

УДК 519.21

О.Д. Борисенко¹, к.ф.-м.н., доцент
Д.О. Борисенко¹, аспірант

**Стохастична перманентність розв'язку
стохастичного неавтономного
логістичного рівняння зі стрибками**

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

O.D. Borysenko¹, Ph.D., Associate Professor
D.O. Borysenko¹, Ph.D. student

**Stochastic permanence of solution to
stochastic non-autonomous logistic
equation with jumps**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.,
e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

У роботі одержано достатні умови стохастичної перманентності розв'язку стохастичного неавтономного логістичного рівняння, яке містить члени з центрованою і нецентрованою пуассонівськими мірами. Коефіцієнти рівняння не задовольняють умову лінійного обмеження.

Ключові слова: стохастична перманентність, неавтономне логістичне диференціальне рівняння, стохастичне диференціальне рівняння, центрована і нецентрована пуассонівські міри.

It is investigated the non-autonomous logistic differential equation with disturbance of coefficients by white noise, centered and non-centered Poisson noises. The coefficients of equation are locally Lipschitz continuous but do not satisfy the linear growth condition. This equation describes the dynamics of population in the Verhulst model which takes into account the logistic effect: an increase of the population size produces a fertility decrease and a mortality increase; since resources are limited, if the population size exceeds some threshold level, the habitat cannot support the growth. The property of stochastic permanence is desirable since it means the long time survival in a population dynamics. The sufficient conditions for the stochastic permanence of population in the considered model is obtained.

Key Words: stochastic permanence, non-autonomous logistic differential equation, stochastic differential equation, centered and non-centered Poisson measures.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

1 Вступ

Побудова логістичної моделі та її властивості представлені у роботі [1]. Класичне неавтономне логістичне диференціальне рівняння має вигляд $dN(t) = N(t)(a(t) - b(t)N(t))dt$, $N(0) = N_0 > 0$ і моделює розмір N популяції, члени якої конкурують один з одним за обмежену кількість їжі та обмежений життєвий простір. Тут $a(t)$ – це інтенсивність росту популяції і $a(t)/b(t)$ – це ємність середовища у момент часу t . У роботі [2] вивчалось, зокрема, стохастичне неавтономне логістичне диференціальне рівняння вигляду

$$dN(t) = N(t) [(a(t) - b(t)N(t))dt + \alpha(t)N(t)dw(t)], N(0) = N_0, \quad (1)$$

де $w(t)$ – це стандартний одновимірний Вінерів процес. Оскільки модель (1) описує динаміку популяції, то важливим питанням є визначення умов, при яких популяція вимирає, і умов, при яких виживає. В [2] одержано поріг виживання,

вимирання популяції у моделі (1). У роботі [3] розглядалось стохастичне неавтономне логістичне диференціальне рівняння вигляду

$$dN(t) = N(t) \left[(a(t) - b(t)N(t))dt + \alpha(t)dw(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(t, z)\tilde{\nu}_1(dt, dz) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_2(t, z)\nu_2(dt, dz) \right], \\ N(0) = N_0, \quad (2)$$

де $w(t)$ – це стандартний одновимірний Вінерів процес, $\tilde{\nu}_1(t, A) = \nu_1(t, A) - t\Pi_1(A)$, $\nu_1(t, A)$ і $\nu_2(t, A)$ – незалежні міри Пуассона, які є незалежними від $w(t)$ і $N_0 > 0$, $E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$, $\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$ – це скінченні міри на Борелевих множинах A у \mathbb{R} . В [3] одержано явний вигляд глобального розв'язку рівняння (2) і достатні умови його стохастичної перманентності. У роботі [4] для рівняння (2) одержано достатні умови вимирання популяції майже напевно, неживання популяції у середньому майже напевно, слабкого та сильного

виживання популяції у середньому майже напевно.

Ми будемо вивчати властивість стохастичної перманентності розв'язку стохастичного диференціального рівняння вигляду

$$\begin{aligned} dN(t) = & N(t)[(a(t) - b(t)N(t))dt + \\ & + \alpha(t)N(t)dw(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(t, z)N(t)\tilde{\nu}_1(dt, dz) + \\ & + \int_{\mathbb{R}} \gamma_2(t, z)N(t)\nu_2(dt, dz)], N(0) = N_0, \end{aligned} \quad (3)$$

де $N_0 > 0$ є не випадковим початковим значенням.

Означення 1.1. Розв'язок $N(t)$ рівняння (3) є стохастично перманентним, якщо для $\forall \varepsilon > 0$ існують додатні константи $H = H(\varepsilon)$, $h = h(\varepsilon)$ такі, що $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\{N(t) \leq H\} \geq 1 - \varepsilon$, $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\{N(t) \geq h\} \geq 1 - \varepsilon$.

Властивість перманентності є важливою, бо означає довготермінове виживання у популяційній динаміці. Як відомо авторам, питання стохастичної перманентності у моделі популяційної динаміки, яка описується стохастичним диференціальним рівнянням вигляду (3), ще не досліджувались. Тому таке дослідження є актуальним.

Будемо використовувати такі позначення $f_* = \liminf_{t \rightarrow \infty} f(t)$, $f^* = \limsup_{t \rightarrow \infty} f(t)$. Для неперервної обмеженої функції $f(t)$, $t \in [0, +\infty)$ позначимо $f_{\sup} = \sup_{t \in [0, +\infty)} f(t)$, $f_{\inf} = \inf_{t \in [0, +\infty)} f(t)$.

У цій статті ми використали ідеї роботи [2].

2 Основний результат

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – це ймовірнісний простір і $w(t)$, $t \geq 0$ – стандартний одновимірний вінерів процес на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $N_0 > 0$ – не випадкова початкова умова, $\nu_1(t, A)$ і $\nu_2(t, A)$ – незалежні міри Пуассона, визначені на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, які не залежать від $w(t)$, $\tilde{\nu}_1(t, A) = \nu_1(t, A) - t\Pi_1(A)$, $E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$, $\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$ – це скінченні міри на борелевих множинах A в \mathbb{R} . На ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ задано потік σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, який задовольняє звичні умови, де $\mathcal{F}_t = \sigma\{w(s), \nu_i(s, A), i = 1, 2, s \leq t\}$.

Коефіцієнти рівняння (3) не задовольняють умові лінійної обмеженості, але задовольняють локальну умову Ліпшица, тому (див. [5], Теорема 6, ст.246) існує локальний розв'язок рівняння (3). У роботі [6] доведено наступну теорему.

Теорема 2.1. Нехай $b_{\inf} > 0$, $a(t), b(t), \alpha(t)$ – це обмежені, неперервні функції, визначені на $[0, +\infty)$. Будемо припускати, що $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty$, $i = 1, 2$, $\gamma_i(t, z)$, $i = 1, 2$ – це обмежені, неперервні по t функції, $i \inf \gamma_1(t, z) > 0$, $\gamma_2(t, z) \geq 0$. Тоді для довільного не випадкового початкового значення $N(0) = N_0 > 0$ існує єдиний розв'язок $N(t)$ рівняння (3), який є глобальним і $\mathbf{P}\{N(t) \geq 0\} = 1$.

Основним результатом даної роботи є

Теорема 2.2. Нехай виконуються умови Теорему 2.1 і $a_* > 0$, тоді розв'язок $N(t)$ рівняння (3) є стохастично перманентним.

Доведення. Покажемо спочатку, що для $\forall \varepsilon > 0$ існує константа $H = H(\varepsilon) > 0$ така, що $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\{N(t) \leq H\} \geq 1 - \varepsilon$. Виберемо достатньо велике $n_0 > 0$ так, щоб $N_0 \in [1/n_0, n_0]$. Для $\forall n \geq n_0$ визначимо момент зупинки $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : N(t) \notin (1/n_0, n_0)\}$. Зрозуміло, що $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = +\infty$ майже напевно (м.н.). Застосуємо формулу Іто до процесу $e^t N^q(t)$, $0 < q < 1$

$$\begin{aligned} e^{t \wedge \tau_n} N^q(t \wedge \tau_n) = & \\ = N_0^q + \int_0^{t \wedge \tau_n} q e^s N^q(s) \left\{ 1/q + a(s) - b(s)N(s) - \right. & \\ - \frac{(1-q)}{2} \alpha^2(s) N^2(s) + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}} [(1 + \gamma_1(s, z)N(s))^q - & \\ - 1 - \gamma_1(s, z)N(s)] \Pi_1(dz) + & \\ \left. + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}} [(1 + \gamma_2(s, z)N(s))^q - 1] \Pi_2(dz) \right\} ds + & \\ + \int_0^{t \wedge \tau_n} q e^s N^{q+1}(s) \alpha(s) dw(s) + & \quad (4) \\ \iint_{\mathbb{R}} e^s N^q(s) [(1 + \gamma_1(s, z)N(s))^q - 1] \tilde{\nu}_1(ds, dz) + & \\ \iint_{\mathbb{R}} e^s N^q(s) [(1 + \gamma_2(s, z)N(s))^q - 1] \tilde{\nu}_2(ds, dz), & \end{aligned}$$

де $\tilde{\nu}_i(ds, dz) = \nu_i(ds, dz) - \Pi_i(dz)ds$, $i = 1, 2$.

Оскільки $(1 + x)^q \leq 1 + x$, $x \geq 0$ при $0 < q < 1$ і $N(s) \geq 0$ м.н., тому маємо

$$\begin{aligned} q N^q(s) \left\{ 1/q + a(s) - b(s)N(s) - \right. & \\ - \frac{(1-q)}{2} \alpha^2(s) N^2(s) + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}} [(1 + \gamma_1(s, z)N(s))^q - & \\ - 1 - \gamma_1(s, z)N(s)] \Pi_1(dz) + & \\ \left. + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}} [(1 + \gamma_2(s, z)N(s))^q - 1] \Pi_2(dz) \right\} \leq & \\ \leq N^q(s) \left(1 + q \left(a_{\sup} - b_{\inf} N(s) - \right. & \\ - \frac{1-q}{2} \alpha^2(s) N^2(s) \right) + & \\ \left. + \Pi_2(\mathbb{R}) [(1 + N(s) \sup_{s, z} \gamma_2(s, z))^q - 1] \right) \leq K & \end{aligned}$$

для деякої константи $K > 0$. Тому із (4) одержимо

$$\begin{aligned} e^{t \wedge \tau_n} N^q(t \wedge \tau_n) &\leq N_0^q + K(e^t - 1) + \\ &+ \int_0^{t \wedge \tau_n} q e^s N^{q+1}(s) \alpha(s) dw(s) + \\ &+ \int_0^{t \wedge \tau_n} \int_{\mathbb{R}} e^s N^q(s) [(1 + \gamma_1(s, z) N(s))^q - 1] \tilde{\nu}_1(ds, dz) + \\ &+ \int_0^{t \wedge \tau_n} \int_{\mathbb{R}} e^s N^q(s) [(1 + \gamma_2(s, z) N(s))^q - 1] \tilde{\nu}_2(ds, dz). \end{aligned}$$

Взявши математичне сподівання і використавши властивості стохастичних інтегралів, одержимо $\mathbf{E}[e^{t \wedge \tau_n} N^q(t \wedge \tau_n)] \leq N_0^q + K(e^t - 1)$, і при $n \rightarrow \infty$ маємо

$$\mathbf{E}[N^q(t)] \leq e^{-t} N_0^q + K, \quad (5)$$

а тому $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[N^q(t)] \leq K$. Для довільного $\varepsilon > 0$ покладемо $H = (K/\varepsilon)^{1/q}$ і за нерівністю Чебишева маємо $\mathbf{P}\{N(t) > H\} = \mathbf{P}\{N^q(t) > H^q\} \leq \mathbf{E}[N^q(t)]/H^q$, а значить $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{N(t) > H\} \leq \frac{\varepsilon}{K} \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[N^q(t)] \leq \varepsilon$. Тому $\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{N(t) \leq H\} \geq 1 - \varepsilon$.

Тепер доведемо, що для $\forall \varepsilon > 0$ існує $h = h(\varepsilon) > 0$ таке, що $\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{N(t) \geq h\} \geq 1 - \varepsilon$. Позначимо $V_1(x) = x^{-2}, x \geq 0$ і $V_2(x) = (1 + V_1(x))^\theta, \theta \in (1/4, 1/2)$. За формулою Іто маємо

$$\begin{aligned} V_2(N(t)) &\leq V_2(N(t_0)) + \int_{t_0}^t \theta (1 + V_1(N(s)))^{\theta-2} \times \\ &\times \left\{ -2a(s) V_1^2(N(s)) + 2V_1^{1.5}(N(s)) \left(b(s) + \right. \right. \\ &+ \left. \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(s, z) \Pi_1(dz) \right) + V_1(N(s)) [(2\theta + 1)\alpha^2(s) - \\ &- 2a(s)] + 2V_1^{0.5}(N(s)) \left(b(s) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(s, z) \Pi_1(dz) \right) + \\ &+ 3\alpha^2(s) \left. \right\} ds - 2 \int_{t_0}^t \theta (1 + V_1(N(s)))^{\theta-1} \frac{\alpha(s)}{N(s)} dw(s) + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} \left[\left(1 + \frac{V_1(N(s))}{(1+N(s)\gamma_i(s, z))^2} \right)^\theta - \right. \\ &\left. - (1 + V_1(N(s)))^\theta \right] \tilde{\nu}_i(ds, dz). \quad (6) \end{aligned}$$

Із означення a_* випливає, що для $\forall \varepsilon > 0$ існує таке $t_0 > 0$, що $\forall t \geq t_0$ маємо $\inf_{s \geq t} a(s) > a_* - \varepsilon$. Виберемо $\forall \varepsilon > 0$ так, щоб $a_* - \varepsilon > 0$. Тоді із (6) одержимо для $\forall t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} V_2(N(t)) &\leq V_2(N(t_0)) + \int_{t_0}^t \theta (1 + V_1(N(s)))^{\theta-2} \times \\ &\times \left\{ -2(a_* - \varepsilon) V_1^2(N(s)) + 2c_{\text{sup}} V_1^{1.5}(N(s)) + \right. \\ &+ \left. [(2\theta + 1)(\alpha^2)_{\text{sup}} - 2(a_* - \varepsilon)] V_1(N(s)) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 2c_{\text{sup}} V_1^{0.5}(N(s)) + 3(\alpha^2)_{\text{sup}} \left. \right\} ds - \quad (7) \\ &- 2 \int_{t_0}^t \theta (1 + V_1(N(s)))^{\theta-1} \alpha(s) N^{-1}(s) dw(s) + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} \left[\left(1 + \frac{V_1(N(s))}{(1+N(s)\gamma_i(s, z))^2} \right)^\theta - \right. \\ &\left. - (1 + V_1(N(s)))^\theta \right] \tilde{\nu}_i(ds, dz), \end{aligned}$$

де $c_{\text{sup}} = \sup_t (b(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(t, z) \Pi_1(dz))$. Виберемо $\eta > 0$ так, щоб $0 < \eta/\theta < 2(a_* - \varepsilon)$. Нехай $V_3(x) = e^{\eta t} V_2(x)$. Тоді за формулою Іто $dV_3(N(t)) = \eta e^{\eta t} V_2(N(t)) dt + e^{\eta t} dV_2(N(t))$ і, використавши (7), одержимо

$$\begin{aligned} V_3(N(t)) &\leq V_3(N(t_0)) + \int_{t_0}^t \theta e^{\eta s} (1 + V_1(N(s)))^{\theta-2} \times \\ &\times \left\{ -2(a_* - \varepsilon - \frac{0.5\eta}{\theta}) V_1^2(N(s)) + 2c_{\text{sup}} V_1^{1.5}(N(s)) + \right. \\ &+ \left. [(2\theta + 1)(\alpha^2)_{\text{sup}} - 2(a_* - \varepsilon - \frac{\eta}{\theta})] V_1(N(s)) + \right. \\ &+ 2c_{\text{sup}} V_1^{0.5}(N(s)) + 3(\alpha^2)_{\text{sup}} + \eta/\theta \left. \right\} ds - \\ &- 2 \int_{t_0}^t e^{\eta s} \theta (1 + V_1(N(s)))^{\theta-1} \alpha(s) / N(s) dw(s) + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} e^{\eta s} \left[\left(1 + \frac{V_1(N(s))}{(1+N(s)\gamma_i(s, z))^2} \right)^\theta - \right. \\ &\left. - (1 + V_1(N(s)))^\theta \right] \tilde{\nu}_i(ds, dz) = \\ &= V_3(N(t_0)) + \int_{t_0}^t e^{\eta s} F(N(s)) ds + \sum_{i=1}^3 J_{st}^i, \end{aligned}$$

де $F(x), x \geq 0$ – функція обмежена зверху деякою константою $K > 0$, а $J_{st}^i, i = \overline{1, 3}$ – відповідні стохастичні інтеграли у попередній формулі. Таким чином

$$V_3(N(t)) \leq V_3(N(t_0)) + \frac{K}{\eta} (e^{\eta t} - e^{\eta t_0}) + \sum_{i=1}^3 J_{st}^i. \quad (8)$$

Покажемо, що $\mathbf{E}[J_{st}^i] = 0, i = \overline{1, 3}$. Маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\int_{t_0}^t e^{2\eta s} (1 + V_1(N(s)))^{2(\theta-1)} \frac{\alpha^2(s)}{N^2(s)} ds \right] &= \\ = \mathbf{E} \left[\int_{t_0}^t e^{2\eta s} (N^2(s) + 1)^{2(\theta-1)} \frac{\alpha^2(s)}{N^{4\theta-2}(s)} ds \right] &\leq \quad (9) \\ \leq (\alpha^2)_{\text{sup}} \int_{t_0}^t e^{2\eta s} \mathbf{E}[N^{2-4\theta}(s)] ds &< \infty. \end{aligned}$$

Тут ми використали умову $0 < \theta < 1$ і оцінку (5). Далі, оскільки функція $f(x) = (1 + x)^\theta, x \geq 0, 0 < \theta < 1$ опукла вгору і диференційовна, то має місце оцінка $f(x + z) - f(x) \leq f'(x)z$. Використавши цю оцінку, умову $1/4 < \theta < 1/2$

і (5), одержимо для $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\eta s} \left[\left(1 + \frac{V_1(N(s))}{(1+N(s)\gamma_i(s,z))^2} \right)^\theta - \right. \right. \\ & \left. \left. - (1 + V_1(N(s)))^\theta \right] \Pi_i(dz) ds \right] \leq \\ & \leq \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\eta s} \frac{\theta^2 V_1^2(N(s))}{(1+V_1(N(s)))^{2(1-\theta)}} \times \right. \\ & \left. \times \frac{((1+N(s)\gamma_i(s,z))^2 - 1)^2}{(1+N(s)\gamma_i(s,z))^4} \Pi_i(dz) ds \right] \leq \\ & \leq K_1 \int_{t_0}^t e^{2\eta s} \mathbb{E}[N^{2-4\theta}(s)] ds < \infty, \end{aligned} \quad (10)$$

де $K_1 = 4\theta^2(\sup_{s,z} \gamma_i(s,z))^2 \Pi_i(\mathbb{R})$. Із (9),(10)

Список використаних джерел

1. Iannelli M. An Introduction to Mathematical Population Dynamics. / M. Iannelli, A. Pugliese. Springer, 2014. – 351 p.
2. Liu M. Persistence and extinction in stochastic non-autonomous logistic systems. / Meng Liu, Ke Wanga // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2011. – 375. – P.443–457.
3. Borysenko O.D. Non-autonomous stochastic logistic differential equation with non-centered Poisson measure. / O.D. Borysenko, D.O. Borysenko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics & Mathematics. – 2017. – 4. – P. 9–14.
4. Борисенко О.Д. Вживання і вимірювання у стохастичній неавтономній логістичній моделі популяційної динаміки. / О.Д. Борисенко, Д.О. Борисенко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2018. – 2(99). – С.63–70.
5. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. / И.И. Гихман, А.В. Скороход. Наукова Думка, Киев, 1982. – 611 с.
6. Борисенко О.Д. Асимптотична поведінка розв'язку неавтономного стохастичного логістичного диференціального рівняння. / О.Д. Борисенко, Д.О. Борисенко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2019. – 2(101). – С.55 – 64.

і властивостей стохастичних інтегралів маємо $\mathbb{E}[J_{st}^i] = 0, i = 1, 3$. Візьмемо математичне сподівання від обох частин (8) і одержимо $\mathbb{E}[(1 + V_1(N(t)))^\theta] \leq e^{\eta(t_0-t)} \mathbb{E}[(1 + V_1(N(t_0)))^\theta] + (K/\eta)(1 - e^{\eta(t_0-t)})$. Тому $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[V_1^\theta(N(t))] \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(1 + V_1(N(t)))^\theta] \leq K/\eta$, а отже $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N^{-2\theta}(t)] \leq K/\eta = C$. Покладемо $h = (\varepsilon/C)^{1/2\theta}$ для $\forall \varepsilon > 0$, тоді за нерівністю Чебишева одержимо $\mathbf{P}\{N(t) < h\} = \mathbf{P}\{N^{-2\theta}(t) > h^{-2\theta}\} \leq h^{2\theta} \mathbb{E}[n^{-2\theta}(t)] = \varepsilon \mathbb{E}[n^{-2\theta}(t)]/C$ і $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{N(t) < h\} \leq \varepsilon$, а значить $\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{N(t) \geq h\} \geq 1 - \varepsilon$. \square

References

1. IANNELLI, M. and PUGLIESE, A. (2014), *An Introduction to Mathematical Population Dynamics*, Springer, 351 p.
2. LIU, MENG and WANGA, KE (2011) "Persistence and extinction in stochastic non-autonomous logistic systems", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **375**, 443–457.
3. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, D.O. (2017), "Non-autonomous stochastic logistic differential equation with non-centered Poisson measure", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics & Mathematics*, (2017), no.4, 9–14
4. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, D.O. (2018) "Persistence and extinction in stochastic nonautonomous logistic model of population dynamics", *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, no.2(99), 63–70.
5. GIKHMAN, I.I. and SKOROKHOD, A.V. (1982), *Stochastic Differential Equations and their Applications*, Naukova Dumka, Kiev, 611p. (in Russian)
6. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, D.O. (2019), "Asymptotic behavior of solution to the non-autonomous stochastic logistic differential equation", *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, n.2(101), 55 –64.

Надійшла до редколегії 28.08.2019