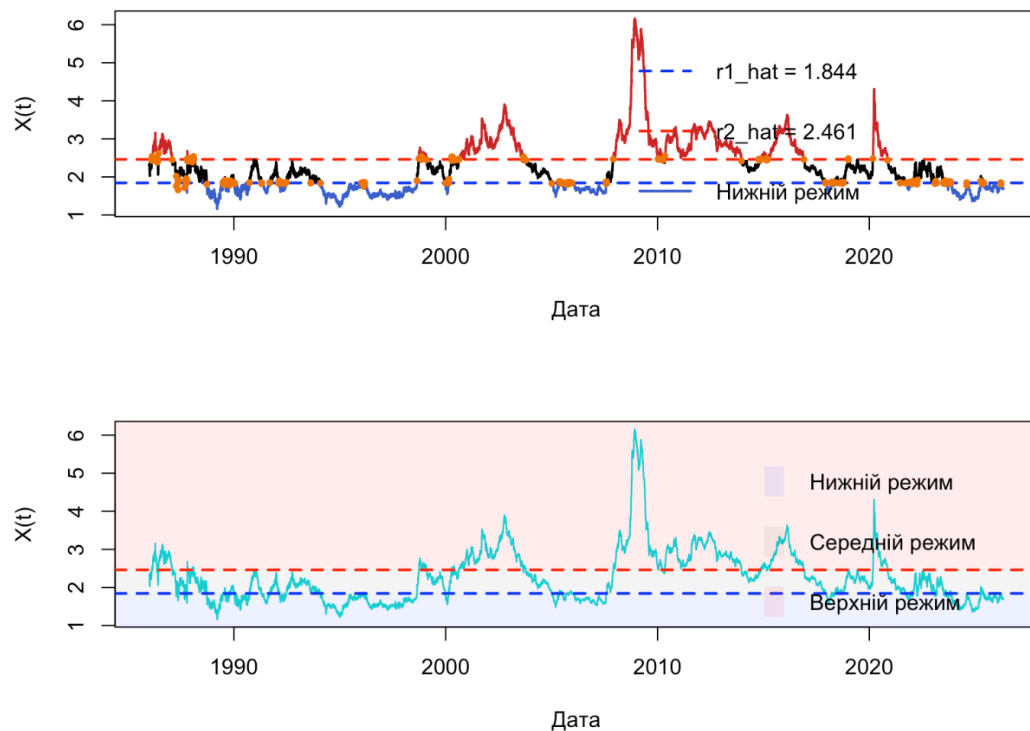


Рис. 3.6 Результати тестування для набору даних BAA10Y

Для показника ВАА10Y отримано чітко виражену трирежимну структуру. Нижній режим відповідає періодам фінансової стабільності, середній – фазам підвищеного ризику, а верхній – кризовим періодам.

На Рис. 3.7 відображено часовий ряд VIX показує очікувану ринком волатильність фондового ринку США. Коли значення VIX зростає, це зазвичай означає підвищення ризиків, кризові очікування або сильні коливання на фінансовому ринку.

На програмному рівні у середовищі R дані щодо часового ряду VIX дістаються таким чином:

```
library(zoo)
url <- "https://fred.stlouisfed.org/graph/fredgraph.csv?id=VIXCLS"
data <- read.csv(url, stringsAsFactors = FALSE)
if ("observation_date" %in% names(data)) {
  names(data)[names(data) == "observation_date"] <- "DATE"
}
if (!"VIXCLS" %in% names(data)) {
  names(data)[2] <- "VIXCLS"
}
data$DATE <- as.Date(data$DATE)
names(data)[names(data) == "VIXCLS"] <- "VIX"
data$VIX <- as.numeric(data$VIX)
data <- data[!is.na(data$DATE), ]
data <- data[!is.na(data$VIX), ]
data <- data[data$VIX > 0, ]
data$logVIX <- log(data$VIX)
start_date <- as.Date("2018-01-01")
data <- data[data$DATE >= start_date, ]
data$trend <- rollmean(data$logVIX, k = 50, fill = NA, align =
"center")
data$X <- data$logVIX - data$trend
data <- data[!is.na(data$X), ]
X <- as.numeric(data$X)
```

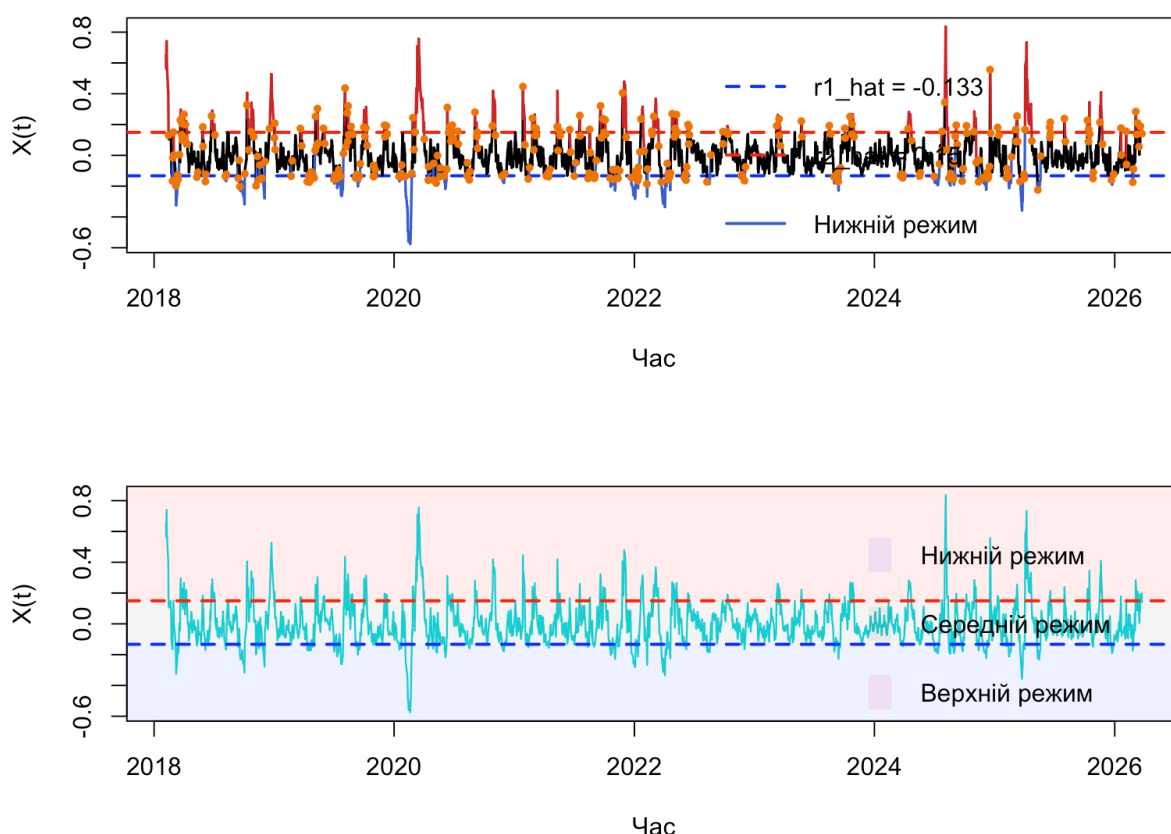


Рис. 3.7 Результати тестування для набору даних VIX

Для набору даних VIX оцінена двопорогова модель дозволила виділити три режими динаміки процесу, що відповідають різним рівням ринкової волатильності. Отримані порогові значення є помірно розділеними, що свідчить про наявність переходів між режимами, хоча основна маса спостережень зосереджена у середньому режимі.

На графіку видно, що верхній режим (червоний) проявляється у вигляді короточасних різких сплесків, які відповідають періодам підвищеної невизначеності або кризових подій. Нижній режим (синій) відображає відносно спокійні періоди з низькою волатильністю. Середній режим є домінуючим і описує звичайний стан ринку.

Загалом модель добре відображає режимну структуру VIX: чітко виділяються стрибки та переходи між станами, що узгоджується з економічною природою цього індексу як індикатора ринкового ризику.

Набір даних	Період	r_1	r_2
NFCI	з кінця 1990-х років до останньої доступної дати (близько 2024–2025 року)	~ -0.14	~ 0.366
BAA10Y	з середини 1980-х років до останньої доступної дати (близько 2024–2025 року)	~ 1.85	~ 2.42
VIX	вибірка починається з 1 січня 2018 року	~ -0.13	~ 0.14

Таблиця 3.3 Отримані результати тестування алгоритму побудованого на основі рівняння Іто

Нижче наведена таблиця 3.3 з отриманими результатами розрахунку порогових значень для представлених вище наборів даних.

Аналіз результатів роботи алгоритму на реальних даних. Проаналізувавши отримані результати, можна зробити висновок, що запропонована у роботі модель і алгоритм побудований на її основі визначає режими зміни динаміки процесів на основі рівняння Іто та Іто-Скорохода. Як видно із наборів даних, що оцінювались, алгоритм може інтерпретувати різні економічні події через зміну режимів динаміки процесу.

Положення знайдених порогових значень r_1 та r_2 відповідає економічним подіям на ринках на період, що був обраний, і розділяє стабільні та нестабільні стани процесу.

Отримані результати демонструють, що запропонований алгоритм можна використовувати для визначення порогових значень процесів, що

формують декілька режимів динаміки поведінки на протязі визначеного періоду часу.

Висновки до Розділу 3

У розділі 3 розглянуто програмну реалізацію запропонованого алгоритму для оцінювання параметрів двопорогової моделі на основі процесів типу Орнштейна-Уленбека та Леві.

Програмну частину роботи було реалізовано на мові програмування R. У якості середовища, в якому виконувалась розробка і тестування коду, було обрано RStudio. Такий добір інструментів зумовлений тим, що вони орієнтовані на проведення чисельних обрахунків, мають набір готових математичних функцій і дають можливість не тільки зберігати результати виконання коду, а і зручно аналізувати отримані дані. Готові функції мови програмування R дали можливість спростити процес матричних обчислень. Окремо варто звернути увагу на наявність бібліотек для завантаження даних із публічних API сервісів, що допомогло прямо в коді витягувати необхідні набори фінансових даних. RStudio було використано для написання та запуску програмного коду, збереження наборів даних, отриманих під час проведення розрахунків, та для візуалізації результатів.

Програмний код реалізації алгоритму, побудований за модульним підходом, містить набір функцій для оцінювання параметрів дрейфу, дисперсії та стрибкової складової. Окремо було пропрацьовано чисельну стабільність обчислень шляхом введення обмежень на отримані значення на рівні коду з відображенням повідомлення у консолі про отриману помилку.

Для аналізу збіжності було використано підхід з різницею між значеннями між ітераціями та спектральний радіус матриці Якобі. Оцінка збіжності значно вплинула на час виконання коду за рахунок великої кількості обрахунків.

Після того як в попередніх розділах було проведено тестування алгоритму на синтетичних даних, то в розділі 3, в якості другого етапу,

тестування було здійснено вже на реальних економічних даних для ринку золота, срібла, нафти, природного газу та валютного курсу.

Отримані в результаті тестування алгоритму на реальних даних підтвердили здатність запропонованої методики описувати складну нелінійну динаміку процесів. Для кожного набору даних було визначено три режими функціонування, що відповідають різним фазам на ринку. Оцінені порогові значення показали узгодженість із економічним описом процесів за вибраний період та кризовими подіями, що відбувались на ринку.

Проведені тести показали, що для процесів, які містять значні стрибки величин значень або підвищений показник шуму можуть виникати труднощі з досягненням ітераційної збіжності алгоритму. Це пов'язано із складною структурою поверхні функції правдоподібності. Це ще раз доводить, що алгоритм має чутливість до вхідних даних, що описують динаміку процесу.

За результатами цього розділу можна зробити висновок, що використання R та RStudio для складних статистичних алгоритмів було правильним рішенням, а розроблений програмний код є основою для подальших досліджень процесів на базі рівнянь Іто та Іто-Скорохода.

ВИСНОВКИ

У цій дисертаційній роботі було проаналізовано двопорогові процеси, що описуються рівняннями Іто та Іто-Скорохода та запропоновано модель для оцінювання їх параметрів. У якості об'єкта дослідження було обрано саме двопорогову модель процесів, оскільки вона дозволяє більш точно описувати реальні процеси та розширити наявні дослідження у цьому напрямку. У межах дослідження було запропоновано методику оцінювання параметрів таких стохастичних процесів на основі наближеного методу максимальної правдоподібності (AMLE). Ця методика у подальшому стала основою для розробки програмного коду, що допоміг перевірити правильність її роботи на прикладних задачах.

У цьому дослідженні було розроблено математичну модель для оцінювання параметрів двопорогових процесів, що описуються рівняннями Іто та Іто-Скорохода. На основі математичної моделі було побудовано алгоритм для оцінювання параметрів таких двопорогових процесів у трьох режимах.

Перший етап дослідження полягав у аналізі двопорогового процесу на основі процесу типу Орнштейна-Уленбека. Для побудови схеми моделі використано апроксимацію Ейлера, що дало змогу здійснити перехід із неперервного опису процесу до форми, зручної для чисельного обчислення параметрів. У роботі було запропоновано формулу функції максимальної правдоподібності для процесу типу ОУ та рівняння для оцінки його параметрів. На основі отриманих рівнянь математичної моделі було побудовано алгоритм оцінки параметрів із оцінкою збіжності ітераційного процесу та розроблено програмний код для тестування запропонованої методики. Результати тестування на синтетичних даних показали, що модель правильно описує структуру процесу й алгоритм знаходить порогові точки переходу між режимами.

Наступним кроком було розширення моделі за рахунок додавання стрибкової компоненти. Для цього було проаналізовано та використано двопороговий процес типу Леві, що дозволяє описувати процеси, які можуть включати різкі зміни стану системи. Математична модель на основі процесу типу Леві містить також функцію максимальної правдоподібності та рівняння для оцінки параметрів. На відміну від попереднього етапу, з процесом типу ОУ, тут серед параметрів вже було включено стрибкову компоненту. Для цієї моделі було розроблено програмну реалізацію та проведено тестування моделі на синтетичних даних. Отримані результати показали, що модель правильно оцінює зміну режимів поведінки процесів уже із врахуванням стрибків.

Окремо було проведено роботу з програмної реалізації розробленої методики. У якості мови програмування було обрано мову R, оскільки вона добре підходить для проведення чисельних обрахунків, має зручні інструменти для роботи з часовими рядами та набір математичних функцій, що спрощує написання коду. У якості клієнтської частини було використано середовище RStudio, у ньому зручно було організувати процес розробки і доопрацювання коду, а також наочне представлення результатів у вигляді прорахованих даних та графічного аналізу.

Прикладне застосування запропонованої моделі було здійснено на реальних наборах даних, що включали вибірки фінансових показників за певні роки для різних активів. За результатами опрацювання, алгоритмом усіх наборів даних було встановлено, що запропонована методика здатна виявляти порогові значення (зміну режимів поведінки процесу). Це доводить те, що запропонована модель оцінки параметрів двопорогових процесів типу ОУ або типу Леві може бути використана в якості інструменту для їх оцінки в прикладних задачах. Отриманий підхід дає можливість аналізувати процеси з досить складною структурою і визначати переходи між режимами у поведінці цих процесів.

У цій дисертаційній роботі було проведено теоретичне дослідження та побудовано математичну модель для оцінювання параметрів процесів на основі рівнянь Іто та Іто-Скорохода. На базі математичної моделі було розроблено алгоритм та програмний код. Було проведено низку тестувань алгоритму на синтетичних та реальних даних, що дало змогу оцінити його ефективність. Отримані результати підтвердили те, що запропонована методика оцінювання параметрів процесів, що моделюються за допомогою рівнянь Іто та Іто-Скорохода, працездатна. Підхід, який описаний у роботі, розширює наявні дослідження у цій сфері, оскільки дає можливість аналізувати й оцінювати параметри двопорогових стохастичних процесів, що формують три режими динаміки поведінки упродовж визначеного періоду часу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S. On the theory of Brownian motion. *Phys. Rev.* 1930. Vol. 36. P. 823–841. doi:10.1103/PhysRev.36.823.
2. Skorokhod A. V. *Studies in the Theory of Random Processes*. Dover Publication, Reprint, 1982. 199 p.
3. Su F., Chan K. S. Quasi-likelihood estimation of a threshold diffusion process. *J. Econometrics*. 2015. Vol. 189, Iss. 2. P. 473–484. doi:10.1016/j.jeconom.2015.03.038.
4. Yu T.-H., Tsai H., Rachinger H. Approximate maximum likelihood estimation of a threshold diffusion process. *Computational Statistics and Data Analysis*. 2020. Vol. 142. Art. 106823. doi:10.1016/j.csda.2019.106823.
5. Han Y., Zhang D. Statistical inference for multi-regime threshold Ornstein-Uhlenbeck processes. *arXiv*. 2024. arXiv:2403.18255. doi:10.48550/arXiv.2403.18255.
6. Kloeden P. E., Platen E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Berlin ; Heidelberg : Springer, 1992. 632 p.
7. Øksendal B. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. 6th ed. Berlin ; Heidelberg : Springer, 2003. 366 p.
8. Karatzas I., Shreve S. E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2nd ed. New York : Springer, 1991. 470 p.
9. Iacus S. M. *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations: With R Examples*. New York : Springer, 2008. 286 p.
10. Shoji I., Ozaki T. Estimation for nonlinear stochastic differential equations by a local linearization method. *Stochastic Analysis and Applications*. 1998. Vol. 16. No. 4. P. 733–752. doi:10.1080/07362999808809559.
11. Tsai H., Nikitin A. V. Threshold Models for Lévy Processes and Approximate Maximum Likelihood Estimation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2024. Vol. 60. No. 2. P. 261–267. doi:10.1007/s10559-024-00666-7.

12. Rachinger H., Lin E. M. H., Tsai H. A bootstrap test for threshold effects in a diffusion process. *Computational Statistics*. 2024. Vol. 39. No. 5. P. 2859–2872. doi:10.1007/s00180-023-01375-z.
13. Aït-Sahalia Y. Maximum likelihood estimation of discretely sampled diffusions: a closed-form approximation approach. *Econometrica*. 2002. Vol. 70. No. 1. P. 223–262. doi:10.1111/1468-0262.00274.
14. Cont R., Tankov P. *Financial Modelling with Jump Processes*. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2003. 535 p.
15. Applebaum D. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. 2nd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 2009. 460 p.
16. Sato K.-I. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge : Cambridge University Press, 1999. 486 p.
17. Masuda H. On multidimensional Ornstein–Uhlenbeck processes driven by a general Lévy process. *Bernoulli*. 2004. Vol. 10. No. 1. P. 97–120. doi:10.3150/bj/1077544605.
18. Нечипорук С. А. Approximate maximum likelihood estimation for a two-threshold Levy process: convergence assessment and data applications. *Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія: математичне та комп'ютерне моделювання*. 2025. № 27. С. 29–38. doi:10.32626/2308-5878.2025-27.29-38.
19. Tong H. *Non-linear Time Series: A Dynamical System Approach*. Oxford : Oxford University Press, 1990. 564 p.
20. Нечипорук С. А. Наближений метод максимальної вірогідності для оцінювання двопорогового процесу Орнштейна-Уленбека. *Науковий журнал Херсонського національного технічного університету. Прикладні питання математичного моделювання*. 2024. Т. 7. № 2. С. 117–124. doi:10.32782/mathematical-modelling/2024-7-2-11.

21. Masuda H. Convergence of Gaussian quasi-likelihood random fields for ergodic Lévy driven SDE observed at high frequency. *The Annals of Statistics*. 2013. Vol. 41. No. 3. P. 1593–1641. doi:10.1214/13-AOS1121.
22. Chan N. H., Kutoyants Y. A. On parameter estimation of threshold autoregressive models. *Statistical Inference for Stochastic Processes*. 2012. Vol. 15. No. 1. P. 81–104. doi:10.1007/s11203-011-9064-0.
23. Shimizu Y., Yoshida N. Estimation of Parameters for Diffusion Processes with Jumps from Discrete Observations. *Statistical Inference for Stochastic Processes*. 2006. Vol. 9. No. 3. P. 227–277. doi:10.1007/s11203-005-8114-x.
24. Наконечний О. Г., Зінько П. М. Математичні методи аналізу матричних даних в умовах невизначеності : навч. посіб. Київ : ПП «Р.К. Майстер-принт», 2022. 208 с.
25. Higham D. J. An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. *SIAM Review*. 2001. Vol. 43. No. 3. P. 525–546. doi:10.1137/S0036144500378302.
26. Burden R. L., Faires J. D. *Numerical Analysis*. 9th ed. Boston : Cengage Learning, 2011.
27. Kelley C. T. *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*. Philadelphia : SIAM, 1995.
28. Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*. 1977. Vol. 5. No. 2. P. 177–188. doi:10.1016/0304-405X(77)90016-2.
29. Tong H., Yeung I. Threshold autoregressive modelling in continuous time. *Statistica Sinica*. 1991. Vol. 1. No. 2. P. 411–430.
30. Капустян О. А., Капустян О. В., Наконечний О. Г. Оптимальне керування та гарантоване оцінювання у розподілених системах з малим параметром : монографія. Київ : Київ. ун-т, 2021. 247 с.

31. Su F., Chan K. S. Testing for Threshold Diffusion. *Journal of Business and Economic Statistics*. 2017. Vol. 35. No. 2. P. 218–227. doi:10.1080/07350015.2015.1073594.
32. Kutoyants Y. A. On identification of the threshold diffusion processes. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 2012. Vol. 64. No. 2. P. 383–413. doi:10.1007/s10463-010-0318-1.
33. Aït-Sahalia Y., Mykland P. A. Estimators of diffusions with randomly spaced discrete observations: a general theory. *The Annals of Statistics*. 2004. Vol. 32. No. 5. P. 2186–2222. doi:10.1214/009053604000000427.
34. Chang J., Chen S. X. On the approximate maximum likelihood estimation for diffusion processes. *The Annals of Statistics*. 2011. Vol. 39. No. 6. P. 2820–2851. doi:10.1214/11-AOS922.
35. Li C. Maximum-likelihood estimation for diffusion processes via closed-form density expansions. *The Annals of Statistics*. 2013. Vol. 41. No. 3. P. 1350–1380. doi:10.1214/13-AOS1118.
36. Li C., An Y., Chen D., Lin Q., Si N. Efficient computation of the likelihood expansions for diffusion models. *IEEE Transactions*. 2016. Vol. 48. No. 12. P. 1156–1171. doi:10.1080/0740817X.2016.1200201.
37. Milstein G. N. *Numerical Integration of Stochastic Differential Equations*. Dordrecht : Springer Netherlands, 1995. 172 p. doi:10.1007/978-94-015-8455-5.
38. Зінько П. М. Неявна різницева схема для розв'язування неоднорідного рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами. *Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки*. 2006. Вип. 2. С. 186–191.
39. Чабанюк Я. М., Нікітін А. В., Хімка У. Т. Асимптотичні властивості еволюційних систем з марковськими переключеннями з використанням апроксимаційних схем. *Lublin : Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej*, 2018.
40. Knopova V. On recurrence and transience of some Lévy-type processes in $\mathbb{R}$. *Theory Probability and Mathematical Statistics*. 2023. Vol. 108. P. 59–75. doi:10.1090/tpms/1187.

41. Зінько П. М. Математичні методи та числові алгоритми системного аналізу : навч. посіб. Київ, 2006.
42. Tong H., Lim K. S. Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*. 1980. Vol. 42. Iss. 3. P. 245–292. doi:10.1111/j.2517-6161.1980.tb01126.x.
43. Chabanyuk Y., Nikitin A., Khimka U. *Asymptotic Analyzes for Complex Evolutionary Systems with Markov and Semi-Markov Switching Using Approximation Schemes*. London : Wiley-ISTE, 2020. 240 p.
44. Protter P., Talay D. The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations. *The Annals of Probability*. 1997. Vol. 25. No. 1. P. 393–423. doi:10.1214/AOP/1024404293.
45. Jacod J., Protter P. Asymptotic error distributions for the Euler method for stochastic differential equations. *The Annals of Probability*. 1998. Vol. 26. No. 1. P. 267–307. doi:10.1214/AOP/1022855419.
46. Norros I., Valkeila E., Virtamo J. An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions. *Bernoulli*. 1999. Vol. 5. No. 4. P. 571–587.
47. Kutoyants Y. A. *Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes*. New York : Springer, 2004. 479 p.
48. Kou S. G. A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science*. 2002. Vol. 48. No. 8. P. 1086–1101. doi:10.1287/mnsc.48.8.1086.166.
49. Bekesiene S., Nikitin A., Nechyporuk S. Modeling Dynamic Regime Shifts in Diffusion Processes: Approximate Maximum Likelihood Estimation for Two-Threshold Ornstein–Uhlenbeck Models. *MDPI*. 2025. №13(21). doi:https://doi.org/10.3390/math13213450.
50. Нікітін А., Хімка У., Нечипорук С. Кібернетика і системний аналіз. Оцінка параметрів двопорогового процесу Леві за методом наближеної максимальної правдоподібності. 2026. №. С.

51. Tsai H., Chan K. S. A New EM Method for Estimating Continuous-Time Autoregressive Models. Technical Report No. 285. Department of Statistics and Actuarial Science, The University of Iowa, 1999.
52. Tsai H., Chan K. S. Testing for nonlinearity with partially observed time series. *Biometrika*. 2000. Vol. 87. No. 4. P. 805–821. doi:10.1093/biomet/87.4.805.
53. Chan K. S. Consistency and limiting distribution of the least squares estimator of a threshold autoregressive model. *The Annals of Statistics*. 1993. Vol. 21. No. 1. P. 520–533. doi:10.1214/aos/1176349040.
54. Dong F., Wong H. Y. Longevity bond pricing under the threshold CIR model. *Finance Research Letters*. 2015. Vol. 15. P. 195–207. doi:10.1016/j.frl.2015.09.010.
55. Kapustyan O. V., Kapustyan O. A., Sukretna A. V. Approximate stabilization for a nonlinear parabolic boundary-value problem. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2011. Vol. 63. No. 5. P. 759–767. doi:10.1007/s11253-011-0540-x.
56. Nakonechnyi O. G., Shevchuk Iu. M., Chikrii V. K. Estimating Nonstationary Parameters of Differential Equations Under Uncertainty. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54. No. 4. P. 610–623. doi:10.1007/s10559-018-0062-8.
57. Пашко А. О., Яневич Т. О. Методи моделювання процесу Орнштейна-Уленбека. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*. 2019. № 3. С. 24–28. doi:10.17721/1812-5409.2019/3.3.
58. Kozachenko Y., Rozora I. Simulation of Gaussian stochastic processes. *Random Operators and Stochastic Equations*. 2003. Vol. 11. No. 3. P. 275–296.
59. Brockwell P. J., Stramer O. On the approximation of continuous time threshold ARMA processes. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 1995. Vol. 47. No. 1. P. 1–20. doi:10.1007/BF00773408.
60. Bruti-Liberati N. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance. University of Technology, Sydney, School of Finance and Economics, 2007.

61. Hu Y., Xi Y. Parameter estimation for threshold Ornstein-Uhlenbeck processes from discrete observations. arXiv preprint. 2020. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2011.10793>.
62. Gihman I.I., Skorohod A.V. Stochastic Differential Equations. Berlin Heidelberg: Springer, 1972. 356 p.
63. Brockwell P.J., Hyndman R.J. On continuous-time threshold autoregression. International Journal of Forecasting. 1992. Vol. 8, Iss. 2. P. 157–173.
64. Wedderburn R.W.M. Quasi-likelihood functions, generalized linear models, and the Gauss–Newton method. Biometrika. 1974. Vol. 61. P. 439–447.
65. Protter P.E. Stochastic Integration and Differential Equations. Springer, 2005. 419 p.
66. Van Zanten J. On the uniform convergence of the empirical density of an ergodic diffusion. Statistical Inference for Stochastic Processes. 2000. Vol. 3, Iss. 3. P. 251–262.
67. Van der Vaart A.W. Asymptotic Statistics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 443 p.
68. Korolyuk V.S., Limnios N., Samoilenko I.V. LБvy and Poisson approximations of switched stochastic systems by a semimartingale approach. Comptes Rendus MathБmatique. 2016. Vol. 354, Iss. 7. P. 723–728.
69. Samoilenko I.V., Nikitin A.V. Differential equations with small stochastic terms under the LБvy approximating conditions. Ukrainian Mathematical Journal. 2018. Vol. 69. P. 1445–1454. <http://doi.org/10.1007/s11253-018-1443-x>.
70. Korolyuk V.S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. World Scientific Publishing, 2005. 330 p.
71. Самойленко І. В., Нікітін А. В. Диференціальні рівняння зі стохастично малими додатками в умовах апроксимації Леві, Український математичний журнал, с. 1242-1249.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Фрагмент програмного коду для оцінки параметрів двопорогової моделі на базі рівняння Іто

```
rm(list = ls())
safe_solve <- function(A, b) {
  d <- det(A)
  if (is.na(d) || abs(d) < 1e-10) return(rep(NA_real_, nrow(A)))
  as.vector(solve(A, b))
}
set.seed(654)

n_total <- 650
burn_in <- 5000
n_sim <- n_total + burn_in
dt_value <- 0.05
r1_true <- 0.48
r2_true <- 1.02
mu1_true <- 0.36
mu2_true <- 0.78
mu3_true <- 1.16
kappa1_true <- 1.9
kappa2_true <- 1.35
kappa3_true <- 1.9
sigma1_true <- 0.58
sigma2_true <- 0.30
sigma3_true <- 1.28

simulate_threshold_ou <- function(n, dt, x0,
                                r1, r2,
                                mu1, kappa1, sigma1,
                                mu2, kappa2, sigma2,
                                mu3, kappa3, sigma3) {

  X <- numeric(n)
  X[1] <- x0

  for (j in 2:n) {
    x_prev <- X[j - 1]
```

```

    if (x_prev <= r1) {
      mu_i    <- mu1
      kappa_i <- kappa1
      sigma_i <- sigma1
    } else if (x_prev <= r2) {
      mu_i    <- mu2
      kappa_i <- kappa2
      sigma_i <- sigma2
    } else {
      mu_i    <- mu3
      kappa_i <- kappa3
      sigma_i <- sigma3
    }

    X[j] <- x_prev +
      kappa_i * (mu_i - x_prev) * dt +
      sigma_i * sqrt(dt) * rnorm(1)
  }

  X
}

count_crossings <- function(X, r1, r2) {
  cross_r1 <- sum((X[-length(X)] - r1) * (X[-1] - r1) < 0)
  cross_r2 <- sum((X[-length(X)] - r2) * (X[-1] - r2) < 0)

  xprev <- X[-length(X)]
  p1 <- mean(xprev <= r1)
  p2 <- mean(xprev > r1 & xprev <= r2)
  p3 <- mean(xprev > r2)

  list(
    cross_r1 = cross_r1,
    cross_r2 = cross_r2,
    total = cross_r1 + cross_r2,
    p1 = p1,
    p2 = p2,
    p3 = p3
  )
}

```

```

best_X <- NULL
best_info <- NULL
best_score <- -Inf
n_tries <- 300

for (iter in 1:n_tries) {
  X_raw <- simulate_threshold_ou(
    n      = n_sim,
    dt     = dt_value,
    x0     = 0.78,
    r1     = r1_true,
    r2     = r2_true,
    mu1    = mu1_true, kappa1 = kappa1_true, sigma1 = sigma1_true,
    mu2    = mu2_true, kappa2 = kappa2_true, sigma2 = sigma2_true,
    mu3    = mu3_true, kappa3 = kappa3_true, sigma3 = sigma3_true
  )

  X_candidate <- X_raw[(burn_in + 1):n_sim]
  info <- count_crossings(X_candidate, r1_true, r2_true)
  balance_penalty <- 3 * (abs(info$p1 - 1/3) + abs(info$p2 - 1/3) +
abs(info$p3 - 1/3))
  score <- info$total - balance_penalty

  if (info$cross_r1 >= 6 && info$cross_r2 >= 6) {
    if (score > best_score) {
      best_score <- score
      best_X <- X_candidate
      best_info <- info
    }
  }
}

if (is.null(best_X)) {
  for (iter in 1:n_tries) {
    X_raw <- simulate_threshold_ou(
      n      = n_sim,
      dt     = dt_value,
      x0     = 0.78,
      r1     = r1_true,

```

```

    r2      = r2_true,
    mu1     = mu1_true, kappa1 = kappa1_true, sigma1 = sigma1_true,
    mu2     = mu2_true, kappa2 = kappa2_true, sigma2 = sigma2_true,
    mu3     = mu3_true, kappa3 = kappa3_true, sigma3 = sigma3_true
  )

  X_candidate <- X_raw[(burn_in + 1):n_sim]
  info <- count_crossings(X_candidate, r1_true, r2_true)

  balance_penalty <- 3 * (abs(info$p1 - 1/3) + abs(info$p2 - 1/3) +
abs(info$p3 - 1/3))
  score <- info$total - balance_penalty

  if (score > best_score) {
    best_score <- score
    best_X <- X_candidate
    best_info <- info
  }
}

X <- best_X
time <- 1:length(X)
q <- length(X)
delta_j <- rep(dt_value, q - 1)

eps_grid <- 0.02 * (max(X) - min(X))
a <- min(X) + eps_grid
b <- max(X) - eps_grid

r_values <- seq(a, b, length.out = 60)

cat("a =", a, "\n")
cat("b =", b, "\n")
cat("length(r_values) =", length(r_values), "\n\n")

compute_threshold_error <- function(true_value, estimated_value) {
  absolute_error <- abs(estimated_value - true_value)
  relative_error <- if (abs(true_value) < .EPS) NA_real_ else absolute_error
/ abs(true_value)

```

```

c(
  true_value = true_value,
  estimated_value = estimated_value,
  absolute_error = absolute_error,
  relative_error = relative_error
)
}

compute_beta_two_thresholds <- function(r1, r2, sigma1_sq, sigma2_sq,
sigma3_sq, delta_j) {
  beta1_mat <- matrix(0, nrow = 2, ncol = 2)
  beta2_mat <- matrix(0, nrow = 2, ncol = 2)
  beta3_mat <- matrix(0, nrow = 2, ncol = 2)

  b1 <- c(0, 0)
  b2 <- c(0, 0)
  b3 <- c(0, 0)

  for(j in 2:q) {
    if(is.na(X[j-1])) next
    if(X[j-1] <= r1) {
      regime <- 1
      sigma_sq <- sigma1_sq
    } else if(X[j-1] <= r2) {
      regime <- 2
      sigma_sq <- sigma2_sq
    } else {
      regime <- 3
      sigma_sq <- sigma3_sq
    }

    if(sigma_sq <= 0 || is.na(sigma_sq)) next

    if(regime == 1) {
      beta1_mat[1,1] <- beta1_mat[1,1] + delta_j[j-1] / sigma_sq
      beta1_mat[1,2] <- beta1_mat[1,2] + delta_j[j-1] * X[j-1] / sigma_sq
      beta1_mat[2,1] <- beta1_mat[1,2]
      beta1_mat[2,2] <- beta1_mat[2,2] + delta_j[j-1] * (X[j-1]^2) /
sigma_sq

```

```

    b1[1] <- b1[1] + (X[j] - X[j-1]) / sigma_sq
    b1[2] <- b1[2] + (X[j] - X[j-1]) * X[j-1] / sigma_sq
  } else if(regime == 2) {
    beta2_mat[1,1] <- beta2_mat[1,1] + delta_j[j-1] / sigma_sq
    beta2_mat[1,2] <- beta2_mat[1,2] + delta_j[j-1] * X[j-1] / sigma_sq
    beta2_mat[2,1] <- beta2_mat[1,2]
    beta2_mat[2,2] <- beta2_mat[2,2] + delta_j[j-1] * (X[j-1]^2) /
sigma_sq

    b2[1] <- b2[1] + (X[j] - X[j-1]) / sigma_sq
    b2[2] <- b2[2] + (X[j] - X[j-1]) * X[j-1] / sigma_sq
  } else {
    beta3_mat[1,1] <- beta3_mat[1,1] + delta_j[j-1] / sigma_sq
    beta3_mat[1,2] <- beta3_mat[1,2] + delta_j[j-1] * X[j-1] / sigma_sq
    beta3_mat[2,1] <- beta3_mat[1,2]
    beta3_mat[2,2] <- beta3_mat[2,2] + delta_j[j-1] * (X[j-1]^2) /
sigma_sq

    b3[1] <- b3[1] + (X[j] - X[j-1]) / sigma_sq
    b3[2] <- b3[2] + (X[j] - X[j-1]) * X[j-1] / sigma_sq
  }
}

beta1_hat <- if (det(beta1_mat) != 0 && !is.na(det(beta1_mat)))
as.vector(solve(beta1_mat) %*% b1) else c(NA, NA)
beta2_hat <- if (det(beta2_mat) != 0 && !is.na(det(beta2_mat)))
as.vector(solve(beta2_mat) %*% b2) else c(NA, NA)
beta3_hat <- if (det(beta3_mat) != 0 && !is.na(det(beta3_mat)))
as.vector(solve(beta3_mat) %*% b3) else c(NA, NA)

return(list(beta1 = beta1_hat, beta2 = beta2_hat, beta3 = beta3_hat))
}

compute_sigma_sq_regime <- function(r1, r2, beta, delta_j, regime,
sigma1_sq, sigma2_sq, sigma3_sq) {
  numerator <- 0
  denominator <- 0

  for(j in 2:q) {
    if (is.na(X[j - 1])) next

```

```

x_prev <- X[j - 1]
delta <- delta_j[j - 1]
I1 <- as.numeric(x_prev <= r1)
I2 <- as.numeric(x_prev > r1 & x_prev <= r2)
I3 <- as.numeric(x_prev > r2)
denom_component <- (sigma1_sq^4 * I1 + sigma2_sq^4 * I2 + sigma3_sq^4 *
I3) * delta
  if (is.na(denom_component) || denom_component == 0) next
  beta_current <- if (regime == 1) beta$beta1 else if (regime == 2)
beta$beta2 else beta$beta3
  indicator <- switch(regime,
                        `1` = I1,
                        `2` = I2,
                        `3` = I3)

  if (indicator == 0) next
  fitted <- beta_current[1] + beta_current[2] * x_prev
  residual <- (X[j] - x_prev - delta * fitted)^2
  numerator <- numerator + residual * indicator / denom_component
  denominator <- denominator + indicator / (switch(regime,
                                                    `1` = sigma1_sq^4,
                                                    `2` = sigma2_sq^4,
                                                    `3` = sigma3_sq^4))
}

if (denominator == 0) return(NA)
return(numerator / denominator)
}

compute_likelihood_two_thresholds <- function(theta, X, delta_j) {
  r1 <- theta$r1
  r2 <- theta$r2
  beta1 <- theta$beta1
  beta2 <- theta$beta2
  beta3 <- theta$beta3
  sigma1_sq <- theta$sigma1_sq
  sigma2_sq <- theta$sigma2_sq
  sigma3_sq <- theta$sigma3_sq

  q_local <- length(X)
  contrast <- 0

```

```

for (j in 2:q_local) {
  x_prev <- X[j - 1]
  dx <- X[j] - X[j - 1]
  delta <- delta_j[j - 1]

  if (x_prev <= r1) {
    sigma_sq <- sigma1_sq
    beta_current <- beta1
  } else if (x_prev <= r2) {
    sigma_sq <- sigma2_sq
    beta_current <- beta2
  } else {
    sigma_sq <- sigma3_sq
    beta_current <- beta3
  }

  if (is.na(sigma_sq) || sigma_sq <= 0 || any(is.na(beta_current))) next

  drift <- beta_current[1] + beta_current[2] * x_prev
  resid_sq <- (dx - drift * delta)^2

  contrast <- contrast + log(sigma_sq) + resid_sq / (sigma_sq * delta)
}

return(contrast)
}

max_iter <- 200
threshold <- 1e-6
min_reg_size <- 30
gap_min <- 0.10 * sd(X)
min_reg_prop <- 0.08
r_values <- seq(
  min(X) + 0.05 * (max(X) - min(X)),
  max(X) - 0.05 * (max(X) - min(X)),
  length.out = 60
)

theta_list <- list()

```

```

likelihoods <- c()
counter <- 1
xprev_all <- X[-length(X)]
dx_all <- X[-1] - X[-length(X)]

for (r1 in r_values) {
  for (r2 in r_values) {
    if (r1 >= r2) next
    if ((r2 - r1) < gap_min) next
    n_reg1 <- sum(xprev_all <= r1)
    n_reg2 <- sum(xprev_all > r1 & xprev_all <= r2)
    n_reg3 <- sum(xprev_all > r2)
    if (min(n_reg1, n_reg2, n_reg3) < min_reg_size) next
    p_reg1 <- n_reg1 / length(xprev_all)
    p_reg2 <- n_reg2 / length(xprev_all)
    p_reg3 <- n_reg3 / length(xprev_all)

    if (min(p_reg1, p_reg2, p_reg3) < min_reg_prop) next
    T_total <- (length(X) - 1) * dt_value
    sigma1_sq <- (1 / T_total) * sum(
      (X[-1] * as.numeric(X[-1] <= r1) -
        X[-length(X)] * as.numeric(X[-length(X)] <= r1))^2,
      na.rm = TRUE
    )
    sigma2_sq <- (1 / T_total) * sum(
      (X[-1] * as.numeric(X[-1] > r1 & X[-1] <= r2) -
        X[-length(X)] * as.numeric(X[-length(X)] > r1 & X[-length(X)] <=
r2))^2,
      na.rm = TRUE
    )
    sigma3_sq <- (1 / T_total) * sum(
      (X[-1] * as.numeric(X[-1] > r2) -
        X[-length(X)] * as.numeric(X[-length(X)] > r2))^2,
      na.rm = TRUE
    )
    if (is.na(sigma1_sq) || is.na(sigma2_sq) || is.na(sigma3_sq) ||
      sigma1_sq <= 0 || sigma2_sq <= 0 || sigma3_sq <= 0) {
      next
    }
  }
}

```

```

converged <- FALSE

for (k in 1:max_iter) {
  beta_vals <- compute_beta_two_thresholds(
    r1, r2, sigma1_sq, sigma2_sq, sigma3_sq, delta_j
  )
  if (any(is.na(beta_vals$beta1)) ||
      any(is.na(beta_vals$beta2)) ||
      any(is.na(beta_vals$beta3))) {
    break
  }
  sigma1_sq_new <- compute_sigma_sq_regime(
    r1, r2, beta_vals, delta_j, regime = 1,
    sigma1_sq = sigma1_sq, sigma2_sq = sigma2_sq, sigma3_sq = sigma3_sq
  )
  sigma2_sq_new <- compute_sigma_sq_regime(
    r1, r2, beta_vals, delta_j, regime = 2,
    sigma1_sq = sigma1_sq, sigma2_sq = sigma2_sq, sigma3_sq = sigma3_sq
  )
  sigma3_sq_new <- compute_sigma_sq_regime(
    r1, r2, beta_vals, delta_j, regime = 3,
    sigma1_sq = sigma1_sq, sigma2_sq = sigma2_sq, sigma3_sq = sigma3_sq
  )
  if (is.na(sigma1_sq_new) || is.na(sigma2_sq_new) ||
      is.na(sigma3_sq_new) ||
      sigma1_sq_new <= 0 || sigma2_sq_new <= 0 || sigma3_sq_new <= 0) {
    break
  }

  diff_sigma <- max(abs(c(
    sigma1_sq_new - sigma1_sq,
    sigma2_sq_new - sigma2_sq,
    sigma3_sq_new - sigma3_sq
  )))

  sigma1_sq <- sigma1_sq_new
  sigma2_sq <- sigma2_sq_new
  sigma3_sq <- sigma3_sq_new

  if (diff_sigma < threshold) {

```

```

        converged <- TRUE
        break
    }
}

if (any(is.na(beta_vals$beta1)) ||
    any(is.na(beta_vals$beta2)) ||
    any(is.na(beta_vals$beta3))) {
    next
}

current_theta <- list(
    r1 = r1,
    r2 = r2,
    beta1 = beta_vals$beta1,
    beta2 = beta_vals$beta2,
    beta3 = beta_vals$beta3,
    sigma1_sq = sigma1_sq,
    sigma2_sq = sigma2_sq,
    sigma3_sq = sigma3_sq,
    n_reg1 = n_reg1,
    n_reg2 = n_reg2,
    n_reg3 = n_reg3,
    p_reg1 = p_reg1,
    p_reg2 = p_reg2,
    p_reg3 = p_reg3,
    converged = converged
)

current_lik <- compute_likelihood_two_thresholds(current_theta, X,
delta_j)

theta_list[[counter]] <- current_theta
likelihoods[counter] <- current_lik
counter <- counter + 1
}
}

tau <- which.min(likelihoods)
best_theta <- theta_list[[tau]]

```

```

regime_hat <- ifelse(X <= best_theta$r1, 1,
                    ifelse(X <= best_theta$r2, 2, 3))

cols_reg <- c("royalblue3", "black", "firebrick3")

cross_idx <- which(
  (X[-length(X)] - best_theta$r1) * (X[-1] - best_theta$r1) < 0 |
  (X[-length(X)] - best_theta$r2) * (X[-1] - best_theta$r2) < 0
)

par(mfrow = c(2, 1), mar = c(4.3, 4.5, 1.2, 2))
plot(time, X,
     type = "n",
     xlab = "Час",
     ylab = "X(t)")
abline(h = best_theta$r1, col = "blue", lty = 2, lwd = 2)
abline(h = best_theta$r2, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
for (j in 1:(length(X) - 1)) {
  segments(time[j], X[j], time[j + 1], X[j + 1],
          col = cols_reg[regime_hat[j]], lwd = 1.7)
}
if (length(cross_idx) > 0) {
  points(time[cross_idx + 1], X[cross_idx + 1],
        pch = 16, cex = 0.55, col = "darkorange2")
}
legend("topright",
      legend = c(
        paste0("r1 = ", round(best_theta$r1, 3)),
        paste0("r2 = ", round(best_theta$r2, 3)),
        "Нижній режим",
        "Середній режим",
        "Верхній режим",
        "Перехід"
      ),
      col = c("blue", "red", "royalblue3", "black", "firebrick3",
              "darkorange2"),
      lty = c(2, 2, 1, 1, 1, NA),
      lwd = c(2, 2, 2, 2, 2, NA),
      pch = c(NA, NA, NA, NA, NA, 16),
      pt.cex = 0.55,

```

```

    cex = 0.72,
    y.intersp = 0.8,
    x.intersp = 0.7,
    bty = "n")
plot(time, X,
     type = "n",
     xlab = "Час",
     ylab = "X(t)")
usr <- par("usr")
rect(usr[1], usr[3], usr[2], best_theta$r1,
     col = rgb(0.2, 0.4, 1.0, 0.10), border = NA)
rect(usr[1], best_theta$r1, usr[2], best_theta$r2,
     col = rgb(0.0, 0.0, 0.0, 0.06), border = NA)
rect(usr[1], best_theta$r2, usr[2], usr[4],
     col = rgb(1.0, 0.2, 0.2, 0.10), border = NA)
lines(time, X, col = "#00CED1", lwd = 1.2)
abline(h = best_theta$r1, col = "blue", lty = 2, lwd = 2)
abline(h = best_theta$r2, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
x_text <- usr[1] + 0.02 * (usr[2] - usr[1])
y_lower <- usr[3] + 0.5 * (best_theta$r1 - usr[3])
y_middle <- best_theta$r1 + 0.5 * (best_theta$r2 - best_theta$r1)
y_upper <- best_theta$r2 + 0.5 * (usr[4] - best_theta$r2)
text(x_text, y_lower,
     labels = "Нижній режим",
     adj = c(0, 0.5),
     cex = 0.75,
     col = "royalblue3")
text(x_text, y_middle,
     labels = "Середній режим",
     adj = c(0, 0.5),
     cex = 0.75,
     col = "black")
text(x_text, y_upper,
     labels = "Верхній режим",
     adj = c(0, 0.5),
     cex = 0.75,
     col = "firebrick3")
legend("topright",
     legend = c(
       paste0("r1 = ", round(best_theta$r1, 3)),

```

```
paste0("r2 = ", round(best_theta$r2, 3))  
,  
col = c("blue", "red"),  
lty = c(2, 2),  
lwd = c(2, 2),  
cex = 0.75,  
y.intersp = 0.8,  
bty = "n")
```