Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Мунчак Євгенія Юріївна

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ
Функціональні граничні теореми та їх застосування до фінансових ринків з дискретним та неперервним часом

01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

11 – Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Є.Ю. Мунчак

Науковий керівник
Мішура Юлія Степанівна
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2017

АНОТАЦІЯ

Мунчак Є.Ю. Функціональні граничні теореми та їх застосування до фінансових ринків з дискретним та неперервним часом. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 "Теорія ймовірнонестей і математична статистика". – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2017.

Дисертація присвячена застосуванню функціональних граничних теорем до фінансових ринків з дискретним та неперервним часом. Зокрема, розвивається питання оцінки та швидкості збіжності цін опціонів у різних моделях.

В роботі встановлено швидкість збіжності розподілів сум незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального закону розподілу в термінах зрізаних псевдомоментів. Для цього було узагальнено оцінку Ю. Студнєва. Отримано таку ж оцінку, обходячись без умови Крамера. Натомість введено обмежені зрізані псевдомоменти та інтегровність характеристичної функції. Даний результат застосовано до послідовності фінансових ринків з дискретним часом в схемі серій та досліджено швидкість збіжності цін опціонів купівлі та продажу при слабкій збіжності цін ризикових активів в моделі з дискретним часом до моделі Блека-Шоулса. Встановлено порядок швидкості збіжності $O(n^{-1})$, де n – кількість періодів для проведення торгів на фіксованому інтервалі часу в дограничній моделі. Наведено умови безарбітражності ринку з дискретним часом, утвореного незалежними випадковими величинами, в тому числі, коли їхній розподіл є неперервним. Доведено, що при певному виборі мартингальної міри випадкові величини, незалежні в сукупності відносно об'єктивної міри, залишаються незалежними в сукупності відносно цієї мартингальної міри.

Розглядається дискретна апроксимаційна схема для процесу Орнштейна-Уленбека, яка базується на апроксимації Ейлера, але прирости вінерівського

процесу замінюються на бернуллієвські незалежні однаково розподілені випадкові величини. З використанням класичних результатів про швидкість збіжності до нормального закону функцій розподілу сум незалежних однаково розподілених випадкових величин, встановлено умови, за виконання яких швидкість збіжності об'єктивних і справедливих цін опціонів обмежена зверху величиною $\frac{C}{\sqrt{n}}$. Проаналізовано перехід від об'єктивної міри до мартингальної і зміни, що відбуваються з розподілом цін на ринку при такому переході у вказаній моделі.

Розглядається процес Кокса-Інгерсолла-Росса (КІР), коли він не заходить в нуль, і досліджується слабка апроксимація цього процесу. В першому випадку послідовність дограничних ринків змодельована як послідовність дискретно часових адитивних стохастичних процесів, в другому випадку – як послідовність мультиплікативних стохастичних процесів. Дискретні апроксимаційні схеми побудовано для ціни активу, який змодельований процесом КІР. Розглядається дискретна апроксимаційна схема Ейлера для процесу КІР, але прирости вінерівського процесу замінюються на незалежні однаково розподілені обмежені симетричні випадкові величини. Вводиться "зрізаний" процес Кокса-Інгерсолла-Росса, який використовується для доведення слабкої збіжності цін активу. Розглядається повний та "зрізаний" процеси Кокса-Інгерсолла-Росса, встановлюється, що "зрізаний" процес КІР не заходить в нуль при тій же умові, що й незрізаний процес. Наводяться апроксимаційні схеми для обох процесів та доводиться слабка збіжність цін активу для адитивної та мультиплікативної моделей.

Представлено деякі властивості моделей Блека–Шоулса зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Кокса–Інгерсолла–Росса. Наводяться відомості щодо відсутності арбітражу у моделі, а також зображення ціни Європейського опціону. Застосовано числення Маллявена до точного та наближеного оцінювання опціонів на акції зі стохастичною волатильністю: встановлено вигляд функції щільності випадкової величини, яка виражає середнє значення волатильності протягом часу до виконання опціона; записано ціну опціону через знайдену щільність.

Ключові слова: швидкість збіжності, зрізані псевдомоменти, нормальний розподіл, фінансові ринки в дискретному та неперервному часі, ціни опціонів, модель Блека-Шоулса, процес Орнштейна-Уленбека, процес Кокса-Інгерсолла-Росса, дискретна апроксимаційна схема, функціональні граничні теореми, стохастична волатильність, числення Маллявена.

ABSTRACT

Munchak Y.Y. Functional limit theorems and applications to discrete-time and continuous-time financial markets. — Manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.05 — Probability Theory and Mathematical Statistics. — Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2017.

The dissertation is devoted to application of functional limit theorems to financial markets with discrete and continuous time. In particular, the assessment of convergence rate and option prices in different models are considered here.

The rate of convergence of distributions of sums of independent identically distributed random variables to the Gaussian distribution is established in terms of truncated pseudomoments of the order higher than $n^{-\frac{1}{2}}$. In order to achieve this result we derived the generalization of Studnyev's estimate. Similar result is derived without application of the Cramer condition. Conditions concerning truncated pseudomoments and integrability of characteristic function are introduced instead. This result is applied to sequences of financial markets operating in discrete time in the scheme series. We study the rate of convergence of put and call option prices when risky asset's prices in the discrete-time model converge weakly to the respective prices in the Black-Scholes model. The rate of convergence is estimated by $O(n^{-1})$, where n is the number of periods when trades occur on a fixed time interval in the discrete-time model. Conditions for the absence of arbitrage are presented for the discrete-time market constructed by independent random vari-

ables representing the increments of asset price, including the case when these random variables have continuous distribution. The result is derived that under certain choice of a martingale measure, mutually independent under an objective measure random variables remain mutually independent under this martingale measure.

The discrete approximation scheme for the price of asset that is modeled by geometrical Ornstein-Uhlenbeck process is considered. The scheme is based upon the Euler approximation scheme with increments being independent identically distributed Bernulli random variables. Classical results concerning the rate of convergence of sums of independent identically distributed random variables are employed to derive the conditions under which the rate of convergence of objective and fair option prices is bounded from above by $\frac{C}{\sqrt{n}}$. The transition from the objective to the martingale measure and the impact to such transformation on option prices in the model is analyzed.

Cox–Ingersoll–Ross (CIR) process and its weak approximation are considered for the case when both do not hit zero. Two approaches to the modelling of sequence of discrete-time markets are investigated. The first approach models discrete-time markets as a sequence of discrete-time additive stochastic processes. Under the second approach we use a sequence of multiplicative stochastic processes. Discrete-time approximation schemes are constructed when the evolution of asset price is driven by CIR process. For this purpose we modify classical Euler's approximation scheme so that Wiener process increments are substituted by bounded symmetric random variables. Also we consider Heston model and investigate the matter of exact pricing of the European option for this model. For the models where the asset prices are driven by complete and "truncated" CIR processes the weak convergence of asset prices in discrete approximation schemes is proven. It is estableished that condition for complete CIR process not to hit zero are the same as for respective "truncated" process. The properties of modified Black–Scholes model with stochastic volatility expressed as a function of CIR process are researched. The form of density function of the random variable, which expresses the average of the volatility over time to maturity is established using Malliavin calculus. The price of European option is expressed by this density function.

Key words: the rate of convergence, truncated pseudomoments, normal distribution, financial markets with discrete and continuous time, option prices, Black-Scholes model, Ornstein-Uhlenbeck process, Cox-Ingersoll-Ross process, discrete approximation scheme, functional limit theorems, stochastic volatility, Malliavin calculus.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ

1. Mishura Yu. The rate of convergence to the normal law in terms of pseudomoments / Yu. Mishura, Ye. Munchak, P. Slyusarchuk // Modern Stoch. Theory Appl.. — 2015. — Vol. 2, No. 1. — P. 95–106.
2. Мішура Ю.С. Швидкість збіжності цін опціонів з використанням методу псевдомоментів / Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Теорія ймовірностей і математична статистика. — 2015. — Вип. 92. — С. 110-124.
3. Мішура Ю.С. Швидкість збіжності цін опціонів при дискретизації геометричного процесу Орнштейна-Уленбека бернуллієвськими стрибками цін акцій / Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Теорія ймовірностей і математична статистика. — 2015. — Вип. 93. — С. 127-141.
4. Mishura Yu. Functional limit theorems for additive and multiplicative schemes in the Cox-Ingersoll-Ross model / Yu. Mishura, Ye. Munchak // Modern Stoch. Theory Appl. — 2016. — Vol. 3, No. 1. — P. 1–17.
5. Кучук-Яценко С.В. Застосування числення Маллявена до точного і наближеного оцінювання опціонів на акції зі стохастичною волатильністю / С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Теорія ймовірностей і математична статистика. — 2016. — Вип. 94. — С. 93–115.
5. Kuchuk-Yatsenko S.V. An application of the Malliavin calculus for calculating the precise and approximate prices of options with stochastic volatili-

ty / S.V. Kuchuk-Yatsenko, Yu.S. Mishura and Ye.Yu. Munchak // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2017. — No. 94. — P. 97–120.

6. Mishura Yu. The rate of convergence to the normal law in terms of pseudomoments / Yu. Mishura, Ye. Munchak, P. Slyusarchuk // International conference. Probability, reability and stochastic optimization. Conference materials. — Kyiv, Ukraine. — 2015. — P. 14.
7. Мішура Ю.С. Оцінка швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу/ Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Всеукраїнська наукова конференція. Тези доповідей. — Ворохта, Україна. — 2016. — С. 42.
8. Мішура Ю.С. Оцінка швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу із застосуванням методу псевдомоментів/ Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2016". — Київ, Україна. — 2016. — С. 54–57.
9. Мішура Ю.С. Швидкість збіжності об'єктивних цін опціонів у схемі Бернуллі/ Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. Матеріали конференції. Т. 3. — Київ, Україна. — 2016. — С. 110–112.
10. Кучук-Яценко С.В. Обчислення цін опціонів у моделях фінансових ринків, заданих лінійними стохастичними диференціальними рівняннями зі стохастичним коефіцієнтом дифузії/ С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // "Міжнародна літня математична школа пам'яті В.О. Плотнікова". Тези доповідей. (Одеса, Україна). — 2016. — С. 40.
11. Кучук-Яценко С.В. Модель фінансового ринку, задана лінійним стохастичним диференціальним рівнянням зі стохастичним коефіцієнтом дифузії/ С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування". Тези доповідей. (Ужгород, Україна). — 2016. — С. 86.

12. Мішура Ю.С. Функціональні граничні теореми в моделі Кокса-Інгерсолла-Росса/ Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Матеріали XV Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2017". — Київ, Україна. — 2017. — С. 57–60.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Стохастична фінансова математика має чималу історію свого розвитку. Витоки її досліджень беруть свій початок від появи дисертації Л. Башельє, в якій вперше була виведена формула для ціни опціону. Вона дала поштовх до нового потоку досліджень в даній галузі. Саме тому найбільшої популярності та розвитку теорія оцінювання опціонів набуває у другій половині двадцятого століття. Зокрема, П. Самуельсону вдалося покращити формулу, виведену Л. Башельє, що дало можливість сформулювати проблему знаходження ціни опціону. Над цією проблемою працювала і працює величезна кількість видатних науковців. Серед них найвідомішими є Р. Мертон, Ф. Блек та М. Шоулс. Вони вважаються творцями математичної формули для обчислення вартості опціонів та інших похідних інструментів, яка справила величезний вплив на розвиток теорії і практики фінансів. Ця формула сьогодні широко відома як формула Блека-Шоулса. Дослідження цих вчених базувалися на попередніх роботах Д. Трейнора, П. Самуельсона, Д. Бонеса та Е. Торпа і проводились в період швидкого зростання опціонної торгівлі. Саме їм вдалося строго формалізувати проблему оцінювання опціонів і вивести класичні формули для цін. Наступні покоління вчених працювали над узагальненням та покращенням відомої формули Блека-Шоулса.

Зауважимо, що реальний час дискретний, але дослідження, легше проводити в неперервному часі. Тому велику кількість робіт у фінансовій математиці присвячено збіжності цін ризикових активів та цін відповідних опціонів, що моделюються в дискретному часі, до моделей з неперервним часом. При цьому виникає питання щодо швидкості збіжності цін опціонів. Існує велика різноманітність вибору як граничної моделі, так і допграничної моделі. Частина робіт з оцінки швидкості збіжності стосуються допграничної біноміальної та триноміальної моделей та моделі Блека-Шоулса. Це зумовлено наявністю досить тонких результатів щодо швидкості збіжності біноміального розподілу до гауссівського, але при відході від біноміальної моделі треба шукати або одержувати результати щодо швидкості збіжності функцій розподілу сум незалежних однаково розподілених випадкових величини до гауссівського розподілу.

Робота присвячена застосуванню функціональних граничних теорем до фінансових ринків з дискретним на неперервним часом. Зокрема, розвивається питання оцінки та швидкості збіжності цін опціонів у різних моделях.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках державної бюджетної науково-дослідної теми №11БФ038-02 “Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей” (номер державної реєстрації 0111U006561) і №16БФ038-02 “Дослідження та статистичний аналіз асимптотичної поведінки складних стохастичних неоднорідних динамічних систем” (номер державної реєстрації 0116U002530) кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського Національного університету імені Тараса Шевченка, що входить до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт “Сучасні математичні проблеми природознавстава, економіки та фінансів”.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є застосування функціональних граничних теорем до фінансових ринків з дискретним та неперервним часом, дослідження цін опціонів та їх швидкості збіжності. Для досягнення мети дисертації були поставлені наступні завдання:

— дослідження швидкості збіжності розподілів сум незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального закону розподілу з використанням методу псевдомоментів;
— застосування отриманого результату за методом псевдомоментів до дослідження швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу при слабкій збіжності цін ризикових активів в моделі з дискретним часом

до моделі Блека-Шоулса;

— дослідження швидкості збіжності цін опціонів при дискретизації геометричного процесу Орнштейна-Уленбека бернуллієвськими стрибками цін акцій;

— дослідження повного та “зрізаного” процесів Кокса-Інгерсолла-Росса, їхніх дискретних апроксимаційних схем. Побудова мультиплікативної та адитивної дискретних апроксимаційних схем для цін акцій в моделі Кокса-Інгерсолла-Росса; дослідження слабкої збіжності мір в цій моделі;

— точне і наближене оцінювання опціонів на акції зі стохастичною волатильність, використовуючи числення Маллявена; встановлення явного вигляду функції щільності випадкової величини, яка виражає середнє значення волатильності протягом часу до виконання опціона.

Об’єктом дослідження є математичні моделі фінансового ринку.

Предметом дослідження є оцінювання опціонів, збіжність та швидкість збіжності цін опціонів в таких моделях за умов дискретизації.

Методи дослідження. У роботі використано методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, мартингальні методи, методи теорії стохастичних диференціальних рівнянь та методи фінансової математики.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, отримані в дисертації, такі:

— знайдено швидкість збіжності розподілів сум незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального закону розподілу в термінах “зрізаних” псевдомоментів. Для цього реалізовано ідею Ю.П. Студнєва отримання оцінки швидкості збіжності порядку вище ніж $n^{-\frac{1}{2}}$;

— досліджено умови безарбітражності ринку в схемі серій та умови безарбітражності ринку з дискретним часом, утвореного незалежними випадковими величинами;

— доведено, що при певному виборі мартингальної міри випадкові величини, незалежні в сукупності відносно об'єктивної міри, залишаються незалежними в сукупності відносно цієї мартингальної міри;

— доведено функціональну граничну теорему для ринку з дискретним часом у схемі Блека-Шоулса;

— доведено теорему про оцінку швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу, використовуючи метод псевдомоментів;

— знайдено приклади функцій розподілу, до яких можна застосувати метод псевдомоментів;

— сформульовано умови, за виконання яких, швидкість збіжності об'єктивних і справедливих цін опціонів обмежена зверху величиною $\frac{C}{\sqrt{n}}$ при дискретизації геометричного процесу Орнштейна-Уленбека бернуллієвськими стрибками цін акцій. Проаналізовано перехід від об'єктивної до мартингальної міри і зміни, що відбуваються з розподілом цін на ринку при такому переході у вказаній моделі;

— доведено функціональні граничні теореми для адитивної та мультиплікативної схем в моделі Кокса-Інгерсолла-Росса;

— проведено точне і наближене оцінювання опцінів в моделі Хестона, застосовуючи числення Маллявена.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має як теоретичне, так і практичне значення. На практиці одержані результати можуть бути застосовані на реальних фінансових ринках при моделюванні первинних цінних паперів і наближеному обчисленні цін похідних цінних паперів на фондовому ринку.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації отримані автором самостійно. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 5 робіт. У трьох роботах, підготовлених разом з науковим керівником професором Ю. С. Мішурою, та одній роботі підготовленій з професором Ю. С. Мішурою та к.ф.-м.н. П. В. Слюсарчуком, професорові Ю. С. Мішурі належить постановка задачі та загальне керівництво роботою, а к.ф.-м.н. П. В. Слюсарчукові – ідея для досягнення отриманої оцінки швидкості збіжності розподілів сум незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального закону розподілу. Ще одна робота підготовлена разом з професором Ю. С. Мішурою та С. В. Кучуком-Яценком, в якій здобувачу належать отримані результати, що відносяться моделі Хестона, і лише вони включені до дисертаційної роботи.

Апробація результатів дисертації. Результати дослідження доповідалися на наукових конференціях та наукових семінарах, а саме:

1. International conference "Probability, reability and stochastic optimization", м. Київ, Україна, 7.04.2015–10.04.2015.
2. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", смт. Ворохта, Україна, 24.02.2016–27.02.2016
3. XIV Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2016", м. Київ, Україна, 6.04.2016–8.04.2016.
4. "Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука", м. Київ, Україна, 19.05.2016–20.05.2016.
5. Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", м. Ужгород, Україна, 19.05.2016–21.05.2016.
6. "Міжнародна літня математична школа пам'яті В.О. Плотнікова", м. Одеса, Україна, 12.09.2016 – 17.09.2016.
7. Засідання наукового семінару "Теорія ймовірностей та математична статистика" при кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Мішури Ю.С. та проф. Козаченка Ю.В. (м. Київ, Україна, 2016).

8. Засідання наукового семінару кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Наконечного О. Г. (м. Київ, Україна, 2016).
9. Засідання наукового семінару Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України під керівництвом проф. Кнопова П. С. (м. Київ, Україна, 2016).
10. Засідання наукового семінару кафедри теоретичної та прикладної статистики ЛНУ ім.І.Франка під керівництвом проф. Єлейка Я.І. (м.Львів, Україна, 2016).
11. XV Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2017", м. Київ, Україна, 4.04.2016–6.04.2017.

Публікації. За результатами дисертації опубліковано 12 наукових праць, з яких 5 опубліковано в фахових виданнях [4], [7], [8], [72], [73], а 7 у вигляді тез доповідей [5], [6], [9]-[12], [71]. Дві статті [72], [73] видані в міжнародному журналі. Три статті [4], [7], [8] опубліковані у виданні України, англомовна версія якого включена до наукометричної бази Scopus.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із анотації, вступу, чотирьох розділів, які містять підрозділи, висновків, списку використаних джерел, який містить 101 найменування, та додатку. Повний обсяг роботи – 154 сторінки, в тому числі 128 сторінок основного тексту.

Зміст роботи. У **вступі** обгрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначені мета і задачі дослідження, виділено наукову новизну, практичну значущість отриманих результатів, особистий внесок здобувача та апробацію отриманих результатів.

Перший розділ містить огляд літератури за тематикою дисертаційної роботи та спорідненими питаннями. Проаналізовано результати інших авторів щодо проблем, які досліджуються в дисертації.

У **другому розділі** досліджено швидкість збіжності послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального закону за методом псевдомоментів та застосовано даний результат до знаходження оцінки швидкості збіжнності цін опціонів.

Розглянемо послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ з $\mathsf{E}\,\xi_i = 0$, $\mathsf{D}\,\xi_i = \sigma^2 \in (0, \infty)$, функцією розподілу $F(x)$ і характеристичною функцією $f(t)$. Нехай $\Phi_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – функція розподілу випадкової величини $S_n = (\sigma\sqrt{n})^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$ і $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – функція розподілу стандартного нормального розподілу. Припустимо, що для деякого $m \geqslant 3$ існують псевдомоменти

$$\mu_k = \int\limits_{\mathbb{R}} x^k dH(x), (k = 3, \ldots, m, m \in \mathbb{N}),$$

де $H(x) = F(x\sigma) - \Phi(x)$. Введемо наступні позначення для величин, які будемо називати зрізаними псевдомоментами:
“зрізані зверху”

$$\nu_n^{(1)}(m) = \int\limits_{|x| \leqslant \sigma\sqrt{n}} |x|^{m+1} |dH(x)|$$

і “зрізані знизу”

$$\nu_n^{(2)}(m) = \int\limits_{|x| > \sigma\sqrt{n}} |x|^{m} |dH(x)|.$$

Доведено наступні результати, які дають швидкість збіжності розподілів сум незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального закону.

Теорема 1. *Нехай виконуються наступні умови:*

(*i*) *Характеристична функція інтегровна, тобто* $\int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = A < \infty$*;*

(*ii*) *Псевдомоменти до* m*-го порядку включно рівні нулю і зрізані псевдомоменти обмежені:*

$$\mu_k = 0,\ k = 3, \ldots, m,\ \textit{для деякого}\ m \geqslant 3,\ \textit{і}$$

$$\nu_n(m) = \max\left\{\nu_n^{(1)}(m), \nu_n^{(2)}(m)\right\} < \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}}.$$

Тоді для всіх $n \geqslant 2$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leqslant$$

$$\leqslant 2C_m^{(1)} \frac{\nu_n^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + 2C_m^{(2)} \frac{\nu_n^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}} + \frac{\sigma A}{\pi} b^{n-1} + \nu_n(m) \frac{4e^{\frac{3}{2}}}{\pi} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n},$$

де

$$C_m^{(1)} = \frac{12^{\frac{m+1}{2}} \Gamma(\frac{m+1}{2})}{\pi(m+1)!},\ C_m^{(2)} = 2C_{m-1}^{(1)},$$

$$b = \exp\left\{ -\frac{\pi^2}{24A^2\sigma^2\left(2+\pi\right)^2} \right\} < 1.$$

Наслідок 1. *Нехай випадкові величини* ξ_i *мають обмежену щільність* $p(x) \leqslant A_1$. *Припустимо, що виконується умова (ii) теореми 1. Тоді для всіх* $n \geqslant 3$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leqslant$$

$$\leqslant 2C_m^{(1)} \frac{\nu_n^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + 2C_m^{(2)} \frac{\nu_n^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}} + 2\sigma A_1 b_1^{n-2} + \nu_n(m) \frac{4e^{\frac{3}{2}}}{\pi} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n},$$

де $b_1 = \exp\left\{ -\frac{1}{96A_1^2\sigma^2(2+\pi)^2} \right\} < 1.$

Відмітимо, що з припущення (i) випливає існування щільності для випадкової величини S_n. Позначимо її через $p_n(x)$. Також нехай $\phi(x)$ – щільність стандартного нормального закону.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для всіх* $n \geqslant 2$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |p_n(x) - \phi(x)| \leqslant$$

$$\leqslant C_m^{(3)} \frac{\nu_n^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + C_m^{(4)} \frac{\nu_n^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}} + b^{n-1} \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi} A + \nu_n(m) \frac{e^{\frac{3}{2}}}{\pi} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n},$$

де

$$C_m^{(3)} = \frac{12^{\frac{m+2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{4\pi(m+1)!},\ C_m^{(4)} = 2C_{m-1}^{(3)}.$$

Наведено приклади застосування наслідку 1.

Далі застосовується отриманий результат до дослідження швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу. З цією метою введемо ймовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$, на якому розглянемо в схемі серій послідовність фінансових ринків з дискретним часом, з одним ризиковим та одним безризиковим активом. Припустимо, що $T > 0$ задано, параметр n приймає значення з $\mathbb{N}$, при кожному $n \geqslant 1$ маємо розбиття інтервалу часу $[0, T]$ виду $\pi(n) = \{0 = t_n^0 < t_n^1 < \ldots < t_n^n = T\}$, і точки розбиття будемо вважати моментами торгів на фінансовому ринку. Сукупність невід'ємних чисел $\{r_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ будемо трактувати як послідовні відсоткові ставки, так що ціна безризикового активу в момент t_n^k має вигляд

$$B_n^k = \prod_{i=1}^{k} (1 + r_n^i). \tag{1}$$

Нехай на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ при кожному $n \geqslant 1$ задано сукупність випадкових величин $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$, щодо якої завжди припускається виконаною умова обмеженості: існує $0 < c < 1$ таке, що всі $|R_n^k| \leqslant c, n \geqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n$. Введемо потік σ-алгебр $\mathcal{F}_n^k = \sigma\{R_n^i, i = 1, \cdots, k\}$, породжений цими випадковими величинами. Будемо вважати, що ціна ризикового активу в момент t_n^k має вигляд

$$S_n^k = S_n^0 \prod_{i=1}^{k} \left(1 + R_n^i\right). \tag{2}$$

Тоді дисконтований ризиковий актив в момент t_n^k має вигляд

$$X_n^k = S_n^0 \prod_{i=1}^{k} \frac{1 + R_n^i}{1 + r_n^i}.$$

Позначимо $\{\mathsf{P}_n, n \geqslant 1\}$ послідовність об'єктивних (фізичних) мір, що відповідає ризиковому ціновому процесу $\{S_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$. Як відомо, ринок в n-й серії буде безарбітражним тоді і тільки тоді, коли існує хоча б одна еквівалентна до P_n ймовірнісна міра P_n^*, відносно якої $\{X_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ буде $\{\mathcal{F}_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$-мартингалом, або скорочено $\mathcal{F}_n$-мартингалом. Всі можливі мартингальні міри P_n^* в n–й серії мають похідну Радона-Нікодима вигляду

$$\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{d\,\mathsf{P}_n} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \Delta M_n^k\right), \tag{3}$$

де $\left\{M_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\right\}$ – деякий $\mathcal{F}_n$-мартингал, $\Delta M_n^k > -1$. Умова еквівалентності має вигляд

$$\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{d\,\mathsf{P}_n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\Delta M_n^k\right) > 0. \tag{4}$$

Для випадку, коли ринок є біноміальним, доведено, що на ньому відсутній арбітраж, а єдина мартингальна міра визначається співвідношенням (3), причому

$$\Delta M_n^k = \frac{r_n^k - \mu_n^k}{(\sigma_n^k)^2}(R_n^k - \mu_n^k), \tag{5}$$

де $\mu_n^k = \mathsf{E}\,R_n^k$, $(\sigma_n^k)^2 = \operatorname{Var} R_n^k$, тобто, прицьому ринок є повним.

Розглянемо тепер випадковий процес з дискретним часом

$$X_n(t) = S_n^0 \prod_{k=1}^{[nt]} \frac{1+R_n^k}{1+r_n^k}, t_n^k \leqslant t \leqslant t_n^{k+1},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

де $[a]$ –ціла частина числа a, $\prod_{k=1}^{0} = 1$. Нехай $S_n^0 = 1$. І будемо припускати, що випадкові величини $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ незалежні в сукупності і мають неперервний розподіл, зосереджений на деякому інтервалі $[a_n^k, b_n^k]$, причому виконується умова: $\mu_n^k - \frac{\left(\sigma_n^k\right)^2}{b_n^k - \mu_n^k} < r_n^k < \mu_n^k + \frac{\left(\sigma_n^k\right)^2}{\mu_n^k - a_n^k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Тоді ринок буде безарбітражним в n-й серії. В рамках наступної теореми введемо позначення $(\sigma_n^{k,*})^2 = \operatorname{Var}_{P_n^*} R_n^k$. Тоді має місце функціональна гранична теорема для послідовності фінансових ринків з дискретним часом в схемі Блека–Шоулса.

Теорема 3. (*i*) *Нехай випадкові величини* $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ *задовольняють умови*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n} r_n^k = 0,\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{[nt]} r_n^k = rt > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{[nt]} (\sigma_n^{k,*})^2 = (\sigma^*)^2 t > 0, 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Тоді відносно мартингальних мір P_n^*, *заданих співвідношеннями* (4) *та* (5) *має місце слабка збіжність скінченновимірних розподілів:*

$$X_n(t) \xrightarrow{\mathrm{d}} \exp\{\sigma^* W_t - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2 t\}, 0 \leqslant t \leqslant T.$$

(*ii*) *Нехай виконуються умови пункту* (*i*), *і крім того, існує стала* $C > 0$ *така, що*

$$\sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} r_n^k \leqslant C(t_2 - t_1), \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} (\sigma_n^{k,*})^2 \leqslant C(t_2 - t_1)$$

для всіх $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$. *Тоді відносно мартингальних мір* P_n^*, *заданих співвідношеннями* (4) *та* (5) *має місце слабка збіжність мір, що відповідають випадковим процесам* X_n:

$$X_n(t) \xrightarrow{\mathrm{W}} \exp\{\sigma^* W_t - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2 t\}, 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді, зокрема, в момент T має місце центральна гранична теорема, а саме:

$$X_n(T) \xrightarrow{\mathrm{W}} \exp\{\sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\}.$$

Цей результат використано для оцінки швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу в дискретному часі до відповідних цін на граничному ринку з неперервним часом, який наведено далі.

Розглянемо опціони купівлі $\mathbb{C} = (S - K)^+$ та продажу $\mathbb{P} = (K - S)^+$ на актив S і зі страйковою ціною K. Будемо вважати, що граничний ринок є ринком Блека–Шоулса. А дограничні ринки будемо розглядати в таких умовах: випадкові величини $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ однаково розподілені з $\mathsf{E}\, R_n^k = \mu_n, \mathrm{Var}\, R_n^k = \sigma_n^2$, незалежні в сукупності і мають неперервний розподіл, зосереджений на деякому інтервалі $[a_n, b_n]$. Нехай також виконується умова: $\mu_n - \frac{(\sigma_n)^2}{b_n - \mu_n} < r_n < \mu_n + \frac{(\sigma_n)^2}{\mu_n - a_n}$. Це забезпечує достатню умову безарбітражності ринку в n-й серії.

Позначимо через

$$\pi(\mathbb{C}_n) = \mathsf{E}_{P_n^*} \left(X_n(T) - K \left(1 + \frac{rT}{n} \right)^{-n} \right)^+$$

дисконтовану справедливу ціну опціона купівлі в дограничній моделі відносно мартингальної міри заданої рівностями (3) та (5), і через $\pi(\mathbb{C})$ – ціна Блека-Шоулса на опціон купівлі в момент T, зі страйковою ціною K, відсотковою ставкою r і дисперсією $(\sigma^*)^2$, а також відповідні ціни $\pi(\mathbb{P}_n)$ та $\pi(\mathbb{P})$ опціонів продажу. Позначимо $(\sigma_n^*)^2 = \mathrm{Var}_{\mathsf{P}_n^*}(R_n^k)$.

Теорема 4. *Нехай виконуються наступні умови:*

(i) *послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ задовольняє умови сформульовані вище; відсоткова ставка в кожній серії є рівномірною: $r_n^k = \frac{r}{n}$, причому мають місце наступні оцінки*

$$\left|\frac{r}{n} - \mu_n\right| \leqslant C\sigma_n^2\ , \left|\mathsf{E}(R_n^k)^3\right| \leqslant \frac{C}{n^2},\ \text{та}\ |\,\mathsf{E}(R_n^k)^4 - \mu_n\,\mathsf{E}(R_n^k)^3| \leqslant \frac{C}{n^2}.$$

(ii) *випадкові величини*

$$\xi_n^k = \sqrt{n}\left(R_n^k - \frac{1}{2}(R_n^k)^2 + \frac{1}{3}(R_n^k)^3 - \frac{1}{3}\,\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*}(R_n^k)^3 - \frac{r}{n} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{n^2} + \frac{(\sigma_n^*)^2}{2}\right)$$

задовольняють умови наслідку 1, причому їхній розподіл зосереджено на деякому інтервалі $[a,b]$. Нехай для всіх $n \geqslant n_0$ виконується умова $\nu_n^{(1)}(3) < \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$, причому $|n(\sigma_n^*)^2 - (\sigma^*)^2| \leqslant \frac{C}{n}$.

Тоді

$$|\pi(\mathbb{C}_n) - \pi(\mathbb{C})| + |\pi(\mathbb{P}_n) - \pi(\mathbb{P})| \leqslant \frac{C}{n}.$$

В **третьому розділі** досліджується швидкість збіжності цін опціонів при дискретизації геометричного процесу Орнштейна-Уленбека бернуллієвськими стрибками цін акцій.

Припустимо, що $T > 0$, $\mathbb{T} = [0,T]$ і $\Omega_{\mathcal{F}} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}), \mathsf{P})$ – повний стандартний стохастичний базис. Нехай $W = \{W_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ – адаптований вінерівський процес. Розглянемо адаптований процес Орнштейна-Уленбека $X = \{X_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ зі сталими параметрами на цьому стохастичному базисі. Такий процес Орнштейна-Уленбека є єдиним розв'язком наступного стохастичного диференціального рівняння

$$dX_t = (\mu - X_t)dt + \sigma dW_t,\ X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{T}, \tag{6}$$

де $\mu \in \mathbb{R}$ і $\sigma > 0$. Припустимо, що ціна активу S_t задовольняє рівність

$$S_t = \exp\left\{X_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right\},\ t \in \mathbb{T}, \tag{7}$$

де невипадкова величина $-\frac{\sigma^2}{2}t$ додається з огляду на технічну простоту.

Побудуємо дискретну схему, яка слабко збігається до геометричного процесу Орнштейна-Уленбека (7). Спочатку розглянемо наступну дискретну апроксимаційну схему для самого процесу Орнштейна-Уленбека, яка базується на апроксимації Ейлера розв'язку стохастичного диференціального рівняння (6), але прирости вінерівського процесу замінимо на бернуллієвські незалежні однаково розподілені випадкові величини. А саме, припустимо, що ми маємо послідовність ймовірнісних просторів $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathsf{P}_n)$, $n \geqslant 1$ і нехай $\left\{q_k^{(n)}, n \geqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин таких, що $q_k^{(n)} = \pm\sqrt{\frac{T}{n}}$ з ймовірністю $\frac{1}{2}$.

Нехай $n > T$. Введемо рекурентну схему:

$$x_0^{(n)} \in \mathbb{R},\ R_k^{(n)} := x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)} = \frac{(\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{n} + \sigma q_k^{(n)},\ 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{8}$$

Нехай $\mathcal{F}_0^n = \{\varnothing, \Omega\}$ і $\mathcal{F}_k^n = \sigma\left\{R_i^{(n)}, 1 \leqslant i \leqslant k\right\}$. Позначимо

$$X_t^n = x_0^{(n)} \mathbb{1}_{\left\{t < \frac{T}{n}\right\}} + \left(x_0^{(n)} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{tn}{T}\right]} R_k^{(n)}\right) \mathbb{1}_{\left\{t \geqslant \frac{T}{n}\right\}} = x^{(n)}_{\left[\frac{tn}{T}\right]}.$$

Далі всюди $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{tn}{T}\right]} = 0$ та $\prod\limits_{1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{tn}{T}\right]} = 1$ при $t < \frac{T}{n}$. Побудуємо відповідну мультиплікативну схему для дограничного цінового процесу наступним чином

$$S_t^n = \exp\left\{x_0^{(n)}\right\} \prod_{1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{tn}{T}\right]} \left(1 + R_k^{(n)}\right),\ t \in \mathbb{T}. \tag{9}$$

Теорема 5. *Нехай $\left\{q_k^{(n)}, n \geqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин таких, що $q_k^{(n)} = \pm\sqrt{\frac{T}{n}}$ з ймовірністю $\frac{1}{2}$ і $r_k^{(n)} = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$, $|x_0^{(n)}| \leqslant C$. Тоді ринок (B_t^n, S_t^n) асимптотично безарбітражний, що означає, що існує таке $n_0 \in \mathbb{N}$, що (B_t^n, S_t^n) є безарбітражним для будь-якого $n \geqslant n_0$. Для таких $n \geqslant n_0$ ринок (B_t^n, S_t^n) є повним і єдина еквівалентна мартингальна міра $\mathsf{P}^{n,*}$ має похідну Радона-Нікодима* *у вигляді*

$$\frac{d\,\mathsf{P}^{n,*}}{d\,\mathsf{P}^{n}} = \prod_{k=1}^{n}(1+\rho_{k-1}^{(n)}q_k^{(n)}), \quad \rho_{k-1}^{(n)} = \frac{nr_k^{(n)} - \left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right)T}{\sigma T}.$$

Перейдемо тепер до оцінки швидкості збіжності цін опціонів. Позначимо через $\mathbb{C}_n$ і $\mathbb{C}$ стандартний опціон купівлі, $\mathbb{P}_n$ і $\mathbb{P}$ – стандартний опціон продажу з ціною погашення $K \geqslant 0$ і датою погашення T, на дограничних і граничних активах, відповідно. Відповідні дисконтовані об'єктивні ціни позначимо через $\pi(\mathbb{C}_n)$, $\pi(\mathbb{C})$, $\pi(\mathbb{P}_n)$ і $\pi(\mathbb{P})$, і справедливі ціни – $\pi^*(\mathbb{C}_n)$, $\pi^*(\mathbb{C})$, $\pi^*(\mathbb{P}_n)$ і $\pi^*(\mathbb{P})$. Будемо припускати, що ціна облігації для дограничної моделі дорівнює $B_t^{(n)} = (1+\frac{rT}{n})^{[\frac{tn}{T}]}$ і гранична ціна облігації дорівнює $B_t = e^{rt}$. Маємо наступні відношення:

$$\pi(\mathbb{C}_n) = \mathsf{E}\left[\Big(\prod_{1\leqslant k\leqslant n}\left(1+R_k^{(n)}\right) - K\Big)^{+}\left(1+\frac{rT}{n}\right)^{-n}\right], n \geqslant 1,$$

$$\pi(\mathbb{C}) = \mathsf{E}\left[\left(\exp\left\{X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\} - K\right)^{+} e^{-rT}\right],$$

$$\pi(\mathbb{P}_n) = \mathsf{E}\left[\left(K - \prod_{1\leqslant k\leqslant n}\left(1+R_k^{(n)}\right)\right)^{+}\left(1+\frac{rT}{n}\right)^{-n}\right], n \geqslant 1,$$

$$\pi(\mathbb{P}) = \mathsf{E}\left[\left(K - \exp\left\{X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\}\right)^{+} e^{-rT}\right].$$

Теорема 6. *Нехай виконуються наступні умови:*

(i) $|x_0^{(n)} - x_0| \leqslant \frac{C_0}{n^{1/2}}$ *з деякою сталою* $C_0 > 0$*;*

(ii) *Незалежні однаково розподілені випадкові величини* $q_k^{(n)}$ *приймають значення* $\pm\sqrt{\frac{T}{n}}$ *з імовірністю* $\frac{1}{2}$.

Тоді, починаючи з деякого $n_0 \in \mathbb{N}$, *має місце наступна оцінка*

$$|\pi(\mathbb{D}) - \pi(\mathbb{D}_n)| \leqslant \frac{C_1}{n^{1/2}}$$

для деякого $C_1 > 0$ *і* $\mathbb{D} = \mathbb{C}, \mathbb{P}$.

Зауважимо, що швидкість збіжності об'єктивних цін опціонів має місце лише у припущенні, що відносно об'єктивної міри $q_k^{(n)}$ приймають значення

$\pm\sqrt{\frac{T}{n}}$ з ймовірністю $\frac{1}{2}$. Таким чином, якщо ми хочемо одержати швидкість збіжності такого ж порядку відносно мартингальної міри, наша задача полягає у тому, щоб задати ймовірності спільного розподілу $\mathsf{P}_n\left(\bigcap_{k=1}^n\{q_k^{(n)}=\pm\sqrt{\frac{T}{n}}\}\right)$ так, щоб відносно мартингальної міри P_n^* випадкові величини $q_k^{(n)}$ були незалежними в сукупності і приймали значення $\pm\sqrt{\frac{T}{n}}$ з ймовірністю $\frac{1}{2}$. Спочатку розглянемо модель цінового процесу (8)–(9), але без припущення про взаємну незалежність випадкових величин $\{q_k^{(n)}, 1\leqslant k\leqslant n\}$. Позначимо умовні ймовірності $\mathsf{P}_{k,n}^{\pm}=\mathsf{P}_n\left(q_k^{(n)}=\pm\sqrt{\frac{T}{n}}\Big|\mathcal{F}_{k-1}^n\right)$. Виявляється, що при відмові від незалежності, властивості дограничної моделі істотно залежать від поведінки $\mathsf{P}_{k,n}^{\pm}$, про що свідчить наступний результат. Зауважимо, що $\mathsf{P}_{k,n}^{+}+\mathsf{P}_{k,n}^{-}=1$. Введемо позначення $h_{k,n}^{\pm}=\frac{(\mu-x_{k-1}^{(n)})T}{n}\pm\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}$, а також позначимо $\rho_{k,n}=\frac{r_k^{(n)}-h_{k,n}^{+}\mathsf{P}_{k,n}^{+}-h_{k,n}^{-}\mathsf{P}_{k,n}^{-}}{4\sigma\frac{T}{n}\mathsf{P}_{k,n}^{+}\mathsf{P}_{k,n}^{-}}$.

Теорема 7. (i) *Нехай кожна серія при $n>T$ задовольняє умови:*

(a) $\mathsf{P}_{k,n}^{\pm}>0$ *з імовірністю 1 і* $\mathsf{E}\left|\rho_{k,n}\left(q_k^{(n)}-\mathsf{E}\left(q_k^{(n)}|\mathcal{F}_{k-1}^n\right)\right)\right|<\infty, 1\leqslant k\leqslant n$.

(b) *Існує стала $C>0$ незалежна від k і n і така, що*

$$|2\mathsf{P}_{k,n}^{+}-1|<\frac{C}{n^{1/2}},\ r_k^{(n)}\leqslant\frac{C}{n}, |x_0^{(n)}-x_0|\leqslant C, 1\leqslant k\leqslant n.$$

Тоді існує номер серії $n_0>T$, починаючи з якого ринок (8)–(9) є безарбітражним і повним.

(ii) *Нехай в деякій n-й серії при $n>T$ виконуються умови:*

$\mathsf{P}_{k,n}^{\pm}>0$ *з імовірністю 1 при $1\leqslant k\leqslant n$, причому існує таке k, що*

$$\mathsf{E}\left|\rho_{k,n}\left(q_k^{(n)}-\mathsf{E}\left(q_k^{(n)}|\mathcal{F}_{k-1}^n\right)\right)\right|=\infty.$$

Тоді еквівалентної мартингальної міри не існує, отже, ринок не є безарбітражним, питання повноти не розглядається.

(iii) *Нехай $\mathsf{P}_{k,n}^{+}=0$ з додатною імовірністю або $\mathsf{P}_{k,n}^{-}=0$ з додатною імовірністю.*

(c) *Якщо на множині $A_{k,n}^{+}:=\{\omega\in\Omega:\mathsf{P}_{k,n}^{+}=0\}$, за умови, що*

$\mathsf{P}^+_{k,n} = 0$ *з додатною імовірністю, має місце рівність*

$$h^+_{k,n} = r^{(n)}_k, \tag{10}$$

або на множині $A^-_{k,n} := \{\omega \in \Omega : \mathsf{P}^-_{k,n} = 0\}$, *за умови, що* $\mathsf{P}^-_{k,n} = 0$ *з додатною імовірністю, має місце рівність*

$$h^-_{k,n} = r^{(n)}_k, \tag{11}$$

на множині $\Omega \setminus A^+_{k,n}$ *виконується умова* $|2\,\mathsf{P}^+_{k,n} - 1| < \frac{C}{n^{1/2}}$, *а на множині* $\Omega \setminus A^-_{k,n}$ *виконується умова* $|2\,\mathsf{P}^-_{k,n} - 1| < \frac{C}{n^{1/2}}$ *і, крім того,*
$\mathsf{E}\left|\rho_{k,n}\left(q^{(n)}_k - \mathsf{E}\left(q^{(n)}_k|\mathcal{F}^n_{k-1}\right)\right)\right| < \infty, 1 \leqslant k \leqslant n$, *то ринок є безарбітражним і неповним.*

(*d*) *Якщо на множині* $A^+_{k,n}$, *за умови, що* $\mathsf{P}^+_{k,n} = 0$ *з додатною імовірністю, рівність* (10) *не має місця, або на множині* $A^-_{k,n}$, *за умови, що* $\mathsf{P}^-_{k,n} = 0$ *з додатною імовірністю, рівність* (11) *не має місця, то ринок не є безарбітражним.*

Тепер будемо вважати, що виконується умова (i) теореми 7, тобто ринок є безарбітражним і повним. Введемо позначення для множини всіх можливих значень наборів випадкових величин $\{q^{(n)}_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$: $\Xi = \{\xi = \sqrt{\frac{T}{n}}(\pm 1, \ldots, \pm 1)\}$. Позначимо $\omega(\xi)$ ті елементи ймовірнісного простору, на яких набір $\{q^{(n)}_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ приймає значення ξ і позначимо імовірність кожного такого набору відносно об'єктивної міри через $\mathsf{P}_n(\xi)$.

Теорема 8. *Нехай виконуються наступні умови:*

(i) *Існує така стала* $C > 0$, *що* $|x^{(n)}_0 - x_0| \leqslant \frac{C}{n^{1/2}}$;

(ii) *Виконуються умови* (a) *та* (b) *пункту* (i) *теореми 7;*

(iii) *На кожному* $\omega(\xi)$ *виконується рівність*

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + \Delta M^{(n)}_k(\omega(\xi)))\,\mathsf{P}_n(\xi) = 2^{-n}.$$

Тоді, починаючи з деякого $n_0 > T$ *має місце наступна оцінка*

$$|\pi^*(\mathbb{D}) - \pi^*(\mathbb{D}_n)| \leqslant \frac{C_1}{n^{1/2}}$$

для деякого $C_1 > 0$ *і* $\mathbb{D} = \mathbb{C}, \mathbb{P}$.

У **четвертому розділі** доведено функціональні граничні теореми в моделі Кокса-Інгерсолла-Росса та обчислюється ціна опціону за допомогою числення Маллявена.

Введемо повний та "зрізаний" процеси Кокса-Інгерсолла-Росса. Нехай $T > 0$, $\mathbb{T} = [0, T]$ і $\Omega_{\mathcal{F}} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}), \mathsf{P})$ – повний фільтрований ймовірнісний простір, $W = \{W_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ – адаптований вінерівський процес. На цьому просторі розглянемо процес Кокса-Інгерсолла-Росса із сталими параметрами. Цей процес є єдиним розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dX_t = (b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t,\ X_0 = x_0 > 0,\ t \in \mathbb{T}, \tag{12}$$

де $b > 0$, $\sigma > 0$. В інтегральній формі процес X має вигляд

$$X_t = x_0 + \int_0^t (b - X_s)\, ds + \sigma \int_0^t \sqrt{X_s} dW_s.$$

Як відомо, умова $\sigma^2 \leqslant 2b$ є необхідною і достатньою для того, щоб процес X приймав додатні значення і не заходив в нуль. Далі вважаємо цю умову виконаною.

Введемо "зрізаний" процес Кокса-Інгерсолла-Росса, який використаємо для доведення слабкої збіжності цін активу. Нехай тепер $C > 0$. Розглянемо наступне стохастичне диференціальне рівняння з тими ж коефіцієнтами b та σ, що і рівняння (12):

$$dX_t^C = (b - X_t^C \wedge C)dt + \sigma\sqrt{X_t^C \wedge C}dW_t,\ X_0^C = x_0 > 0,\ t \in \mathbb{T}. \tag{13}$$

Доведено, що при кожному $C > 0$ рівняння (13) має єдиний сильний розв'язок. Встановлено, що "зрізаний" процес КІР не заходить в нуль при тій же умові, що й незрізаний процес.

В інтегральній формі процес X^C має вигляд

$$X_t^C = x_0 + \int_0^t (b - X_s^C \wedge C)ds + \sigma \int_0^t \sqrt{X_s^C \wedge C}dW_s.$$

Нехай тепер $T > 0$ фіксоване. Має місце наступна лема.

Лема 1.

$$\mathsf{P}\{\exists t, t \in [0,T] : X_t \neq X_t^C\} \to 0$$

при $C \to \infty$.

Розглянемо дискретну апроксимаційну схему для процесу X. Нехай $(\Omega^{(n)}, \mathcal{F}^{(n)}, \mathsf{P}^{(n)})$, $n \geqslant 1$ – послідовність ймовірнісних просторів. Розглянемо послідовність однаково розподілених незалежних випадкових величин $\{q_k^{(n)}, n \geqslant 1,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$ на відповідному ймовірнісному просторі. Нехай ці величини приймають одне з можливих значень $\pm\sqrt{\frac{T}{n}}$, причому вони є симетричними, тобто $\mathsf{P}^n\left(q_k^{(n)} = \pm\sqrt{\frac{T}{n}}\right) = \frac{1}{2}$. Нехай далі $n > T$. Побудуємо дискретні апроксимаційні схеми для випадкових процесів X та X^C наступним чином. Для повного процесу розглянемо наближення виду

$$X_0^{(n)} = x_0 > 0, X_k^{(n)} = X_{k-1}^{(n)} + \frac{(b - X_{k-1}^{(n)})T}{n} + \sigma q_k^{(n)}\sqrt{X_{k-1}^{(n)}}, \tag{14}$$

$$Q_k^{(n)} := X_k^{(n)} - X_{k-1}^{(n)} = \frac{(b - X_{k-1}^{(n)})T}{n} + \sigma q_k^{(n)}\sqrt{X_{k-1}^{(n)}},\ 1 \leqslant k \leqslant n,$$

а відповідні наближення X^C задаються рівностями

$$\begin{gathered} X_0^{(n,C)} = x_0 > 0, \\ X_k^{(n,C)} = X_{k-1}^{(n,C)} + \frac{(b - (X_{k-1}^{(n,C)} \wedge C))T}{n} + \sigma q_k^{(n)}\sqrt{X_{k-1}^{(n,C)} \wedge C} \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} Q_k^{(n,C)} := X_k^{(n,C)} - X_{k-1}^{(n,C)} \\ = \frac{(b - (X_{k-1}^{(n,C)} \wedge C))T}{n} + \sigma q_k^{(n)}\sqrt{X_{k-1}^{(n,C)} \wedge C},\ 1 \leqslant k \leqslant n, \end{gathered}$$

Наступна лема підтверджує коректність побудови цих наближень.

Лема 2. *Нехай* $n > 2T$.

1) *За умови* $2b \geqslant \sigma^2$ *всі значення, що задаються рівностями* (14) *та* (15), *є додатними.*

2) *Має місце співвідношення*

$$\mathsf{P}\left\{\exists k, 0 \leqslant k \leqslant n: \ X_k^{(n)} \neq X_k^{(n,C)}\right\} \to 0 \tag{16}$$

при $C \to \infty$.

Розглянемо тепер послідовність східчастих процесів, що відповідають обом схемам:

$$X_t^{(n)} = X_k^{(n)} \text{ для } \frac{kT}{n} \leqslant t < \frac{(k+1)T}{n}$$

та

$$X_t^{(n,C)} = X_k^{(n,C)} \text{ для } \frac{kT}{n} \leqslant t < \frac{(k+1)T}{n}.$$

Тобто, траєкторії процесів $X^{(n)}$ та $X^{(n,C)}$ мають стрибки в точках kT/n , $k = 0, \ldots, n$ і є сталими на внутрішніх інтервалах. Розгляднемо потоки сігма-алгебр $\mathcal{F}_k^n = \sigma(X_t^{(n)}, t \leqslant \frac{kT}{n})$. З ними узгоджені і процеси $X^{(n,C)}$, тому далі можемо розглядати одні і ті ж потоки сігма-алгебр для всіх дискретних апроксимаційних схем і ототожнити $\mathcal{F}_t^n$ з $\mathcal{F}_k^n$ для $\frac{kT}{n} \leqslant t < \frac{(k+1)T}{n}$.

Зауваження 1. *Співвідношення* (16) *можна переформулювати так:*

$$\mathsf{P}\left\{\exists t, t \in [0,T] : X_t^{(n)} \neq X_t^{(n,C)}\right\} \to 0,$$

при $C \to \infty$.

Позначимо через Q і $\mathsf{Q}^n, n \geqslant 1$ міри, що відповідають процесам X і $X^{(n)}, n \geqslant 1$, відповідно, а через Q^C і $\mathsf{Q}^{n,C}, n \geqslant 1$ міри, що відповідають процесам X^C і $X^{(n,C)}, n \geqslant 1$, відповідно. Слабку збіжність мір, що відповідають випадковим процесам, позначимо символом $\xrightarrow{W}$. Справедливі наступні результати.

Теорема 9. *Має місце слабка збіжність мір* $\mathsf{Q}^{n,C} \xrightarrow{W} \mathsf{Q}^C$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 10. *Має місце слабка збіжність мір* $\mathsf{Q}^n \xrightarrow{W} \mathsf{Q}$ *при* $n \to \infty$.

Побудуємо дискретну апроксимаційну мультиплікативну схему для процесу e^{X_t}, $t \in [0,T]$, де X_t – процес Кокса-Інгерсолла-Росса, заданий рівнянням (13). Для цього розглянемо дискретну апроксимаційну схему (14)–(15), і на її основі побудуємо мультиплікативний процес

$$S_t^{n,C} = \exp\left\{X_0^{(n,C)}\right\} \prod_{1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{tn}{T}\right]} \left(1 + Q_k^{(n,C)}\right), \ t \in \mathbb{T}.$$

$$S_t^C = \exp\left\{X_t^C - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t (X_t^C \wedge C)dt\right\}, \ t \in \mathbb{T}$$

$$S_t^n = \exp\{x_0\} \prod_{1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{tn}{T}\right]} \left(1 + Q_k^{(n)}\right), \ t \in \mathbb{T},$$

$$S_t = \exp\left\{X_t - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t X_t dt\right\}, \ t \in \mathbb{T}$$

$$\widetilde{S}_t^n = \exp\{x_0\} \prod_{1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{tn}{T}\right]} \left[\left(1 + Q_k^{(n,C)}\right) \exp\left\{\frac{\sigma^2}{2n} X_k^{(n)}\right\}\right], \ t \in \mathbb{T}$$

та

$$\widetilde{S}_t = \exp\{X_t\}, \ t \in \mathbb{T}.$$

Через G^C, $\mathsf{G}^{n,C}$, G, G^n, $\widetilde{\mathsf{G}}$ та $\widetilde{\mathsf{G}}^n$, $n \geqslant 1$ позначимо міри, які відповідають процесам S_t^C, $S_t^{n,C}$, S_t, S_t^n, $\widetilde{S}_t$ та $\widetilde{S}_t^n$, $n \geqslant 1$, відповідно.

Справедливі наступні результати.

Теорема 11. *Має місце слабка збіжність мір* $\mathsf{G}^{n,C} \xrightarrow{W} \mathsf{G}^C$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 12. *Має місце слабка збіжність мір* $\mathsf{G}^n \xrightarrow{W} \mathsf{G}$ *при* $n \to \infty$.

Зауваження 2. *Аналогічним чином може бути доведено, що має місце слабка збіжність мір* $\widetilde{\mathsf{G}}^n \xrightarrow{W} \widetilde{\mathsf{G}}$ *при* $n \to \infty$.

Перейдемо тепер до оцінювання опціонів на акції зі стохастичною волатильністю. Розглянемо модель Хестона. Нехай задано повний імовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t^{(W,\widetilde{W})}, t \geqslant 0\}, \mathsf{P}\}$ з фільтрацією, породженою двома вінерівськими процесами $\{W_t, \widetilde{W}_t, \ 0 \leqslant t \leqslant T\}$. Розглянемо модель ринку з одним безризиковим і одним ризиковим активом, причому ціна безризикового активу задається невипадковою експонентою $B_t = \mathrm{e}^{rt}$, де $r > 0$, а ціна ризикового активу задається геометричним броунівським рухом $\{S_t, \ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ зі стохастичною волатильністю, яка в свою чергу є вимірною функцією від процесу Кокса-Інгерсолла-Росса. Тобто ринок описується парою стохастичних диференціальних рівнянь

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{X_t} S_t dW_t, \tag{17}$$

$$dX_t = (b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t} d\widetilde{W}_t. \tag{18}$$

Позначимо S_0 і $X_0 > 0$ невипадкові початкові значення процесів, визначених рівняннями (17)-(18) відповідно. Позначимо також

$$\overline{Y}_t = (1, Y_t) = (1, e^{-rt} S_t)$$

вектор дисконтованих цін активів. Нехай виконуються умови

(A1) вінерівські процеси W і $\widetilde{W}$ є некорельованими, а отже, незалежними;

(A2) коефіцієнти b і σ є додатними і $\sigma^2 \leqslant 2b$.

Розв'язок рівняння (17) має вид

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{1}{2}\int_0^t X_s ds + \int_0^t \sqrt{X_s} dW_s\right).$$

Встановлено безарбітражність даної моделі в сенсі $\overline{NA}_g$. Показано, що відносно еквівалентної мартингальної міри Q з похідною Радона–Нікодима вигляду

$$\left.\frac{d\,\mathsf{Q}}{d\,\mathsf{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left\{\int_0^t \frac{r-\mu}{\sqrt{X_s}} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{(r-\mu)^2}{X_s}\right) ds\right\},$$

пара процесів (S_t, X_t) має наступне зображення:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{X_t} S_t dW_t^{\mathsf{Q}}, \\ dX_t &= (b - X_t)\, dt + \sigma\sqrt{X_t} d\widetilde{W}_t^{\mathsf{Q}}, \end{aligned} \tag{19}$$

де, за теоремою Гірсанова, процеси

$$W_t^{\mathsf{Q}} = W_t + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sqrt{X_s}} ds,$$

$$\widetilde{W}_t^{\mathsf{Q}} = \widetilde{W}_t,$$

є незалежними вінерівськими процесами відносно Q. Очевидно, ця міра є мінімальною мартингальною мірою.

Позначимо через V_C ціну у початковий момент часу Європейського опціону купівлі $C = (S_T - K)^+$ зі страйковою ціною $K \geqslant 0$ в моделі (19). Вказана ціна задається виразом

$$V_C = \mathrm{e}^{-rT}\,\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\{(S_T^{\mathsf{Q}} - K)^+\} = \mathrm{e}^{-rT}\,\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\{\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\{(S_T^{\mathsf{Q}} - K)^+ | X_s, 0 \leqslant s \leqslant T\}\}. \quad (20)$$

Внутрішнє математичне сподівання є умовним за траєкторією $\{X_s, 0 \leqslant s \leqslant T\}$, і тому є ціною Блека-Шоулса для моделі з невипадковою волатильністю, залежною від часу. Внутрішнє умовне математичне сподівання у (20), позначимо його $E(\widetilde{\sigma})$, має наступне зображення:

$$\begin{aligned} E(\widetilde{\sigma}) &:= \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\{(S_T^{\mathsf{Q}} - K)^+ | Y_s, 0 \leqslant s \leqslant T\} \\ &= S_0\,\mathrm{e}^{rT}\,\Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r + \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2)T - \ln K}{\widetilde{\sigma}\sqrt{T}}\right) \\ &\quad - K\Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r - \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2)T - \ln K}{\widetilde{\sigma}\sqrt{T}}\right), \end{aligned} \quad (21)$$

де $\widetilde{\sigma} := \left(\frac{1}{T}\int_0^T X_s ds\right)^{\frac{1}{2}}$, $\Phi(\cdot)$ – функція стандартного нормального розподілу. Функцію $\widetilde{\sigma}$ можна трактувати як усереднену волатильність за період часу від початкового моменту до моменту виконання опціону. Формула (21) показує, що ціна опціону на модель Блека–Шоулса зі стохастичною волатильністю повністю визначається розподілом випадкової величини $\widetilde{\sigma}$.

Теорема 13. *Нехай $6\sigma^2 < b$. Для процесу КІР X, визначеного стохастичним диференціальним рівнянням* (18)*, випадкова величина $\widetilde{\sigma}^2$ має неперервну обмежену функцію щільності вигляду:*

$$p_{\widetilde{\sigma}^2}(x) = \mathsf{E}\left[\mathbb{1}_{\{\widetilde{\sigma} > \sqrt{x}\}}\left(\frac{T}{\sigma}\int_0^T \sqrt{X_t}\int_0^t \Psi_{h,t} dW_h\, dt - \frac{T}{2}\int_0^T\int_0^t \Psi_{h,t}\psi_{h,t} dh\, dt\right)\right], \quad (22)$$

де

$$\psi_{h,t} := \exp\left\{-\frac{t-h}{2} - \left(\frac{b}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right)\int\limits_h^t \frac{ds}{X_s}\right\},$$

$$\Psi_{h,t} = \psi_{h,t}\left[\int\limits_0^T\int\limits_0^T \sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}}\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2}dh\,dt_1dt_2\right]^{-1}.$$

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови теореми 13. Тоді ціна у початковий момент часу Європейського опціону купівлі $C = (S_T - K)^+$ зі страйковою ціною $K \geqslant 0$ задається виразом*

$$V_C = \int\limits_0^\infty \left(S_0\Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r + \frac{1}{2}x)T - \ln K}{\sqrt{xT}}\right)\right.$$

$$\left. -K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r - \frac{1}{2}x)T - \ln K}{\sqrt{xT}}\right)\right)p_{\widetilde{\sigma}^2}(x)dx,$$

де $p_{\widetilde{\sigma}^2}(x)$ визначено у (22).

У **висновках** сформульовано основні результати дисертаційної роботи.

Подяка. Автор дисертації висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Юлії Степанівні Мішурі за постановку розглянутих у дисертації задач, постійну увагу та підтримку в роботі.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Наведемо короткий огляд робіт за тематикою, що близька до теми дисертаційної роботи.

1.1. Граничні теореми та швидкість збіжності до нормального закону

Зміст сучасної теорії ймовірності в її більшій і, можливо, найважливішій частині, складають так звані граничні теореми. Річ в тому, що точні і до того ж придатні для обчислень формули формують в теорії ймовірностей частіше винятки, ніж правило. Ця обставина породжує необхідність апроксимації необхідних нам ймовірнісних розподілів або зв'язаних з ними граничних характеристик. Такі апроксимації повинні, з одного боку, бути придатними для комп'ютерних обчислень, а з другого – володіти потенціальною можливістю забезпечувати необхідну точність наближення. Знайти апроксимації, які задовольняють вказані вимоги – головна мета граничних теорем. Розглянемо деякі історичні факти з теорії граничних теорем. Нехай $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ – послідовність незалежних випадкових величин. Розглянемо складені із цих випадкових величин суми:

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - A_n,$$

в яких A_n деякі числа, вибрані довільним чином, і позначимо $F_n(x)$ відповідну їм функцію розподілу.

Перші граничні теореми торкалися найпростішого випадку, коли доданки ξ_i розподілені однаково і приймають тільки два значення:

$$\mathsf{P}(\xi_i = 1) = p, \;\; \mathsf{P}(\xi_i = 0) = q = 1 - p. \tag{1.1}$$

Теорема Бернуллі за своїм змістом була еквівалентна наступному твердженню.

Теорема 1.1. *Нехай незалежні доданки ξ_i в сумах S_n задовольняють умову* (1.1), *де* $0 < p < 1$. *Покладемо в цих сумах* $A_n = np$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце граничне співвідношення*

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - np}{n} \xrightarrow{d} 0. \tag{1.2}$$

В 1733 році Муавром був зроблений наступний принциповий крок в теорії граничних теорем. Йому вдалося уточнити теорему Бернуллі для довільних $0 < p < 1$. Теорема Муавра представляє собою те, що ми називаємо тепер центральною граничною теоремою. Тоді ж він використав для апроксимації розподілу з щільністю $\sqrt{2\phi(x\sqrt{2})}$, де $\phi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ – щільність стандартного нормального закону. Його функцію розподілу ми будемо позначати $\Phi(x)$. Але перше використання цієї функції Муавром треба віднести до 1711 року, коли ним був в плані тієї ж теореми досліджений випадок $p = \frac{1}{2}$. Зміст теореми Муавра-Лапласа наступний.

Теорема 1.2. *При виконанні умов теореми 1.1 справедливе граничне співвідношення*

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{d} N, \ \ n \to \infty,$$

де N *– випадкова величина, яка має стандартний нормальний розподіл* $\Phi(x)$.

Разом з цією теоремою паралельно доводилася і так звана локальна гранична теорема.

Теорема 1.3. *Нехай* $a < b$, *тоді при* $n \to \infty$ *рівномірно по всім цілим* k *із послідовності інтервалів* $np + a\sqrt{npq} < k < np + b\sqrt{mpq}$ *виконується асимптотичне відношення* $n \to \infty$

$$\mathsf{P}_n(k) = \mathsf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)(1 + o(1))$$

Значним досягненням Пуассона, яке відноситься до 1837 року стала теорема, яка містить наближення ймовірностей рідких подій в ряді однаково проводжуваних і незалежних між собою випробувань.

Теорема 1.4. *Нехай* $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ *– послідовність незалежних випадкових величин з розподілом* (1.1)*, які залежать від натуральних параметрів* $\lambda > 0$ *і цілого* $r > \lambda$ *таким чином, що* $p = \frac{\lambda}{r}$*. Якщо фіксувати* λ *і спрямувати* r *до* ∞*, то для довільного цілого* $k \geqslant 0$ *має місце наступне асимптотичне зображення:*

$$\mathsf{P}_r(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp\{-\lambda\}(1 + o(1)).$$

Наступним значним успіхом цієї теорії було розповсюдження Чебишевим в 1867 році закону великих чисел на значно ширший клас випадків, порівняно з тими, які розглядав Пуассон.

Теорема 1.5. *Припустимо, що незалежні випадкові величини* ξ_i *мають скінченні другі, а відповідно і перші, моменти, обмежені однією і тією ж сталою* L*. Виберемо в сумах* S_n *зміщення* $A_n = \mathsf{E}\,\xi_1 + \mathsf{E}\,\xi_2 + \ldots \mathsf{E}\,\xi_n$*. Тоді при* $n \to \infty$ *справедливе відношення* (1.2)*.*

Поява роботи Чебишева в теорії ймовірності стала для багатьох математиків імпульсом до серйозних занять піднятими в ній питаннями. При цьому послідовниками Чебишева велися дослідження не тільки в напрямках розвитку і удосконалення запропонованих ним методів. Йшли пошуки нових підходів до головної проблеми. І тут блискучий успіх випав на долю Ляпунова, одного з учнів Чебишева.

Теорема 1.6. *Розглянемо послідовність незалежних випадкових величин* $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$*. Нехай* $0 < \delta \leqslant 1$ *– деяке число. Припустимо, що величина*

$$\gamma_n = \mathsf{E}\,|\xi_1 - \mathsf{E}\,\xi_1|^{2+\delta} + \mathsf{E}\,|\xi_2 - \mathsf{E}\,\xi_2|^{2+\delta} + \ldots + \mathsf{E}\,|\xi_n - \mathsf{E}\,\xi_n|^{2+\delta}$$

скінченна при будь-якому $n = 1, 2\ldots,$ *і покладемо* $A_n = \mathsf{E}\,\xi_1 + \mathsf{E}\,\xi_2 + \ldots \mathsf{E}\,\xi_n$*,* $B_n = \mathsf{D}\,\xi_1 + \mathsf{D}\,\xi_2 + \ldots \mathsf{D}\,\xi_n$*,* $\epsilon_n = \frac{\gamma_n}{B_n^{2+\delta}}$*. Тоді можна стверджувати, що при* $n \to \infty$

(i) *у випадку* $\delta < 1$ $\eta_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \{|F_n(xB_n) - \Phi(x)|\} = O(\epsilon_n)$;

(ii) *у випадку* $\delta = 1$ $\eta_n = O(\epsilon_n)|\log \epsilon_n|$.

Можна сказати, що поява роботи Ляпунова була переломним моментом в розвитку торії ймовірностей. З одного боку, вона впевнено демонструвала великі можливості подальшого розвитку теорії ймовірностей, з другого – давала в руки математикам новий вагомий інструмент, метод характеристичних функцій. Досягнення Ляпунова прекрасно доповнювалися роботами Маркова по аналізу послідовності сум залежних випадкових величин.

Першу чверть XX століття можна назвати періодом інтенсивного розвитку і становлення теорії ймовірностей як математичної дисципліни, який завершився створенням її аксіоматики в знаменитій роботі Колмогорова [3]. Вперше побачив світ дану книгу у 1933 році німецькою мовою.

Теорія ймовірностей і математична статистика є однією із найближчих до практики дисциплін. Значна частина практичних задач пов'язана із граничними теоремами і їх уточненнями, що вказує не тільки на можливу апроксимацію, але й дають оцінку похибки наближення.

Серед таких теорем важливе місце займають граничні теореми для сум незалежних випадкових величин. Швидкість збіжності вивчалася багатьма авторами, див. наприклад [85] та посилання. Практичне використання граничних теорем пов'язане із оцінкою швидкості наближення розподілів сум граничним. Класичною в цьому випадку є нерівність Беррі-Ессеена. Нехай $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $F(x)$, $\mathsf{E}\,\xi_i = 0$, $\mathsf{D}\,\xi_i = \sigma^2 < \infty$, $\beta_3 = \int\limits_{\mathbb{R}} |x|^3 dF(x)$ – абсолютний момент третього порядку, $\Phi_n(x) = \mathsf{P}\left\{\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\}$, $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – функція розподілу стандартного нормального закону. Тоді нерівність Беррі-Ессеена має вигляд

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{C\beta_3}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

Ця оцінка дає швидкість збіжності $O(n^{-1/2})$ як і асимптотичне представлення функції розподілу сум незалежних однаково розподілених випадкових величин в термінах семiінваріантів, представлених в книзі [85]. Така ж швидкість збіжності була отримана в статті [82] Паулаускаса в термінах псевдомоментів. Нехай $\sigma = 1$, "псевдомоменти" функції $H(x) = F(x) - \Phi(x)$, (абсолютний) псевдомомент третього порядку, визначається наступним чином $\nu = \int\limits_{\mathbb{R}} |x|^3 \, |dH(x)|$. Тоді має місце оцінка

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C \max\left(\nu, \nu^{\frac{1}{4}}\right) n^{-\frac{1}{2}}.$$

Проте, ця швидкість збіжності є недостатньою, наприклад, з точки зору застосування її до фінансової математики.

Умови, які накладаються, для отримання цієї швидкості збіжності, були сформульовані декількома авторами. Після введення псевдомоментів в [98], вони почали широко використовуватися в граничних теоремах. В [99] Золотарьов вводить дуже загальні оцінки в центральній граничній теоремі, використовуючи різні види псевдомоментів. Ю.П. Студнєв у [93] вводить наступну оцінку швидкості збіжності в термінах псевдомоментів. Нехай $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ – послідовність центрованих незалежних однаково розподілених випадкових величин з дисперсією рівною 1 та характеристичною функцією $f(t)$, $\mu_k = \int\limits_R x^k dH(x)$ – псевдомоменти k-го порядку, $V(x) = V_{-\infty}^{x} H(z)$ – варіація функції H.

Теорема 1.7. *[93] Нехай $F(x)$ має скінченні моменти до q-го включно для деякого $q \geqslant 3$ і задовольняє умову Крамера $\overline{\lim}_{|t| \to \infty} |f(t)| < 1$. Тоді*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\Phi_n(x) - \Phi(x)| =$$

$$= O\left(\sum_{k=3}^{q} \frac{|\mu_k|}{n^{\frac{k-2}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{q-2}{2}}} \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_0^{\sqrt{n}} dx \int\limits_{|z|>x} |z|^q \, dV(z)\right).$$

З умови $\mu_k = 0, 3 \leqslant k \leqslant r$ випливає, що швидкість збіжності має порядок $O(n^{\frac{-r+1}{2}})$.

Швидкість збіжності також вивчалася в роботах [1], [2], [13].

1.2. Оцінювання опціонів

Французький математик Луї Башельє вважається першою людиною, якій вдалося описати броунівський рух. Відома на весь світ дисертація "Теорія спекуляцій" [18], видана в 1900 році, є історично першою статтею, де вперше була викладена математична техніка в теорії фінансів. Саме вона дала поштовх до численних досліджень в цій галузі.

В 1965 році видатному американськанському економісту Полу Самуельсону вдалося покращити модель опису цін акцій, замінивши звичайний броунівський рух на геометричний броунівський рух. На основі цієї моделі стало можливим формулювання проблеми оцінювання опціону, чим і зайнялася велика кількість вчених. Серед таких вчених не можна не відмітити Блека і Шоулса, а також Мертона, яким належить авторство відомих формул для оцінювання опціону. Ці формули можна знайти в [24] та [66].

Модель Блека-Шоулса визначає теоретичну ціну європейського опціону, яка передбачає, що якщо базовим активом торгують на ринку, то його ціна неявним чином встановлюється самим ринком. Дана модель породила до життя нову фінансову систему, засновану на торгівлі опціонами, ф'ючерсами і деривативами. Їх дослідження базувалися на попередніх роботах Джека Трейнора, Пола Самуельсона, Джеймса Бонеса, та Едварда Торпа і розроблялися в період швидкого зростання опціонної торгівлі.

Згідно з моделлю Блека-Шоулса, ключовим елементом визначення вартості опціону є очікувана волатильність базового активу. Залежно від коливання активу, ціна на нього зростає або знижується, що прямо пропорційно впливає на вартість опціону. Таким чином, якщо відома вартість опціону, то можна визначити рівень волатильності, очікуваної ринком.

Також Блеком і Шоулсом [24] було встановлено, що в їх моделі для будь-якого опціону може бути знайдена єдина ціна при умові безарбітражності та повноти ринку. Іншими словами, метод оцінки в умовах безарбітражності означає, що два активи, які мають однаковий прибуток в певний момент часу в майбутньому, повинні мати однакову сучасну вартість.

Модель Мертона оцінки вартості опціонів є узагальненням формули Блека-Шоулса для оцінки вартості Європейських опціонів на акції чи індекси акцій які виплачують відомий потік дивідендів. Потік має бути виражений у вигляді річної неперервної ставки.

Незважаючи на клопітку працю і дослідження вчених, ніяка інша модель не наближається до популярності моделі Блека-Шоулса і Мертона ні в теорії, ні на практиці. Часткове пояснення полягає в простоті цих моделей. Моделі, які вводять кращу емпіричну продуктивність майже завжди вимагають більше параметрів, і, отже, як правило, працюють повільніше з точки зору обчислення. Феноменальний успіх і широке поширення формули призвело до того, що Майрон Шоулс отримав Нобелівську премію з економіки в 1997 році "за новий метод визначення вартості похідних цінних паперів".

Для того, щоб покращити калькуляцію цін та забезпечити хеджування моделі Блека-Шоулса і Мертона, більшість досліджень було направлено на модифікацію неперервного процесу. Зокрема, акційний дохід був змодельований як дифузія зі стохастичною волатильністю (н-д, [50], [54]), стрибкова дифузія (н-д, [67], [60]) або їх поєднання (н-д, [20], [21], [38]). В роботі [43] наведено докази того, що з теоретичної точки зору можна припустити, що цінові процеси повинні містити стрибки, але не повинні містити дифузію.

Вдосконалення класичної моделі Блека-Шоулса є предметом сучасних досліджень. Це зумовлено насамперед бажанням вчених збільшити та розширити обчислювальні можливості. Саме тому точне та наближене оцінювання опціонів у моделях зі стохастичною волатильністю є основною дискусією між представниками різних галузей фінансової математики. Такі дискусії тривають вже декілька десятиліть і привертають увагу численної кількості вчених. До числа найвідоміших робіт у даному напрямку належать [50], [54], [92], [96]. Автори даних праць розглядували ціну опціону як розв'язок диференціального рівняння у частинних похідних за двома змінними, ціною активу та волатильністю. Сам же розв'язок цього рівняння викладено у [42]. Для отримання наближення ціни опціону Холл і Уайт пішли шляхом визначення ціни опціону у вигляді рядів, для випадку, в якому стохастична волатильності не залежить від ціни акцій. Чисельні розв'язки також проводяться для випадку, в якому волатильність корелюється з ціною акцій. Хестон [50] та Штейн [92] отримали аналітичні формули із застосуванням оберненого перетворення Фур'є у випадку відсутності кореляції між ціновим процесом та процесом, що описує волатильність. Інший підхід запропонував Віггінс [96]. Він використовує метод скінченних різниць для розв'язання згаданого рівняння.

Також слід відмітити роботи [19], [36], [45], [61], [76], [84], в яких автори спрямували дослідження на встановлення наближених та точних формул цін опціонів. Зокрема у роботі [61] розглядається модель, в якій волатильність вважається деякою функцією від процесу Орнштейна-Уленбека. У припущенні, що ціновий процес і процес волатильності некорельовані, із застосуванням перетворення Фур'є виведено аналітичну формулу для ціни опціону Європейського типу. У [62] для аналогічної моделі запропоновано підхід для отримання наближеної оцінки для ціни опціона із застосуванням дискретизації методом Ейлера-Маруями, визначено швидкість збіжності оцінки до точного значення при зменшенні довжини інтервалу.

Більш детальну інформацію щодо дослідження моделей фінансових ринків зі стохастичною волатильністю можна знайти, наприклад, у [88].

Тепер, щодо точного обчислення ціни опціону, то ціна опціону на акцію зі стохастичною волатильністю залежить від інтегрального функціонала, який, в свою чергу, залежить від всієї траєкторії процесу, що описує волатильність. Тут труднощі виникають, через те, що нам не відомий розподіл цього інтегрального функціоналу. Але можна піти іншим шляхом і звернутися до теорії числення Маллявена, за якою можна знайти щільність розподілу функціонала від стохастичної волатильності, тоді ситуація значно спрощується.

У праці [81] було показано застосування формули Кларка-Окона до задачі формування оптимальних портфтелів цінних паперів. Саме після оприлюднення даної роботи, теорія числення Маллявена набула широкого застосування чи не у всіх видах задач фінансової математики. Зокрема, саме за допомогою числення Маллявена у роботі [41] отримано формули для обчислення "греків" – величин, що виражають чутливість опціонів до змін параметрів моделі. Чимало вчених і далі звертаються до цієї теорії, що забезпечує їй немалу популярність. Та не варто вважати, що числення Маллявена зосереджені на малому участку досліджень. Треба зазначити, що в джерелах [77],[79], [87] та їх посиланнях відмічені інші можливи шляхи застосування даної теорії.

1.3. Швидкість збіжності цін опціонів

Велику кількість робіт у фінансовій математиці присвячено збіжності цін ризикових активів та цін відповідних опціонів, що моделюються в дискретному часі, до моделей з неперервним часом. Дослідження такої проблеми швидкості збіжності бере свій початок з часів центральної граничної теореми для апроксимації моделі Блека-Шоулса моделлю Кокса-Росса-Рубінштейна та продовжується у більш складних моделях (див., н-д, [27], [28], [30], [31], [37], [51], [53]). Також книга [86] містить багато посилань на відповідні статті, тут також підсумовується результати слабкої збіжності дискретно часових фінансових ринків та відповідна збіжність цін опціонів. Інтерес до цієї тематики викликано очевидними причинами: реальний час дискретний, але аналітичні і, як не дивно, чисельні дослідження, легше проводити в неперервному часі. При цьому виникає питання щодо швидкості збіжності цін опціонів. Деяку кількість статей присвячено швидкості збіжності, але, при великій різноманітності можливостей вибору як граничної моделі, так і допграничних наближень, в основному, роботи з оцінки швидкості збіжності стосуються допграничної біноміальної та триноміальної моделей та граничної моделі Блека-Шоулса [27], [28], [51], [94]. Це пояснюється наявністю досить тонких аналітичних результатів про швидкість збіжності біноміального розподілу до гауссівського, які дозволяють підвищити оцінку швидкості збіжності, скажімо, до $O(n^{-1})$, де n – кількість періодів для проведення торгів на фіксованому інтервалі часу в дограничній моделі. В статтях [68], [69], [70] розглянуто більш загальні схеми як для дограничних, так і для граничного ринку. А саме, у статті [70] загальні умови слабкої збіжності для послідовності процесів з дискретним часом до дифузійного процесу застосовуються до слабкої збіжності для дискретних моделей фінансового ринку до дифузійних моделей з неперервним часом. Процес Орнштейна-Уленбека розглядається як гранична модель (без оцінки швидкості збіжності цін опціонів). Випадок, коли загальна мартингальна схема з дискретним часом апроксимує стандартну модель Блека-Шоулса, розглядається в роботі [69]. При цьому швидкість збіжності цін опціонів не менша за $n^{-1/8}$. При застосуванні асимптотичного розкладу функції розподілу встановлено, що швидкість збіжності може бути $n^{-1/2}$. В статті [68] розглядається дискретна апроксимаційна схема для процесу Орнштейна-Уленбека, яка базується на апроксимації Ейлера, але прирости вінерівського процесу замінюються на незалежні однаково розподілені обмежені симетричні випадкові величини з рівномірним розподілом. Встановлено, що швидкість об'єктивних та справедливих цін опціонів не менша за $\frac{C}{n^{1/3}}$. Але швидкість збіжності в усіх моделях не перевищує $O(n^{-1/2})$. Це в свою чергу, пояснюється тим фактом, що при відході від біноміальної моделі треба шукати або одержувати результати щодо швидкості збіжності функцій розподілу сум незалежних випадкових величин до гауссівського розподілу.

1.4. Процес Кокса-Інгерсолла-Росса

Процес Кокса-Інгерсолла-Росса (КІР) вперше був введений Коксом, Інгерсолом і Россом у 1985 році в їх статті [29]. Даний процес був представлений як модель короткострокової відсоткової ставки. В наш час ця модель широко використовується у фінансовому моделюванні, наприклад, як процес волатильності у моделі Хестона [50]. Дана модель є однією з найпопулярніших похідних моделей ціноутворення акцій серед фахівців-практиків. Спираючись на добре відомі перетворення Фур'є процесів КІР для фіксованих моментів часу, вже відомо як знайти оцінки опціонів в моделі Хестона або як перевіряти модель Хестона з Європейськими пут і кол опціонами (див., н-д, [57]). На противагу цьому, потраєкторно залежні фінансові деривативи в рамках даної моделі оцінюються дискретними апроксимаціями моделі Хестона та методами Монте-Карло. Крім того, додатня швидкість збіжності дискретних апроксимацій є важливою для застосування ефективних багаторівневих методів Монте-Карло (див. [44], [59], [48], [49]).

Сильна глобальна апроксимація процесу КІР вивчалася багатьма авторами наукових публікацій. В роботах [14], [25], [32], [47], [52] показана сильна збіжність без швидкості, або з логарифмічною швидкістю збіжності. Зокрема, в [14] представляються загальні рамки для аналізу сильної апроксимації процесу КІР та об'ємні моделюючі матеріали. Нелогарифмічна швидкість збіжності отримана в [22]. Тут було встановлено, що симетричний Ейлеровий метод має сильну збіжність порідку $\frac{1}{2}$ при накладанні додаткових обмежувальних припущеннь на параметри рівняння.

В [33] автор розширює модель КІР короткої процентної ставки, накладаючи припущення, що стохастичний рівень реверсії, який краще відображає тимчасову залежність, викликану циклічністю економіки або очікуваннями щодо майбутнього впливу грошово-кредитної політики. У цьому контексті вивчається збіжність довгострокового повернення, використовуючи теорію узагальнення Bessel-square processes. В [83] автори пропонують емпіричний метод, який використовує умовну щільність змінних величин, щоб оцінити і протестувати тимчасову структурну модель з відомою формулою ціни. Для цього використовуючться дані по дисконтним та купонним облігаціям. Метод застосовується до розширення двофакторної моделі Кокса, Інгерсолла, Росса. Їх результати показують, що оцінки, базуються виключно на рахунках, які припускають невиправдано великі цінові помилки для більш тривалих термінів погашення. Також процес вивчався в [26].

Дискретні схеми для процесу КІР були запропоновані в численних статтях, включаючи [14], [15], [22], [25], [32], [46], [47], [52], [56], [75]. Адитивна схема широко використовується, наприклад, в статтях [14], [25], [35]. Роботи [33], [83] є сучасними прикладами моделювання стохастичної відсоткової ставки мультиплікативною моделлю процеса KIP.

РОЗДІЛ 2
ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ ЦІН ОПЦІОНІВ ЗА МЕТОДОМ ПСЕВДОМОМЕНТІВ

Даний розділ складається з двох основних частин. В першій узагальнюється оцінка Студнєва швидкості збіжності в термінах псевдомоментів для можливості кращого застосування її до фінансової математики. Отримано таку ж оцінку, обходячись без умови Крамера. Натомість введено обмежені зрізані псевдомоменти та інтегровність характеристичної функції. Наведені приклади застосування отриманої оцінки.

В другій частині наводяться зображення і властивості фінансового ринку з дискретним часом та одним ризиковим активом, досліджено умови безарбітражності фінансового ринку з дискретним часом у схемі серій. Наведено умови безарбітражності ринку з дискретним часом, утвореного незалежними випадковими величинами, в тому числі, коли їхній розподіл є неперервним. Доведено, що при певному виборі мартингальної міри випадкові величини, незалежні в сукупності відносно об'єктивної міри, залишаються незалежними в сукупності відносно цієї мартингальної міри. Доведено функціональну граничну теорему для ринку з дискретним часом в схемі Блека-Шоулса. Доведені допоміжні результати про швидкість збіжності сум, пов'язаних з ціною ризикового активу, в центральній граничній теоремі, із застосуванням методу псевдомоментів. Ці результати необхідні для отримання оцінки швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу в дискретному часі до відповідних цін на граничному ринку з неперервним часом. Наведено теорему про оцінку швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу.

Результати даного розділу надруковані в статтях [7], [72] та апробовані на конференціях [9], [10], [71].

2.1. Швидкість збіжності до нормального закону в термінах псевдомоментів

2.1.1. Узагальнення оцінки Студнєва. Основні результати. Нехай $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з $\mathsf{E}\,\xi_i = 0$, $\mathsf{D}\,\xi_i = \sigma^2 \in (0, \infty)$, функцією розподілу $F(x)$ і характеристичною функцією $f(t)$, $\Phi_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – функція розподілу випадкової величини $S_n = (\sigma\sqrt{n})^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$ і $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – функція розподілу стандартного нормального закону. Припустимо, що для деякого $m \geqslant 3$ існують псевдомоменти

$$\mu_k = \int_{\mathbb{R}} x^k dH(x), (k = 3, \ldots, m, m \in \mathbb{N}),$$

де $H(x) = F(x\sigma) - \Phi(x)$. Введемо наступні позначення для величин, які будемо називати зрізаними псевдомоментами:

“зрізані зверху”

$$\nu_n^{(1)}(m) = \int_{|x| \leqslant \sigma\sqrt{n}} |x|^{m+1} |dH(x)|$$

і “зрізані знизу”

$$\nu_n^{(2)}(m) = \int_{|x| > \sigma\sqrt{n}} |x|^{m} |dH(x)|.$$

Теорема 2.1. *Нехай виконуються наступні умови:*

(*i*) *Характеристична функція інтегровна, тобто* $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt = A < \infty$*;*

(*ii*) *Псевдомоменти до m-го порядку включно рівні нулю і зрізані псевдомоменти обмежені:*

$$\mu_k = 0,\ k = 3, \ldots, m,\ \textit{для деякого}\, m \geqslant 3,\ \textit{i}$$

$$\nu_n(m) = \max\left\{\nu_n^{(1)}(m), \nu_n^{(2)}(m)\right\} < \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}.$$

Тоді для всіх $n \geqslant 2$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leqslant$$

$$\leqslant 2C_m^{(1)}\frac{\nu_n^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}}+2C_m^{(2)}\frac{\nu_n^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}}+\frac{\sigma A}{\pi}b^{n-1}+\nu_n(m)\frac{4e^{\frac{3}{2}}}{\pi}\frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n},$$

де

$$C_m^{(1)}=\frac{12^{\frac{m+1}{2}}\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\pi(m+1)!},\ C_m^{(2)}=2C_{m-1}^{(1)},$$

$$b=\exp\left\{-\frac{\pi^2}{24A^2\sigma^2\left(2+\pi\right)^2}\right\}<1.$$

Наслідок 2.1. *Нехай випадкові величини ξ_i мають обмежену щільність $p(x)\leqslant A_1$. Припустимо, що виконується умова (ii) теореми 2.1. Тоді для всіх $n\geqslant 3$*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\Phi_n(x)-\Phi(x)|\leqslant$$
$$\leqslant 2C_m^{(1)}\frac{\nu_n^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}}+2C_m^{(2)}\frac{\nu_n^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}}+2\sigma A_1b_1^{n-2}+\nu_n(m)\frac{4e^{\frac{3}{2}}}{\pi}\frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n}, \tag{2.1}$$

де $b_1=\exp\left\{-\frac{1}{96A_1^2\sigma^2(2+\pi)^2}\right\}<1$.

Відмітимо, що з припущення (i) випливає існування щільності для випадкової величини S_n. Позначимо її через $p_n(x)$. Також нехай $\phi(x)$ – щільність стандартного нормального закону.

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови теореми 2.1. Тоді для всіх $n\geqslant 2$*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|p_n(x)-\phi(x)|\leqslant$$
$$\leqslant C_m^{(3)}\frac{\nu_n^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}}+C_m^{(4)}\frac{\nu_n^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}}+b^{n-1}\frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi}A+\nu_n(m)\frac{e^{\frac{3}{2}}}{\pi}\frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n},$$

де

$$C_m^{(3)}=\frac{12^{\frac{m+2}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{4\pi(m+1)!},\ C_m^{(4)}=2C_{m-1}^{(3)}.$$

2.1.2. Додаткові результати. Доведення основних результатів. Доведемо спочатку два додаткові результати. Позначимо через $\omega(t)=\left|f\left(\frac{t}{\sigma}\right)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right|$.

Лема 2.1. *Нехай $\mu_k=0,\ k=3,\ldots,m$. Тоді для всіх $t\in\mathbb{R}$*

$$\omega(t)\leqslant\frac{|t|^{m+1}}{(m+1)!}\nu_n^{(1)}(m)+\frac{2|t|^m}{m!}\nu_n^{(2)}(m).$$

Доведення. Нагадаємо, що $f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$. Більше того $f\left(\frac{t}{\sigma}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}} dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x\sigma)$. Згідно з умовою леми, псевдомоменти до m-го порядку включно рівні нулю. Звідси неважко зробити висновок, що

$$\omega(t) = \left| \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x\sigma) - \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} d\Phi(x) \right| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} d\left(F(x\sigma) - \Phi(x)\right) \right|$$

$$= \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - \sum_{k=0}^{m} \frac{(itx)^k}{k!} \right) dH(x) \right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \left| e^{itx} - \sum_{k=0}^{m} \frac{(itx)^k}{k!} \right| |dH(x)|.$$

Беручи до уваги нерівність [100, с. 372]:

$$\left| e^{i\alpha} - 1 - \ldots - \frac{(i\alpha)^m}{m!} \right| \leqslant \frac{2^{1-\delta} |\alpha|^{m+\delta}}{m!(m+1)^{\delta}},$$

$m = 0, 1, \ldots$, $\delta \in [0, 1]$, і поклавши $\delta = 1$ і $\delta = 0$, отримаємо

$$\omega(t) \leqslant \int\limits_{|x| \leqslant \sigma\sqrt{n}} \left| e^{itx} - \sum_{k=0}^{m} \frac{(itx)^k}{k!} \right| |dH(x)| \quad + \int\limits_{|x| > \sigma\sqrt{n}} \left| e^{itx} - \sum_{k=0}^{m} \frac{(itx)^k}{k!} \right| |dH(x)|$$

$$\leqslant \int\limits_{|x| \leqslant \sigma\sqrt{n}} \frac{|tx|^{m+1}}{(m+1)!} |dH(x)| \quad + \int\limits_{|x| > \sigma\sqrt{n}} \frac{2|tx|^m}{m!} |dH(x)|$$

$$= \frac{|t|^{m+1}}{(m+1)!} \nu_n^{(1)}(m) + \frac{2|t|^m}{m!} \nu_n^{(2)}(m).$$

Лему доведено. □

Введемо тепер наступне позначення $T_1(n, m) = \sqrt{-2\ln(2e\nu_n(m))}$. Тоді в свою чергу маємо $\nu_n(m) = \frac{1}{2e} \exp\{-\frac{1}{2} T_1^2(n, m)\}$. Відмітимо також, що з умови (ii) слідує, що $T_1(n, m) \geqslant 1$.

Лема 2.2. *Припустимо, що виконується умова (ii) теореми 2.1.*

1) *Для $|t| \leqslant T_1(n, m)$ має місце наступна оцінка для характеристичної функції: $\left| f\left(\frac{t}{\sigma}\right) \right| \leqslant e^{-\frac{t^2}{6}}$.*
2) *Для $|t| > T_1(n, m)$ має місце наступна оцінка для характеристичної функції: $\left| f\left(\frac{t}{\sigma}\right) \right| \leqslant \left(2e + \frac{3}{8}\right) \nu_n(m) |t|^{m+1}$.*

Доведення. Очевидно, що $\left|f\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right| = \left|f\left(\frac{t}{\sigma}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \leqslant e^{-\frac{t^2}{2}} + \omega(t)$. Розглянемо тепер два випадки.

1) Нехай $|t| \leqslant T_1(n,m)$. Тоді згідно з лемою 2.1

$$\begin{aligned}
\left|f\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right| &\leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}\left(e^{-\frac{t^2}{4}} + e^{\frac{t^2}{4}}\omega(t)\right) \\
&\leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1 + e^{\frac{t^2}{4}}\left(\frac{|t|^{m+1}}{(m+1)!}\nu_n^{(1)}(m) + \frac{2|t|^m}{m!}\nu_n^{(2)}(m)\right)\right) \\
&\leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1 + e^{\frac{T_1^2(n,m)}{4}}t^2\left(\frac{T_1^{m-1}(n,m)}{(m+1)!}\nu_n^{(1)}(m) + \frac{2T_1^{m-2}(n,m)}{m!}\nu_n^{(2)}(m)\right)\right) \qquad (2.2) \\
&\leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1 + t^2 e^{\frac{T_1^2(n,m)}{4}}\nu_n(m)\left(\frac{T_1^{m-1}(n,m)}{(m+1)!} + \frac{2T_1^{m-2}(n,m)}{m!}\right)\right) \\
&= e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1 + \frac{1}{2e}t^2 e^{-\frac{T_1^2(n,m)}{4}}\left(\frac{T_1^{m-1}(n,m)}{(m+1)!} + \frac{2T_1^{m-2}(n,m)}{m!}\right)\right).
\end{aligned}$$

Розглянемо функцію $f_1(x) = \exp\{-\frac{x^2}{4}\}x^{m-1}$. Вона досягає свого максимального значення в точці $x = \sqrt{2(m-1)}$ і це значення дорівнює

$$f_{1,\max} = \exp\left\{-\frac{m-1}{2}\right\}(2(m-1))^{\frac{m-1}{2}}.$$

Більше того,

$$\begin{aligned}
\exp\left\{-\frac{m-1}{2}\right\}\frac{(2(m-1))^{\frac{m-1}{2}}}{(m+1)!} &\leqslant \frac{\exp\left\{-\frac{m-1}{2}\right\}(2(m-1))^{\frac{m-1}{2}}}{m(m+1)\sqrt{2\pi(m-1)}(m-1)^{m-1}e^{-(m-1)}} \\
&= \left(\frac{2e}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi(m-1)}}\frac{1}{m(m+1)} \leqslant \frac{1}{m(m+1)}.
\end{aligned}$$

Останній дріб досягає свого максимального значення в точці $m = 3$. Отже,

$$\exp\left\{-\frac{T_1^2(n,m)}{4}\right\}\frac{T_1^{m-1}(n,m)}{(m+1)!} \leqslant \frac{1}{12}.$$

Аналогічно

$$\exp\left\{-\frac{T_1^2(n,m)}{4}\right\}\frac{2T_1^{m-2}(n,m)}{m!} \leqslant \frac{1}{3}.$$

З двох останніх оцінок та з (2.2) випливає, що

$$\begin{aligned}
\left|f\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right| &\leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1 + \frac{1}{2e}t^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3}\right)\right) \leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1 + \frac{1}{12}t^2\right) \\
&\leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}e^{\frac{t^2}{12}} \leqslant e^{-\frac{t^2}{6}},
\end{aligned}$$

звідки випливає доведення першого випадку.

2) Нехай тепер $|t| > T_1(n,m)$. Тоді з леми 2.1 слідує, що

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right| &\leqslant e^{-\frac{t^2}{2}} + \omega(t)\\ &\leqslant e^{-\frac{T_1^2(n,m)}{2}} + \frac{|t|^{m+1}}{(m+1)!}\nu_n^{(1)}(m) + \frac{2|t|^m}{m!}\nu_n^{(2)}(m)\\ &\leqslant \nu_n(m)\left(2e + \frac{|t|^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{2|t|^m}{m!}\right).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Нагадаємо, що $T_1(n,m) > 1$. Тоді $|t| > T_1(n,m) > 1$, і з (2.3) отримуємо, що

$$\left|f\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right| \leqslant \nu_n(m)\left(2e|t|^{m+1} + \frac{|t|^{m+1}}{24} + \frac{2|t|^{m+1}}{6}\right) \leqslant \left(2e + \frac{3}{8}\right)\nu_n(m)|t|^{m+1},$$

звідки випливає справедливість леми. □

Тепер ми можемо довести основні результати.

Доведення теореми 2.1. Нехай F та G дві функції розподілу з характеристичними функціями f та g, відповідно. Припустимо, що G має функцію щільності, яку позначимо через G'. Розглянемо нерівність з [64, с. 297]:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x) - G(x)| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^T |f(t) - g(t)|\frac{dt}{t} + \frac{24\sup|G'|}{\pi T},$$

і покладемо тут $F(x) = \Phi_n(x)$, $G(x) = \Phi(x)$. Тоді

$$\rho_n := \sup_{x\in\mathbb{R}} |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^T \left|f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right|\frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T}. \tag{2.4}$$

Нехай $n \geqslant 2$. По-перше, з елементарної нерівності

$$|u^n - v^n| \leqslant |u - v|\sum_{k=1}^n |u|^{k-1}|v|^{n-k}$$

і з леми 2.1 випливає, що для $t \leqslant T_1(n,m)\sqrt{n}$

$$
\begin{aligned}
\left| f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| &\leqslant \omega\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|^{k-1} e^{-\frac{t^2}{2n}(n-k)} \\
&\leqslant \omega\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{t^2}{6}\frac{n-1}{n}} \leqslant \omega\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) n e^{-\frac{t^2}{12}} \\
&\leqslant n\left(\frac{|t|^{m+1}}{(m+1)!n^{\frac{m+1}{2}}}\nu_n^{(1)}(m) + \frac{2|t|^m}{m!n^{\frac{m}{2}}}\nu_n^{(2)}(m)\right)\exp\left\{-\frac{t^2}{12}\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{t^2}{12}\right\}\left(\frac{|t|^{m+1}}{(m+1)!n^{\frac{m-1}{2}}}\nu_n^{(1)}(m) + \frac{2|t|^m}{m!n^{\frac{m-2}{2}}}\nu_n^{(2)}(m)\right).
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

По-друге, введемо наступні позначеня:

$$
C_{m,n}^{(1)} = \frac{12^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(\frac{m+1}{2})}{2n^{\frac{m-1}{2}}(m+1)!},\ C_{m,n}^{(2)} = 2C_{m-1,n}^{(1)},
$$

$$
T_2(n,m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Big(C_{m,n}^{(1)}\nu_n^{(1)}(m) + C_{m,n}^{(2)}\nu_n^{(2)}(m)\Big)}.
$$

Тоді

$$
\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T_2(n,m)} = C_m^{(1)}\frac{\nu_n^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + C_m^{(2)}\frac{\nu_n^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}}. \tag{2.6}
$$

Нехай $T_3(n,m) = (T_1(n,m)\sqrt{n}) \wedge T_2(n,m)$. Тоді з (2.4) та (2.6) випливає, що

$$
\begin{aligned}
\rho_n &\leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{T_3(n,m)} \left| f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi}\int\limits_{T_3(n,m)}^{T_2(n,m)} \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|^n \frac{dt}{t} \\
&\quad + \frac{2}{\pi}\int\limits_{T_3(n,m)}^{T_2(n,m)} e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T_2(n,m)} \\
&= I_1(n,m) + I_2(n,m) + I_3(n,m) + C_m^{(1)}\frac{\nu_n^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + C_m^{(2)}\frac{\nu_n^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}}.
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Оскільки $T_3(n,m) \leqslant T_1(n,m)\sqrt{n}$, то з (2.5) ми отримуємо, що

$$I_1(n,m) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{T_3(n,m)} \left| f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t}$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{T_3(n,m)} \left(\frac{t^m}{(m+1)!n^{\frac{m-1}{2}}} \nu_n^{(1)}(m) + \frac{2t^{m-1}}{m!n^{\frac{m-2}{2}}} \nu_n^{(2)}(m) \right) e^{-\frac{t^2}{12}} dt \tag{2.8}$$

$$\leqslant \frac{12^{\frac{m+1}{2}}\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\pi(m+1)!n^{\frac{m-1}{2}}} \nu_n^{(1)}(m) + \frac{2\cdot 12^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}{\pi m!n^{\frac{m-2}{2}}} \nu_n^{(2)}(m)$$

$$= C_m^{(1)} \frac{\nu_n^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + C_m^{(2)} \frac{\nu_n^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}}.$$

Якщо $T_3(n,m) = T_2(n,m)$, тоді $I_2(n,m) = 0$ і $I_3(n,m) = 0$. Тому розглянемо випадок $T_3(n,m) = T_1(n,m)\sqrt{n}$. Тоді

$$I_2(n,m) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{T_3(n,m)}^{T_2(n,m)} \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right|^n \frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi} \int\limits_{T_1(n,m)/\sigma}^{T_2(n,m)/\sigma\sqrt{n}} |f(t)|^n \frac{dt}{t}.$$

Тепер застосуємо результат Статулявічуса [91]: якщо випадкова величина з характеристичною функцією $f(t)$ має щільність $p(x) \leqslant d < \infty$ і варіацію σ^2, тоді для будь-якого $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t)| \leqslant \exp\left\{ -\frac{t^2}{96d^2(2\sigma|t|+\pi)^2} \right\}. \tag{2.9}$$

З умови (i) випливає, що щільність $p(x)$ випадкової величини ξ_n може бути отримана у вигляді зворотного перетворення Фур'є $p(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-itx}f(t)dt$ і $p(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = \frac{A}{2\pi}$. Крім того, функція $\frac{t^2}{(2\sigma t+\pi)^2}$ зростає при $t > 0$. Тому, коли $|t| \geqslant T_1(n,m)/\sigma$ (нагадаємо, що $T_1(n,m) > 1$)

$$|f(t)| \leqslant \exp\left\{ -\frac{\pi^2}{24A^2\sigma^2(2+\pi)^2} \right\} =: b,$$

і $0 < b < 1$. Тоді

$$I_2(n,m) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{T_1(n,m)/\sigma}^{T_2(n,m)/\sigma\sqrt{n}} |f(t)|^n \frac{dt}{t} \leqslant \frac{2\sigma}{\pi} b^{n-1} \int\limits_0^{\infty} |f(t)|dt = \frac{\sigma A}{\pi} b^{n-1}. \tag{2.10}$$

Накінець покажемо обмеженість $I_3(n,m)$. Відмітимо, що $I_3(n,m)$ не нульове, якщо $T_1(n,m)\sqrt{n} < T_2(n,m)$, тому

$$
\begin{aligned}
I_3(n,m) &\leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_{T_1(n,m)\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{t} \leqslant \frac{2}{\pi}\frac{e^{-\frac{nT_1^2(n,m)}{2}}}{nT_1^2(n,m)} \\
&\leqslant \frac{2(2e\nu_n(m))^n}{\pi n} \leqslant \frac{4e\nu_n(m)}{\pi n}(2e\nu_n(m))^{n-1} \leqslant \nu_n(m)\frac{4e\cdot e^{-\frac{n-1}{2}}}{\pi n} \\
&= \nu_n(m)\frac{4e^{\frac{3}{2}}}{\pi}\frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n}.
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

Відношення (2.7)-(2.11) завершують доведення теореми 2.1 .

Зауваження 2.1. Нехай виконуються наступні умови: $\mu_k = 0,\ k = 3,\dots,m$, $m \geqslant 3$. Тоді

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}}|\Phi_1(x)-\Phi(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}}|F(x\sigma)-\Phi(x)| \leqslant \\
&\leqslant \left(\frac{6}{\pi(m+1)!}+\frac{2}{\pi\sqrt{2\pi}}\right)\max\left(\nu_1(m),(\nu_1(m))^{\frac{1}{m+2}}\right).
\end{aligned}
$$

Справді, нехай $n = 1$. Твердження очевидне, коли $\nu_1(m) > 1$. Нехай $\nu_1(m) \leqslant 1$. Покладемо в (2.4) $T = (\nu_1(m))^{-\frac{1}{m+2}}$. Тоді з леми 2.1 випливає, що

$$
\begin{aligned}
\rho_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}}|\Phi_1(x)-\Phi(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}}|F(x\sigma)-\Phi(x)| \leqslant \\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_0^T\left(\frac{|t|^{m+1}}{(m+1)!}\nu_1^{(1)}(m)+\frac{2|t|^m}{m!}\nu_1^{(2)}(m)\right)\frac{dt}{t}+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T} \\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\left(\frac{T^{m+1}}{(m+1)\cdot(m+1)!}\nu_1^{(1)}(m)+\frac{2T^m}{m\cdot m!}\nu_1^{(2)}(m)\right)+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}}(\nu_1(m))^{\frac{1}{m+2}} \\
&\leqslant (\nu_1(m))^{\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2}{\pi}\frac{3}{(m+1)!}+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}}\right).
\end{aligned}
$$

Зауваження 2.2. Для будь-якого $n \geqslant 6$ та $m \geqslant 3$ $C_{m,n}^{(i)} < 2^{-\frac{3}{2}},\ i = 1,2$.

Справді, нехай $m = 2p, p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$. Почнемо з

$$
\begin{aligned}
C_{m,n}^{(1)}\sqrt{n} &= \frac{1}{2}\frac{12^{p-\frac{1}{2}}\Gamma(p+\frac{1}{2})}{n^{p-1}(2p+1)!} \leqslant \frac{1}{2}\frac{12^{p-\frac{1}{2}}}{n^{p-1}(p+1)^{p+1}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{12}{(p+1)n}\right)^{p-1}\frac{\sqrt{12}}{(p+1)^2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9}\left(\frac{12}{(p+1)n}\right)^{p-1} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9},\ n \geqslant 4.
\end{aligned}
$$

Нехай $m = 2p+1, p \in \mathbb{N}, p \geqslant 1$.

$$C^{(1)}_{m,n}\sqrt{n} = \frac{1}{2}\frac{12^p\Gamma(p+1)}{n^{p-\frac{1}{2}}(2p+2)!} \leqslant \frac{1}{2}\frac{12^p}{n^{p-\frac{1}{2}}(p+1)^{p+2}}$$
$$= \frac{\sqrt{12}}{2}\left(\frac{12}{(p+1)n}\right)^{p-\frac{1}{2}}\frac{1}{(p+1)^{2,5}} \leqslant \left(\frac{12}{(p+1)n}\right)^{p-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\ n \geqslant 6.$$

Інші значення отримуються аналогічно. Наприклад, нехай $m = 2p, p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$. Тоді

$$C^{(2)}_{m,n}\sqrt{n} = \frac{12^{p-1}\Gamma(p)}{n^{p-1}(2p)!} \leqslant \frac{12^{p-1}}{n^{p-1}p^{p+1}}$$
$$= \left(\frac{12}{np}\right)^{p-1}\frac{1}{p^2} \leqslant \frac{1}{4},\ n \geqslant 6.$$

Нехай $m = 2p+1, p \in \mathbb{N}, p \geqslant 1$.

$$C^{(2)}_{m,n}\sqrt{n} = \frac{12^{p-\frac{1}{2}}\Gamma(p+\frac{1}{2})}{n^{p-\frac{1}{2}}(2p+1)!} \leqslant \frac{12^{p-\frac{1}{2}}}{n^{p-\frac{1}{2}}(p+1)^{p+1}}$$
$$= \left(\frac{12}{n(p+1)}\right)^{p-\frac{1}{2}}\frac{1}{(p+1)^{3/2}} \leqslant \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}},\ n \geqslant 6.$$

Доведення наслідку 2.1 повністю аналогічне до доведення теореми 2.1. Застосуємо нерівність (2.9) й ще раз відзначимо, що функція $\frac{t^2}{(2\sigma t+\pi)^2}$ зростає при $t > 0$. Тому, коли $|t| \geqslant T_1(n,m)/\sigma$ (нагадаємо, що $T_1(n,m) > 1$)

$$|f(t)| \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{96A_1^2\sigma^2\left(2+\pi\right)^2}\right\} =: b_1,$$

і $0 < b_1 < 1$. З [39, с. 510] випливає, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt \leqslant 2\pi A_1$. Тому

$$I_2(n,m) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{T_1(n,m)/\sigma}^{T_2(n,m)/\sigma\sqrt{n}}|f\left(t\right)|^n\frac{dt}{t} \leqslant \frac{2\sigma}{\pi}b_1^{n-2}\int\limits_0^{\infty}|f(t)|^2dt = 2\sigma A_1 b_1^{n-2}.$$

Наслідок 2.1 доведено.

Зауваження 2.3. Для $n = 2$ ми можемо отримати оцінку аналогічну до оцінки із зауваження 2.1.

Доведення теореми 2.2. Як вже раніше зазначалося, з умови (i) випливає існування щільності випадкової величини ξ_k, тому випадкова величина S_n має щільність $p_n(x)$ і

$$p_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) dt.$$

Оскільки $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ є щільністю стандартного нормального закону, то $\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ і

$$\begin{aligned} |p_n(x) - \phi(x)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| dt. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} |p_n(x) - \phi(x)| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| \leqslant T_1(n,m)\sqrt{n}} \left| f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| > T_1(n,m)\sqrt{n}} \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right|^n dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| > T_1(n,m)\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{2.12}$$

З умов теореми, леми 2.1 та 2.2 та (2.5) ($n \geqslant 2$) отримуємо наступне: для $|t| \leqslant T_1(n,m)\sqrt{n}$ і $\nu_n(m) < \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| \leqslant T_1(n,m)\sqrt{n}} \left| f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| dt \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| \leqslant T_1(n,m)\sqrt{n}} \left(\frac{|t|^{m+1} \nu_n^{(1)}(m)}{(m+1)! n^{\frac{m-1}{2}}} + \frac{2|t|^m \nu_n^{(2)}(m)}{m! n^{\frac{m}{2}-1}} \right) e^{-\frac{t^2}{12}} dt \\ &\leqslant \frac{12^{\frac{m+2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{4\pi(m+1)!} \frac{\nu_n^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + \frac{2 \cdot 12^{\frac{m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{4\pi m!} \frac{\nu_n^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}} \\ &= C_m^{(3)} \frac{\nu_n^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + C_m^{(4)} \frac{\nu_n^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

З умов теоереми, аналогійчно до (2.10),

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|>T_1(n,m)\sqrt{n}} \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|^n dt$$
$$= \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi} \int\limits_{|z|>T_1(n,m)/\sigma} |f(z)|^n \, dz \leqslant b^{n-1}\frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi}A. \tag{2.14}$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|>T_1(n,m)\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{T_1(n,m)\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$
$$\leqslant \frac{e^{-\frac{nT_1^2(n,m)}{2}}}{2\pi\sqrt{n}T_1(n,m)} \leqslant \frac{(2e\nu_n(m))^n}{2\pi\sqrt{n}} \tag{2.15}$$
$$\leqslant \frac{e\nu_n(m)}{\pi\sqrt{n}} e^{-\frac{n-1}{2}} = \nu_n(m)\frac{e^{\frac{3}{2}}}{\pi}\frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

Відношення (2.12) - (2.15) завершують доведення теореми 2.2.

2.1.3. Приклади.

Приклад 2.1. Наведемо приклад застосування наслідку 2.1. Проведемо аналогічні міркування до міркувань викладених в [100, с. 375], де розглядався дискретний розподіл. Визначимо функцію розподілу $F(x)$ наступним чином

$$F(x) = \begin{cases} \Phi(x), \text{if } |x| \geqslant \epsilon; \\ \Phi(-\epsilon), \text{if } -\epsilon < x < -\theta\epsilon; \\ \Phi(\epsilon), \text{if } \theta\epsilon < x < \epsilon; \\ \frac{1}{2} + \frac{\Phi(\epsilon)-\frac{1}{2}}{\theta\epsilon}x, \text{if } |x| \leqslant \theta\epsilon, \end{cases}$$

де $0 < \epsilon < 1$, $0 < \theta < 1$ є розв'язком рівняння

$$\int\limits_0^{\epsilon} x^2 d\Phi(x) = \frac{(\theta\epsilon)^2}{3}\left(\Phi(\epsilon) - \frac{1}{2}\right). \tag{2.16}$$

Це рівняння має єдиний розв'язок тому, що $\int\limits_0^{\epsilon} x^2 d\Phi(x) \leqslant \frac{\epsilon^2}{3}\left(\Phi(\epsilon) - \frac{1}{2}\right)$. Справді, з одного боку

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 2!} - \frac{x^6}{2^3 3!} + \frac{x^8}{2^4 4!} - ...\right),$$

тому

$$\Phi(\epsilon)-\frac{1}{2}=\int\limits_0^{\epsilon}\varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\epsilon-\frac{\epsilon^3}{6}+\frac{\epsilon^5}{40}-\frac{\epsilon^7}{7\cdot 2^3 3!}+...\right).$$

Отже,

$$\Phi(\epsilon)-\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\epsilon-\frac{\epsilon^3}{6}\right).$$

З іншого боку

$$\int\limits_0^{\epsilon}x^2d\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\epsilon}\left(x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{2^2 2!}-\frac{x^8}{2^3 3!}+...\right)dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\epsilon^3}{3}-\frac{\epsilon^5}{10}+\frac{\epsilon^7}{7\cdot 2^2 2!}-\frac{\epsilon^9}{9\cdot 2^3 3!}+...\right)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\epsilon^3}{3}-\frac{\epsilon^5}{10}+\frac{\epsilon^7}{56}\right)$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\epsilon^3}{3}-\frac{\epsilon^5}{10}+\frac{\epsilon^5}{56}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\epsilon^3\left(\frac{1}{3}-\frac{23}{280}\epsilon^2\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\epsilon^3}{3}\left(1-\frac{69}{280}\epsilon^2\right)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\epsilon^3}{3}\left(1-\frac{\epsilon^2}{6}\right)\leqslant\frac{\epsilon^2}{3}\left(\Phi(\epsilon)-\frac{1}{2}\right),$$

і ми отримуємо, що

$$\int\limits_0^{\epsilon}x^2d\Phi(x)\leqslant\frac{\epsilon^2}{3}\left(\Phi(\epsilon)-\frac{1}{2}\right).$$

Очевидно, що функція щільності є обмеженою. Більше того, $F(x)$ – симетрична. Тому $\mu_1=0$, $\mu_3=0$. Отже, беручи до уваги (2.16), розглянемо

$$\sigma^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2dF(x)=\int\limits_{|x|\geqslant\epsilon}x^2d\Phi(x)+\int\limits_{-\theta\epsilon}^{\theta\epsilon}x^2\frac{\Phi(\epsilon)-\frac{1}{2}}{\theta\epsilon}dx=$$
$$=\int\limits_{|x|\geqslant\epsilon}x^2d\Phi(x)+\frac{\Phi(\epsilon)-\frac{1}{2}}{\theta\epsilon}\frac{2}{3}(\theta\epsilon)^3=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2d\Phi(x)=1.$$

Це означає, що $\mu_2=0$. Розглянемо тепер такі псевдомоменти:

$$\nu_4=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^4\left|d\left(F(x)-\Phi(x)\right)\right|=\int\limits_{-\epsilon}^{\epsilon}x^4\left|d\left(F(x)-\Phi(x)\right)\right|$$
$$\leqslant\epsilon^4\int\limits_{-\epsilon}^{\epsilon}\left|d\left(F(x)-\Phi(x)\right)\right|\leqslant\epsilon^4 4\left(\Phi(\epsilon)-\frac{1}{2}\right);$$

$$\nu_n^{(1)}(3) = \int\limits_{|x|\leqslant\sigma\sqrt{n}} x^4 \left|d\left(F(x) - \Phi(x)\right)\right| = \int\limits_{-\epsilon}^{\epsilon} x^4 \left|d\left(F(x) - \Phi(x)\right)\right|,$$

і ϵ вибиремо таким, щоб $\nu_4 \leqslant \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$ та $\nu_n^{(1)}(3) \leqslant \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$. Тоді

$$\nu_n^{(2)}(3) = \int\limits_{|x|>\sigma\sqrt{n}} |x|^3 \left|d\left(F(x) - \Phi(x)\right)\right| = 0.$$

Отже, умова (ii) теореми 2.1 виконується. Тому функція $F(x)$ задовольняє умови наслідку 2.1 при $m = 3$.

Приклад 2.2. Наведемо приклад ще однієї функції розподілу, яка задовольняє умови наслідку 2.1. Нехай $a > 0$, $\theta > 1$, і будемо вважати, що a фіксоване, а $\theta > 1$ ще треба визначити. Розглянемо симетричну функцію розподілу $F(x)$, яка для $x \geqslant 0$ дорівнює

$$F(x) = \begin{cases} \Phi(x), \text{якщо } x \in [0, a]; \\ \Phi(a) + \frac{1-\Phi(a)}{a\theta - a}(x - a), \text{якщо } a < x \leqslant \theta a; \\ 1, \text{якщо } x > \theta a. \end{cases}$$

Очевидно, що відповідна щільність обмежена. Оскільки функція $F(x)$ симетрична, то $\mu_1 = 0$ і $\mu_3 = 0$. Знайдемо μ_2. Для цього розглянемо величину

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}^2 &= \int\limits_{-a}^{a} x^2 d\Phi(x) + \int\limits_{a<|x|\leqslant a\theta} x^2 \frac{1-\Phi(a)}{a\theta - a} dx \\ &= 1 - 2\left(\int\limits_{a}^{\infty} x^2 d\Phi(x) - \frac{1-\Phi(a)}{a\theta - a} \frac{x^3}{3}\Big|_a^{a\theta}\right) \\ &= 1 - 2\left(\int\limits_{a}^{\infty} x^2 d\Phi(x) - (1 - \Phi(a))\frac{a^2}{3}(\theta^2 + \theta + 1)\right). \end{aligned}$$

Очевидно, що $\int\limits_a^\infty x^2 d\Phi(x) \geqslant a^2(1-\Phi(a))$. Покладемо $\gamma := \frac{\int_a^\infty x^2 d\Phi(x)}{a^2(1-\Phi(a))} > 1$. Звідси випливає, що існує $\theta > 1$ таке, що $\frac{1}{3}(\theta^2 + \theta + 1) = \gamma$, звідки знаходимо, що шукане θ дорівнює

$$\theta = -\frac{1}{2} + \sqrt{3\gamma - \frac{3}{4}}.$$

При цьому значенні θ

$$\int_a^\infty x^2 d\Phi(x) - (1-\Phi(a))\frac{a^2}{3}(\theta^2+\theta+1) = 0,$$

тому $\widetilde{\sigma}^2 = 1$, а це в свою чергу значить, що $\mu_2 = 0$. Дослідимо поведінку γ як функції від a. Для цього введемо позначення

$$y = \int_a^\infty x^2 d\Phi(x) - a^2(1-\Phi(a)),\ y \geqslant 0.$$

Знайдемо похідну:

$$y' = -a^2\varphi(a) - 2a(1-\Phi(a)) + a^2\varphi(a) = -2a(1-\Phi(a)) < 0,$$

де $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – щільність стандартного нормального розподілу. Отже, y спадаючи прямує до 0 при $a \to \infty$.

Більше того, застосовуючи правило Лопіталя, знайдемо наступну границю

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\int\limits_a^\infty x^2 d\Phi(x)}{a^2(1-\Phi(a))} = \lim_{a\to\infty} \frac{-a^2\varphi(a)}{2a(1-\Phi(a)) - a^2\varphi(a)} = 1,$$

оскільки

$$\lim_{a\to\infty} \frac{a(1-\Phi(a))}{a^2\varphi(a)} = \lim_{a\to\infty} \frac{(1-\Phi(a))}{a\varphi(a)}$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{-\varphi(a)}{\varphi(a) + a\varphi'(a)} = \lim_{a\to\infty} \frac{-e^{-\frac{a^2}{2}}}{e^{-\frac{a^2}{2}} - a^2 e^{-\frac{a^2}{2}}} = 0.$$

Отже, $\gamma \to 1$ при $a \to \infty$, тому $\theta = -\frac{1}{2} + \sqrt{3\gamma - \frac{3}{4}} \to 1$ при $a \to \infty$.

Розглянемо псевдомоменти

$$\nu_4 = \int_{-\infty}^\infty x^4 d\left|F(x) - \Phi(x)\right| = 2\int_0^\infty x^4 d\left|F(x) - \Phi(x)\right|$$

$$= 2\int_a^{a\theta} x^4 \left| \frac{1-\Phi(a)}{a(\theta-1)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| dx + 2\int_{a\theta}^\infty x^4 d\Phi(x)$$

$$\leqslant \frac{2}{5}\frac{1-\Phi(a)}{a(\theta-1)} a^5(\theta^5 - 1) + 2\int_a^\infty x^4 d\Phi(x) + \frac{2}{5}\varphi(a) a^5(\theta^5 - 1).$$

Отже, $\nu_4 \to 0$ при $a \to \infty$. Тим більше, для будь-якого $n \geqslant 1$

$$\nu_n^{(1)}(3,a) := \int\limits_{|x|\leqslant\sqrt{n}} x^4 \left|d\left(F(x) - \Phi(x)\right)\right| \to 0,\ a \to \infty.$$

Тому можна вибрати $a_0 > 0$ таким чином, щоб для всіх $n \geqslant 1$ виконувалась нерівність $\nu_n^{(1)}(3,a_0) < \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$. Очевидно, що

$$\nu_n^{(2)}(3,a_0) := \int\limits_{|x|>\sqrt{n}} |x|^3 \left|d\left(F(x) - \Phi(x)\right)\right| \to 0,\ n \to \infty.$$

З наведеного вище випливає, що $\nu_n(3,a_0) = \max\left\{\nu_n^{(1)}(3,a_0), \nu_n^{(2)}(3,a_0)\right\} < \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$, отже, виконана умова (ii) теореми 2.1, а в силу обмеженості щільності, функція розподілу $F(x)$ задовольняє умови наслідку 2.1 при $m = 3$ і $n \geqslant n_0$.

2.2. Швидкість збіжності цін опціонів з використанням методу псевдомоментів

2.2.1. Зображення та властивості фінансового ринку з дискретним часом та одним ризиковим активом. Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ – ймовірнісний простір. Розглянемо в схемі серій послідовність фінансових ринків з дискретним часом, з одним ризиковим та одним безризиковим активом, задану на цьому просторі. А саме, нехай $T > 0$ задано, параметр n приймає значення з $\mathbb{N}$, при кожному $n \geqslant 1$ маємо розбиття інтервалу часу $[0, T]$ виду $\pi(n) = \{0 = t_n^0 < t_n^1 < \ldots < t_n^n = T\}$, і точки розбиття будемо вважати моментами торгів на фінансовому ринку. Тепер, нехай $\{r_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ – сукупність невід'ємних чисел, яку будемо трактувати як послідовні відсоткові ставки, так що ціна безризикового активу в момент t_n^k має вигляд

$$B_n^k = \prod_{i=1}^{k}(1 + r_n^i). \tag{2.17}$$

Тепер, нехай на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ при кожному $n \geqslant 1$ задано сукупність випадкових величин $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$, щодо якої завжди будемо припускати виконаною умову обмеженості: існує $0 < c < 1$ таке, що всі $|R_n^k| \leqslant c, n \geqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n$. Введемо потік σ-алгебр $\mathcal{F}_n^k = \sigma\{R_n^i, i = 1, \cdots, k\}$, породжений цими випадковими величинами. Будемо вважати, що ціна ризикового активу в момент t_n^k має вигляд

$$S_n^k = S_n^0 \prod_{i=1}^{k} \left(1 + R_n^i\right). \tag{2.18}$$

Тоді дисконтований ризиковий актив в момент t_n^k має вигляд

$$X_n^k = S_n^0 \prod_{i=1}^{k} \frac{1 + R_n^i}{1 + r_n^i}.$$

Позначимо $\{\mathsf{P}_n, n \geqslant 1\}$ послідовність об'єктивних (фізичних) мір, що відповідає ризиковому ціновому процесу $\{S_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$. З'ясуємо умови безарбітражності фінансового ринку з дискретним часом в схемі серій. Як відомо, ринок в n-й серії буде безарбітражним тоді і тільки тоді, коли існує хоча б одна еквівалентна до P_n ймовірнісна міра P_n^*, відносно якої $\{X_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ буде $\{\mathcal{F}_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$-мартингалом, або скорочено $\mathcal{F}_n$-мартингалом. Далі, згідно, наприклад, з [40], всі можливі мартингальні міри P_n^* в n–й серії мають похідну Радона-Нікодима вигляду

$$\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{d\,\mathsf{P}_n} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \Delta M_n^k\right), \tag{2.19}$$

де $\left\{M_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\right\}$ – деякий $\mathcal{F}_n$-мартингал, $\Delta M_n^k > -1$. Наведемо одну просту достатню умову безарбітражності фінансового ринку в n-й серії.

Лема 2.3. *Фінансовий ринок* (2.17)–(2.18) *буде безарбітражним в n–й серії, якщо існує сукупність вимірних функцій $\{\varphi_n^k(x), x \in \mathbb{R}^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ така, що $|\varphi_n^k(x)| < \frac{1}{2}$, і мають місце рівності*

$$\begin{gathered}\mathsf{E}[R_n^k|\mathcal{F}_n^{k-1}] + \mathsf{E}[\varphi_n^k(R_n^1, \ldots, R_n^k)R_n^k|\mathcal{F}_n^{k-1}] - \\ \mathsf{E}[\varphi_n^k(R_n^1, \ldots, R_n^k)|\mathcal{F}_n^{k-1}]\,\mathsf{E}[R_n^k|\mathcal{F}_n^{k-1}] = r_n^k.\end{gathered} \tag{2.20}$$

Доведення. Запишемо три умови, які в сукупності еквівалентні тому, що міра P_n^* справді є ймовірнісною, $\mathsf{P}_n^* \sim \mathsf{P}_n$ і P_n^* є мартингальною мірою. Умова еквівалентності має вигляд

$$\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{d\,\mathsf{P}_n} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \Delta M_n^k\right) > 0 \tag{2.21}$$

м.н., умова мартингальності записується як

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*}\left[X_n^k | \mathcal{F}_n^{k-1}\right] = X_n^{k-1}, 1 \leqslant k \leqslant n,$$

м.н., і нарешті умова того, що P_n^* є ймовірнісною мірою, має вигляд

$$\mathsf{E}\left[\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{d\,\mathsf{P}_n}\right] = \mathsf{E}\left[\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \Delta M_n^k\right)\right] = 1. \tag{2.22}$$

Умову мартингальності перепишемо у вигляді

$$\frac{\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n}\left[\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{d\,\mathsf{P}_n} X_n^k | \mathcal{F}_n^{k-1}\right]}{\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n}\left[\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{d\,\mathsf{P}_n} | \mathcal{F}_n^{k-1}\right]} = X_n^{k-1},$$

і з урахуванням (2.19) вона зводиться до співвідношень

$$\mathsf{E}\left[\left(1 + \Delta M_n^k\right)\left(1 + R_n^k\right)|\mathcal{F}_n^{k-1}\right] = 1 + r_n^k,$$

або, що те саме,

$$\mathsf{E}\left[\Delta M_n^k + \left(1 + \Delta M_n^k\right) R_n^k | \mathcal{F}_n^{k-1}\right] = r_n^k.$$

Нарешті, з урахуванням того, що M_n є мартингалом, умову мартингальності можна спростити до рівнянь

$$\mathsf{E}\left[\left(1 + \Delta M_n^k\right) R_n^k | \mathcal{F}_n^{k-1}\right] = r_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{2.23}$$

Тепер, оскільки випадкова величина ΔM_n^k є вимірною відносно σ-алгебри $\mathcal{F}_n^k$, то ΔM_n^k подається у вигляді $\Delta M_n^k = \psi(R_n^i, i = 1, \cdots, k)$, де ψ – деяка вимірна функція. Але з урахуванням мартингальної властивості будемо шукати ΔM_k^n у вигляді:

$$\Delta M_k^n = \varphi_n^k(R_n^1, \ldots, R_n^k) - \mathsf{E}[\varphi_n^k(R_n^1, \ldots, R_n^k)|\mathcal{F}_n^{k-1}]. \tag{2.24}$$

Якщо при цьому припустити, що $|\varphi_n^k(x)| < \frac{1}{2}$, то одночасно будуть виконані властивості $(1+\Delta M_n^k) > -1$, тобто буде виконана умова (2.21), а тоді і умова (2.22), очевидно, має місце, а рівності (2.23) і (2.20) є еквівалентними. Лему доведено. $\square$

Зауваження 2.4. Очевидно, в загальному випадку перевірка умови (2.20) є досить нетривіальною задачею. В деяких випадках її можна спростити. Наприклад, спробуємо шукати ΔM_n^k у вигляді $\Delta M_n^k = \nu_n^k(R_n^1, \ldots, R_n^{k-1})(R_n^k - \mathsf{E}[R_n^k|\mathcal{F}_n^{k-1}])$, де $\nu_n^k = \nu_n^k(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$–вимірна функція, обмежена сталою $1/2c$. Тоді умови (2.21) і (2.22), очевидно, виконуються. Позначимо умовну варіацію $\mathrm{Var}_{k-1}(R_n^k) := \mathsf{E}[(R_n^k)^2|\mathcal{F}_n^{k-1}] - (\mathsf{E}[(R_n^k)^2|\mathcal{F}_n^{k-1}])^2$. Тоді рівність (2.20) зводиться до наступної:

$$\mathsf{E}[R_n^k|\mathcal{F}_n^{k-1}] + \nu_n^k(R_n^1, \ldots, R_n^{k-1}) \,\mathrm{Var}_{k-1}(R_n^k) = r_n^k.$$

Отже, за виконання умови

$$\left| \frac{r_n^k - \mathsf{E}[R_n^k|\mathcal{F}_n^{k-1}]}{\mathrm{Var}_{k-1}(R_n^k)} \right| \leqslant \frac{1}{2c}$$

ринок буде безарбітражним.

2.2.2. Безарбітражність ринку з дискретним часом, утвореного незалежними випадковими величинами. Нехай тепер в кожній серії випадкові величини $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ незалежні в сукупності і обмежені як і раніше: $|R_n^k| \leqslant c < 1$. Будемо шукати ΔM_n^k у вигляді (2.24), причому тепер $\mathsf{E}[\varphi_n^k(R_n^1, \ldots, R_n^k)|\mathcal{F}_n^{k-1}] = \mathsf{E}_k[\varphi_n^k(x_1, \ldots, x_{k-1}, R_n^k)]|_{x_1=R_n^1,\ldots,x_{k-1}=R_n^{k-1}}$, де математичне сподівання E_k береться відносно останньої випадкової величини, а потім підставляються попередні. Введемо наступне позначення для випадкової величини, що є коваріацією виду

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_k(\varphi_n^k, R_n^k) &:= \mathsf{E}_k[\varphi_n^k(x_1, \ldots, x_{k-1}, R_n^k) R_n^k]|_{x_1=R_n^1,\ldots,x_{k-1}=R_n^{k-1}} \\ &- \mathsf{E}_k[\varphi_n^k(x_1, \ldots, x_{k-1}, R_n^k)]|_{x_1=R_n^1,\ldots,x_{k-1}=R_n^{k-1}} \,\mathsf{E}\, R_n^k.\end{aligned}$$

Тоді умова (2.20) зводиться до наступної:

$$\mathsf{E}\, R_n^k + \mathrm{Cov}_k(\varphi_n^k, R_n^k) = r_n^k. \tag{2.25}$$

Знайти загальний вигляд функцій φ_n^k, для яких виконуються рівності (2.25), є досить складною задачею. Як добре відомо ситуація суттєво спрощується, якщо ринок є біноміальним. Нехай випадкова величина R_n^k приймає лише два значення a_n^k і b_n^k, $a_n^k < b_n^k$, з імовірностями $p_n^k > 0$ і $q_n^k > 0$, відповідно. В цьому випадку в n-й серії ринок буде безарбітражним тоді і тільки тоді, коли $a_n^k < r_n^k < b_n^k$, і при цьому єдина мартингальна міра визначається співвідношенням (2.19), в якому

$$\Delta M_n^k = \frac{r_n^k - \mu_n^k}{(\sigma_n^k)^2}(R_n^k - \mu_n^k), \tag{2.26}$$

де $\mu_n^k = \mathsf{E}\, R_n^k$, $(\sigma_n^k)^2 = \mathrm{Var}\, R_n^k$, тобто ринок є і повним. Тепер розглянемо випадок, коли випадкові величини R_n^k мають неперервний розподіл, зосереджений на деякому інтервалі $[a_n^k, b_n^k]$. Збережемо позначення $\mu_n^k = \mathsf{E}\, R_n^k$, $(\sigma_n^k)^2 = \mathrm{Var}\, R_n^k$.

Лема 2.4. *За умови, що випадкові величини $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ незалежні в сукупності і мають неперервний розподіл, зосереджений на деякому інтервалі $[a_n^k, b_n^k]$, фінансовий ринок в n-й серії буде безарбітражним, якщо виконується одна з трьох умов: або $r_n^k = \mu_n^k$, або $\mu_n^k - \frac{\left(\sigma_n^k\right)^2}{b_n^k - \mu_n^k} < r_n^k < \mu_n^k$, або $\mu_n^k < r_n^k < \mu_n^k + \frac{\left(\sigma_n^k\right)^2}{\mu_n^k - a_n^k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.*

Доведення. Будемо шукати ΔM_n^k у вигляді

$$\Delta M_n^k = \varphi_n^{k-1}\left(R_n^k - \mu_n^k\right),$$

де випадкова величина φ_n^{k-1} буде $\mathcal{F}_n^{k-1}$-вимірною. Оскільки φ_n^{k-1} і R_n^k при цьому будуть незалежними, співвідношення (2.25) зведеться до наступного:

$$\mu_n^k + \varphi_n^{k-1}(\sigma_n^k)^2 = r_n^k,$$

звідки дістаємо, що φ_n^{k-1} є невипадковою і дорівнює

$$\varphi_n^{k-1} = \frac{r_n^k - \mu_n^k}{(\sigma_n^k)^2},$$

тобто ΔM_n^k має вигляд (2.26). Безарбітражність ринку еквівалентна співвідношенню $\Delta M_n^k > -1$ м.н., або

$$(r_n^k - \mu_n^k)(R_n^k - \mu_n^k) + (\sigma_n^k)^2 > 0 \text{ м.н.} \tag{2.27}$$

Розглянемо три випадки.

(a) Якщо $r_n^k = \mu_n^k$, то співвідношення (2.27) виконується.

(b) Нехай $r_n^k > \mu_n^k$. Тоді (2.27) виконано м.н., якщо

$$(r_n^k - \mu_n^k)(a_n^k - \mu_n^k) + (\sigma_n^k)^2 > 0, \tag{2.28}$$

при чому $a_n^k < \mu_n^k$, оскільки розподіл R_n^k за припущенням неперервний і зосереджений на $[a_n^k, b_n^k]$. Тому нерівність (2.28) еквівалентна нерівності

$$r_n^k < \mu_n^k + \frac{(\sigma_n^k)^2}{\mu_n^k - a_n^k}.$$

(c) Випадок $r_n^k < \mu_n^k$ розглядається аналогічно.

Лему доведено. □

Неповноту ринку, породженого незалежними в сукупності випадковими величинами $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ з неперервним розподілом доведемо за додаткових умов, що спрощують ситуацію з технічної точки зору. Зауважимо, що наступні припущення є природними для моделі ринку в схемі серій.

Лема 2.5. *Нехай виконуються умови леми 2.4, а також умови: існують сталі* $0 < \alpha < \beta$ *такі, що* $\alpha < |a_n^k \sqrt{n}| < \beta$, $\alpha < |b_n^k \sqrt{n}| < \beta$, $\alpha < |\mu_n^k n| < \beta$ *та* $\alpha < |r_n^k n| < \beta$. *Тоді фінансовий ринок в* n*–й серії буде безарбітражним і неповним, якщо* $n > \frac{64\beta^8}{\alpha^8}$.

Доведення. Будемо шукати ΔM_n^k двома способами: так, як у лемі 2.4, і у вигляді

$$\Delta M_{n,1}^k = \psi_n^{k-1} \left((R_n^k)^3 - \mathsf{E}(R_n^k)^3 \right).$$

Позначимо $\mathrm{Var}_2\, R_n^k := \mathsf{E}(R_n^k)^4 - \mu_n^k\, \mathsf{E}(R_n^k)^3$. За припущень на розподіл R_n^k $\mathrm{Var}_2\, R_n^k > 0$ і $\psi_n^{k-1} = \frac{r_n^k - \mu_n^k}{\mathrm{Var}_2\, R_n^k}$. При цьому

$$\mathrm{Var}_2\, R_n^k > \frac{\alpha^4}{n^2} - \frac{\beta}{n}\frac{\beta^3}{n\sqrt{n}} > \frac{\alpha^4}{2n^2}, \text{ якщо } \frac{\beta^4}{n^2\sqrt{n}} < \frac{\alpha^4}{2n^2}, \text{ тобто для всіх } n > \frac{4\beta^8}{\alpha^8},$$

і

$$\left|\Delta M_{n,1}^k\right| = \frac{|r_n^k - \mu_n^k|}{\mathrm{Var}_2\, R_n^k}\left|(R_n^k)^3 - \mathsf{E}(R_n^k)^3\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\beta}{n}\frac{2\beta^3}{n\sqrt{n}}\frac{2n^2}{\alpha^2} < \frac{8\beta^4}{\alpha^4\sqrt{n}} < 1, \text{ якщо } n > \frac{64\beta^8}{\alpha^8}.$$

Отже, при $n > \frac{64\beta^8}{\alpha^8}$ ринок буде як безарбітражним, так і неповним, тому що існують принаймні дві мартингальні міри P_n^* та $P_n^{*,1}$, що задаються співвідношеннями

$$\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{d\,\mathsf{P}_n} = \prod_{k=1}^n (1 + \Delta M_n^k) \text{ та } \frac{d\,\mathsf{P}_n^{*,1}}{d\,\mathsf{P}_n} = \prod_{k=1}^n (1 + \Delta M_{n,1}^k),$$

відповідно. □

Переформулюємо лемму 2.4 для випадку однаково розподілених $\left\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\right\}$.

Лема 2.6. *За умови, що випадкові величини $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ однаково розподілені з $\mathsf{E}\,R_n^k = \mu_n, \mathrm{Var}\,R_n^k = \sigma_n^2$, незалежні в сукупності і мають неперервний розподіл, зосереджений на деякому інтервалі $[a_n, b_n]$, фінансовий ринок в n-й серії буде безарбітражним, якщо виконується одна з трьох умов: або $r_n = \mu_n$, або $\mu_n - \frac{(\sigma_n)^2}{b_n - \mu_n} < r_n < \mu_n$, або $\mu_n < r_n < \mu_n + \frac{(\sigma_n)^2}{\mu_n - a_n}$.*

Лема 2.7. *Якщо ринок задовольняє умови леми 2.4, то при виборі P_n^* згідно з (2.26) випадкові величини $\left\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\right\}$ будуть незалежні в сукупності і відносно міри P_n^*.*

Доведення. Справді для будь-яких борелевих множин $A_1, \cdots, A_n$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_n^*\left\{R_n^k \in A_k, 1 \leqslant k \leqslant n\right\} &= \mathsf{E}\left[\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{dP_n}\prod_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{R_n^k \in A_k\}}\right] \\ &= \mathsf{E}\left[\prod_{k=1}^n \left(\left(1 + \frac{r_n^k - \mu_n^k}{(\sigma_n^k)^2}\left(R_n^k - \mu_n^k\right)\right)\mathbb{1}_{\{R_n^k \in A_k\}}\right)\right] \\ &= \prod_{k=1}^n \mathsf{E}\left[\left(1 + \frac{r_n^k - \mu_n^k}{(\sigma_n^k)^2}\left(R_n^k - \mu_n^k\right)\right)\mathbb{1}_{\{R_n^k \in A_k\}}\right].\end{aligned} \tag{2.29}$$

Далі,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}_n^*\left\{R_n^k \in A_k\right\} &= \mathsf{E}\,\frac{d\,\mathsf{P}_n^*}{dP_n}\mathbb{1}_{\{R_n^k\in A_k\}} \\
&= \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \mathsf{E}\left[1+\frac{r_n^i-\mu_n^i}{(\sigma_n^i)^2}\left(R_n^i-\mu_n^i\right)\right] \\
&\times \mathsf{E}\left[\left(1+\frac{r_n^k-\mu_n^k}{(\sigma_n^k)^2}\left(R_n^k-\mu_n^k\right)\right)\mathbb{1}_{\{R_n^k\in A_k\}}\right] \\
&= \mathsf{E}\left[\left(1+\frac{r_n^k-\mu_n^k}{(\sigma_n^k)^2}\left(R_n^k-\mu_n^k\right)\right)\mathbb{1}_{\{R_n^k\in A_k\}}\right].
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Із (2.29) та (2.30) випливає, що

$$
\mathsf{P}_n^*\left\{R_n^k \in A_k, 1\leqslant k\leqslant n\right\} = \prod_{k=1}^{n}\mathsf{P}_n^*\left\{R_n^k\in A_k\right\},
$$

тобто справді $\left\{R_n^k, 1\leqslant k\leqslant n\right\}$ незалежні в сукупності відносно P_n^*. Далі, оскільки відносно P_n^* процес $X_n^k = S_0\prod_{k=1}^{n}\frac{1+R_n^k}{1+r_n^k}$ є мартингалом, то

$$
\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} X_n^k = S_n^0\prod_{i=1}^{k}\frac{1+R_n^i}{1+r_n^i} = S_n^0,
$$

звідки з очевидністю $\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} R_n^k = r_n^k$. □

Зауваження 2.5. Порівняємо розподіли R_n^k відносно P_n^* та P_n. Нехай випадкові величини $\left\{R_n^k, 1\leqslant k\leqslant n\right\}$ задовольняють умови леми 2.4, однаково розподілені і мають щільність $\{f_n(x), x\in\mathbb{R}\}$. Нехай також $r_n^k = r_n, 1\leqslant k\leqslant n$. Тоді для будь-якого $x\in\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}_n^*\left\{R_n^k\leqslant x\right\} &= \mathsf{E}_n\left[\left(1+\frac{r_n-\mu_n}{(\sigma_n)^2}\left(R_n^k-\mu_n\right)\right)\mathbb{1}_{\{R_n^k\leqslant x\}}\right] \\
&= \mathsf{P}_n\left\{R_n^k\leqslant x\right\} + \frac{r_n-\mu_n}{\sigma_n^2}\mathsf{E}_n\left[R_n^k\mathbb{1}_{\{R_n^k\leqslant x\}}\right] - \mathsf{P}_n\left\{R_n^k\leqslant x\right\}\frac{r_n\mu_n-\mu_n^2}{\sigma_n^2} \\
&= \frac{\mathsf{E}\,R_n^2 - r_n\mu_n}{\sigma_n^2}\mathsf{P}_n\left\{R_n^k\leqslant x\right\} + \frac{r_n-\mu_n}{\sigma_n^2}\mathsf{E}_n\left[R_n^k\mathbb{1}_{\{R_n^k\leqslant x\}}\right] \\
&= C_n^{(5)}\int_{-\infty}^{x} f(y)dy + C_n^{(6)}\int_{-\infty}^{x} yf(y)dy,
\end{aligned}
$$

$$
\text{де } C_n^{(5)} = \frac{\mathsf{E}\,R_n^2 - r_n\mu_n}{\sigma_n^2},\ C_n^{(6)} = \frac{r_n-\mu_n}{\sigma_n^2}.
$$

Тобто відносно P_n^* R_n мають щільність розподілу $f_n^*(x) = C_n^{(5)}f(x) + C_n^{(6)}xf(x)$.

2.2.3. Функціональна гранична теорема для ринку з дискретним часом. Доведемо функціональну граничну теорему для послідовності фінансових ринків з дискретним часом в схемі Блека–Шоулса. Розглянемо випадковий процес з дискретним часом

$$X_n(t) = S_n^0 \prod_{k=1}^{[nt]} \frac{1+R_n^k}{1+r_n^k}, t_n^k \leqslant t \leqslant t_n^{k+1},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

де $[a]$ –ціла частина числа a, $\prod_{k=1}^{0} = 1$. Нехай випадкові величини $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ задовольняють умови леми 2.4. З метою технічного спрощення, припустимо, що $S_n^0 = 1$. Нагадаємо, що відносно мартингальної міри P_n^*, заданої співвідношеннями (2.19) та (2.26), випадкові величини $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ незалежні в сукупності має місце рівність $\mathsf{E}_{P_n^*} R_n^k = r_n^k$. Оскільки граничну теорему буде сформульовано в термінах цієї мартингальної міри, то ще введемо позначення $(\sigma_n^{k,*})^2 = \mathrm{Var}_{P_n^*} R_n^k$.

Теорема 2.3. (i) *Нехай випадкові величини* $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ *задовольняють умови леми 2.4, причому*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n} r_n^k = 0,\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{[nt]} r_n^k = rt > 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{[nt]} (\sigma_n^{k,*})^2 = (\sigma^*)^2 t > 0, 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Тоді відносно мартингальних мір P_n^*, *заданих співвідношеннями* (2.21) *та* (2.26) *має місце слабка збіжність скінченновимірних розподілів:*

$$X_n(t) \xrightarrow{\mathrm{d}} \exp\{\sigma^* W_t - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2 t\}, 0 \leqslant t \leqslant T.$$

(ii) *Нехай виконуються умови пункту* (i), *і крім того, існує стала* $C > 0$ *така, що*

$$\sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} r_n^k \leqslant C(t_2 - t_1),\ \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} (\sigma_n^{k,*})^2 \leqslant C(t_2 - t_1)$$

для всіх $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$. *Тоді відносно мартингальних мір* P_n^*, *заданих співвідношеннями* (2.21) *та* (2.26) *має місце слабка збіжність мір, що відповідають випадковим процесам* X_n*:*

$$X_n(t) \xrightarrow{\mathrm{W}} \exp\{\sigma^* W_t - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2 t\}, 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Доведення. Не обмежуючи загальності і з метою технічного спрощення припустимо, що $T = 1$, а $t_n^k = \frac{k}{n}$.

(i) Доведемо слабку збіжність одновимірних розподілів, а слабка збіжність скінченновимірних розподілів, в силу незалежності випадкових величин, з використанням методу Крамера–Уолда, доводиться аналогічно. Для одновимірних розподілів має місце центральна гранична теорема. Дійсно, подамо для будь-якого фінансованого $0 \leqslant t \leqslant 1$ випадкову величину $\log X_n(t)$ у вигляді

$$\log X_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} \Big(\log\big(1 + R_n^k\big) - \log\big(1 + r_n^k\big) \Big). \tag{2.31}$$

Тепер, за формулою Тейлора, для деякої сталої $c > 0$

$$\log(1 + R_n^k) = R_n^k - \frac{1}{2}(R_n^k)^2 + \alpha(R_n^k) \cdot (R_n^k)^2, \tag{2.32}$$

де $|\alpha(R_n^k)| \leqslant \frac{c}{\sqrt{n}}$, а

$$\log(1 + r_n^k) = r_n^k - \frac{1}{2}(r_n^k)^2 + \beta(r_n^k)(r_n^k)^2,$$

де $\big|\beta(r_n^k)\big| \leqslant c|r_n^k|$. З урахуванням цих розкладів,

$$\begin{aligned} \log X_n(t) + \sum_{k=1}^{[nt]} \frac{(\sigma_n^{k,*})^2}{2} = \\ = \sum_{k=1}^{[nt]} \left(R_n^k - r_n^k + \frac{1}{2}(r_n^k)^2 - \frac{1}{2}(R_n^k)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_n^{k,*})^2 \right) \\ + \sum_{k=1}^{[nt]} \left(\alpha(R_n^k)(R_n^k)^2 + \beta(r_n^k) r_n^k\right). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Тепер, позначимо

$$\eta_n^k = R_n^k - r_n^k - \frac{1}{2}(R_n^k)^2 + \frac{1}{2}(r_n^k)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_n^{k,*})^2,$$

$$\overline{\eta}_n^k = \alpha(R_n^k)(R_n^k)^2 + \beta(r_n^k)(r_n^k)^2.$$

При цьому

$$\left|\sum_{k=1}^{[nt]} \left(\alpha(R_n^k)(R_n^k)^2 + \beta(r_n^k)(r_n^k)^2\right)\right| \leqslant [nt] \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{n}}\right)^3$$

$$+c \max_{1\leqslant k\leqslant n} (r_n^k)^2 \sum_{k=1}^{n} r_n^k \to 0, \text{ при } n \to \infty$$

м.н., тому ці величини не впливають на хід подальшого доведення. Далі,

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*}\, \eta_n^k = 0, \text{ а } \mathrm{Var}_{\mathsf{P}_n^*}\, \eta_n^k = (\sigma_n^{k,*})^2 + \delta_n^k, \text{ де } |\delta_n^k| \leqslant \frac{c}{n\sqrt{n}}.$$

Тепер з використанням умови (i), слабка збіжність $\log X_n(t)$ до $W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t$ випливає з центральної граничної теореми у формі Слуцького (див. [40]).

(ii) Тепер для доведення слабкої збіжності мір достатньо довести їх слабку компактність, для чого, в свою чергу достатньо довести, що існує така стала $C > 0$, що для всіх $n \geqslant n_0$ і $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1$ виконується співвідношення

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} \left|\log X_n(t_2) - \log X_n(t_1)\right|^2 \leqslant C(t_2 - t_1).$$

У нашому випадку, з урахуванням оцінок (2.29), розкладів (2.31)–(2.33) і властивостей залишкових членів маємо

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} \left|\log X_n(t_2) - \log X_n(t_1)\right|^2 = \mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} \left|\sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \eta_n^k + \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \overline{\eta}_n^k\right|^2$$

$$\leqslant 2\, \mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} \left|\sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \eta_n^k\right|^2 + C(t_2 - t_1)\left(\frac{1}{n} + \max_{1\leqslant k\leqslant n} (r_n^k)^2\right).$$

Тому далі достатньо оцінити $a_n(t_1, t_2) := \mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} \left|\sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \eta_n^k\right|^2$. Але

$$a_n(t_1, t_2) \leqslant 2 \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} \left(\eta_n^k\right)^2$$

$$\leqslant 2 \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \left((\sigma_n^{k,*})^2 + \delta_n^k\right) \leqslant 2C(t_2 - t_1) + \frac{2C(t_2 - t_1)}{\sqrt{n}},$$

звідки і випливає доведення. □

2.2.4. Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для однаково розподілених незалежних випадкових величин за методом псевдомоментів. Нехай виконуються умови теореми 2.3. Тоді, зокрема, в момент T має місце центральна гранична теорема, а саме:

$$X_n(T) \xrightarrow{\mathrm{W}} \exp\{\sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\}.$$

Ми використаємо в подальшому цей результат для оцінки швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу в дискретному часі до відповідних цін на граничному ринку з неперервним часом. Для отримання шуканої оцінки швидкості збіжності застосуємо результат із попереднього підрозділу, що стосується швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для однаково розподілених незалежних випадкових величин, одержаної за методом псевдомоментів.

Застосуємо наслідок 2.1 до випадкових величин, що мають обмежену щільність розподілу, зосереджену на обмеженому інтервалі, і покладемо $m = 3$. Одержимо наступний результат.

Лема 2.8. *Нехай випадкові величини* $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ *задовольняють умови наслідку 2.1, причому їхній розподіл зосереджено на деякому інтервалі* $[a, b]$. *Нехай для всіх* $n \geqslant n_0$ *виконується умова* $\nu_n^{(1)}(3) < \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$. *Тоді для всіх* $n > \left(\frac{16e^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) \vee n_0$ *маємо оцінку*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \Delta_n\Phi := \frac{3}{\pi}\frac{e^{-3/2}}{n} + \frac{2\sqrt{3}e^{-3/2}}{\sqrt{\pi}n^{3/2}} + 2A_1 b_1^{n-2} + \frac{2}{\pi}\frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n}. \quad (2.34)$$

Доведення. Зауважимо, що при $m = 3$

$$C_3^{(1)} = \frac{12^2\Gamma(2)}{\pi \cdot 4!} = \frac{6}{\pi},\ C_2^{(1)} = \frac{12^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi \cdot 3!} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}},\ \text{отже } C_3^2 = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}.$$

Оцінимо

$$\nu_n^{(1)}(3) = \int\limits_{|x|>\sigma\sqrt{n}} |x|^3 \, |dH(x)| \leqslant \int\limits_{|x|>\sigma\sqrt{n}} |x|^3 dF(x) + \int\limits_{|x|>\sigma\sqrt{n}} |x|^3 d\Phi(x).$$

Якщо $\sigma\sqrt{n} > |a| \vee |b|$, то $\int\limits_{|x|>\sigma\sqrt{n}} |x|^3 dF(x) = 0$. Тепер,

$$\int\limits_{|x|>\sigma\sqrt{n}} |x|^3 d\Phi(x) = 2\int\limits_{\sigma\sqrt{n}}^{\infty} x^3 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\sigma^2 n}^{\infty} y e^{-y} dy \leqslant \frac{4}{\sqrt{2\pi}} x e^{-x}$$

при $x = \sigma^2 n$. Оскільки $e^x > \frac{x^2}{2}$, то $\frac{4}{\sqrt{2\pi}} x e^{-x} \leqslant \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma^2 n} < \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}}$, якщо $n > \frac{16e^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}$. Тобто, для $n > \left(\frac{16e^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}\right) \vee n_0$ виконується умова (ii) Теореми 2.1, отже, має місце оцінка (2.1), яка з урахуванням одержаних значень коефіцієнтів, перетворюється на (2.34). □

Зауваження 2.6. Зауважимо, що асимптотично при $n \to \infty$ в правій частині (2.34) головну роль грає доданок $\frac{3}{\pi} \frac{e^{-3/2}}{n} = O(\frac{1}{n})$, а інші доданки мають менший порядок. Тому, з урахуванням нерівності $|\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |x - y|$ для подальших застосувань сформулюємо наступне твердження: якщо випадкові величини $\{\zeta_n^k, n \geqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ задовольняють наступну умову:

$$(A) \qquad n^{-1/2} \Sigma_{k=1}^n \zeta_n^k = n^{-1/2} \Sigma_{k=1}^n \xi_n^k + \frac{C_n}{n},$$

де випадкові величини ξ_n^k при кожному n задовольняють умови леми 2.8, а $|C_n| \leqslant C$ – обмежена числова послідовність.

Тоді

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathsf{P}\{n^{-1/2} \Sigma_{k=1}^n \zeta_n^k \leqslant x\} - \Phi(x)| \leqslant \Delta_n^{(1)} \Phi := \frac{3}{\pi} \frac{e^{-3/2}}{n}$$
$$+ \frac{C}{\sqrt{2\pi} n} + \frac{2\sqrt{3} e^{-3/2}}{\sqrt{\pi} n^{3/2}} + 2A_1 b_1^{n-2} + \frac{2}{\pi} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n}.$$

Тепер наведемо умови на випадкові величини $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$, що забезпечать виконання для цін активів на фінансових ринках з дискретним часом умови (A). Спочатку доведемо такий допоміжний результат. Через C будемо позначати сталу, що може змінюватись від рядка до рядка і чиє значення не є важливим.

Лема 2.9. *Нехай відсоткова ставка в кожній серії є рівномірною:* $r_n^k = \frac{r}{n}$. *Нехай також випадкові величини* $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ *задовольняють умови* *леми 2.6 і додаткову умову*

$$\left|\frac{r}{n}-\mu_n\right| \leqslant C\sigma_n^2\ ,\left|\mathsf{E}(R_n^k)^3\right| \leqslant \frac{C}{n^2},\ \text{та}\ |\,\mathsf{E}(R_n^k)^4-\mu_n\,\mathsf{E}(R_n^k)^3| \leqslant \frac{C}{n^2}.$$

Тоді для моменту третього порядку відносно мартингальної міри, заданої співвідношеннями (2.21) *та* (2.26), *має місце оцінка*

$$\left|E_{\mathsf{P}_n^*}(R_n^k)^3\right| \leqslant \frac{C}{n^2}.$$

Доведення. Оскільки $|\mu_n| \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}$, то мають місце такі співвідношення та оцінки

$$\begin{aligned}\left|E_{\mathsf{P}_n^*}(R_n^k)^3\right| &= \left|\mathsf{E}\left(1+\Delta M_n^k\right)(R_n^k)^3\right| \\ &= \left|\mathsf{E}(R_n^k)^3+\frac{\frac{r}{n}-\mu_n}{\sigma_n^2}\,\mathsf{E}\left[(R_n^k)^4-\mathsf{E}\,R_n^k\,\mathsf{E}(R_n^k)^3\right]\right| \\ &\leqslant \left|\mathsf{E}(R_n^k)^3\right|+C|\,\mathsf{E}(R_n^k)^4-\mu_n\,\mathsf{E}(R_n^k)^3| \leqslant \frac{C}{n^2}+\frac{C}{n^2} \leqslant \frac{C}{n^2}.\end{aligned}$$

□

В умовах леми 2.9 позначимо $(\sigma_n^*)^2 = \mathrm{Var}_{\mathsf{P}_n^*}(R_n^k)$.

Теорема 2.4. *Нехай випадкові величини*

$$\xi_n^k = \sqrt{n}\left(R_n^k-\frac{1}{2}(R_n^k)^2+\frac{1}{3}(R_n^k)^3-\frac{1}{3}\,\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*}(R_n^k)^3-\frac{r}{n}+\frac{1}{2}\frac{r^2}{n^2}+\frac{(\sigma_n^*)^2}{2}\right)$$

задовольняють умови леми 2.8 і виконуються умови леми 2.9, причому $|n(\sigma_n^*)^2-(\sigma^*)^2| \leqslant \frac{C}{n}$. *Тоді*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left\{\log X_n(T)+\frac{1}{2}n(\sigma_n^*)^2 \leqslant x\right\}-\Phi\left(\frac{x}{\sigma^*\sqrt{T}}\right)\right| \leqslant \frac{C}{n}.$$

Доведення. Як і в доведенні теореми 2.3, не обмежуючи загальності і з метою технічного спрощення припустимо, що $T=1$, а $t_n^k=\frac{k}{n}$. Позначимо

$$\frac{\zeta_n^k}{\sqrt{n}} = R_n^k-\frac{1}{2}(R_n^k)^2+\frac{1}{3}(R_n^k)^3+\alpha\left(\frac{C}{\sqrt{n}}\right)(R_n^k)^3-\frac{r}{n}+\frac{r^2}{2n^2}+\beta\left(\frac{C}{n}\right)\frac{r^2}{n^2}+\frac{(\sigma_n^*)^2}{2}.$$

У випадку рівномірної відсоткової ставки дисконтований ціновий процес набуває спрощеного вигляду

$$X_n(1) = \prod_{k=1}^n\frac{1+R_n^k}{1+r_n^k} = \prod_{k=1}^n\frac{1+R_n^k}{1+\frac{r}{n}} = \left(1+\frac{r}{n}\right)^{-n}\prod_{k=1}^n(1+R_n^k).$$

З урахуванням введеного позначення розклад Тейлора для випадкової величини $\log X_n(1) + \frac{n(\sigma_n^*)^2}{2}$ набуває вигляду

$$\log X_n(1) + \frac{n(\sigma_n^*)^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{\zeta_n^k}{\sqrt{n}},$$

причому $\sum\limits_{k=1}^n \left|\alpha\left(\frac{C}{\sqrt{n}}\right)\right| |R_n^k|^3 \leqslant \frac{C}{n}$ і $\sum\limits_{k=1}^n \left|\beta\left(\frac{C}{n}\right)\right| \frac{r^2}{n^2} \leqslant \frac{C}{n^2}$. Якщо виконуються умови леми 2.9, то розклад Тейлора приймає вигляд

$$\log X_n(1) + \frac{n(\sigma_n^*)^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{\xi_n^k}{\sqrt{n}} + S_n,$$

де $S_n \leqslant \frac{C}{n}$. При цьому $\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} \xi_n^k = 0$, і $\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} (\xi_n^k)^2 = n(\operatorname{Var}_{\mathsf{P}_n^*} R_n^k + \frac{C_n}{n^2}) = \frac{(\sigma^*)^2}{2} + \frac{C_n}{n}$, де $|C_n| \leqslant C$. Отже, ζ_n^k задовольняють умову (A), звідки випливає доведення. $\square$

2.2.5. Оцінка швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу. Розглянемо європейські опціони купівлі та продажу $C = (S_T - K)^+$ та $P = (K - S_T)^+$. Нехай вони розглядаються на фінансових ринках з дискретним часом, заданих формулами (2.17) і (2.18), причому в кожній серії $r_n^k = \frac{r}{n}$, де $r > 0$ – деяке число, випадкові величини $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ незалежні, однаково розподілені і задовольняють умови леми 2.6, тобто ринок є безарбітражним. Зафіксуємо мартингальну міру P_n^*, задану співвідношеннями (2.19) та (2.26), відносно якої, як було доведено в лемі 2.7, зберігається незалежність випадкових величин $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ і $\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n^*} R_n^k = \frac{r}{n}$. Позначимо

$$Q_n^k = \frac{1 + R_n^k}{1 + \frac{rT}{n}},\ Y_n^k = \sqrt{n}\left(\log Q_n^k + \frac{(\sigma_n^*)^2 T}{2}\right), \tag{2.35}$$

та $\widetilde{\Phi}_n$ функцію розподілу суми $n^{-1/2}\sum_{k=1}^n Y_n^k$. Наступний результат є очевидним наслідком теореми 2.4.

Лема 2.10. *Нехай послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ задовольняє умови теореми 2.4. Тоді*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\widetilde{\Phi}_n(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma^*\sqrt{T}}\right)\right| \leqslant \frac{C}{n}. \tag{2.36}$$

Розглянемо опціони купівлі $\mathbb{C} = (S - K)^+$ та продажу $\mathbb{P} = (K - S)^+$ на актив S і зі страйковою ціною K. Розглянемо дограничні ринки в умовах леми 2.6 і граничний ринок Блека–Шоулса. Позначимо через

$$\pi(\mathbb{C}_n) = \mathsf{E}_{P_n^*}\left(X_n(T) - K\left(1 + \frac{rT}{n}\right)^{-n}\right)^+$$

дисконтовану справедливу ціну опціона купівлі в дограничній моделі відносно мартингальної міри заданої рівностями (2.19) та (2.26), і через $\pi(\mathbb{C})$ ціну Блека-Шоулса на опціон купівлі в момент T, зі страйковою ціною K, відсотковою ставкою r і дисперсією $(\sigma^*)^2$, а також відповідні ціни $\pi(\mathbb{P}_n)$ та $\pi(\mathbb{P})$ опціонів продажу.

Теорема 2.5. *Нехай послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин* $\{R_n^k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ *задовольняє умови теореми 2.4. Тоді*

$$|\pi(\mathbb{C}_n) - \pi(\mathbb{C})| + |\pi(\mathbb{P}_n) - \pi(\mathbb{P})| \leqslant \frac{C}{n}.$$

Доведення. Нехай як завжди в доведеннях, $T = 1$. Розглянемо опціон продажу, а із співвідношень паритету для дограничних і граничних опціонів

$$\pi(\mathbb{C}_n) = \pi(\mathbb{P}_n) + S_n^0 - K\left(1 + \frac{rT}{n}\right)^{-n} \text{ та } \pi(\mathbb{C}) = \pi(\mathbb{P}) + S^0 - Ke^{-rT}$$

випливає, що для опціону купівлі оцінка міститиме аналогічну швидкість збіжності. Запишемо наступні рівності, з урахуванням позначень (2.35), теореми 2.4, результату інтегрування по частинах, формули Блека-Шоулса, записаної для моменту часу, що дорівнює 1, а також очевидної нерівності $\left|e^{-r} - \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-n}\right| \leqslant \frac{C}{n}$:

$$\begin{aligned}\Big|\pi(\mathbb{P}_n) - \pi(\mathbb{P})\Big| &= \Big|\,\mathsf{E}_{P_n^*}\left[\left(X_n(1) - K\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-n}\right)^+\right] - \pi(\mathbb{P}\}\Big| \\ &= \Big|\,\mathsf{E}_{P_n^*}\left[\left(K\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-n} - \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} Q_n^k\right)\right] - \pi(\mathbb{P})\Big|\end{aligned}$$

$$= \Big| \int\limits_0^{K\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-n}} \mathsf{P}_n^*\Big\{ \prod_{1\leqslant k\leqslant n} Q_n^k \leqslant y\Big\} dy - \int\limits_0^{Ke^{-r}} \Phi\Big(\frac{\log y + \frac{1}{2}(\sigma^*)^2}{\sigma^*}\Big) dy\Big|$$

$$\leqslant \int\limits_0^{Ke^{-r}} \Big| \mathsf{P}_n^*\Big\{ \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \Big(\log Q_n^k + \frac{(\sigma_n^*)^2}{2}\Big) \leqslant \log y + \frac{1}{2} n (\sigma_n^*)^2 \Big\}$$

$$-\Phi\Big(\frac{\log y + \frac{1}{2}(\sigma^*)^2}{\sigma^*}\Big)\Big| dy + \frac{C}{n} \leqslant \frac{C}{n},$$

звідки і випливає доведення. □

Зауваження 2.7. Очевидно, що ключовим моментом в доведенні теореми 2.5 є оцінка (2.36). Тому теорема 2.5 є вірною за виконання цієї нерівності, незалежно від того чи використовується для її перевірки метод псевдомоментів який може дати таку швидкість збіжності чи інший. Але навіть за умови підвищення швидкості збіжності в оцінці (2.36) доведення теореми 2.5 спирається на додаткові оцінки, які мають очевидну швидкість порядку $1/n$, тому досягти підвищення швидкості збіжності цін опціонів в даній моделі здається неможливим.

Висновки до розділу 2

Ми встановили швидкість збіжності розподілів сум незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального закону розподілу в термінах зрізаних псевдомоментів. Реалізвували ідею Ю. Студнєва для отримання оцінки швидкодкості збіжності порядку вище, ніж $n^{-\frac{1}{2}}$. Знайшли вигляд функцій розподілу, до яких можна застосувати отриманий результат. Розглянули послідовність фінансових ринків з дискретним часом в схемі серій та дослідили швидкість збіжності цін опціонів купівлі та продажу при слабкій збіжності цін ризикових активів в моделі з дискретним часом до моделі Блека-Шоулса. Встановили порядок швидкості збіжності $O(n^{-1})$, де n – кількість періодів для проведення торгів на фіксованому інтервалі часу в дограничній моделі. Для отримання такої оцінки швидкості збіжності застосовували отриманий результат, щодо швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для однаково розподілених випадкових величин, одержаної за методом псевдомоментів.

РОЗДІЛ 3
ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ЦІН ОПЦІОНІВ ПРИ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНОГО ПРОЦЕСУ ОРНШТЕЙНА-УЛЕНБЕКА БЕРНУЛЛІЄВСЬКИМИ СТРИБКАМИ ЦІН АКЦІЙ

У даному розділі розглядається наступний підхід до оцінки швидкості збіжності цін опціонів. Наводиться гранична модель цін активів, змодельованих геометричним процесом Орнштейна-Уленбека та опис і властивості допограничного дискретного цінового процесу. Розглядається дискретна апроксимаційна схема для процесу Орнштейна-Уленбека, яка базується на апроксимації Ейлера, але прирости вінерівського процесу замінюються на бернуллієвські незалежні однаково розподілені випадкові величини. Сформульовано умови, за виконання яких швидкість збіжності об'єктивних і справедливих цін опціонів обмежена зверху величиною $\frac{C}{\sqrt{n}}$. Проаналізовано перехід від об'єктивної міри до мартингальної і зміни, що відбуваються з розподілом цін на ринку при такому переході у вказаній моделі.

Результати даного розділу надруковані в статті [8] та апробовані на конференції [12].

3.1. Опис і властивості граничного неперервного цінового процесу

Нехай $T > 0$, $\mathbb{T} = [0, T]$ і $\Omega_{\mathcal{F}} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}), \mathsf{P})$ – повний стандартний стохастичний базис. Нехай $W = \{W_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ – адаптований вінерівський процес. Розглянемо адаптований процес Орнштейна-Уленбека $X = \{X_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ зі сталими параметрами на цьому стохастичному базисі. Такий процес Орнштейна-Уленбека є єдиним розв'язком наступного стохастичного диференціального рівняння

$$dX_t = (\mu - X_t)dt + \sigma dW_t,\ X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{T}, \tag{3.1}$$

де $\mu \in \mathbb{R}$ і $\sigma > 0$. Явна формула для X має вигляд

$$X_t = x_0 e^{-t} + \mu(1 - e^{-t}) + \sigma e^{-t} \int_0^t e^s dW_s.$$

Нарешті, припустимо, що ціна активу S_t задовольняє рівність

$$S_t = \exp\left\{X_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right\},\ t \in \mathbb{T}, \tag{3.2}$$

де невипадкова величина $-\frac{\sigma^2}{2}t$ додається з огляду на технічну простоту. В [70] було доведено, що ринок з облігацією $B_t = e^{rt}$ і акцією S_t є безарбітражним і повним. Більше того, єдина ймовірнісна міра $\mathsf{P}^* \sim \mathsf{P}$ така, що відносно P^* $Z_t := \frac{S_t}{B_t}$ є $\mathcal{F}_t$-мартингалом, має похідну Радона-Нікодима у вигляді $\left.\frac{d\,\mathsf{P}^*}{d\,\mathsf{P}}\right|_T$, де

$$\left.\frac{d\,\mathsf{P}^*}{d\,\mathsf{P}}\right|_t = \exp\left\{-\int_0^t \frac{\mu - r - X_s}{\sigma} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{(\mu - r - X_s)^2}{\sigma^2} ds\right\},$$

і відносно P^* процес Z_t має вигляд $Z_t = \exp\left\{x_0 + \sigma\widetilde{W}_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right\}$ з деяким вінерівським процесом $\widetilde{W}$.

3.2. Опис і властивості дограничного дискретного цінового процесу

Побудуємо дискретну схему, яка слабко збігається до геометричного процесу Орнштейна-Уленбека (3.2). Спочатку розглянемо наступну дискретну апроксимаційну схему для самого процесу Орнштейна-Уленбека, яка базується на апроксимації Ейлера розв'язку стохастичного диференціального рівняння (3.1), але прирости вінерівського процесу замінимо на бернуллієвські незалежні однаково розподілені випадкові величини. А саме, припустимо, що ми маємо послідовність ймовірнісних просторів $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathsf{P}_n)$, $n \geqslant 1$ і нехай

$\left\{q_k^{(n)}, n \geqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин таких, що $q_k^{(n)} = \pm\sqrt{\frac{T}{n}}$ з ймовірністю $\frac{1}{2}$.

Нехай $n > T$. Введемо рекурентну схему:

$$x_0^{(n)} \in \mathbb{R},\ R_k^{(n)} := x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)} = \frac{(\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{n} + \sigma q_k^{(n)},\ 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{3.3}$$

Нехай $\mathcal{F}_0^n = \{\varnothing, \Omega\}$ і $\mathcal{F}_k^n = \sigma\left\{R_i^{(n)}, 1 \leqslant i \leqslant k\right\}$. Позначимо

$$X_t^n = x_0^{(n)} \mathbb{1}_{\left\{t<\frac{T}{n}\right\}} + \left(x_0^{(n)} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{tn}{T}\right]} R_k^{(n)}\right) \mathbb{1}_{\left\{t \geqslant \frac{T}{n}\right\}} = x_{\left[\frac{tn}{T}\right]}^{(n)}.$$

Далі всюди $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{tn}{T}\right]} = 0$ та $\prod\limits_{1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{tn}{T}\right]} = 1$ при $t < \frac{T}{n}$. Побудуємо відповідну мультиплікативну схему для дограничного цінового процесу наступним чином

$$S_t^n = \exp\left\{x_0^{(n)}\right\} \prod_{1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{tn}{T}\right]} \left(1 + R_k^{(n)}\right),\ t \in \mathbb{T}. \tag{3.4}$$

В статті [68] доведено такі результати для схеми (3.3) – (3.4).

Лема 3.1. *Нехай послідовність $x_0^{(n)}$ обмежена. Тоді:*

(i) *Існує таке число $n_0 \in \mathbb{N}$ і стала $C > 0$ не залежна від n така, що для будь-якого $n > n_0$ і для будь-якого $1 \leqslant k \leqslant n$ має місце оцінка $|R_k^{(n)}| \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}} < 1$.*

(ii) *Існує стала $C > 0$, не залежна від n і така, що $\mathsf{E}(x_k^{(n)})^4 \leqslant C$ для $n > T$ і $1 \leqslant k \leqslant n$.*

Як було показано в [70], у випадку, коли $q_k^{(n)}$ має розподіл Бернуллі, ринок з облігацією $B_t^n = \prod_{1 \leqslant k \leqslant [\frac{nt}{T}]} \left(1 + r_k^{(n)}\right)$, і акцією S_t^n з (3.4) є безарбітражним і повним за додаткового припущення $r_k^{(n)} = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$ і $|x_0^{(n)}| \leqslant C$. Крім того, було встановлено, що існує єдина еквівалентна мартингальна міра $\mathsf{P}^{n,*} \sim \mathsf{P}^n$, яка має похідну Радона-Нікодима

$$\frac{d\,\mathsf{P}^{n,*}}{d\,\mathsf{P}^n} = \prod_{k=1}^{n} (1 + \rho_{k-1}^{(n)} q_k^{(n)}), \tag{3.5}$$

де випадкові величини $\rho_{k-1}^{(n)}$ мають вигляд

$$\rho_{k-1}^{(n)} = \frac{nr_k^{(n)} - \left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right)T}{\sigma T}, \tag{3.6}$$

причому

$$x_k^{(n)} - \mu = (x_0^{(n)} - \mu)\left(1 - \frac{T}{n}\right)^k + \sigma \sum_{i=1}^{k} q_i^{(n)} \left(1 - \frac{T}{n}\right)^{k-i}. \tag{3.7}$$

Сформулюємо відповідний результат як теорему.

Теорема 3.1. *Нехай* $\left\{q_k^{(n)}, n \geqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$ *– послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин таких, що* $q_k^{(n)} = \pm\sqrt{\frac{T}{n}}$ *з ймовірністю* $\frac{1}{2}$ *і* $r_k^{(n)} = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$, $|x_0^{(n)}| \leqslant C$. *Тоді ринок* (B_t^n, S_t^n) *асимптотично безарбітражний, що означає, що існує таке* $n_0 \in \mathbb{N}$, *що* (B_t^n, S_t^n) *є безарбітражним для будь-якого* $n \geqslant n_0$. *Для таких* $n \geqslant n_0$ *ринок* (B_t^n, S_t^n) *є повним і єдина еквівалентна мартингальна міра* $\mathsf{P}^{n,*}$ *має похідну Радона-Нікодима у вигляді* (3.5)–(3.6).

Тепер встановимо, що $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} (R_k^{(n)})^2 \to \sigma^2 T$ в $L_2(\mathsf{P})$, разом зі швидкістю збіжності.

Лема 3.2. *Для* $n > T$

$$\mathsf{E}\left[\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} (R_k^{(n)})^2 - \sigma^2 T\Big)^2\right] \leqslant \frac{C}{n^2}.$$

Доведення. Почнемо з наступного очевидного перетворення, з урахуванням рівності $\left(q_k^{(n)}\right)^2 = \frac{T}{n}$:

$$\Sigma_n := \mathsf{E}\left[\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^2 - \sigma^2 T\Big)^2\right]$$

$$= \mathsf{E}\left[\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\Big(\frac{(\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{n} + \sigma q_k^{(n)}\Big)^2 - \sigma^2 T\Big)^2\right]$$

$$= \mathsf{E}\left[\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\Big(\frac{(\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{n}\Big)^2 + 2\sigma\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{(\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{n}q_k^{(n)}\right.$$

$$\left. + \sigma^2\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(q_k^{(n)})^2 - \sigma^2 T\Big)^2\right]$$

$$= \mathsf{E}\left[\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\Big(\frac{(\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{n}\Big)^2 + 2\sigma\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{(\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{n}q_k^{(n)}\Big)^2\right]$$

$$\leqslant 3\,\mathsf{E}\left[\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\Big(\frac{(\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{n}\Big)^2\Big)^2\right] + 12\sigma^2\,\mathsf{E}\left[\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{(\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{n}q_k^{(n)}\Big)^2\right],$$

Беручи до уваги лему 3.1 і елементарну нерівність $\Big(\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k\Big)^2 \leqslant n\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k^2$, отримаємо

$$\mathsf{E}\left[\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\Big(\frac{(\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{n}\Big)^2\Big)^2\right] \leqslant n\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\mathsf{E}\left[\Big(\frac{(\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{n}\Big)^4\right] \leqslant Cn^2n^{-4} \leqslant \frac{C}{n^2}.$$

Далі, нагадаємо, що $q_k^{(n)}$ незалежні. Відзначимо, що очевидним наслідком леми 3.1 є нерівність $\mathsf{E}(\mu - x_{k-1}^{(n)})^2 \leqslant C$, і отримаємо

$$\mathsf{E}\left[\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{(\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{n}q_k^{(n)}\Big)^2\right] = \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\mathsf{E}\left[\Big(\frac{(\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{n}q_k^{(n)}\Big)^2\right] =$$

$$= \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\mathsf{E}\left[\Big(\frac{(\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{n}\Big)^2\right]\mathsf{E}\left[\Big(q_k^{(n)}\Big)^2\right] \leqslant Cnn^{-3} \leqslant Cn^{-2}.$$

Лему доведено. $\square$

3.3. Основна теорема про швидкість збіжності об'єктивних цін опціонів в схемі Бернуллі

Позначимо через $\mathbb{C}_n$ і $\mathbb{C}$ стандартний опціон купівлі, $\mathbb{P}_n$ і $\mathbb{P}$ – стандартний опціон продажу з ціною погашення $K \geqslant 0$ і датою погашення T, на дограничних і граничних активах, відповідно. Позначимо відповідні дисконтовані об'єктивні ціни через $\pi(\mathbb{C}_n)$, $\pi(\mathbb{C})$, $\pi(\mathbb{P}_n)$ і $\pi(\mathbb{P})$, і справедливі ціни – $\pi^*(\mathbb{C}_n)$, $\pi^*(\mathbb{C})$, $\pi^*(\mathbb{P}_n)$ і $\pi^*(\mathbb{P})$. Для технічної простоти, припустимо, що ціна облігації для дограничної моделі дорівнює $B_t^{(n)} = (1+\frac{rT}{n})^{[\frac{tn}{T}]}$ і гранична ціна облігації дорівнює $B_t = e^{rt}$. Маємо наступні співвідношення:

$$\pi(\mathbb{C}_n) = \mathsf{E}\left[\Big(\prod_{1\leqslant k\leqslant n}\Big(1+R_k^{(n)}\Big) - K\Big)^+\Big(1+\frac{rT}{n}\Big)^{-n}\right], n \geqslant 1,$$
$$\pi(\mathbb{C}) = \mathsf{E}\left[\Big(\exp\Big\{X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\Big\} - K\Big)^+ e^{-rT}\right],$$
$$\pi(\mathbb{P}_n) = \mathsf{E}\left[\Big(K - \prod_{1\leqslant k\leqslant n}\Big(1+R_k^{(n)}\Big)\Big)^+\Big(1+\frac{rT}{n}\Big)^{-n}\right], n \geqslant 1,$$
$$\pi(\mathbb{P}) = \mathsf{E}\left[\Big(K - \exp\Big\{X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\Big\}\Big)^+ e^{-rT}\right].$$

Теорема 3.2. *Нехай виконуються наступні умови:*

(i) $|x_0^{(n)} - x_0| \leqslant \frac{C_0}{n^{1/2}}$ *з деякою сталою* $C_0 > 0$*;*

(ii) *Незалежні однаково розподілені випадкові величини* $q_k^{(n)}$ *приймають значення* $\pm\sqrt{\frac{T}{n}}$ *з імовірністю* $\frac{1}{2}$.

Тоді, починаючи з деякого $n_0 \in \mathbb{N}$, *має місце наступна оцінка*

$$|\pi(\mathbb{D}) - \pi(\mathbb{D}_n)| \leqslant \frac{C_1}{n^{1/2}} \tag{3.8}$$

для деякого $C_1 > 0$ *і* $\mathbb{D} = \mathbb{C}, \mathbb{P}$.

Доведення. Розглянемо тільки опціони продажу, оскільки їхня функція виплат є обмеженою, а тоді доведення для опціонів купівлі випливатиме зі співвідношення пут-колл паритету. З метою технічного спрощення припустимо, що $x_0^{(n)} = x_0 = 1$. Тоді нам потрібно оцінити зверху таку різницю цін:

$$|\pi(\mathbb{P}) - \pi(\mathbb{P}_n)| = \left| \mathsf{E}\left[\left(K - \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(1 + R_k^{(n)}\right)\right)^+ \left(1 + \frac{rT}{n}\right)^{-n} \right] - \right.$$
$$\left. - \mathsf{E}\left[\left(K - \exp\left\{ X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\}\right)^+ e^{-rT} \right] \right|$$

Застосовуючи лему A.2 із [68], після деяких елементарних обчислень отримаємо

$$\begin{aligned} &|\pi(\mathbb{P}) - \pi(\mathbb{P}_n)| \leqslant \\ &\left(1 + \frac{rT}{n}\right)^{-n} \left| \mathsf{E}\left[\left(K - \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(1 + R_k^{(n)}\right)\right)^+ \right] \right. \\ &\left. - \mathsf{E}\left[\left(K - \exp\left\{ X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\}\right)^+ \right] \right| \\ &+ \mathsf{E}\left[\left(K - \exp\left\{ X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\}\right)^+ \right] \left| \left(1 + \frac{rT}{n}\right)^{-n} - e^{-rT} \right| \\ &\leqslant \left| \mathsf{E}\left[\left(K - \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(1 + R_k^{(n)}\right)\right)^+ \right] - \mathsf{E}\left[\left(K - \exp\left\{ X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\}\right)^+ \right] \right| \\ &+ \frac{K(rT)^2}{2n}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Інтегруючи по частинах, можна зробити висновок, що для будь-якої інтегровної випадкової величини ξ

$$\mathsf{E}(K - \xi)^+ = \int_{-\infty}^{K} \mathsf{P}(\xi \leqslant x) dx.$$

Тому

$$\begin{aligned} &\left| \mathsf{E}\left[\left(K - \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(1 + R_k^{(n)}\right)\right)^+ \right] - \mathsf{E}\left[\left(K - \exp\left\{ X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\}\right)^+ \right] \right| \\ &= \left| \int_0^K \left(\mathsf{P}\left(\exp\left\{ X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \right\} \leqslant z \right) - \mathsf{P}\left(\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(1 + R_k^{(n)}\right) \leqslant z \right)\right) dz \right| \\ &= \left| \int_0^K \left(\mathsf{P}\left(X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \leqslant \log z \right) - \mathsf{P}\left(\log\left(\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(1 + R_k^{(n)}\right)\right) \leqslant \log z \right)\right) dz \right| \end{aligned}$$

$$\leqslant \left| \int_0^K \Big(\mathsf{P}\left(X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \leqslant \log z\right) - \mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} R_k^{(n)} - \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^2 \leqslant \log z\Big)\Big) dz \right|$$

$$+ \Bigg| \int_0^K \Big(\mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \log\left(1 + R_k^{(n)}\right) \leqslant \log z\Big) - \mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} R_k^{(n)}$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^2 \leqslant \log z\Big)\Big) dz \Bigg|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\log K} e^y \Big(\mathsf{P}\left(X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \leqslant y\right) - \mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} R_k^{(n)} - \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^2 \leqslant y\Big)\Big) dy \right|$$

$$+ \Bigg| \int_{-\infty}^{\log K} e^y \Big(\mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \log\left(1 + R_k^{(n)}\right) \leqslant y\Big) - \mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} R_k^{(n)}$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^2 \leqslant y\Big)\Big) dy \Bigg| =: I_1^n + I_2^n. \tag{3.10}$$

Для того, щоб оцінити I_1^n зверху, перепишемо обидві ймовірності з попередньої нерівності. Позначимо

$$D(y) = \frac{\sqrt{2}(y - \mu(1 - e^{-T}) - x_0 e^{-T} + \frac{\sigma^2 T}{2})}{\sigma\sqrt{1 - e^{-2T}}}.$$

Тоді, очевидно,

$$\mathsf{P}\left(X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \leqslant y\right) = \Phi\left(D(y)\right).$$

Крім того, беручи до уваги нерівність $|\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{\sqrt{2\pi}}$, отримаємо наступну оцінку:

$$\Big|\mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} R_k^{(n)} - \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^2 \leqslant y\Big) - \mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} R_k^{(n)} - \frac{\sigma^2 T}{2} \leqslant y\Big)\Big|$$
$$\leqslant \mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^2 - \sigma^2 T\Big| > \frac{2}{n^{1/2}}\Big)$$
$$+\Big|\mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} R_k^{(n)} - \frac{\sigma^2 T}{2} \leqslant y\Big) - \mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} R_k^{(n)} - \frac{\sigma^2 T}{2} \leqslant y \pm \frac{1}{n^{1/2}}\Big)\Big|$$
$$\leqslant \mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^2 - \sigma^2 T\Big| > \frac{2}{n^{1/2}}\Big) + \Big|\mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} R_k^{(n)} - \frac{\sigma^2 T}{2} \leqslant y\Big) - \Phi(D(y))\Big|$$
$$+\Big|\mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} R_k^{(n)} - \frac{\sigma^2 T}{2} \leqslant y \pm \frac{1}{n^{1/2}}\Big) - \Phi\left(D\left(y \pm \frac{1}{n^{1/2}}\right)\right)\Big| + \frac{C}{n^{1/2}}$$
$$=: J_1^n + J_2^n + J_3^n + \frac{C}{n^{1/2}}. \tag{3.11}$$

З (3.11) випливає, що

$$\Big|\mathsf{P}\Big(X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \leqslant y\Big) - \mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} R_k^{(n)} - \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^2 \leqslant y\Big)\Big|$$
$$\leqslant \Big|\Phi(D(y)) - \mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} R_k^{(n)} - \frac{1}{2}\sigma^2 T \leqslant y\Big)\Big| + J_1^n + J_2^n + J_3^n + \frac{C}{n^{1/2}}$$
$$\leqslant J_1^n + 2J_2^n + J_3^n + \frac{C}{n^{1/2}}.$$

Тепер з леми 3.2 маємо, що

$$J_1^n \leqslant Cn\,\mathsf{E}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^2 - \sigma^2 T\Big)^2 \leqslant \frac{C}{n}.$$

Оскільки для оцінки величин $J_i^n, i = 2, 3$ використовуються одні й ті самі аргументи, то будемо розглядати лише J_2^n. Позначимо $X_k = \sqrt{n} q_k^{(n)}\Big(1-\frac{T}{n}\Big)^{n-k}$ і $B_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \mathsf{E}\, X_k^2 = \frac{n\left(1-\left(1-\frac{T}{n}\right)^{2n}\right)}{2-\frac{T}{n}}$. З (3.3) випливає, що

$$x_k^{(n)} = x_0^{(n)}\left(1 - \frac{T}{n}\right)^k + \mu\left(1 - \left(1 - \frac{T}{n}\right)^k\right) + \sigma\sum_{i=1}^{k} q_i^{(n)}\left(1 - \frac{T}{n}\right)^{k-i},$$

Тоді безпосередньо при $k = n$ отримуємо, що

$$J_2^n = \Big|\mathsf{P}\Big(B_n^{-1/2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n} X_k \leqslant D_n(y)\Big) - \Phi(D(y))\Big|,$$

де
$$D_n(y)=\frac{\sqrt{2-\frac{T}{n}}\Big(y-(\mu-x_0)\Big(1-\Big(1-\frac{T}{n}\Big)^n\Big)+\frac{\sigma^2T}{2}\Big)}{\sigma\sqrt{1-\Big(1-\frac{T}{n}\Big)^{2n}}}.$$

Аналогічно до леми A.2 з [68] легко бачити, що $|D(y)-D_n(y)|\leqslant\frac{C+|y|}{\sqrt{n}}$. Більше того, застосовуючи нерівність Беррі-Ессеєна, одержимо
$$J_2^n\leqslant\Big|\mathsf{P}\Big(B_n^{-1/2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}X_k\leqslant D_n(y)\Big)-\Phi(D_n(y))\Big|+\frac{C+|y|}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{C+|y|}{\sqrt{n}}.$$

Тоді для I_1^n має місце оцінка
$$I_1^n\leqslant\int_{-\infty}^{\log K}e^y\left(\frac{C}{n}+\frac{C+|y|}{\sqrt{n}}\right)dy\leqslant\frac{C}{\sqrt{n}}.\tag{3.12}$$

Щоб обмежити I_2^n зверху, відзначимо, що
$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\log\Big(1+R_k^{(n)}\Big)=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}R_k^{(n)}-\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^2+\frac{1}{3}\alpha_n\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^3.$$

З леми 3.1 отримуємо, що $\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|R_k^{(n)}|^3\leqslant\frac{C^3}{\sqrt{n}}$ і розклад Тейлора дає оцінку для α_n:
$$|\alpha_n|\leqslant\frac{1}{(1-\max_{1\leqslant k\leqslant n}|R_k^{(n)}|)^3}\leqslant\frac{1}{(1-\frac{C}{\sqrt{n}})^3}\leqslant 8$$
для таких n, що $\frac{C}{\sqrt{n}}\leqslant 1/2$. Крім того, використовуючи (3.11), отримаємо
$$\begin{aligned}&\Big|\mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\log\Big(1+R_k^{(n)}\Big)\leqslant y\Big)-\mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}R_k^{(n)}-\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^2\leqslant y\Big)\Big|\\
&\leqslant\Big|\mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}R_k^{(n)}-\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^2\leqslant y\Big)\\
&-\mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}R_k^{(n)}-\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^2\leqslant y\pm\frac{C}{\sqrt{n}}\Big)\Big|\\
&\leqslant\Big|\mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}R_k^{(n)}-\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^2\leqslant y\Big)-\Phi(D(y))\Big|\\
&+\Big|\mathsf{P}\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}R_k^{(n)}-\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^2\leqslant y\pm\frac{C}{\sqrt{n}}\Big)-\Phi\Big(D(y\pm\frac{C}{\sqrt{n}})\Big)\Big|\\
&+\Big|\Phi(D(y))-\Phi\Big(D(y\pm\frac{C}{\sqrt{n}})\Big)\Big|\leqslant\frac{C+|y|}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Аналогічно до (3.12), можемо вивести, $I_2^n \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}$. Остаточно, з (3.9), (3.10), (3.12) і оцінок написаних вище, отримуємо (3.8), що доводить теорему. □

Зауваження 3.1. В статті [68] було розглянуто послідовність незалежних випадкових величин $\left\{q_k^{(n)}, n \geqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$, які були рівномірно розподілені на інтервалі $\left(-\sqrt{\frac{3T}{n}}, \sqrt{\frac{3T}{n}}\right)$. В силу оцінки $\mathsf{E}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(R_k^{(n)})^2 - \sigma^2 T\right)^2 \leqslant \frac{C}{n^2} + Cn\left(\mathsf{E}(q_1^{(n)})^4 - \frac{T^2}{n^2}\right)$, яка використовувалася при обмеженні інтеграла $J_1^{(n)}$, аналогічно до доведення теореми 3.2, та рівності $n\left(\mathsf{E}(q_1^{(n)})^4 - \frac{T^2}{n^2}\right) = \frac{4T^2}{5n}$, що має гіршу швидкість спадання до нуля ніж доданок $\frac{C}{n^2}$, оцінка швидкості збіжності цін опціонів не вийшла кращою за $\frac{C}{n^{1/3}}$. Тепер в нашій роботі $q_k^{(n)}$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини, що приймають значення $\pm\sqrt{\frac{T}{n}}$ з ймовірністю $\frac{1}{2}$, отже, $\mathsf{E}(q_1^{(n)})^4 - \frac{T^2}{n^2} = 0$. Через це покращення ми отримуємо кращу швидкість збіжності цін опціонів порядку $n^{-1/2}$.

3.4. Перехід від об'єктивної міри до мартингальної і теорема про швидкість збіжності справедливих цін опціонів

Зауважимо, що швидкість збіжності об'єктивних цін опціонів має місце лише у припущенні, що відносно об'єктивної міри $q_k^{(n)}$ приймають значення $\pm\sqrt{\frac{T}{n}}$ з ймовірністю $\frac{1}{2}$. Таким чином, якщо ми хочемо одержати швидкість збіжності відносно мартингальної міри такого ж порядку, наша задача полягає у тому, щоб задати ймовірності спільного розподілу $\mathsf{P}_n\left(\bigcap_{k=1}^n \{q_k^{(n)} = \pm\sqrt{\frac{T}{n}}\}\right)$ так, щоб відносно мартингальної міри P_n^* випадкові величини $q_k^{(n)}$ були незалежними в сукупності і приймали значення $\pm\sqrt{\frac{T}{n}}$ з ймовірністю $\frac{1}{2}$. Зауважимо, що на відміну від результатів статті [7], де доведено, що при переході від об'єктивної міри до мартингальної в дискретній моделі, що апроксимує модель Блека-Шоулса, взаємна незалежність випадкових чинників зберігається, в нашій моделі такої еквівалентності взаємних розподілів нема. Тому спочатку розглянемо модель цінового процесу (3.3)–(3.4), але без припущення про взаємну незалежність випадкових величин $\{q_k^{(n)}, 1 \leqslant$

$k \leqslant n\}$. Позначимо умовні ймовірності $\mathsf{P}^{\pm}_{k,n} = \mathsf{P}_n\left(q^{(n)}_k = \pm\sqrt{\frac{T}{n}}\middle|\mathcal{F}^n_{k-1}\right)$. Виявляється, що при відмові від незалежності, властивості допграничної моделі істотно залежать від поведінки $\mathsf{P}^{\pm}_{k,n}$, про що свідчить наступний результат. Зауважимо, що $\mathsf{P}^{+}_{k,n} + \mathsf{P}^{-}_{k,n} = 1$. Введемо позначення $h^{\pm}_{k,n} = \frac{(\mu - x^{(n)}_{k-1})T}{n} \pm \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}$, а також позначимо $\rho_{k,n} = \frac{r^{(n)}_k - h^{+}_{k,n}\mathsf{P}^{+}_{k,n} - h^{-}_{k,n}\mathsf{P}^{-}_{k,n}}{4\sigma\frac{T}{n}\mathsf{P}^{+}_{k,n}\mathsf{P}^{-}_{k,n}}$.

Теорема 3.3. (i) *Нехай кожна серія при $n > T$ задовольняє умови:*

(a) $\mathsf{P}^{\pm}_{k,n} > 0$ *з імовірністю 1 і* $\mathsf{E}\left|\rho_{k,n}\left(q^{(n)}_k - \mathsf{E}\left(q^{(n)}_k|\mathcal{F}^n_{k-1}\right)\right)\right| < \infty, 1 \leqslant k \leqslant n.$

(b) *Існує стала $C > 0$ незалежна від k і n і така, що*

$$|2\,\mathsf{P}^{+}_{k,n} - 1| < \frac{C}{n^{1/2}},\ r^{(n)}_k \leqslant \frac{C}{n}, |x^{(n)}_0 - x_0| \leqslant C, 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Тоді існує номер серії $n_0 > T$, починаючи з якого ринок (3.3)–(3.4) *є безарбітражним і повним.*

(ii) *Нехай в деякій n-й серії при $n > T$ виконуються умови:*

$\mathsf{P}^{\pm}_{k,n} > 0$ *з імовірністю 1 при $1 \leqslant k \leqslant n$, причому існує таке k, що*

$$\mathsf{E}\left|\rho_{k,n}\left(q^{(n)}_k - \mathsf{E}\left(q^{(n)}_k|\mathcal{F}^n_{k-1}\right)\right)\right| = \infty.$$

Тоді еквівалентної мартингальної міри не існує, отже, ринок не є безарбітражним, питання повноти не розглядається.

(iii) *Нехай $\mathsf{P}^{+}_{k,n} = 0$ з додатною імовірністю або $\mathsf{P}^{-}_{k,n} = 0$ з додатною імовірністю.*

(c) *Якщо на множині $A^{+}_{k,n} := \{\omega \in \Omega : \mathsf{P}^{+}_{k,n} = 0\}$, за умови, що $\mathsf{P}^{+}_{k,n} = 0$ з додатною імовірністю, має місце рівність*

$$h^{+}_{k,n} = r^{(n)}_k, \tag{3.13}$$

або на множині $A^{-}_{k,n} := \{\omega \in \Omega : \mathsf{P}^{-}_{k,n} = 0\}$, за умови, що $\mathsf{P}^{-}_{k,n} = 0$ з додатною імовірністю, має місце рівність

$$h^{-}_{k,n} = r^{(n)}_k, \tag{3.14}$$

на множині $\Omega \setminus A^{+}_{k,n}$ *виконується умова* $|2\,\mathsf{P}^{+}_{k,n} - 1| < \frac{C}{n^{1/2}}$, *а на множині* $\Omega \setminus A^{-}_{k,n}$ *виконується умова* $|2\,\mathsf{P}^{-}_{k,n} - 1| < \frac{C}{n^{1/2}}$ *і, крім того,* $\mathsf{E}\left|\rho_{k,n}\left(q_k^{(n)} - \mathsf{E}\left(q_k^{(n)}|\mathcal{F}^n_{k-1}\right)\right)\right| < \infty, 1 \leqslant k \leqslant n$, *то ринок є безарбітражним і неповним.*

(d) *Якщо на множині* $A^{+}_{k,n}$, *за умови, що* $\mathsf{P}^{+}_{k,n} = 0$ *з додатною імовірністю, рівність* (3.13) *не має місця, або на множині* $A^{-}_{k,n}$, *за умови, що* $\mathsf{P}^{-}_{k,n} = 0$ *з додатною імовірністю, рівність* (3.14) *не має місця, то ринок не є безарбітражним.*

Доведення. Згідно з теорією фінансових ринків з дискретним часом (див., наприклад, [40]), мартингальні міри P^*_n для допграничного ринку треба шукати як ймовірнісні міри з похідною Радона–Нікодима вигляду

$$\frac{d\,\mathsf{P}^{n,*}}{d\,\mathsf{P}^n} = \prod_{k=1}^{n}(1 + \Delta M_k^{(n)}), \tag{3.15}$$

де $M^{(n)} = \{M_k^{(n)}, 0 \leqslant k \leqslant n\}$ – мартингал відносно об'єктивної міри. При цьому випадкові величини $\Delta M_k^{(n)} = M_k^{(n)} - M_{k-1}^{(n)}$ є вимірними відносно σ–алгебри $\mathcal{F}^n_k$, а тому існує борелева функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ така, що

$$\Delta M_k^{(n)} = f(q_1^{(n)}, q_2^{(n)}, \ldots, q_k^{(n)}) := f(\overline{q}_{k-1}^{(n)}, q_k^{(n)}) = f\left(\overline{q}_{k-1}^{(n)}, \sqrt{\frac{T}{n}}\right)\mathbb{1}_{k,n,+}$$
$$+ f\left(\overline{q}_{k-1}^{(n)}, -\sqrt{\frac{T}{n}}\right)\mathbb{1}_{k,n,-},$$

де $\mathbb{1}_{k,n,\pm} = \mathbb{1}_{\left\{q_k^{(n)} = \pm\sqrt{\frac{T}{n}}\right\}}$. Введемо позначення $g^{\pm}_{k,n} = f(\overline{q}_{k-1}^{(n)}, \pm\sqrt{\frac{T}{n}})\,\mathsf{P}^{\pm}_{k,n}$, тоді умова мартингальності процесу $M^{(n)}$ набуде вигляду

$$g^{+}_{k,n} + g^{-}_{k,n} = 0. \tag{3.16}$$

Тепер запишемо умову того, що відносно міри $\mathsf{P}^{n,*}$ дисконтований ціновий процес має бути мартингалом: для кожного $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}^{n,*}}\left[\prod_{i=1}^{k}\frac{1 + R_i^{(n)}}{1 + r_i^{(n)}}\Big|\mathcal{F}^n_{k-1}\right] = \prod_{i=1}^{k-1}\frac{1 + R_i^{(n)}}{1 + r_i^{(n)}},$$

яка, з урахуванням стандартної рівності

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[\xi|G] = \frac{\mathsf{E}_{\mathsf{P}}[\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}\xi|G]}{\mathsf{E}_{\mathsf{P}}[\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}|G]}$$

перетвориться на співвідношення

$$\frac{\mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{n}(1+\Delta M_j^{(n)})\prod_{i=1}^{k}\frac{1+R_i^{(n)}}{1+r_i^{(n)}}\middle|\mathcal{F}_{k-1}^n\right]}{\mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{n}(1+\Delta M_j^{(n)})\middle|\mathcal{F}_{k-1}^n\right]} = \prod_{i=1}^{k-1}\frac{1+R_i^{(n)}}{1+r_i^{(n)}},$$

і нарешті спроститься до

$$\mathsf{E}\left[(1+\Delta M_k^{(n)})(1+R_k^{(n)})\middle|\mathcal{F}_{k-1}^n\right] = 1+r_k^{(n)}.$$

Останнє співвідношення є еквівалентним до рівності

$$\mathsf{E}\left[R_k^{(n)}(1+\Delta M_k^{(n)})\middle|\mathcal{F}_{k-1}^n\right] = r_k^{(n)}. \tag{3.17}$$

Якщо тепер розкрити дужки і підставити значення всіх величин, що входять в ліву частину (3.17), зокрема, з урахуванням (3.3), то ми одержимо таку рівність:

$$h_{k,n}^{+}g_{k,n}^{+} + h_{k,n}^{-}g_{k,n}^{-} + h_{k,n}^{+}\mathsf{P}_{k,n}^{+} + h_{k,n}^{-}\mathsf{P}_{k,n}^{-} = r_k^{(n)}.$$

Таким чином, разом з (3.16), маємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими $g_{k,n}^{+}, g_{k,n}^{-}$, розв'язок якої існує, єдиний і має вигляд

$$g_{k,n}^{+} = \frac{r_k^{(n)} - h_{k,n}^{+}\mathsf{P}_{k,n}^{+} - h_{k,n}^{-}\mathsf{P}_{k,n}^{-}}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}, g_{k,n}^{-} = -g_{k,n}^{+}. \tag{3.18}$$

Тепер розглянемо три випадки.

(i) Якщо $\mathsf{P}_{k,n}^{+} > 0$ і $\mathsf{P}_{k,n}^{-} > 0$ з імовірністю 1, то ми одержуємо єдину формулу для $\Delta M_k^{(n)}$, причому

$$\begin{aligned}\Delta M_k^{(n)} &= f\left(\overline{q}_{k-1}^{(n)}, \sqrt{\frac{T}{n}}\right)\mathbb{1}_{k,n,+} + f\left(\overline{q}_{k-1}^{(n)}, -\sqrt{\frac{T}{n}}\right)\mathbb{1}_{k,n,-} \\ &= \frac{r_k^{(n)} - h_{k,n}^{+}\mathsf{P}_{k,n}^{+} - h_{k,n}^{-}\mathsf{P}_{k,n}^{-}}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\Big(\frac{\mathbb{1}_{k,n,+}}{\mathsf{P}_{k,n}^{+}} - \frac{\mathbb{1}_{k,n,-}}{\mathsf{P}_{k,n}^{-}}.\Big)\end{aligned} \tag{3.19}$$

Згідно з позначенням $\rho_{k,n} = \frac{r_k^{(n)} - h_{k,n}^+ \mathsf{P}_{k,n}^+ - h_{k,n}^- \mathsf{P}_{k,n}^-}{4\sigma \frac{T}{n} \mathsf{P}_{k,n}^+ \mathsf{P}_{k,n}^-}$, рівність (3.19) можна переписати у вигляді

$$\Delta M_k^{(n)} = \rho_{k,n}(q_k^{(n)} - \mathsf{E}(q_k^{(n)} | \mathcal{F}_{k-1}^n)), \tag{3.20}$$

причому випадкова величина $\rho_{k,n}$ є $\mathcal{F}_{k-1}^n$-вимірною. Якщо виконується умова (a) теореми, то формула (3.20) справді задає мартингал. Тепер перевіримо умову $\Delta M_k^{(n)} > -1$. В статті [70] було доведено наступне співвідношення, яке базується лише на значеннях випадкових величин і не враховує їх взаємну залежність:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}(x_0^{(n)} - \mu) + 1\right)\left(1 - \frac{T}{n}\right)^k - 1 \leqslant \frac{(x_{k-1}^{(n)} - \mu)}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} \\ \leqslant \left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}(x_0^{(n)} - \mu) - 1\right)\left(1 - \frac{T}{n}\right)^k + 1. \end{aligned} \tag{3.21}$$

З використанням останньої нерівності в умові (b) спростимо нерівності в лівій і правій частинах (3.21) наступним чином:

$$\frac{(x_{k-1}^{(n)} - \mu)}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} \geqslant -1 + e^{-T} + O(n^{-1/2}) \tag{3.22}$$

та

$$\frac{(x_{k-1}^{(n)} - \mu)}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} \leqslant 1 - e^{-T} + O(n^{-1/2}) \tag{3.23}$$

Використаємо (3.22)–(3.23) для оцінки правої частини (3.19). На тих ω, на яких $\mathbb{1}_{k,n,+} = 1$, і відповідно, $\mathbb{1}_{k,n,-} = 0$, зробимо наступні перетворення:

$$\begin{aligned} \Delta M_k^{(n)} &= \frac{r_k^{(n)} - h_{k,n}^+ \mathsf{P}_{k,n}^+ - h_{k,n}^- \mathsf{P}_{k,n}^-}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} \mathsf{P}_{k,n}^+} \\ &= \frac{(x_{k-1}^{(n)} - \mu)}{2\sigma \mathsf{P}_{k,n}^+}\sqrt{\frac{T}{n}} + \frac{r_k^{(n)}}{2\sigma \mathsf{P}_{k,n}^+ \sqrt{\frac{T}{n}}} + \frac{1 - 2\mathsf{P}_{k,n}^+}{2\mathsf{P}_{k,n}^+}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Оскільки за умовою (b) $2\,\mathsf{P}_{k,n}^+ = 1 + O(n^{-1/2})$, причому $O(n^{-1/2})$ оцінюється величиною $\frac{C}{n^{1/2}}$, зі сталою незалежною від k і n, то і $\frac{1}{2\,\mathsf{P}_{k,n}^+} =$

$1 + O(n^{-1/2})$, де остання $O(n^{-1/2})$ також оцінюється величиною $\frac{C}{n^{1/2}}$, незалежною від k і n. Тоді з (3.22) випливає оцінка

$$\frac{(x_{k-1}^{(n)} - \mu)}{2\sigma\,\mathsf{P}_{k,n}^{+}}\sqrt{\frac{T}{n}} \geqslant -1 + e^{-T} + O(n^{-1/2}). \tag{3.25}$$

Другий і третій доданки в правій частині (3.24) оцінюються як $O(n^{-1/2})$. На тих ω, на яких $\mathbb{1}_{k,n,-} = 1$, і відповідно, $\mathbb{1}_{k,n,+} = 0$, перетворення і міркування проводяться аналогічним чином, отже, існує n_0, починаючи з якого ринок є безарбітражним і повним.

(ii) За виконання умови (ii) $M_k^{(n)}, 1 \leqslant k \leqslant n$ не є інтегровним процесом, тобто не утворює мартингалу, але з попереднього доведення зрозуміло, що за виконання умови $2\,\mathsf{P}_{k,n}^{\pm} > 0$ з імовірністю 1, інших мартингалів, які б задавали мартингальні міри, нема. Отже, ринок не є безарбітражним, а тоді питання щодо повноти не розглядається.

(iii) (c) Якщо на множині $A_{k,n}^{+}$, за умови, що $\mathsf{P}_{k,n}^{+} = 0$ з додатною імовірністю, має місце рівність (3.13), то можна на цій множині покласти значення $f(\overline{q}_{k-1}^{(n)}, \sqrt{\frac{T}{n}})$ рівним довільній сталій, а значення $f(\overline{q}_{k-1}^{(n)}, -\sqrt{\frac{T}{n}})$ рівним нулю, і на цій множині рівності (3.18) матимуть місце. Тому на цій множині можна покласти $\Delta M_k^{(n)}$ рівним довільній сталій. На доповненні до $A_{k,n}^{+}$ ми повторюємо ті самі кроки, що і в пункті (i), і таким чином одержуємо безарбітражний і неповний ринок. Аналогічний підхід застосовуємо у випадку, коли $\mathsf{P}_{k,n}^{-} = 0$ з додатною імовірністю.

(d) Якщо на множині $A_{k,n}^{+}$, за умови, що $\mathsf{P}_{k,n}^{+} = 0$ з додатною імовірністю, рівність (3.13) не має місця, або на множині $A_{k,n}^{-}$, за умови, що $\mathsf{P}_{k,n}^{-} = 0$ з додатною імовірністю, рівність (3.14) не має місця, то на цих множинах не виконується рівність (3.18), тобто на цих множинах визначити $\Delta M_k^{(n)}$ неможливо, отже, ринок не є безарбітражним.

Теорему доведено. $\square$

Тепер будемо вважати, що виконується умова (i) теореми 3.3, тобто ринок є безарбітражним і повним, і знайдемо достатні умови того, що відносно єдиної мартингальної міри P_n^* випадкові величини $\{q_k^{(n)}, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ є однаково розподіленими, незалежними і симетричними. Введемо позначення для множини всіх можливих значень наборів випадкових величин $\{q_k^{(n)}, 1 \leqslant k \leqslant n\}$: $\Xi = \{\xi = \sqrt{\frac{T}{n}}(\pm 1, \dots, \pm 1)\}$. Позначимо $\omega(\xi)$ ті елементи ймовірнісного простору, на яких набір $\{q_k^{(n)}, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ приймає значення ξ і позначимо імовірність кожного такого набору відносно об'єктивної міри через $\mathsf{P}_n(\xi)$. Нарешті, позначимо $\overline{q}^{(n)}$ сам набір випадкових величин $\{q_k^{(n)}, 1 \leqslant k \leqslant n\}$.

Лема 3.3. *Якщо на кожному $\omega(\xi)$ виконується рівність*

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + \Delta M_k^{(n)}(\omega(\xi)))\,\mathsf{P}_n(\xi) = 2^{-n}, \tag{3.26}$$

то відносно мартингальної міри P_n^* випадкові величини $\{q_k^{(n)}, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ будуть незалежними, однаково розподіленими і симетричними.

Доведення. Відносно мартингальної міри для кожного набору ξ повинна виконуватись рівність $\mathsf{P}_n^*(\xi) = 2^{-n}$, або $\mathsf{P}_n(\prod_{k=1}^{n}(1 + \Delta M_k^{(n)})\mathbb{1}_{\omega(\xi)}) = 2^{-n}$, звідки відразу випливає доведення. □

Зауваження 3.2. Очевидно, рівності (3.26) можуть виконуватись, тобто не є суперечливими. Щоб в цьому переконатись, треба просто поміняти міри місцями, а точніше, задати міру Q_n, відносно якої є набір незалежних симетричних однаково розподілених випадкових величин $\{q_k^{(n)}, 1 \leqslant k \leqslant n\}$, потім задати прирости $\Delta M_k^{(n)}$ мартингала відносно міри Q_n у вигляді $\Delta M_k^{(n)} = \rho_k^{(n)} q_k^{(n)}$ так щоб

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}_n}\left[(1 + R_k^{(n)})(1 + \rho_k^{(n)} q_k^{(n)})\middle|\mathcal{F}_{k-1}^n\right] = 1 + r_k^{(n)},$$

а тоді покласти $\mathsf{P}_n^* = \mathsf{Q}_n$, а P_n задати як міру, що визначається похідною Радона-Нікодима

$$\frac{d\mathsf{Q}_n}{d\,\mathsf{P}_n} = \prod_{k=1}^{n}(1 + \Delta M_k^{(n)}) = \prod_{k=1}^{n}(1 + \rho_k^{(n)} q_k^{(n)}).$$

Наступний результат є прямим наслідком теорем 3.2, 3.3 та леми 3.3.

Теорема 3.4. *Нехай виконуються наступні умови:*

(*i*) *Існує така стала $C > 0$, що $|x_0^{(n)} - x_0| \leqslant \frac{C}{n^{1/2}}$;*

(*ii*) *Виконуються умови (a) та (b) пункту (i) теореми 3.3, а також умови леми 3.3.*

Тоді, починаючи з деякого $n_0 > T$ має місце наступна оцінка

$$|\pi^*(\mathbb{D}) - \pi^*(\mathbb{D}_n)| \leqslant \frac{C_1}{n^{1/2}}$$

для деякого $C_1 > 0$ і $\mathbb{D} = \mathbb{C}, \mathbb{P}$.

Висновки до розділу 3

В даному розділі ми розглянули дискретну апроксимаційну схему цін акцій, змодельованих геометричним процесом Орнштейна-Уленбека. Апроксимаційна схема є схемою Ейлера, в якій прирости вінерівського процесу замінено на бернуллієвські незалежні однаково розподілені випадкові величини. Оцінили швидкість збіжності об'єктивних та справедливих цін опціонів з використанням класичних результатів про швидкість збіжності до нормального закону функцій розподілу сум незалежних однаково розподілених випадкових величин. Проаналізували перехід від об'єктивної міри до мартингальної і зміни, що відбуваються з розподілом цін на ринку при такому переході у вказаній моделі.

РОЗДІЛ 4
ФУНКЦІОНАЛЬНІ ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ В МОДЕЛІ КОКСА-ІНГЕРСОЛЛА-РОССА. ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЛЕННЯ МАЛЛЯВЕНА ДО ОЦІНЮВАННЯ ОПЦІОНІВ НА АКЦІЇ В МОДЕЛІ ХЕСТОНА

Даний розділ складається з двох основних частин. В першій частині розглядається процес Кокса-Інгерсолла-Росса (КІР), коли він не заходить в нуль, і досліджується слабка апроксимація цього процесу. В першому випадку послідовність дограничних ринків змодельована як послідовність дискретно часових адитивних стохастичних процесів, в другому випадку – як послідовність мультиплікативних стохастичних процесів. Дискретні апроксимаційні схеми побудовано для ціни активу, який змодельований процесом КІР. Розглядається дискретна апроксимаційна схема Ейлера для процесу КІР, але прирости вінерівського процесу замінюються на незалежні однаково розподілені обмежені симетричні випадкові величини. Вводиться "зрізаний" процес Кокса-Інгерсолла-Росса, який використовується для доведення слабкої збіжності цін активу. Розглядається повний та "зрізаний" процеси Кокса-Інгерсолла-Росса, встановлюється, що "зрізаний" процес КІР не заходить в нуль при тій же умові, що й незрізаний процес. Наводяться апроксимаційні схеми для обох процесів та доводиться слабка збіжність цін активу для адитивної та мультиплікативної моделей.

У другій частині представлено деякі властивості моделей Блека–Шоулса зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Кокса–Інгерсолла–Росса. Наводяться відомості щодо відсутності арбітражу у моделі, а також зображення ціни Європейського опціону. Базові поняття числення Маллявена та деякі попередні результати наводяться перед основним результатом цієї частини – теоремою про вигляд щільності розподілу середньої волатильності. Після цього записано ціну опціону через знайдену щільність. Розглядаються допоміжні факти та доведення допоміжних результатів, зокрема, стохастичні похідні від функціоналів, пов'язаних зі стохастичною волатильністю.

Результати даного розділу надруковані в статтях [4], [73] та апробовані на конференціях [5], [6], [11].

4.1. Функціональні граничні теореми для адитивної, мультиплікативної схем в моделі Кокса-Інгерсолла-Росса

4.1.1. Повний та "зрізаний" процеси Кокса-Інгерсолла-Росса та їх властивості. Нехай $T > 0$, $\mathbb{T} = [0, T]$ і $\Omega_{\mathcal{F}} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}), \mathsf{P})$ – повний фільтрований ймовірнісний простір, $W = \{W_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ – адаптований вінерівський процес. Розглянемо на цьому просторі процес Кокса-Інгерсолла-Росса із сталими параметрами. Цей процес є єдиним розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dX_t = (b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t,\ X_0 = x_0 > 0,\ t \in \mathbb{T}, \tag{4.1}$$

де $b > 0$, $\sigma > 0$. В інтегральній формі процес X має вигляд

$$X_t = x_0 + \int\limits_0^t (b - X_s)\, ds + \sigma \int\limits_0^t \sqrt{X_s}dW_s.$$

Згідно зі статтею [29], умова $\sigma^2 \leqslant 2b$ є необхідною і достатньою для того, щоб процес X приймав додатні значення і не заходив в нуль. Далі вважаємо цю умову виконаною.

При доведенні функціональних граничних теорем нам буде потрібна також модифікація процесу Кокса-Інгерсолла-Росса, що матиме обмежені коефіцієнти. Такий процес назвемо "зрізаним" процесом Кокса-Інгерсолла-Росса. Нехай $C > 0$. Розглянемо наступне стохастичне диференціальне рівняння з тими ж коефіцієнтами b та σ, що і рівняння (4.1):

$$dX_t^C = (b - X_t^C \wedge C)dt + \sigma\sqrt{(X_t^C \vee 0) \wedge C}dW_t,\ X_0 = x_0 > 0,\ t \in \mathbb{T}. \tag{4.2}$$

Лема 4.1. *При кожному* $C > 0$ *рівняння* (4.2) *має єдиний сильний розв'язок.*

Доведення. Оскільки коефіцієнти $\sigma(x) = \sigma\sqrt{(x \vee 0) \wedge C}$ та $b(x) = b - (x \wedge C)$ задовольняють умови теореми 4.9, а також умову зростання (4.14), то глобальний сильний розв'язок X_t^C існує і єдиний для кожного початкового значення x_0. □

Зауваження 4.1. Позначимо $\sigma_{-\epsilon} = \inf\left\{t : X_t^C = -\epsilon\right\}$, де $\epsilon > 0$ таке, що $-\epsilon + b > 0$. Припустимо, що $\mathsf{P}(\sigma_{-\epsilon} < \infty) > 0$. Тоді з додатною ймовірністю для будь-якого $r < \sigma_{-\epsilon}$ такого, що $X_t^C < 0$, якщо $t \in (r, \sigma_{-\epsilon})$ маємо

$$dX_t^C = (b - X_t^C \wedge C)dt > 0$$

на інтервалі $(r, \sigma_{-\epsilon})$ і, отже, $t \to X_t^C$ зростає на цьому інтервалі. Це, очевидно, неможливо. Тому процес X_t^C невід'ємний, і його можна записати як

$$dX_t^C = (b - X_t^C \wedge C)dt + \sigma\sqrt{X_t^C \wedge C}dW_t,\ X_0^C = x_0 > 0,\ t \in \mathbb{T}. \tag{4.3}$$

В інтегральній формі процес X^C має вигляд

$$X_t^C = x_0 + \int_0^t (b - X_s^C \wedge C)ds + \sigma\int_0^t \sqrt{X_s^C \wedge C}dW_s.$$

Лема 4.2. *Нехай* $2b \geqslant \sigma^2$, $C > b \vee 1$. *Тоді траєкторії процесу* X^C *з імовірністю 1 додатні на множині* $\mathbb{T}$.

Доведення. Для доведення додатності процесу X^C використаємо аналогічне доведення для повного процесу Кокса-Інгерсолла-Росса [65, p. 308] з відповідними модифікаціями. Зауважимо, що коефіцієнт рівняння (4.3) $g(x) := \sigma\sqrt{x \wedge C}$ неперервний і $g^2(x) > 0$ на $x \in (0, \infty)$, коефіцієнт $f(x) := b - x \wedge C$ неперервний на $x \in (0, \infty)$. Зафіксуємо α і β такі, що $0 < \alpha < x_0 < \beta$. В силу невиродженості g на $[\alpha, \beta]$, існує єдиний розв'язок $F(x)$ звичайного диференціального рівняння

$$f(x)F'(x) + \frac{1}{2}g^2(x)F''(x) = -1,\quad \alpha < x < \beta$$

з граничними умовами $F(\alpha) = F(\beta) = 0$, і цей розв'язок невід'ємний, що випливає з його зображення через невід'ємну функцію Гріна, наведеного в [58, p. 343]. Визначимо моменти зупинки

$$\tau_\alpha = \inf\left\{t \geqslant 0 : X_t^C \leqslant \alpha\right\} \text{ і } \tau_\beta = \inf\left\{t \geqslant 0 : X_t^C \geqslant \beta\right\}.$$

За формулою Іто для будь-якого $t > 0$

$$\mathsf{E}[F\left(X^C(t \wedge \tau_\alpha \wedge \tau_\beta)\right)] = F(x_0) - \mathsf{E}(t \wedge \tau_\alpha \wedge \tau_\beta). \tag{4.4}$$

З цієї формули та з невід'ємності F випливає, що

$$\mathsf{E}(t \wedge \tau_\alpha \wedge \tau_\beta) \leqslant F(x_0),$$

і при $t \to \infty$

$$\mathsf{E}(\tau_\alpha \wedge \tau_\beta) \leqslant F(x_0) < \infty.$$

Це означає, що X^C виходить з будь-якого компактного підінтервала $[\alpha, \beta] \subset (0, \infty)$ за скінченний час. З граничних умов та рівності $\mathsf{P}(\tau_\alpha \wedge \tau_\beta < \infty) = 1$ випливає, що $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{E}\, F\left(X^C(t \wedge \tau_\alpha \wedge \tau_\beta)\right) = 0$, а тоді з (4.4)

$$\mathsf{E}(\tau_\alpha \wedge \tau_\beta) = F(x_0).$$

Тепер визначимо функцію

$$V(x) = \int\limits_1^x \exp\left\{-\int\limits_1^y \frac{2f(x)}{g^2(x)} dz\right\} dy, \quad x \in (0, \infty),$$

яка має неперервну додатну похідну $V'(x)$, і друга похідна $V''(x)$ якої має вигляд $V''(x) = -\frac{2f(x)}{g^2(x)} V'(x)$. Тоді для будь-якого $t > 0$ за формулою Іто,

$$V\left(X^C(t \wedge \tau_\alpha \wedge \tau_\beta)\right) = V(x_0) + \int\limits_0^{t\wedge\tau_\alpha\wedge\tau_\beta} V'\left(X_u^C\right) g\left(X_u^C\right) dW(u),$$

і

$$\mathsf{E}[V\left(X^C(t \wedge \tau_\alpha \wedge \tau_\beta)\right)] = V(x_0).$$

При $t \to \infty$ отримаємо

$$V(x_0) = \mathsf{E}[V(X^C(\tau_\alpha \wedge \tau_\beta))] = V(\alpha)\,\mathsf{P}(\tau_\alpha < \tau_\beta) + V(\beta)\,\mathsf{P}(\tau_\beta < \tau_\alpha),$$

звідки

$$\mathsf{P}(\tau_\alpha < \tau_\beta) = \frac{V(\beta) - V(x_0)}{V(\beta) - V(\alpha)} \ \text{ і } \ \mathsf{P}(\tau_\beta < \tau_\alpha) = \frac{V(x_0) - V(\alpha)}{V(\beta) - V(\alpha)}. \tag{4.5}$$

Розглянемо інтеграл

$$V(x) = \int_1^x \exp\left\{-\int_1^y \frac{2(b - z \wedge C)}{\sigma^2(z \wedge C)} dz\right\} dy.$$

Нехай спочатку $x < 1$. Тоді

$$V(x) = \int_1^x \exp\left\{-\int_1^y \frac{2(b-z)}{\sigma^2 z} dz\right\} dy = \int_1^x y^{-\frac{2b}{\sigma^2}} \exp\left\{\frac{2(y-1)}{\sigma^2}\right\} dy,$$

і при $\sigma^2 \leqslant 2b$

$$\lim_{x \downarrow 0} V(x) = -\infty.$$

Нехай тепер x зростає і прямує до нескінченності. Позначимо $C_1 = \int_1^C \exp\left\{\frac{2(y-1)}{\sigma^2}\right\} y^{-\frac{2b}{\sigma^2}} dy$. Тоді при $x > C$

$$\begin{aligned}
V(x) &= \int_1^C \exp\left\{-\int_1^y \frac{2(b-z)}{\sigma^2 z} dz\right\} dy \\
&+ \int_C^x \exp\left\{-\int_1^C \frac{2(b-z)}{\sigma^2 z} dz - \int_C^y \frac{2(b-C)}{\sigma^2 C} dz\right\} dy \\
&= \int_1^C \exp\left\{\frac{2(y-1)}{\sigma^2}\right\} y^{-\frac{2b}{\sigma^2}} dy + C^{-\frac{2b}{\sigma^2}} \exp\left\{\frac{2(C-1)}{\sigma^2}\right\} \times \\
&\times \int_C^x \exp\left\{-\frac{2(b-C)}{\sigma^2 C}(y-C)\right\} dy \\
&= C_1 + C^{-\frac{2b}{\sigma^2}+1} \frac{\sigma^2}{2(C-b)} \exp\left\{\frac{2(C-1)}{\sigma^2}\right\} \times
\end{aligned}$$

$$\times \left(\exp\left\{ \frac{2(C-b)}{\sigma^2 C}(x-C) \right\} - 1 \right),$$

а тоді $\lim\limits_{x\uparrow\infty} V(x) = \infty$. Визначимо

$$\tau_0 = \lim_{\alpha\downarrow 0} \tau_\alpha \ \text{ і } \ \tau_\infty = \lim_{\beta\uparrow\infty} \tau_\beta,$$

і покладемо $\tau = \tau_0 \wedge \tau_\infty$. З (4.5) отримаємо

$$\mathsf{P}\left(\inf_{0\leqslant t<\tau} X_t^C \leqslant \alpha \right) \geqslant \mathsf{P}(\tau_\alpha < \tau_\beta) = \frac{1 - V(x_0)/V(\beta)}{1 - V(\alpha)/V(\beta)},$$

а тоді при $\beta \uparrow \infty$ одержуємо, що для будь-якого $\alpha > 0$ $\mathsf{P}\left(\inf\limits_{0\leqslant t<\tau} X_t^C \leqslant \alpha \right) = 1$, звідки, нарешті, $\mathsf{P}\left(\inf\limits_{0\leqslant t<\tau} X_t^C = 0 \right) = 1$. Аналогічно, $\mathsf{P}\left(\sup\limits_{0\leqslant t<\tau} X_t^C = \infty \right) = 1$. Припустимо тепер, що $\mathsf{P}(\tau < \infty) > 0$, тоді

$$\mathsf{P}\left(\lim_{t\to\tau} X_t^C \ \text{ існує і дорівнює } \ 0 \ \text{ або } \ \infty \right) > 0.$$

Отже, обидві події $\left\{ \inf\limits_{0\leqslant t<\tau} X_t^C = 0 \right\}$ і $\left\{ \sup\limits_{0\leqslant t<\tau} X_t^C = \infty \right\}$ не можуть мати ймовірність 1. Ця суперечність показує, що $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 0$, звідки

$$\mathsf{P}(\tau = \infty) = \mathsf{P}\left(\inf_{0\leqslant t<\tau} X_t^C = 0 \right) = \mathsf{P}\left(\sup_{0\leqslant t<\tau} X_t^C = \infty \right) = 1,$$

якщо $2b \geqslant \sigma^2$. □

Тепер нехай $T > 0$ – фіксоване.

Лема 4.3.

$$\mathsf{P}\{\exists t, t \in [0,T] : X_t \neq X_t^C\} \to 0$$

при $C \to \infty$.

Доведення. Очевидно, що для доведення твердження досить показати

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{t\in[0,T]} |X_t| \geqslant C \right\} \to 0 \text{ при } C \to \infty.$$

Добре відомо (див. н-д [101]), що $\frac{4}{\sigma^2(1-e^{-t})} X_t$ має нецентральний χ^2 розподіл із нецілими ступенями свободи $\frac{4b}{\sigma^2}$ і нецентральним параметром $\frac{4}{\sigma^2(1-e^{-t})} x_0 e^{-t}$.

Для будь-якого $t \geqslant 0$ перший і другий моменти визначаються наступними формулами

$$\mathsf{E}\, X_t = x_0 e^{-t} + b(1 - e^{-t}),$$

$$\mathsf{E}(X_t)^2 = x_0 \left(2b + \sigma^2\right) e^{-t} + \left(x_0^2 - x_0\sigma^2 - 2x_0 b\right) e^{-2t} + \left(\frac{b\sigma^2}{2} + b^2\right) \left(1 - e^{-t}\right)^2.$$

Більше того, існує стала $B > 0$ така, що $\mathsf{E}\, X_t^2 \leqslant B$, коли $\mathsf{E}\, X_t \leqslant B^{1/2}$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Використовуючи нерівність Дуба, оцінимо

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} |X_t| \geqslant C\right\} \leqslant \frac{1}{C^2}\,\mathsf{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} X_t^2\right] =$$

$$= \frac{1}{C^2}\,\mathsf{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left\{\left(X_0 + \int_0^t (b - X_s)\, ds + \sigma \int_0^t \sqrt{X_s} dW_s\right)^2\right\}\right]$$

$$\leqslant \frac{3}{C^2}\left\{X_0^2 + T\,\mathsf{E}\left[\left(\int_0^T |b - X_s|\, ds\right)^2\right] + \sigma^2\,\mathsf{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t \sqrt{X_s} dW_s\right)^2\right]\right\}$$

$$\leqslant \frac{3}{C^2}\left\{X_0^2 + T\,\mathsf{E}\left[\int_0^T (b - X_s)^2\, ds\right] + 4\sigma^2\,\mathsf{E}\left[\int_0^T X_s ds\right]\right\} \leqslant \frac{B_1}{C^2}$$

для деякої сталої $B_1 > 0$. Лему доведено. $\square$

4.1.2. Дискретні апроксимаційні схеми для повного та "зрізаного" процесів Кокса-Інгерсолла-Росса. Розглянемо дискретну апроксимаційну схему для процесу X. Задамо послідовність ймовірнісних просторів $(\Omega^{(n)}, \mathcal{F}^{(n)}, \mathsf{P}^{(n)})$, $n \geqslant 1$. Нехай $\{q_k^{(n)}, n \geqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant n\}$ – послідовність однаково розподілених незалежних випадкових величин на відповідному ймовірнісному просторі, і ці величини приймають одне з можливих значень $\pm\sqrt{\frac{T}{n}}$, причому вони є симетричними, тобто $\mathsf{P}^n\left(q_k^{(n)} = \pm\sqrt{\frac{T}{n}}\right) = \frac{1}{2}$. Нехай далі $n > T$. Дискретні апроксимаційні схеми для випадкових процесів X та X^C побудуємо наступним чином. Для повного процесу розглянемо наближення виду

$$X_0^{(n)} = x_0 > 0, X_k^{(n)} = X_{k-1}^{(n)} + \frac{(b - X_{k-1}^{(n)})T}{n} + \sigma q_k^{(n)} \sqrt{X_{k-1}^{(n)}}, \tag{4.6}$$

$$Q_k^{(n)} := X_k^{(n)} - X_{k-1}^{(n)} = \frac{(b - X_{k-1}^{(n)})T}{n} + \sigma q_k^{(n)} \sqrt{X_{k-1}^{(n)}},\ 1 \leqslant k \leqslant n,$$

а відповідні наближення X^C задамо рівностями

$$\begin{gathered} X_0^{(n,C)} = x_0 > 0, \\ X_k^{(n,C)} = X_{k-1}^{(n,C)} + \frac{(b - (X_{k-1}^{(n,C)} \wedge C))T}{n} + \sigma q_k^{(n)} \sqrt{X_{k-1}^{(n,C)} \wedge C} \end{gathered} \tag{4.7}$$

$$Q_k^{(n,C)} := X_k^{(n,C)} - X_{k-1}^{(n,C)}$$
$$= \frac{(b - (X_{k-1}^{(n,C)} \wedge C))T}{n} + \sigma q_k^{(n)} \sqrt{X_{k-1}^{(n,C)} \wedge C},\ 1 \leqslant k \leqslant n,$$

Коректність побудови цих наближень, яка наразі є сумнівною, оскільки незрозуміло, чи є підкореневі вирази невід'ємними, підтвердимо наступною лемою.

Лема 4.4. *Нехай $n > 2T$.*

1) *За умови $2b \geqslant \sigma^2$ всі значення, що задаються рівностями* (4.6) *та* (4.7)*, є додатними.*
2) *Має місце співвідношення*

$$\mathsf{P}\left\{\exists k, 0 \leqslant k \leqslant n:\ X_k^{(n)} \neq X_k^{(n,C)}\right\} \to 0 \tag{4.8}$$

при $C \to \infty$.

Доведення. 1) Для доведення застосуємо метод математичної індукції. При $k = 1$

$$X_1^{(n)} = x_0 + \frac{(b - x_0)T}{n} + \sigma q_1^{(n)} \sqrt{x_0}.$$

Покажемо, що

$$x_0 + \frac{(b - x_0)T}{n} + \sigma q_1^{(n)} \sqrt{x_0} > 0. \tag{4.9}$$

Для цього зробимо заміну $\sqrt{x_0} = \alpha$ і зведемо (4.9) до квадратної нерівності

$$\alpha^2 \left(1 - \frac{T}{n}\right) + \sigma \sqrt{\frac{T}{n}} \alpha + \frac{bT}{n} > 0,$$

яка очевидно виконується, оскільки дискримінант $D = \frac{\sigma^2 T}{n} - \frac{4bT}{n}\left(1 - \frac{T}{n}\right) < 0$ при $\sigma^2 \leqslant 2b$ і $n > 2T$. Отже, $X_1^{(n)} > 0$. Припустимо тепер, що $X_k^{(n)} > 0$. Виконуючи такі ж перетворення, можна показати, що при $\sigma^2 \leqslant 2b$ і $n > 2T$ значення $X_{k+1}^{(n)} > 0$.

Аналогічно доводиться додатність значень, які задаються рівностями (4.7).

2) Представимо $X_k^{(n)}$ у вигляді

$$\begin{aligned} X_k^{(n)} &= x_0 + \sum_{i=1}^{k} (b - X_{i-1}^{(n)}) \frac{T}{n} + \sigma \sum_{i=1}^{k} q_i^{(n)} \sqrt{X_{i-1}^{(n)}} \\ &= X_{k-1}^{(n)} + \frac{(b - X_{k-1}^{(n)})T}{n} + \sigma q_k^{(n)} \sqrt{X_{k-1}^{(n)}}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Обчислимо

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X_i^{(n)})^2 &= \mathsf{E}\left[\left(X_{i-1}^{(n)}\left(1 - \frac{T}{n}\right) + \frac{bT}{n} + \sigma\sqrt{X_{i-1}^{(n)}} q_i^{(n)}\right)^2\right] \\ &= \mathsf{E}\left[\left(X_{i-1}^{(n)}\left(1 - \frac{T}{n}\right) + \frac{bT}{n}\right)^2\right] + \frac{\sigma^2 T}{n} \mathsf{E}\, X_{i-1}^{(n)} \\ &= \left(\frac{bT}{n}\right)^2 + \left[\frac{\sigma^2 T}{n} + \frac{2bT}{n}\left(1 - \frac{T}{n}\right)\right] \mathsf{E}\, X_{i-1}^{(n)} + \left(1 - \frac{T}{n}\right)^2 \mathsf{E}\left(X_{i-1}^{(n)}\right)^2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Припустимо, що $\mathsf{E}\left(X_j^{(n)}\right)^2 \leqslant \beta^2$, $1 \leqslant j \leqslant i-1$ для деякого $\beta > 0$. Тоді $\mathsf{E}\, X_j^{(n)} \leqslant \beta$, $1 \leqslant j \leqslant i-1$. Запишемо квадратну нерівність вигляду

$$\left(1 - \frac{T}{n}\right)^2 \beta^2 + \left[\frac{\sigma^2 T}{n} + \frac{2bT}{n}\left(1 - \frac{T}{n}\right)\right] \beta + \left(\frac{bT}{n}\right)^2 < \beta^2.$$

Або

$$\left(\left(1 - \frac{T}{n}\right)^2 - 1\right) \beta^2 + \left[\frac{\sigma^2 T}{n} + \frac{2bT}{n}\left(1 - \frac{T}{n}\right)\right] \beta + \left(\frac{bT}{n}\right)^2 < 0,$$

яка очевидно виконується при $\beta > \frac{\sigma^2 + 2b + \sqrt{\sigma^4 + 4b\sigma^2 + 8b^2}}{\frac{3}{2}}$. Отже, для всіх $1 \leqslant i \leqslant n$ $\mathsf{E}\, X_i^{(n)} \leqslant \frac{\sigma^2 + 2b + \sqrt{\sigma^4 + 4b\sigma^2 + 8b^2}}{\frac{3}{2}} \vee x_0 =: \gamma$.

Тепер оцінимо, з використанням нерівності Буркхолдера,

$$0 \leqslant \mathsf{E}\left[\sup_{0 \leqslant k \leqslant n} \left(X_k^{(n)}\right)^2\right] \leqslant 2\left(x_0 + bT\right)^2 + 2\sigma^2\, \mathsf{E}\left[\sup_{0 \leqslant k \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i^{(n)} \sqrt{X_{i-1}^{(n)}}\right)^2\right]$$

$$\leqslant 2\left(x_0+bT\right)^2+8\sigma^2\,\mathsf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} q_i^{(n)}\sqrt{X_{i-1}^{(n)}}\right)^2\right]$$
$$\leqslant 2\left(x_0+bT\right)^2+8\sigma^2\gamma T.$$

Тому

$$\mathsf{P}\left\{\exists k, 0\leqslant k\leqslant n : X_k^{(n)}\neq X_k^{(n,C)}\right\}=\mathsf{P}\{\sup_{0\leqslant k\leqslant n} X_k^{(n)}\geqslant C\}$$
$$\leqslant C^{-2}\,\mathsf{E}\sup_{0\leqslant k\leqslant n}(X_k^{(n)})^2\leqslant 2C^{-2}(x_0+bT)^2+8\sigma^2C^{-2}\gamma T,$$

звідки і випливає доведення. □

Розглянемо послідовність східчастих процесів, що відповідають обом схемам:

$$X_t^{(n)}=X_k^{(n)}\ \text{для}\ \frac{kT}{n}\leqslant t<\frac{(k+1)T}{n}$$

та

$$X_t^{(n,C)}=X_k^{(n,C)}\ \text{для}\ \frac{kT}{n}\leqslant t<\frac{(k+1)T}{n}.$$

Тобто, траєкторії процесів $X^{(n)}$ та $X^{(n,C)}$ мають стрибки в точках kT/n , $k=0,\dots,n$ і є сталими на внутрішніх інтервалах. Розглянемо потоки сігма-алгебр $\mathcal{F}_k^n=\sigma(X_t^{(n)},t\leqslant\frac{kT}{n})$. З ними узгоджені і процеси $X^{(n,C)}$, тому далі ми можемо розглядати одні і ті ж потоки сігма-алгебр для всіх дискретних апроксимаційних схем і ототожнити $\mathcal{F}_t^n$ з $\mathcal{F}_k^n$ для $\frac{kT}{n}\leqslant t<\frac{(k+1)T}{n}$.

Зауваження 4.2. Співвідношення (4.8) можна тепер переформулювати так:

$$\mathsf{P}\left\{\exists t, t\in[0,T] : X_t^{(n)}\neq X_t^{(n,C)}\right\}\to 0,$$

при $C\to\infty$.

Позначимо через Q і $\mathsf{Q}^n, n\geqslant 1$ міри, що відповідають процесам X і $X^{(n)}, n\geqslant 1$, відповідно, а через Q^C і $\mathsf{Q}^{n,C}, n\geqslant 1$ міри, що відповідають процесам X^C і $X^{(n,C)}, n\geqslant 1$, відповідно. Слабку збіжність мір, що відповідають випадковим процесам, позначимо символом $\xrightarrow{W}$. Для доведення слабкої збіжності мір $\mathsf{Q}^{n,C}$ до міри Q^C, використаємо теорему 3.2 з [70], яку сформулюємо наступним чином.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови:*

(i) *Для будь-якого* $\epsilon > 0$

$$\lim_n \mathsf{P}\left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n} |Q_k^{(n,C)}| \geqslant \epsilon\right) = 0;$$

(ii) *Для будь-якого* $\epsilon > 0$, $a \in (0,1]$

$$\lim_n \mathsf{P}^n\left(\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|\sum_{1\leqslant k\leqslant\left[\frac{nt}{T}\right]} \mathsf{E}\left[Q_k^{(n,C)}\mathbb{1}_{\left\{|Q_k^{(n,C)}|\leqslant a\right\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}^n\right]\right.\right.$$
$$\left.\left.-\int_0^t (b - X_s^{(n,C)} \wedge C)ds\right| \geqslant \epsilon\right) = 0;$$

(iii) *Для будь-якого* $\epsilon > 0$, $a \in (0,1]$

$$\lim_n \mathsf{P}^n\left(\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|\sum_{1\leqslant k\leqslant\left[\frac{nt}{T}\right]} \left(\mathsf{E}\left[\left(Q_k^{(n,C)}\right)^2\mathbb{1}_{\left\{|Q_k^{(n,C)}|\leqslant a\right\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}^n\right] -\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\left(\mathsf{E}\left[Q_k^{(n,C)}\mathbb{1}_{\left\{|Q_k^{(n,C)}|\leqslant a\right\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}^n\right]\right)^2\right) - \sigma^2\int_0^t (X_s^{(n,C)} \wedge C)ds\right| \geqslant \epsilon\right) = 0;$$

Тоді має місце слабка збіжність мір $\mathsf{Q}^{n,C} \xrightarrow{W} \mathsf{Q}^C$ *при* $n \to \infty$.

За допомогою теореми 4.1 доведемо наступний результат.

Теорема 4.2. *Має місце слабка збіжність мір* $\mathsf{Q}^{n,C} \xrightarrow{W} \mathsf{Q}^C$ *при* $n \to \infty$.

Доведення. Очевидно, треба показати виконання умов (i) – (iii) теореми 4.1. Із співвідношення (4.7) випливає, що $\sup\limits_{0\leqslant k\leqslant n} |Q_k^{(n,C)}| \leqslant \frac{b+CT}{n} + \sigma\sqrt{\frac{TC}{n}}$. Отже, існує така стала $C_2 > 0$, що $\sup\limits_{0\leqslant k\leqslant n} |Q_k^{(n,C)}| \leqslant \frac{C_2}{\sqrt{n}}$. Тому умова (i) виконується.

Перевіримо умову (ii). Нехай $a > 0$ задано. Розглянемо ті $n \geqslant 1$, для яких $\frac{C_2}{\sqrt{n}} \leqslant a$, тобто $n \geqslant \left(\frac{C_2}{a}\right)^2$. Для таких n

$$\mathsf{E}\left[Q_k^{(n,C)}\mathbb{1}_{\left\{|Q_k^{(n,C)}|\leqslant a\right\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}^n\right] = \mathsf{E}\left[Q_k^{(n,C)} \mid \mathcal{F}_{k-1}^n\right] =$$
$$= \frac{(b - (X_{k-1}^{(n,C)} \wedge C))T}{n} + \sigma\,\mathsf{E}\left[q_k^{(n)}\sqrt{X_{k-1}^{(n,C)} \wedge C}\right] \tag{4.12}$$
$$= \frac{(b - (X_{k-1}^{(n,C)} \wedge C))T}{n}.$$

Тому для будь-якого $\epsilon > 0$ маємо

$$\mathsf{P}^n\left(\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|\sum_{1\leqslant k\leqslant\left[\frac{nt}{T}\right]}\mathsf{E}\left[Q_k^{(n,C)}1\!\!1_{\left\{|Q_k^{(n,C)}|\leqslant a\right\}}\mid\mathcal{F}_{k-1}^n\right]-\int\limits_0^t(b-(X_s^{(n,C)}\wedge C))ds\right|\geqslant\epsilon\right)$$

$$=\mathsf{P}^n\left(\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|\sum_{1\leqslant k\leqslant\left[\frac{nt}{T}\right]}\frac{(b-(X_{k-1}^{(n,C)}\wedge C))T}{n}-\sum_{0\leqslant k\leqslant\left[\frac{nt}{T}\right]-1}(b-(X_k^{(n,C)}\wedge C))\frac{T}{n}\right.\right.$$

$$\left.\left.-(b-(X_{\left[\frac{nt}{T}\right]}^{(n,C)}\wedge C))\left(t-\frac{\left[\frac{nt}{T}\right]T}{n}\right)\right|\geqslant\epsilon\right)$$

$$=\mathsf{P}^n\left(\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|(b-(X_{\left[\frac{nt}{T}\right]}^{(n,C)}\wedge C))\left(t-\frac{\left[\frac{nt}{T}\right]T}{n}\right)\right|\geqslant\epsilon\right)=0.$$

Таким чином, умова (ii) виконується. Далі, перевіримо умову (iii). Запишемо

$$\mathsf{E}\left[\left(Q_k^{(n,C)}\right)^2 1\!\!1_{\left\{|Q_k^{(n,C)}|\leqslant a\right\}}\mid\mathcal{F}_{k-1}^n\right]=\mathsf{E}\left[\left(Q_k^{(n,C)}\right)^2\mid\mathcal{F}_{k-1}^n\right]=$$

$$=\left(\frac{(b-(X_{k-1}^{(n,C)}\wedge C))T}{n}\right)^2+2\frac{(b-(X_{k-1}^{(n,C)}\wedge C))T}{n}\sigma\,\mathsf{E}\left[q_k^{(n)}\sqrt{X_{k-1}^{(n,C)}\wedge C}\right]$$

$$+\sigma^2\,\mathsf{E}\left[(q_k^{(n)})^2\left(X_{k-1}^{(n,C)}\wedge C\right)\right]=\left(\frac{(b-(X_{k-1}^{(n,C)}\wedge C))T}{n}\right)^2+\sigma^2\frac{T}{n}\left(X_{k-1}^{(n,C)}\wedge C\right).$$

Тому для будь-якого $\epsilon > 0$ маємо

$$\mathsf{P}^n\left(\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|\sum_{1\leqslant k\leqslant\left[\frac{nt}{T}\right]}\left(\mathsf{E}\left[\left(Q_k^{(n,C)}\right)^2 1\!\!1_{\left\{|Q_k^{(n,C)}|\leqslant a\right\}}\mid\mathcal{F}_{k-1}^n\right]-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\left(\mathsf{E}\left[Q_k^{(n,C)}1\!\!1_{\left\{|Q_k^{(n,C)}|\leqslant a\right\}}\mid\mathcal{F}_{k-1}^n\right]\right)^2\right)-\sigma^2\int\limits_0^t(X_s^{(n,C)}\wedge C)ds\right|\geqslant\epsilon\right)$$

$$=\mathsf{P}^n\left(\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|\sum_{1\leqslant k\leqslant\left[\frac{nt}{T}\right]}\left(\left(\frac{\left(b-(X_{k-1}^{(n,C)}\wedge C)\right)T}{n}\right)^2+\sigma^2\frac{T}{n}\left(X_{k-1}^{(n,C)}\wedge C\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\left(b-(X_{k-1}^{(n,C)}\wedge C)\right)T}{n}\right)^2\right)-\sum_{0\leqslant k\leqslant\left[\frac{nt}{T}\right]-1}\left(\sigma^2\frac{T}{n}\left(X_k^{(n,C)}\wedge C\right)\right)$$

$$-\sigma^2\left(X^{(n,C)}_{\left[\frac{nt}{T}\right]}\wedge C\right)\left(t-\frac{\left[\frac{nt}{T}\right]T}{n}\right)\Bigg|\geqslant\epsilon\Bigg)$$

$$=\mathsf{P}^n\left(\sup_{t\in\mathbb{T}}\left(\sigma^2\left(X^{(n,C)}_{\left[\frac{nt}{T}\right]}\wedge C\right)\left(t-\frac{\left[\frac{nt}{T}\right]T}{n}\right)\right)\geqslant\epsilon\right)=0.$$

Теорему доведено. □

Теорема 4.3. *Має місце слабка збіжність мір* $\mathsf{Q}^n\xrightarrow{W}\mathsf{Q}$ *при* $n\to\infty$.

Доведення. З теореми 4.7 та теореми 4.2 випливає, що достатньо довести наступну рівність

$$\lim_{C\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|X^{(n)}_t-X^{(n,C)}_t\right|\geqslant\epsilon\right\}=0.$$

Але в силу зауваження 4.2

$$\lim_{C\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|X^{(n)}_t-X^{(n,C)}_t\right|\geqslant\epsilon\right\}$$

$$\leqslant\lim_{C\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathsf{P}\left\{\exists t,t\in[0,T]:X^{(n)}_t\neq X^{(n,C)}_t\right\}=0.$$

□

4.1.3. Мультиплікативна схема для процесу Кокса-Інгерсолла-Росса. В цьому розділі побудуємо дискретну апроксимаційну мультиплікативну схему для процесу e^{X_t}, $t\in[0,T]$, де X_t – процес Кокса-Інгерсолла-Росса, заданий рівнянням (4.2). Для цього розглянемо дискретну апроксимаційну схему (4.6)–(4.7), і на її основі побудуємо мультиплікативний процес

$$S^{n,C}_t=\exp\left\{X^{(n,C)}_0\right\}\prod_{1\leqslant k\leqslant\left[\frac{tn}{T}\right]}\left(1+Q^{(n,C)}_k\right),\ t\in\mathbb{T}.$$

$$S^C_t=\exp\left\{X^C_t-\frac{\sigma^2}{2}\int\limits_0^t(X^C_t\wedge C)dt\right\},\ t\in\mathbb{T}$$

$$S^n_t=\exp\{x_0\}\prod_{1\leqslant k\leqslant\left[\frac{tn}{T}\right]}\left(1+Q^{(n)}_k\right),\ t\in\mathbb{T},$$

$$S_t = \exp\left\{X_t - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t X_t dt\right\},\ t \in \mathbb{T}$$

$$\widetilde{S}_t^n = \exp\{x_0\} \prod_{1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{tn}{T}\right]} \left[\left(1 + Q_k^{(n,C)}\right) \exp\left\{\frac{\sigma^2}{2n} X_k^{(n)}\right\}\right],\ t \in \mathbb{T}$$

і

$$\widetilde{S}_t = \exp\{X_t\},\ t \in \mathbb{T}.$$

Позначимо через G^C, $\mathsf{G}^{n,C}$, G, G^n, $\widetilde{\mathsf{G}}$ та $\widetilde{\mathsf{G}}^n$, $n \geqslant 1$ міри, які відповідають процесам S_t^C, $S_t^{n,C}$, S_t, S_t^n, $\widetilde{S}_t$ та $\widetilde{S}_t^n$, $n \geqslant 1$, відповідно.

Для доведення слабкої збіжності мір, використаємо теорему 3.3 з [70], яку сформулюємо наступним чином.

Теорема 4.4. *Нехай виконуються умови:*

(i) $\sup\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |Q_k^{(n,C)}| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0,\ n \to \infty$;

(ii) *Для будь-якого* $a \in (0,1]$

$$\lim_{D\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}^n \left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \mathsf{E}\left[\left(Q_k^{(n,C)}\right)^2 \mathbb{1}_{\left\{|Q_k^{(n,C)}| \leqslant a\right\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}^n\right] \geqslant D\right) = 0;$$

(iii) *Для будь-якого* $a \in (0,1]$

$$\lim_{D\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}^n \left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \left|\mathsf{E}\left[Q_k^{(n,C)} \mathbb{1}_{\left\{|Q_k^{(n,C)}| \leqslant a\right\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}^n\right]\right| \geqslant D\right) = 0;$$

(iv) *Для будь-якого* $\epsilon > 0$, $a \in (0,1]$

$$\lim_n \mathsf{P}^n \left(\sup_{t\in\mathbb{T}} \left| \sum_{1\leqslant k\leqslant\left[\frac{nt}{T}\right]} \mathsf{E}\left[Q_k^{(n,C)} \mathbb{1}_{\left\{|Q_k^{(n,C)}| \leqslant a\right\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}^n\right] - \int_0^t (b - X_s^{(n,C)} \wedge C) ds \right| \geqslant \epsilon\right) = 0;$$

(v) *Для будь-якого* $\epsilon > 0$, $a \in (0,1]$

$$\lim_n \mathsf{P}^n \left(\sup_{t\in\mathbb{T}} \left| \sum_{1\leqslant k\leqslant\left[\frac{nt}{T}\right]} \mathsf{E}\left[\left(Q_k^{(n,C)}\right)^2 \mathbb{1}_{\left\{|Q_k^{(n,C)}| \leqslant a\right\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}^n\right]\right.\right.$$

$$-\sigma^2\int\limits_0^t (X_s^{(n,C)}\wedge C)ds\Bigg|\geqslant\epsilon\Bigg)=0.$$

Тоді має місце слабка збіжність мір $\mathsf{G}^{n,C}\xrightarrow{W}\mathsf{G}^C$ *при* $n\to\infty$.

За допомогою теореми 4.4 доведемо наступний результат.

Теорема 4.5. *Має місце слабка збіжність мір* $\mathsf{G}^{n,C}\xrightarrow{W}\mathsf{G}^C$ *при* $n\to\infty$.

Доведення. Згідно з теоремою 4.4, треба перевірити виконання умов (i) - (v). Виконання умов (i) та (iv) було встановлено в доведенні теореми 4.2. Покажемо, що виконується умова (ii). В доведенні теореми 4.2 було також показано, що $\sup\limits_{0\leqslant k\leqslant n}|Q_k^{(n,C)}|\leqslant\frac{C_2}{\sqrt{n}}$. Тому для будь-якого $a\in(0,1]$, починаючи з деякого номера n

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\mathsf{E}\left[\left(Q_k^{(n,C)}\right)^2\mathbb{1}_{\left\{|Q_k^{(n,C)}|\leqslant a\right\}}\mid\mathcal{F}_{k-1}^n\right]=$$
$$=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\mathsf{E}\left[\left(Q_k^{(n,C)}\right)^2\mid\mathcal{F}_{k-1}^n\right]\leqslant\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{C_2^2}{n}\leqslant C_2^2,$$

тобто умова (ii) справді виконується. Тепер, з (4.12) слідує, що для будь-якого $a\in(0,1]$, починаючи з деякого номера n

$$\left|\mathsf{E}\left[Q_k^{(n,C)}\mathbb{1}_{\left\{|Q_k^{(n,C)}|\leqslant a\right\}}\mid\mathcal{F}_{k-1}^n\right]\right|=\left|\mathsf{E}\left[Q_k^{(n,C)}\mid\mathcal{F}_{k-1}^n\right]\right|\leqslant\frac{C_3}{n},$$

тому умова (iii) також виконується.

Перевіримо умову (v). Для будь-якого $\epsilon>0$ і $a\in(0,1]$

$$\lim_n\mathsf{P}^n\left(\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|\sum_{1\leqslant k\leqslant\left[\frac{nt}{T}\right]}\mathsf{E}\left[\left(Q_k^{(n,C)}\right)^2\mathbb{1}_{\left\{|Q_k^{(n,C)}|\leqslant a\right\}}\mid\mathcal{F}_{k-1}^n\right]\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sigma^2\int\limits_0^t(X_s^{(n,C)}\wedge C)ds\right|\geqslant\epsilon\right)$$
$$=\lim_n\mathsf{P}^n\left(\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|\sum_{1\leqslant k\leqslant\left[\frac{nt}{T}\right]}\left(\left(\frac{\left(b-(X_{k-1}^{(n,C)}\wedge C)\right)T}{n}\right)^2+\sigma^2\frac{T}{n}\left(X_{k-1}^{(n,C)}\wedge C\right)\right)\right.\right.$$

$$- \sum_{0\leqslant k\leqslant \left[\frac{nt}{T}\right]-1} \left(\sigma^2 \frac{T}{n}\left(X_k^{(n,C)} \wedge C\right)\right) - \sigma^2 \left(X_{\left[\frac{nt}{T}\right]}^{(n,C)} \wedge C\right)\left(t - \frac{\left[\frac{nt}{T}\right]T}{n}\right)\Bigg| \geqslant \epsilon \Bigg)$$

$$\leqslant \lim_n \mathsf{P}^n \left(\sup_{t\in\mathbb{T}}\left(\frac{(|b|+C)^2 Tt}{n} + \sigma^2\left(X_{\left[\frac{nt}{T}\right]}^{(n,C)} \wedge C\right)\left(t - \frac{\left[\frac{nt}{T}\right]T}{n}\right)\right) \geqslant \epsilon\right) = 0.$$

Теорему доведено. □

Теорема 4.6. *Має місце слабка збіжність мір* $\mathsf{G}^n \xrightarrow{W} \mathsf{G}$ *при* $n \to \infty$.

Доведення. Доведення випливає з теореми 4.7, теореми 4.5 та зауваження 4.2

$$\lim_{C\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|X_t^{(n)} - X_t^{(n,C)}\right| \geqslant \epsilon\right\}$$
$$\leqslant \lim_{C\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{P}\left\{\exists t, t \in [0,T] : X_t^{(n)} \neq X_t^{(n,C)}\right\} = 0.$$

□

Зауваження 4.3. Аналогічним чином може бути доведено, що має місце слабка збіжність мір $\widetilde{\mathsf{G}}^n \xrightarrow{W} \widetilde{\mathsf{G}}$, при $n \to \infty$.

4.1.4. Додаткові результати. Наведемо теорему 4.2 з [23], яку сформулюємо в наступному вигляді.

Теорема 4.7. *Нехай маємо сукупність процесів* $\left\{X^{(n,C)}, n \geqslant 1, C > 0\right\}$, $\left\{X^C, C > 0\right\}$, $\left\{X^{(n)}, n \geqslant 1\right\}$ *та випадковий процес* X *на проміжку* $[0,T]$, *а* $\mathsf{Q}^{n,C}$, Q^C, Q^n *та* Q *– відповідні їм міри. Нехай для будь-якого* $C > 0$ $\mathsf{Q}^{n,C} \xrightarrow{W} \mathsf{Q}^C$ *при* $n \to \infty$ *і* $\mathsf{Q}^C \xrightarrow{W} \mathsf{Q}$ *при* $C \to \infty$. *Припустимо далі, що для будь-якого* $\epsilon > 0$

$$\lim_{C\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|X_t^{(n,C)} - X_t^{(n)}\right| \geqslant \epsilon\right\} = 0.$$

Тоді $\mathsf{Q}^n \xrightarrow{W} \mathsf{Q}$ *при* $n \to \infty$.

Нехай функції $b, \sigma(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервні. Розглянемо наступне стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = \sigma\left(X(t)\right) dW(t) + b\left(X(t)\right) dt, \tag{4.13}$$

де $W = (W(t))$ – вінерівський процес.

Теорема 4.8. *[55, с. 177]. Якщо $\sigma(x)$ і $b(x)$ неперервні і задовольняють умову*

$$|\sigma(x)|^2 + |b(x)|^2 \leqslant K(1 + |x|^2) \tag{4.14}$$

для деякої додатної сталої K, тоді будь-який розв'язок рівняння (4.13) такий, що $\mathsf{E}\left(|X(0)|^2\right) < \infty$, маємо $\mathsf{E}\left(|X(t)|^2\right) < \infty$ для всіх $t > 0$.

Теорема 4.9. *[55, с. 182]. Нехай $\sigma(x)$ та $b(x)$ обмежені. Припустимо, що виконуються наступні умови:*

(i) *існує строго зростаюча функція $\rho(u)$ на $[0, \infty)$ така, що $\rho(0) = 0$, $\int\limits_{0+} \rho^{-2}(u)du = \infty$ і $|\sigma(x) - \sigma(y)| \leqslant \rho(|x - y|)$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}$.*

(ii) *існує зростаюча увігнута функція $k(u)$ на $[0, \infty)$ така, що $k(0) = 0$, $\int\limits_{0+} k^{-1}(u)du = \infty$ і $|b(x) - b(y)| \leqslant k(|x - y|)$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}$.*

Тоді виконується потраєкторна єдиність розв'язків рівняння (4.13), а, отже, дане рівняння має єдиний розв'язок.

4.2. Застосування числення Маллявена до точного і наближеного оцінювання опціонів на акції зі стохастичною волатильністю

4.2.1. Опис моделі зі стохастичною волатильністю, що описується процесом Кокса–Інгерсолла–Росса. Нехай задано повний імовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t^{(W,\widetilde{W})}, t \geqslant 0\}, \mathsf{P}\}$ з фільтрацією, породженою двома вінерівськими процесами $\{W_t,\ \widetilde{W}_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$. Розглянемо модель ринку з одним безризиковим і одним ризиковим активом, причому ціна безризикового активу задається невипадковою експонентою $B_t = \mathrm{e}^{rt}$, де $r > 0$, а ціна ризикового активу задається геометричним броунівським рухом $\{S_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ зі стохастичною волатильністю, яка в свою чергу є вимірною функцією від іншого стохастичного процесу. В роботі припускаємо, що другий процес може бути процесом Кокса–Інгерсолла–Росса. Тобто ринок описується парою стохастичних диференціальних рівнянь

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{X_t} S_t dW_t, \tag{4.15}$$

$$dX_t = (b - X_t)dt + \sigma \sqrt{X_t} d\widetilde{W}_t. \tag{4.16}$$

Позначимо $X_0 > 0$ невипадкове початкове значення процесу, визначеного рівнянням (4.16). Позначимо також

$$\overline{Y}_t = (1, Y_t) = (1, e^{-rt} S_t)$$

вектор дисконтованих цін активів. Нехай виконуються умови

(A1) вінерівські процеси W і $\widetilde{W}$ є некорельованими, а отже, незалежними;

(A2) коефіцієнти b і σ є додатними і $\sigma^2 \leqslant 2b$.

Розв'язок рівняння (4.15) має вид

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{1}{2}\int_0^t X_s ds + \int_0^t \sqrt{X_s} dW_s\right).$$

Нагадаємо, що процес Кокса–Інгерсолла–Росса, що задається рівнянням (4.16), має наступні характеристики

$$\mathsf{E}[X_t] = X_0 \, \mathrm{e}^{-t} + b(1 - \mathrm{e}^{-t}),$$

$$\mathrm{Var}[X_t] = X_0 \sigma^2 (\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}) + \frac{b\sigma^2}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^2.$$

Відповідний дисконтований актив має вигляд

$$Y_t = S_0 \exp\left((\mu - r)t - \frac{1}{2}\int_0^t X_s ds + \int_0^t \sqrt{X_s} dW_s\right)$$

і задовольняє рівняння

$$dY_t = (\mu - r)dt + \sqrt{X_s} Y_s dW_s. \tag{4.17}$$

На основі рівняння (4.17) ми можемо подати дисконтований ціновий процес як $Y_t = S_0 + M_t + A_t$, де $M_t = \int_0^t \sqrt{X_s} Y_s dW_s$ – неперервний локальний мартингал, $A_t = (\mu - \sigma)t$ – неперервний процес обмеженої варіації.

Модель (4.15)–(4.16) називається моделлю Хестона.

4.2.2. Безарбітражність у моделі Хестона зі стохастичною волатильністю, що описується процесом Кокса–Інгерсолла–Росса. Питання безарбітражності моделі (4.15)–(4.16) є ключовим при оцінюванні опціонів. Відомо, що існує декілька означень безарбітражності для семімартингальних моделей з неперервним часом. Вони докладно описані в книгах [34] та [89] та розрізняються, зокрема, класами допустимих торгівельних стратегій. Ми розглянемо поняття безарбітражності у сенсі $\overline{NA_g}$, ([34, 89]), тобто у випадку, коли клас допустимих стратегій складається з таких самофінансованих стратегій, для яких максимальний збиток або борг за портфелем у будь-який момент часу $t \in [0, T]$ обмежений знизу скалярним добутком $(\overline{g}, \overline{Y}_t)$, де $\overline{g}$ – деякий вектор з додатними компонентами, а $\overline{Y}_t$ – вектор дисконтованих цін активів, представлених на ринку. Природним чином, відсутність арбітражу пов'язана з наявністю мартингальних мір.

Означення 4.1. Імовірнісна міра Q, еквівалентна до об'єктивної міри P, називається еквівалентною мартингальною мірою, якщо дисконтований ціновий процес є мартингалом за мірою Q.

Означення 4.2. Нехай ціна дисконтованого активу на фінансовому ринку – це P-семімартингал Y, який має зображення $Y = Y_0 + M + A$, де M – локальний P-мартингал, A – адаптований процес обмеженої варіації. Мартингальна міра Q, еквівалентна до об'єктивної міри P, називається мінімальною мартингальною мірою (MMM), якщо $\mathsf{Q} = \mathsf{P}$ на $\mathcal{F}_0$, і будь-який квадратично інтегровний P-мартингал, строго ортогональний до процесу M, є локальним Q-мартингалом.

Зауважимо, що, згідно з попереднім, в нашій моделі компоненти розкладу дорівнюють $Y_0 = S_0,\ M_t = \int_0^t \sqrt{X_s} Y_s dW_s,\ A_t = (\mu - r)t$.

В цій моделі "кандидатами" на роль мартингальних є всі ймовірнісні міри Q, звуження похідної Радона–Нікодима яких на $\mathcal{F}_t$ має вигляд

$$\frac{d\,\mathsf{Q}}{d\,\mathsf{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left\{ \int\limits_0^t \frac{r-\mu}{\sqrt{X_s}} dW_s + \int\limits_0^t \nu_s d\widetilde{W}_s - \frac{1}{2} \int\limits_0^t \left(\frac{(r-\mu)^2}{X_s} + \nu_s^2 \right) ds \right\}, \quad (4.18)$$

де $\nu = (\nu_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ – прогресивно вимірний процес, для якого $\int\limits_0^T \nu_s^2 ds < \infty$ P –м.н. Для доведення безарбітражності ринку покладемо $\nu_s = 0$. Тоді (4.18) прийме вигляд

$$\frac{d\,\mathsf{Q}}{d\,\mathsf{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = L_{1,t} := \exp\left\{\int\limits_0^t \frac{r-\mu}{\sqrt{X_s}} dW_s - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(\frac{(r-\mu)^2}{X_s}\right) ds\right\}, \tag{4.19}$$

причому, згідно з теоремою 3.6 та наслідком 3.3 зі статті [97], дійсно, $\mathsf{E}[L_{1,t}] = 1$ і ціна дисконтованої акції

$$Y_t = \exp\left\{\int\limits_0^t \sqrt{X_s} d\widetilde{W}_s^{\mathsf{Q}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^t X_s ds\right\}$$

є Q-мартингалом, тобто ринок безарбітражний. Отже, Q є еквівалентною мартингальною мірою, а звідси випливає безарбітражність в сенсі $\overline{NA_g}$. Відносно еквівалентної мартингальної міри Q з похідною Радона–Нікодима (4.19) пара процесів (S_t, X_t) має наступне зображення:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{X_t} S_t dW_t^{\mathsf{Q}}, \\ dX_t &= (b - X_t)\, dt + \sigma\sqrt{X_t} d\widetilde{W}_t^{\mathsf{Q}}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

де, за теоремою Гірсанова, процеси

$$W_t^{\mathsf{Q}} = W_t + \int\limits_0^t \frac{\mu - r}{\sqrt{X_s}} ds,$$
$$\widetilde{W}_t^{\mathsf{Q}} = \widetilde{W}_t,$$

є незалежними вінерівськими процесами відносно Q. Очевидно, ця міра є мінімальною мартингальною мірою.

4.2.3. Ціна опціону в моделі зі стохастичною волатильністю як функціонал від волатильності. Позначимо V_C ціну у початковий момент часу Європейського опціону купівлі $C = (S_T - K)^+$ зі страйковою ціною $K \geqslant 0$ в моделі (4.20). Вказана ціна задається виразом

$$V_C = \mathrm{e}^{-rT}\,\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\{(S_T^{\mathsf{Q}} - K)^+\} = \mathrm{e}^{-rT}\,\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\{\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\{(S_T^{\mathsf{Q}} - K)^+ | X_s, 0 \leqslant s \leqslant T\}\}. \tag{4.21}$$

Внутрішнє математичне сподівання є умовним за траєкторією $\{X_s, 0 \leqslant s \leqslant T\}$, і тому є ціною Блека-Шоулса для моделі з невипадковою волатильністю, залежною від часу. Згідно з лемою 2.1 з [74], внутрішнє умовне математичне сподівання у (4.21), позначимо його $E(\widetilde{\sigma})$, має наступне зображення:

$$\begin{aligned} E(\widetilde{\sigma}) &:= \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\{(S_T^{\mathsf{Q}} - K)^+ | X_s, 0 \leqslant s \leqslant T\} \\ &= S_0 \, \mathrm{e}^{rT} \, \Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r + \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2)T - \ln K}{\widetilde{\sigma}\sqrt{T}}\right) \\ &-K\Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r - \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2)T - \ln K}{\widetilde{\sigma}\sqrt{T}}\right), \end{aligned} \tag{4.22}$$

де $\widetilde{\sigma} := \left(\dfrac{1}{T}\int_0^T X_s ds\right)^{\frac{1}{2}}$, $\Phi(\cdot)$ – функція стандартного нормального розподілу. Функцію $\widetilde{\sigma}$ можна трактувати як усереднену волатильність за період часу від початкового моменту до моменту виконання опціону. Формула (4.22) показує, що ціна опціону на модель Блека–Шоулса зі стохастичною волатильністю повністю визначається розподілом випадкової величини $\widetilde{\sigma}$.

4.2.4. Стохастична похідна і ціна опціону. Елементи числення Маллявена. Щільність як функціонал від стохастичної похідної. Тепер застосуємо числення Маллявена, зокрема, поняття стохастичної похідної, за допомогою якої запишемо щільність розподілу випадкової величини $\widetilde{\sigma}$.

Спочатку дамо необхідні означення і сформулюємо твердження щодо щільності розподілу як функціонала від стохастичної похідної. Більш детально основи та застосування числення Маллявена викладено у [77].

Нехай $W = \{W(t), t \in [0,T]\}$, – вінерівський процес на імовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t^W, t \in [0,T], \mathsf{P}\}$, де $\Omega = C([0,T], \mathbb{R})$.

Позначимо $\widehat{C}^{\infty}(R)$ множину всіх нескінченно диференційовних функцій із похідними не вище поліноміального зростання на нескінченності.

Означення 4.3. Назвемо гладкими випадкові величини F вигляду $F = f(W(t_1), \ldots, W(t_n))$, $f = f(x^1, \ldots, x^n) \in \widehat{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $t_1, \ldots t_n \in [0,T]$. Клас гладких величин позначимо через $\mathcal{S}$.

Означення 4.4. Нехай $F \in \mathcal{S}$. Стохастичною похідною випадкової величини F в точці t назвемо випадкову величину

$$D_t F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(W(t_1), \ldots, W(t_n)) \mathbb{1}_{[0,t_i]}(t), \quad t \in [0, T].$$

Областю визначення оператора похідної $D : L^2(\Omega) \to L^2([0, T], \mathbb{R})$ є гільбертів простір випадкових величин $\mathbb{D}^{1,2}$, на якому скалярний добуток задається наступним чином:

$$\langle F, G \rangle_{1,2} = \mathsf{E}(FG) + \mathsf{E}(\langle DF, DG \rangle_H), \quad H = L^2[0, T].$$

Простір $\mathbb{D}^{1,2}$ є щільною підмножиною $L^2(\Omega)$ і замиканням класу гладких випадкових процесів $\mathcal{S}$ відносно норми

$$||F||_{1,2} = [\mathsf{E}(|F|^2) + \mathsf{E}(||DF||_H^2)]^{1/2}.$$

Отже, оператор похідної D є замкненим, необмеженим і визначеним на щільній підмножині простору $L^2(\Omega)$ (див. [77]).

Означення 4.5. Позначимо через δ спряжений до D оператор, який є необмеженим оператором в $L^2([0, T], \mathbb{R})$ зі значеннями в $L^2(\Omega)$, таким що:

(i) область визначення δ є множиною квадратично інтегровних випадкових величин $u \in L^2([0, T], \mathbb{R})$, для яких

$$|\mathsf{E}\left(\langle DF, u \rangle_H\right)| \leqslant C(\mathsf{E}(F^2))^{1/2},$$

для всіх $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, де C деяка стала, що залежить від u;

(ii) якщо u належить до області визначення δ, то $\delta(u)$ є елементом $L^2(\Omega)$ і

$$\mathsf{E}\left(F\delta(u)\right) = \mathsf{E}\left(\langle DF, u \rangle_H\right)$$

для всіх $F \in \mathbb{D}^{1,2}$.

Оператор δ є замкненим як спряжений до необмеженого і щільно визначеного оператора. Позначимо його область визначення $\operatorname{Dom} \delta$.

Розглянемо простір $L^{1,2} = L^2([0,T], \mathbb{D}^{1,2})$ з нормою $||\cdot||_{L^{1,2}}$, де

$$||u||^2_{L^{1,2}} = \mathsf{E}\left(\int_0^T u_t^2 dt + \int_0^T \int_0^T (D_s u_t)^2 \, dt ds\right).$$

Зауваження 4.4. Якщо $u \in L^{1,2}$, то інтеграл $\delta(u)$ коректно означено, і має місце оцінка

$$\mathsf{E}\left(\int_0^T u_t dW_t\right)^2 \leqslant ||u||^2_{L^{1,2}}$$

(див. [78], [80]). У цьому випадку оператор $\delta(u)$ називається інтегралом Скорохода процесу u, і позначається через

$$\delta(u) = \int_0^T u_t dW_t.$$

Наступне твердження є фундаментальним для доведення основного результату цього підрозділу.

Лема 4.5. ***(твердження 2.1.1 з [77])*** *Нехай F – випадкова величина з простору $\mathbb{D}^{1,2}$. Припустимо, що $\frac{DF}{\|DF\|_H^2}$ належить області визначення оператора δ. Тоді щільність випадкової величини F є неперервною, обмеженою і має вигляд*

$$p(x) = \mathsf{E}\left[\mathbb{1}_{\{F>x\}}\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|_H^2}\right)\right].$$

Також далі застосовуватиметься наступний аналог теореми Фубіні для інтегралу Скорохода.

Лема 4.6. ***(лема 2.10 з [63])*** *Нехай виконуються наступні умови:*

1) *Функція $u(t,h,\omega) \in L^2\left([0,T]^2 \times \Omega\right)$, і майже для всіх $t \in [0,T]$ випадковий процес $u(t,\cdot) \in \mathrm{Dom}\,\delta$;*
2) $\mathsf{E}\left[\int_0^T |\delta(u(t,\cdot))|^2 dt\right] < \infty$.

Тоді $\{\int_0^T u(t,h)dt,\ h \in [0,T]\} \in \mathrm{Dom}\,\delta$, *і*

$$\int_0^T \int_0^T u(t,h) dt dW_h = \int_0^T \int_0^T u(t,h) dW_h dt.$$

Перед тим як сформулювати і довести основний результат цього підрозділу, нагадаємо, що, випадкова величина $\widetilde{\sigma} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T X_s ds\right)^{\frac{1}{2}}$ повністю визначає ціну опціона у моделі (4.20).

Теорема 4.10. *Нехай* $6\sigma^2 < b$. *Для процесу KIP* X, *визначеного стохастичним диференціальним рівнянням* (4.16), *випадкова величина* $\widetilde{\sigma}^2$ *має неперервну обмежену функцію щільності вигляду:*

$$p_{\widetilde{\sigma}^2}(x) = \mathsf{E}\left[\mathbb{1}_{\{\widetilde{\sigma}>\sqrt{x}\}}\left(\frac{T}{\sigma}\int\limits_0^T\sqrt{X_t}\int\limits_0^t\Psi_{h,t}dW_h\,dt - \frac{T}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^t\Psi_{h,t}\psi_{h,t}dh\,dt\right)\right], \tag{4.23}$$

де

$$\psi_{h,t} := \exp\left\{-\frac{t-h}{2} - \left(\frac{b}{2}-\frac{\sigma^2}{8}\right)\int\limits_h^t\frac{ds}{X_s}\right\},$$

$$\Psi_{h,t} = \psi_{h,t}\left[\int\limits_0^T\int\limits_0^T\sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}}\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2}dh\,dt_1dt_2\right]^{-1}.$$

Доведення. Знайдемо щільність для випадкової величини $\widetilde{\sigma}^2$. За наслідком 4.2 з [16] стохастична похідна процесу (4.16) має вигляд

$$D_hX_t = \sigma\exp\left\{\int\limits_h^t\left[-\frac{1}{2}-\left(\frac{b}{2}-\frac{\sigma^2}{8}\right)\frac{1}{X_s}\right]ds\right\}\sqrt{X_t}$$

$$= \sigma\exp\left\{-\frac{t-h}{2}-\left(\frac{b}{2}-\frac{\sigma^2}{8}\right)\int\limits_h^t\frac{ds}{X_s}\right\}\sqrt{X_t} = \sigma\psi_{h,t}\sqrt{X_t}.$$

Тоді для

$$I_T(X_t) = \int\limits_0^T X_t\,dt$$

відповідна стохастична похідна дорівнює

$$D_hI_T(X_t) = \int\limits_0^T D_hX_t\,dt = \sigma\int\limits_h^T\psi_{h,t}\sqrt{X_t}\,dt,\ \ h\leqslant T.$$

Тепер потрібно визначити, чи існує інтеграл Скорохода

$$\widetilde{\delta} := \delta\left(\frac{D\widetilde{\sigma}^2}{\|D\widetilde{\sigma}^2\|^2}\right).$$

Зауважимо, що

$$D_h\widetilde{\sigma}^2 = \frac{\sigma}{T}\int\limits_h^T \psi_{h,t}\sqrt{X_t}\,dt,$$

а відповідна норма дорівнює

$$\|D\widetilde{\sigma}^2\|^2 = \int\limits_0^T (D_h\widetilde{\sigma})^2\,dh = \frac{\sigma^2}{T^2}\int\limits_0^T\left(\int\limits_h^T \psi_{h,t}\sqrt{X_t}\,dt\right)^2 dh$$
$$= \frac{\sigma^2}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T \sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}}\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2}dhdt_1dt_2.$$

Таким чином, випадковий процес

$$\widetilde{\zeta}_h := \frac{D_h\widetilde{\sigma}^2}{\|D\widetilde{\sigma}^2\|^2}$$

дорівнює

$$\widetilde{\zeta}_h = \frac{T}{\sigma}\int\limits_h^T \sqrt{X_t}\Psi_{h,t}dt = \frac{T}{\sigma}\int\limits_h^T \widetilde{u}(t,h)dt, \;\; \widetilde{u}(t,h) := \sqrt{X_t}\Psi_{h,t}.$$

Згідно з лемою 4.8 процес $\widetilde{\zeta}_h$ є інтегровним за Скороходом. Отже, інтеграл $\widetilde{\delta}$ існує. Перевіримо тепер виконання умов леми 4.6. Згідно з лемою 4.8,

$$\mathsf{E}\left[\int\limits_0^T\int\limits_0^T \widetilde{u}^2(t,h)dtdh\right] = \int\limits_0^T\int\limits_0^T \mathsf{E}(X_t\Psi^2_{h,t})dhdt < \infty$$

тому $\widetilde{u}(t,h,\omega) \in L^2\left([0,T]^2\times\Omega\right)$. Той факт, що що при кожному фіксованому $t\in[0,T]$ $\widetilde{u}(t,h)\in \operatorname{Dom}\delta$, з урахуванням нерівностей (4.26), (4.28)

$$\mathsf{E}\left[\int\limits_0^T \widetilde{u}^2(t,h)dh + \int\limits_0^T\int\limits_0^T (D_s\widetilde{u}(t,h))^2dsdh\right]$$
$$= \mathsf{E}\left[\int\limits_0^T (\sqrt{X_t}\Psi_{h,t})^2dh + \int\limits_0^T\int\limits_0^T (D_s\sqrt{X_t}\Psi_{h,t})^2dsdh\right] < \infty.$$

Отже, перша умова леми 4.6 виконується. Очевидно, друга умова також має місце, оскільки

$$\mathsf{E}\left[\int_0^T (\delta(\widetilde{u}(t,h)))^2\,dt\right]$$
$$=\int_0^T \mathsf{E}\left[\int_0^T \widetilde{u}^2(t,h)dt+\int_0^T\int_0^T D_s\widetilde{u}(t,h)D_t\widetilde{u}(s,h)dsdt\right]<\infty,$$

враховуючи, що підінтегральний вираз скінченний за лемою 4.8.

Тепер, застосовуючи послідовно теорему Фубіні та теорему 3.2 з [78], отримуємо

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta}&=\frac{T}{\sigma}\int_0^T\int_0^T\sqrt{X_t}\Psi_{h,t}\mathbb{1}_{\{h<t\}}dtdW_h\\&=\frac{T}{\sigma}\int_0^T\int_0^T\sqrt{X_t}\Psi_{h,t}\mathbb{1}_{\{h<t\}}dW_hdt\\&=\frac{T}{\sigma}\int_0^T\left(\sqrt{X_t}\int_0^T\Psi_{h,t}\mathbb{1}_{\{h<t\}}dW_h-\int_0^T\Psi_{h,t}D_h\sqrt{X_t}\mathbb{1}_{\{h<t\}}dh\right)dt\\&=\frac{T}{\sigma}\int_0^T\sqrt{X_t}\int_0^t\Psi_{h,t}dW_hdt-\int_0^T\int_0^t\Psi_{h,t}\frac{D_hX_t}{2\sqrt{X_t}}dhdt\\&=\frac{T}{\sigma}\int_0^T\sqrt{X_t}\int_0^t\Psi_{h,t}dW_hdt-\frac{T}{2}\int_0^T\int_0^t\Psi_{h,t}\psi_{h,t}dhdt.\end{aligned}$$

□

Відмітимо, що вигляд даної функції щільності можна дещо спростити.

Наслідок 4.1. *Нехай* $6\sigma^2<b$*. Для процесу KIP* X*, визначеного стохастичним диференціальним рівнянням* (4.16)*, випадкова величина* $\widetilde{\sigma}^2$ *має*

неперервну обмежену функцію щільності вигляду:

$$
\begin{aligned}
p_{1,\widetilde{\sigma}^2}(x) = \mathbb{E}\Bigg[\mathbb{1}_{\{\widetilde{\sigma}>\sqrt{x}\}}\frac{T}{\sigma}\Bigg(\int\limits_0^T \sqrt{X_t}\Psi_t \int\limits_0^t \psi_{1,h} dW_h dt \\
- \int\limits_0^T \int\limits_0^t \psi_h D_h\left(\sqrt{X_t}\Psi_t\right) dh dt\Bigg)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

де

$$
\Psi_t = \psi_{2,t}\left[\int\limits_0^T \int\limits_0^T \sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}} \int\limits_0^{t_1\wedge t_2} \psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2} dh\, dt_1 dt_2\right]^{-1},
$$

$$
\psi_{1,h} := \exp\left\{\frac{h}{2} + \left(\frac{b}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right)\int\limits_0^h \frac{ds}{X_s}\right\},\ \ \psi_{2,t} := \exp\left\{-\frac{t}{2} - \left(\frac{b}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right)\int\limits_0^t \frac{ds}{X_s}\right\}.
$$

Значення стохастичної похідної $D_h\left(\sqrt{X_t}\Psi_t\right)$ знайдено у лемі 4.9.

Доведення. Даний наслідок повністю випливає з попередньої теореми. Очевидно, що

$$
\psi_{h,t} = \psi_{1,h}\psi_{2,t} = \exp\left\{\frac{h}{2} + \left(\frac{b}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right)\int\limits_0^h \frac{ds}{X_s}\right\}\exp\left\{-\frac{t}{2} - \left(\frac{b}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right)\int\limits_0^t \frac{ds}{X_s}\right\},
$$

тоді, відповідно,

$$
\Psi_{h,t} = \psi_{1,h}\Psi_t = \psi_{1,h}\psi_{2,t}\left[\int\limits_0^T \int\limits_0^T \sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}} \int\limits_0^{t_1\wedge t_2} \psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2} dh\, dt_1 dt_2\right]^{-1}.
$$

Проводячи повністю аналогічні міркування навелені вище, отримаємо

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\delta} &= \frac{T}{\sigma}\int\limits_0^T \int\limits_0^T \sqrt{X_t}\Psi_{h,t}\mathbb{1}_{\{h<t\}} dt dW_h \\
&= \frac{T}{\sigma}\int\limits_0^T \int\limits_0^T \sqrt{X_t}\Psi_{h,t}\mathbb{1}_{\{h<t\}} dW_h dt \\
&= \frac{T}{\sigma}\int\limits_0^T \left(\sqrt{X_t}\Psi_t \int\limits_0^T \psi_{1,h}\mathbb{1}_{\{h<t\}} dW_h - \int\limits_0^T \psi_{1,h} D_h\left(\sqrt{X_t}\Psi_t\right)\mathbb{1}_{\{h<t\}} dh\right) dt
\end{aligned}
$$

$$= \frac{T}{\sigma}\left(\int\limits_0^T \sqrt{X_t}\Psi_t \int\limits_0^t \psi_{1,h} dW_h dt - \int\limits_0^T\int\limits_0^t \psi_{1,h} D_h\left(\sqrt{X_t}\Psi_t\right) dh dt\right).$$

□

Наслідок 4.2. *Нехай виконуються умови теореми 4.10. Тоді ціна у початковий момент часу Європейського опціону купівлі $C = (S_T - K)^+$ зі страйковою ціною $K \geqslant 0$ задається виразом*

$$V_C = \int\limits_0^\infty \left(S_0 \Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r + \frac{1}{2}x)T - \ln K}{\sqrt{xT}}\right)\right.$$
$$\left. -K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r - \frac{1}{2}x)T - \ln K}{\sqrt{xT}}\right)\right) p(x)dx,$$

де $p(x) = p_{\widetilde{\sigma}^2}(x)$ *визначено у* (4.23), *або* $p(x) = p_{1,\widetilde{\sigma}^2}(x)$ *визначено у* (4.24).

4.2.5. Допоміжні результати. Першим доведемо результат стосовно обмеженості моментів від'ємного порядку для випадкових моментів виходу процесу Кокса–Інгерсолла–Росса X з деякого інтервалу. Для процесу КІР, що стартує з точки $X_0 > 0$ позначимо $\widetilde{\tau} = \inf\{t > 0 : |X_t - X_0| \geqslant \frac{X_0}{2}\}$ та $\widetilde{\tau}_1 = \widetilde{\tau} \wedge T$.

Лема 4.7. *Будь-які від'ємні моменти вказаних моментів виходу скінченні, а саме,* $\mathsf{E}(\widetilde{\tau}_1)^{-p} < \infty$ *для всіх* $p > 0$.

Доведення. Згідно з лемою 10.5 [55], якщо $K > 0$ і $Y = \{Y_t, t \geqslant 0\}$ – одновимірний неперервний напівмартингал вигляду

$$Y_t = Y_0 + M_t + A_t,$$

де $\langle M\rangle_t = \int_0^t \alpha(s)ds$ і $A_t = \int_0^t \beta(s)ds$, причому $|\alpha(s)| \leqslant K$ і $|\beta(s)| \leqslant K$, то для моменту $\widetilde{\tau}_{\frac{X_0}{2}}$ виходу цього напівмартингалу з інтервалу $[Y_0 - \frac{X_0}{2}, Y_0 + \frac{X_0}{2}]$ і для всіх $\lambda \in (0, \frac{X_0}{4K}]$

$$\mathsf{P}\{\widetilde{\tau}_{\frac{X_0}{2}} < \lambda\} \leqslant \frac{4}{\sqrt{\pi\frac{X_0}{2}}}\exp\left\{-\frac{X_0^2}{32K\lambda}\right\}.$$

Розглянемо процес Кокса-Інгерсолла-Росса
$X_t = X_0 - \int_0^t (b - X_s)ds + \sigma \int_0^t \sqrt{X_s} dW_s$ з вінерівським процесом W, виберемо будь-яке $N > \frac{3X_0}{2}$ і позначимо $\widetilde{\tau}^N = \inf\{t > 0 : |X_t| \geqslant N\}$. Тоді $\widetilde{\tau}_N > \widetilde{\tau}_{\frac{X_0}{2}}$. Далі,

$$\widehat{X}_t := X_{t\wedge\widetilde{\tau}_N} = X_0 - \int\limits_0^t (b - X_{s\wedge\widetilde{\tau}_N}) \mathbb{1}_{\{s\leqslant\widetilde{\tau}_N\}} ds + \sigma \int\limits_0^t \sqrt{X_{s\wedge\widetilde{\tau}_N}} \mathbb{1}_{\{s\leqslant\widetilde{\tau}_N\}} dW_s,$$

і напівмартингал $\widehat{X}_t$ задовольняє умови леми 10.5 [55] при $K = N\sigma$. Крім того, якщо позначити $\widetilde{\tau}^N_{\frac{X_0}{2}} = \inf\{t > 0 : |\widehat{X}_t - X_0| \geqslant \frac{X_0}{2}\}$ то $\widetilde{\tau}^N_{\frac{X_0}{2}} = \widetilde{\tau}_{\frac{X_0}{2}}$. Тому в околі нуля розподіл моменту виходу $\widetilde{\tau}$ допускає експоненційну оцінку: існують такі сталі C_1, C_2, C_3, що

$$\mathbb{P}\{\widetilde{\tau}_{\frac{X_0}{2}} < \lambda\} \leqslant C_1 \exp\left\{-\frac{C_2}{\lambda}\right\}, 0 < \lambda < C_3,$$

і те саме вірне для $\widetilde{\tau}_1$. Звідси випливає твердження леми. Лему доведено. □

Зауваження 4.5. Для доведення наступної леми наведемо результат з [35, нерівність (3.1)]: $\sup\limits_{[0,T]} \mathsf{E}\, X_t^p < \infty$ для будь-якого $p > -\frac{2b}{\sigma^2}$.

Лема 4.8. *Нехай коефіцієнти процесу КІР, заданого рівнянням* (4.16)*, задовольняють умову* $6\sigma^2 < b$*. Тоді* $\sqrt{X_t}\Psi_{h,t} \in L^{1,2}$ *і* $\int\limits_h^T \sqrt{X_t}\Psi_{h,t} dt \in L^{1,2}$.

Доведення. Доведемо друге включення, яке потребує більше перетворень, а тоді для першого доведення повністю аналогічне. Необхідно показати, що

$$\left\| \int\limits_h^T \sqrt{X_t}\Psi_{h,t} dt \right\|^2_{L^{1,2}} = \mathsf{E}\left[\int\limits_0^T \left(\int\limits_h^T \sqrt{X_t}\Psi_{h,t} dt \right)^2 dh \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^T \int\limits_0^T \left(D_l \int\limits_h^T \sqrt{X_t}\Psi_{h,t} dt \right)^2 dl dh \right] < \infty. \tag{4.25}$$

Запишемо спочатку функцію

$$\sqrt{X_t}\Psi_{h,t} = \sqrt{X_t}\psi_{h,t} \left[\int\limits_0^T \int\limits_0^T \sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}} \int\limits_0^{t_1\wedge t_2} \psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2} dh\, dt_1 dt_2 \right]^{-1}.$$

Оцінимо знаменник даної функції знизу. Запишемо

$$I := \int_0^T \int_0^T \sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}} \int_0^{t_1\wedge t_2} \psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2} dh\, dt_1 dt_2$$

$$= \int_0^T \int_0^T \sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}} \int_0^{t_1\wedge t_2} \exp\left\{-\frac{t_1-h}{2} - \left(\frac{b}{2}-\frac{\sigma^2}{8}\right)\int_h^{t_1}\frac{ds}{X_s}\right\}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{t_2-h}{2} - \left(\frac{b}{2}-\frac{\sigma^2}{8}\right)\int_h^{t_2}\frac{ds}{X_s}\right\} dh\, dt_1 dt_2.$$

Нагадаємо, що $\widetilde{\tau} := \inf\left\{t : |X_t - X_0| > \frac{X_0}{2}\right\}$, $\widetilde{\tau}_1 = \widetilde{\tau}\wedge T$. Позначимо через $q := \frac{b}{2} - \frac{\sigma^2}{8}$. З умови леми випливає, що $q > 0$. Отримаємо

$$I \geqslant \frac{X_0}{2} \int_0^{\widetilde{\tau}_1}\int_0^{\widetilde{\tau}_1}\int_0^{t_1\wedge t_2} \exp\left\{-\frac{t_1-h}{2} - \frac{2q}{X_0}\int_h^{t_1} ds\right\}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{t_2-h}{2} - \frac{2q}{X_0}\int_h^{t_2} ds\right\} dh\, dt_1 dt_2$$

$$= \frac{X_0}{2} \int_0^{\widetilde{\tau}_1}\int_0^{\widetilde{\tau}_1}\int_0^{t_1\wedge t_2} \exp\left\{-\frac{t_1-h}{2} - \frac{2q}{X_0}(t_1-h)\right\}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{t_2-h}{2} - \frac{2q}{X_0}(t_2-h)\right\} dh\, dt_1 dt_2.$$

Оскільки $t_1 - h < T$ і $t_2 - h < T$, то має місце наступна оцінка

$$I \geqslant \frac{X_0}{12}\exp\left\{-\frac{T(X_0+4q)}{X_0}\right\}\widetilde{\tau}_1^3.$$

Далі несуттєві сталі будем позначати C або C з індексами. Зауважимо, що функції $\psi_{h,t}$ обмежені зверху одиницею. Тоді можна записати просто

$$I \geqslant C\widetilde{\tau}_1^3, \ \text{ і } \ \Psi_{h,t} \leqslant C\widetilde{\tau}_1^{-3}.$$

Тому

$$\mathsf{E}(X_t\Psi_{h,t}^2) \leqslant \left(\mathsf{E}\,X_t^2\,\mathsf{E}\,\Psi_{h,t}^2\right)^{\frac12} \leqslant C\left(\mathsf{E}\,X_t^2\right)^{\frac12}\left(\mathsf{E}\,\widetilde{\tau}_1^{-6}\right)^{\frac12}.$$

Далі, з умови леми та зауваження 4.5 випливає, що $\sup\limits_{t\in[0,T]} \mathsf{E}\, X_t^p < \infty$ для будь-якого $p \geqslant -12$. Скінченність $\mathsf{E}\,\widetilde{\tau}_1^{-6}$ випливає з леми 4.7. Тому існує стала $C > 0$ така, що

$$\sup_{t,h\in[0,T]} \mathsf{E}(X_t \Psi_{h,t}^2) \leqslant C. \tag{4.26}$$

Доведемо тепер обмеженість першого доданку з правої частини рівності (4.25). Справді,

$$\mathsf{E}\left[\int\limits_0^T \left(\int\limits_h^T \sqrt{X_t}\Psi_{h,t} dt\right)^2 dh\right] \leqslant T \int\limits_0^T \int\limits_h^T \mathsf{E}(X_t \Psi_{h,t}^2) dt dh \leqslant C_1.$$

Покажемо тепер обмеженість другого доданку з правої частини рівності (4.25).

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[\int\limits_0^T \int\limits_0^T \left(D_l \int\limits_h^T \sqrt{X_t}\Psi_{h,t} dt\right)^2 dl dh\right] \\
&= \mathsf{E}\left[\int\limits_0^T \int\limits_0^T \left(\int\limits_h^T D_l(\sqrt{X_t}\Psi_{h,t}) dt\right)^2\right] dl dh \\
&\leqslant T \int\limits_0^T \int\limits_0^T \int\limits_h^T \mathsf{E}(D_l(\sqrt{X_t}\Psi_{h,t}))^2 dt\, dl\, dh.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Знайдемо спочатку саму стохастичну похідну, використовуючи метод ланцюга:

$$D_l(\sqrt{X_t}\Psi_{h,t}) = D_l\left(\sqrt{X_t}\psi_{h,t}\left[\int\limits_0^T \int\limits_0^T \sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}} \int\limits_0^{t_1\wedge t_2} \psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2} dh\, dt_1 dt_2\right]^{-1}\right)$$

$$= D_l\left(\sqrt{X_t}\exp\left\{-\frac{t-h}{2} - q\int\limits_h^t \frac{ds}{X_s}\right\} \times\right.$$

$$\times \left[\int\limits_0^T \int\limits_0^T \int\limits_0^{t_1\wedge t_2} \sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}} \exp\left\{-\frac{t_1-h}{2} - q\int\limits_h^{t_1} \frac{ds}{X_s}\right\} \times\right.$$

$$\times \exp\left\{-\frac{t_2-h}{2}-q\int\limits_h^{t_2}\frac{ds}{X_s}\right\}dh\,dt_1dt_2\Bigg]^{-1}\Bigg)$$

$$= D_l\left(\sqrt{X_t}\exp\left\{-\frac{t-h}{2}-q\int\limits_h^{t}\frac{ds}{X_s}\right\}\right)$$

$$\times\left[\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2}-q\int\limits_h^{t_1}\frac{ds}{X_s}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2}-q\int\limits_h^{t_2}\frac{ds}{X_s}\right\}dh\,dt_1dt_2\right]^{-1}$$

$$+\sqrt{X_t}\exp\left\{-\frac{t-h}{2}-q\int\limits_h^{t}\frac{ds}{X_s}\right\}$$

$$\times D_l\left[\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2}-q\int\limits_h^{t_1}\frac{ds}{X_s}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2}-q\int\limits_h^{t_2}\frac{ds}{X_s}\right\}dh\,dt_1dt_2\right]^{-1}$$

$$= \exp\left\{-\frac{t-h}{2}-q\int\limits_h^{t}\frac{ds}{X_s}\right\}\left(\frac{D_lX_t}{2\sqrt{X_t}}+q\sqrt{X_t}\int\limits_h^{t}\frac{D_lX_s}{X_s^2}ds\right)$$

$$\times\left[\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2}-q\int\limits_h^{t_1}\frac{ds}{X_s}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2}-q\int\limits_h^{t_2}\frac{ds}{X_s}\right\}dh\,dt_1dt_2\right]^{-1}$$

$$-\sqrt{X_t}\exp\left\{-\frac{t-h}{2}-q\int\limits_h^{t}\frac{ds}{X_s}\right\}$$

$$\times\left[\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2}-q\int_h^{t_1}\frac{ds}{X_s}\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2}-q\int_h^{t_2}\frac{ds}{X_s}\right\}dh\,dt_1dt_2\right]^{-2}\times$$

$$\times\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2}-q\int_h^{t_1}\frac{ds}{X_s}\right\}\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2}-q\int_h^{t_2}\frac{ds}{X_s}\right\}\times$$
$$\times\left(\sqrt{X_{t_2}}\left(\frac{D_lX_{t_1}}{2\sqrt{X_{t_1}}}+q\sqrt{X_{t_1}}\int_h^{t_1}\frac{D_lX_s}{X_s^2}ds\right)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{X_{t_1}}\left(\frac{D_lX_{t_2}}{2\sqrt{X_{t_2}}}+q\sqrt{X_{t_2}}\int_h^{t_2}\frac{D_lX_s}{X_s^2}ds\right)\right)dh\,dt_1dt_2.$$

Враховуючи вигляд D_lX_t, $\psi_{h,t}$ та I отримаємо

$$D_l(\sqrt{X_t}\Psi_{h,t})=\sigma\psi_{h,t}\left(\frac{\psi_{l,t}}{2}+q\sqrt{X_t}\int_h^t\frac{\psi_{l,s}}{X_s^{\frac{3}{2}}}ds\right)I^{-1}$$
$$-\sigma\sqrt{X_t}\psi_{h,t}I^{-2}\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2}\left(\sqrt{X_{t_2}}\left(\frac{\psi_{l,t_1}}{2}+q\sqrt{X_{t_1}}\int_h^{t_1}\frac{\psi_{l,s}}{X_s^{\frac{3}{2}}}ds\right)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{X_{t_1}}\left(\frac{\psi_{l,t_2}}{2}+q\sqrt{X_{t_2}}\int_h^{t_2}\frac{\psi_{l,s}}{X_s^2}ds\right)\right)dh\,dt_1dt_2.$$

Для доведення обмеженості другого доданку (4.25), враховуючи (4.27), досить показати, що

$$\sup_{l,h,t}\mathsf{E}\left[(D_l(\sqrt{X_t}\Psi_{h,t}))^2\right]<\infty. \tag{4.28}$$

З цією метою запишемо

$$\mathsf{E}\left[(D_l(\sqrt{X_t}\Psi_{h,t}))^2\right]=\mathsf{E}\left[\left(\sigma\psi_{h,t}\left(\frac{\psi_{l,t}}{2}+q\sqrt{X_t}\int_h^t\frac{\psi_{l,s}}{X_s^{\frac{3}{2}}}ds\right)I^{-1}\right.\right.$$
$$-\sigma\sqrt{X_t}\psi_{h,t}I^{-2}\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2}\left(\sqrt{X_{t_2}}\left(\frac{\psi_{l,t_1}}{2}+q\sqrt{X_{t_1}}\int_h^{t_1}\frac{\psi_{l,s}}{X_s^{\frac{3}{2}}}ds\right)+\right.$$

$$+\sqrt{X_{t_1}}\left(\frac{\psi_{l,t_2}}{2}+q\sqrt{X_{t_2}}\int\limits_h^{t_2}\frac{\psi_{l,s}}{X_s^2}ds\right)\Bigg)\Bigg)\,dh\,dt_1dt_2\Bigg)^2\Bigg]$$

$$\leqslant 2\sigma^2\,\mathsf{E}\left[\left(\psi_{h,t}\left(\frac{\psi_{l,t}}{2}+q\sqrt{X_t}\int\limits_h^t\frac{\psi_{l,s}}{X_s^{\frac{3}{2}}}ds\right)I^{-1}\right)^2\right]$$

$$+2\sigma^2\,\mathsf{E}\Bigg[\Bigg(\sqrt{X_t}\psi_{h,t}I^{-2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2}\Bigg(\sqrt{X_{t_2}}\left(\frac{\psi_{l,t_1}}{2}+q\sqrt{X_{t_1}}\int\limits_h^{t_1}\frac{\psi_{l,s}}{X_s^{\frac{3}{2}}}ds\right)+$$

$$+\sqrt{X_{t_1}}\left(\frac{\psi_{l,t_2}}{2}+q\sqrt{X_{t_2}}\int\limits_h^{t_2}\frac{\psi_{l,s}}{X_s^2}ds\right)\Bigg)\,dh\,dt_1dt_2\Bigg)^2\Bigg].$$

Отже, враховуючи, що $\psi_{h,t}<1$, можемо записати

$$\mathsf{E}\left[(D_l(\sqrt{X_t}\Psi_{h,t}))^2\right]\leqslant 2\sigma^2\,\mathsf{E}\left[\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{X_t}\int\limits_h^t\frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)^2I^{-2}\right]$$

$$+2\sigma^2\,\mathsf{E}\Bigg[\Bigg(\sqrt{X_t}I^{-2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\Bigg(\sqrt{X_{t_2}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{X_{t_1}}\int\limits_h^{t_1}\frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)+$$

$$+\sqrt{X_{t_1}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{X_{t_2}}\int\limits_h^{t_2}\frac{ds}{X_s^2}\right)\Bigg)\,dh\,dt_1dt_2\Bigg)^2\Bigg]=2\sigma^2I_1+2\sigma^2I_2.$$

Оцінимо окремо кожне математичне сподівання. Використовуючи нерівність Гельдера та нерівність $(a+b)^n\leqslant 2^{n-1}(a^n+b^n)$, отримаємо

$$I_1:=\mathsf{E}\left[\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{X_t}\int\limits_h^t\frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)^2I^{-2}\right]$$

$$\leqslant\left(\mathsf{E}\left[\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{X_t}\int\limits_h^t\frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)^4\right]\right)^{1/2}\left(\mathsf{E}\,I^{-4}\right)^{1/2}$$

$$\leqslant C_1\left(\frac{1}{2}+8q^4\,\mathsf{E}\left[\left(\sqrt{X_t}\int\limits_h^t\frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)^4\right]\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathsf{E}\,\widetilde{\tau}_1^{-12}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Обмеженість $\mathsf{E}\,\widetilde{\tau}_1^{-12}$ випливає із леми 4.7. Оцінимо тепер

$$\mathsf{E}\left[\left(\sqrt{X_t}\int\limits_h^t \frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)^4\right] \leqslant \left(\mathsf{E}\,X_t^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathsf{E}\left[\left(\int\limits_h^t \frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)^8\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant T^{\frac{7}{2}}\left(\mathsf{E}\,X_t^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_h^t \mathsf{E}\,X_s^{-12}ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

Беручи до уваги зауваження 4.5 та умову леми, отримуємо, що $\mathsf{E}\left[\left(\sqrt{X_t}\int_h^t \frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)^4\right] \leqslant C$. А це означає, що $I_1 \leqslant C$. Оцінимо тепер I_2.

$$I_2 := \mathsf{E}\left[\left(\sqrt{X_t}I^{-2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\left(\sqrt{X_{t_2}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{X_{t_1}}\int\limits_h^{t_1}\frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\sqrt{X_{t_1}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{X_{t_2}}\int\limits_h^{t_2}\frac{ds}{X_s^{2}}\right)\right)dh\,dt_1dt_2\right)^2\right]$$

$$\leqslant \left(\mathsf{E}(X_t^2I^{-8})\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathsf{E}\left[\left(\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\left(\sqrt{X_{t_2}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{X_{t_1}}\int\limits_h^{t_1}\frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)+\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.+\sqrt{X_{t_1}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{X_{t_2}}\int\limits_h^{t_2}\frac{ds}{X_s^{2}}\right)\right)dh\,dt_1dt_2\right)^4\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant T^{\frac{9}{2}}\left(\mathsf{E}\,X_t^4\right)^{\frac{1}{4}}\left(\mathsf{E}\,I^{-16}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\mathsf{E}\left[\left(\sqrt{X_{t_2}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{X_{t_1}}\int\limits_h^{t_1}\frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\sqrt{X_{t_1}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{X_{t_2}}\int\limits_h^{t_2}\frac{ds}{X_s^{2}}\right)\right)^4\right]dh\,dt_1dt_2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C_2\left(\mathsf{E}\,X_t^4\right)^{\frac{1}{4}}\left(\mathsf{E}\,\widetilde{\tau}_1^{-48}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\mathsf{E}\left[\left(\sqrt{X_{t_2}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{X_{t_1}}\int\limits_h^{t_1}\frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)+\right.\right.\right.$$

$$+\sqrt{X_{t_1}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{X_{t_2}}\int\limits_h^{t_2}\frac{ds}{X_s^2}\right)\right)\right)^4\Bigg]\,dh\,dt_1dt_2\Bigg)^{\frac{1}{2}},$$

де $C_2=\frac{12^4T^{\frac{9}{2}}}{X_0^4}\exp\left\{\frac{4T(X_0+4q)}{X_0}\right\}$. Скінченність величини $\mathsf{E}\,\widetilde{\tau}_1^{-48}$ та обмеженість $\mathsf{E}\,X_t^4$ випливає із зауваження 4.5, леми 4.7 та умови леми. Для доведення обмеженості
$\mathsf{E}\left[\left(\sqrt{X_{t_2}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{X_{t_1}}\int_h^{t_1}\frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)+\sqrt{X_{t_1}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{X_{t_2}}\int_h^{t_2}\frac{ds}{X_s^2}\right)\right)^4\right]$ достатньо показати, що обмежена наступна величина

$$\mathsf{E}\left[\left(\sqrt{X_t}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{X_t}\int\limits_h^t\frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)\right)^4\right]\leqslant\left(\mathsf{E}\,X_t^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathsf{E}\left[\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{X_t}\int\limits_h^t\frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)^8\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\mathsf{E}\,X_t^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+128\,q^8\,\mathsf{E}\left[\left(\sqrt{X_t}\int\limits_h^t\frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)^8\right]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

За умовою леми, $6\sigma^2<b$. Тому можна вибрати $1<d<\frac{b}{6\sigma^2}$. Тоді $-12d>-\frac{2b}{\sigma^2}$, і згідно із зауваженням 4.5,

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathsf{E}\,X_t^{-12d}<\infty.$$

Нехай p таке, що $\frac{1}{p}+\frac{1}{d}=1$. Двічі застосовуючи нерівність Гельдера, одержуємо

$$\mathsf{E}\left[\left(\sqrt{X_t}\int\limits_h^t\frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)^8\right]\leqslant\left(\mathsf{E}\,X_t^{4p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\mathsf{E}\left[\left(\int\limits_h^t\frac{ds}{X_s^{\frac{3}{2}}}\right)^{8d}\right]\right)^{\frac{1}{d}}$$

$$\leqslant T^{\frac{8d-1}{d}}\left(\mathsf{E}\,X_t^{4p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_h^t\mathsf{E}\,X_s^{-12d}ds\right)^{\frac{1}{d}}<\infty.$$

Отже, ми показали, що $I_2\leqslant C$. А це означає, що має місце (4.28), а тоді і (4.25). Лему доведено. □

Лема 4.9. *Нехай виконуються умови теореми 4.10, тоді стохастична* *похідна $D_h(\sqrt{X_t}\Psi_t)$ має вигляд*

$$D_h(\sqrt{X_t}\Psi_t) =$$

$$= \exp\left\{-\frac{t}{2} - q\int_0^t \frac{ds}{X_s}\right\}\left(\frac{D_hX_t}{2\sqrt{X_t}} + q\sqrt{X_t}\int_0^t \frac{D_hX_s}{X_s^2}ds\right)$$
$$\times\left[\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2} - q\int_h^{t_1}\frac{ds}{X_s}\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2} - q\int_h^{t_2}\frac{ds}{X_s}\right\}dh\,dt_1dt_2\right]^{-1}$$

$$-\sqrt{X_t}\exp\left\{-\frac{t}{2} - q\int_0^t \frac{ds}{X_s}\right\}$$
$$\times\left[\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2} - q\int_h^{t_1}\frac{ds}{X_s}\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2} - q\int_h^{t_2}\frac{ds}{X_s}\right\}dh\,dt_1dt_2\right]^{-2}\times$$

$$\times\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2} - q\int_h^{t_1}\frac{ds}{X_s}\right\}\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2} - q\int_h^{t_2}\frac{ds}{X_s}\right\}\times$$
$$\times\left(\sqrt{X_{t_2}}\left(\frac{D_hX_{t_1}}{2\sqrt{X_{t_1}}} + q\sqrt{X_{t_1}}\int_h^{t_1}\frac{D_hX_s}{X_s^2}ds\right)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{X_{t_1}}\left(\frac{D_hX_{t_2}}{2\sqrt{X_{t_2}}} + q\sqrt{X_{t_2}}\int_h^{t_2}\frac{D_hX_s}{X_s^2}ds\right)\right)dh\,dt_1dt_2.$$

Доведення. Ми вже встановили, що подвійний інтеграл у знаменнику Ψ_t і стохастичної похідної від цієї функції м.н. додатний. Тепер обмежимося формальним визначенням вигляду стохастичної похідної.

За правилом ланцюга

$$D_h(\sqrt{X_t}\Psi_t) = D_h\left(\sqrt{X_t}\psi_{2,t}\left[\int\limits_0^T\int\limits_0^T\sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}}\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2}dh\,dt_1dt_2\right]^{-1}\right)$$

$$= D_h\left(\sqrt{X_t}\exp\left\{-\frac{t}{2}-q\int\limits_0^t\frac{ds}{X_s}\right\}\times\right.$$
$$\times\left[\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2}-q\int\limits_h^{t_1}\frac{ds}{X_s}\right\}\times\right.$$
$$\left.\left.\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2}-q\int\limits_h^{t_2}\frac{ds}{X_s}\right\}dh\,dt_1dt_2\right]^{-1}\right)$$

$$= D_h\left(\sqrt{X_t}\exp\left\{-\frac{t}{2}-q\int\limits_0^t\frac{ds}{X_s}\right\}\right)$$
$$\times\left[\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2}-q\int\limits_h^{t_1}\frac{ds}{X_s}\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2}-q\int\limits_h^{t_2}\frac{ds}{X_s}\right\}dh\,dt_1dt_2\right]^{-1}$$

$$+\sqrt{X_t}\exp\left\{-\frac{t}{2}-q\int\limits_0^t\frac{ds}{X_s}\right\}$$
$$\times D_h\left[\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2}-q\int\limits_h^{t_1}\frac{ds}{X_s}\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2}-q\int\limits_h^{t_2}\frac{ds}{X_s}\right\}dh\,dt_1dt_2\right]^{-1}$$

$$
= \exp\left\{-\frac{t}{2} - q\int\limits_0^t \frac{ds}{X_s}\right\}\left(\frac{D_h X_t}{2\sqrt{X_t}} + q\sqrt{X_t}\int\limits_0^t \frac{D_h X_s}{X_s^2} ds\right)
$$

$$
\times\left[\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2} - q\int\limits_h^{t_1}\frac{ds}{X_s}\right\}\times\right.
$$

$$
\left.\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2} - q\int\limits_h^{t_2}\frac{ds}{X_s}\right\} dh\, dt_1 dt_2\right]^{-1}
$$

$$
-\sqrt{X_t}\exp\left\{-\frac{t}{2} - q\int\limits_0^t \frac{ds}{X_s}\right\}
$$

$$
\times\left[\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2} - q\int\limits_h^{t_1}\frac{ds}{X_s}\right\}\times\right.
$$

$$
\left.\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2} - q\int\limits_h^{t_2}\frac{ds}{X_s}\right\} dh\, dt_1 dt_2\right]^{-2}\times
$$

$$
\times\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^{t_1\wedge t_2}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2} - q\int\limits_h^{t_1}\frac{ds}{X_s}\right\}\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2} - q\int\limits_h^{t_2}\frac{ds}{X_s}\right\}\times
$$

$$
\times\left(\sqrt{X_{t_2}}\left(\frac{D_h X_{t_1}}{2\sqrt{X_{t_1}}} + q\sqrt{X_{t_1}}\int\limits_h^{t_1}\frac{D_h X_s}{X_s^2} ds\right)+\right.
$$

$$
\left.+\sqrt{X_{t_1}}\left(\frac{D_h X_{t_2}}{2\sqrt{X_{t_2}}} + q\sqrt{X_{t_2}}\int\limits_h^{t_2}\frac{D_h X_s}{X_s^2} ds\right)\right) dh\, dt_1 dt_2.
$$

Лему доведено. □

Висновки до розділу 4

В першій частині даного розділу розглянуто повний та “зрізаний” процеси Кокса-Інгерсолла-Росса. Доведено, що “зрізаний” процес КІР не заходить в нуль при тій же умові, що й повний процес. Наведено адитивну та мультиплікативну апроксимаційні схеми даного процесу. Доведено слабку збіжність цін активу.

Друга частина присвячена моделі фінансових ринків зі стохастичною волатильністю, яка задається функціоналом від процесу Кокса–Інгерсолла–Росса. Досліджено питання точного обчислення ціни Європейського опціона купівлі. Із застосуванням методів числення Маллявена встановлено вигляд функції щільності випадкової величини, яка виражає середнє значення волатильності протягом часу до виконання опціона. Отриманий результат дозволяє обчислити ціну опціона за мінімальною мартингальною мірою у випадку, коли вінерівський процес, що породжує еволюцію ціни активу, та вінерівський процес, який задає волатильність, є незалежними.

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена розвитку теорії оцінювання опціонів та знаходженню їх швидкості збіжності.

З цією метою було знайдено швидкість збіжності розподілів сум незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального закону розподілу, використовуючи метод “зрізаних” псевдомоментів. Для цього реалізовано ідею Ю.П. Студнєва отримання оцінки швидкості збіжності порядку вище ніж $n^{-\frac{1}{2}}$. Для ринку в схемі серій та для ринку з дискретним часом, утвореного незалежними випадковими величинами, коли їхній розподіл є неперервним, знайдено умови безарбітражності. Доведено, що при певному виборі мартингальної міри випадкові величини, незалежні в сукупності відносно об’єктивної міри, залишаються незалежними в сукупності відносно цієї мартингальної міри. Доведено функціональну граничну теорему для ринку з дискретним часом у схемі Блека-Шоулса. Доведено теорему про оцінку швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу за методом псевдомоментів. Знайдено приклади функцій розподілу, до яких можна застосувати метод псевдомоментів.

Було розглянуто граничну модель цін активів, змодельованих геометричним процесом Орнштейна-Уленбека та опис і властивості допграничного дискретного цінового процесу; дискретну апроксимаційну схема для процесу Орнштейна-Уленбека, яка базується на апроксимації Ейлера, але прирости вінерівського процесу замінюються на бернуллієвські незалежні однаково розподілені випадкові величини. Сформульовано умови, за виконання яких швидкість збіжності об’єктивних і справедливих цін опціонів обмежена зверху величиною $\frac{C}{\sqrt{n}}$. Проаналізовано перехід від об’єктивної міри до мартингальної і зміни, що відбуваються з розподілом цін на ринку при такому переході у вказаній моделі.

Було побудовано дискретні апроксимаційні схеми для ціни активу, який змодельований процесом КІР. Розглянуто дискретну апроксимаційну схему Ейлера для процесу КІР, але прирости вінерівського процесу замінюються на незалежні однаково розподілені обмежені симетричні випадкові величини. Було введено "зрізаний" процес Кокса-Інгерсолла-Росса, який використано для доведення слабкої збіжності цін активу. Встановлено, що "зрізаний" процес КІР не заходить в нуль при тій же умові, що й незрізаний процес. Наведено апроксимаційні схеми для обох процесів. Доведено функціональні граничні теореми для адитивної та мультиплікативної схем в моделі Кокса-Інгерсолла-Росса. Проведено точне і наближене оцінювання опцінів в моделі Хестона, застосовуючи числення Маллявена.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Боярищева Т.В. Дослідження швидкості збіжності сум незалежних випадкових величин / Т.В. Боярищева // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика. — 2014. — Вип. 25, №. 1. — С. 21–27.
2. Гонак С.В. Про одну оцінку Ю.П. Студнєва / С.В. Гонак, І.В. Ситар, П.В. Слюсарчук // Збірник праць студ. наук. конф. матем. ф-ту УжНУ. Серія матем. і прикл. матем. — 2013. — С. 15–16.
3. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей / А.Н. Колмогоров. — М.: ФАЗИС. — 1998. — 144 с.
4. Кучук-Яценко С.В. Застосування числення Маллявена до точного і наближеного оцінювання опціонів на акції зі стохастичною волатильністю / С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Теорія ймовірностей і математична статистика. — 2016. — Вип. 94. — С. 93–115.
4. Kuchuk-Yatsenko S.V. An application of the Malliavin calculus for calculating the precise and approximate prices of options with stochastic volatility / S.V. Kuchuk-Yatsenko, Yu.S. Mishura and Ye.Yu. Munchak // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2017. — No. 94. — P. 97–120.
5. Кучук-Яценко С.В. Обчислення цін опціонів у моделях фінансових ринків, заданих лінійними стохастичними диференціальними рівняннями зі стохастичним коефіцієнтом дифузії/ С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // “Міжнародна літня математична школа пам'яті В.О. Плотнікова”. Тези доповідей. (Одеса, Україна). — 2016. — С. 40.
6. Кучук-Яценко С.В. Модель фінансового ринку, задана лінійним стохастичним диференціальним рівнянням зі стохастичним коефіцієнтом дифузії/ С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Міжнародна

наукова конференція “Диференціальні рівняння та їх застосування”. Тези доповідей. (Ужгород, Україна). — 2016. — С. 86.

7. Мішура Ю.С. Швидкість збіжності цін опціонів з використанням методу псевдомоментів / Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Теорія ймовірностей і математична статистика. — 2015. — Вип. 92. — С. 110-124.
8. Мішура Ю.С. Швидкість збіжності цін опціонів при дискретизації геометричного процесу Орнштейна-Уленбека бернуллієвськими стрибками цін акцій / Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Теорія ймовірностей і математична статистика. — 2015. — Вип. 93. — С. 127-141.
9. Мішура Ю.С. Оцінка швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу/ Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Всеукраїнська наукова конференція. Тези доповідей. — Ворохта, Україна. — 2016. — С. 42.
10. Мішура Ю.С. Оцінка швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу із застосуванням методу псевдомоментів/ Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна – 2016”. — Київ, Україна. — 2016. — С. 54–57.
11. Мішура Ю.С. Функціональні граничні теореми в моделі Кокса-Інгерсолла-Росса/ Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Матеріали XV Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна – 2017”. — Київ, Україна. — 2017. — С. 57–60.
12. Мішура Ю.С. Швидкість збіжності об’єктивних цін опціонів у схемі Бернуллі/ Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. Матеріали конференції. Т. 3. — Київ, Україна. — 2016. — С. 110–112.
13. Слюсарчук П.В. Деякі оцінки швидкості збіжності в центральній граничній теоремі / П.В. Слюсарчук, І.Й. Поляк // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика. — 1997. — Вип. 2. — С. 104–107.

14. Alfonsi A. On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes / A. Alfonsi // Monte Carlo Methods Appl. — 2005. — Vol. 11, No. 4. — P. 355–384.
15. Alfonsi A. High order discretization schemes for the CIR process: application to affine term structure and Heston models / A. Alfonsi // Math. Comput. — 2010. — Vol. 79. — P. 209–237.
16. Alos E. A Note on the Malliavin Differentiability of the Heston Volatility / E. Alos and Ch-O. Ewald // SSRN Electronic Journal, 09/2005 . — 2005. — DOI: 10.2139/ssrn.847645.
17. Altmayer M. Multilevel Monte Carlo Quadrature of Discontinuous Payoffs in the Generalized Heston Model Using Malliavin Integration by Parts / M. Altmayer and A. Neuenkirch // SIAM J. Financ. Math. — 2015. — Vol. 6. — P. 22–52.
18. Bachelier L. Theorie de la speculation / L. Bachelier // Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure. — 1900. — Vol. 3, No. 17. — P. 21–86.
19. Barndorff-Nielsen O.E. Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics / O.E. Barndorff-Nielsen and N. Shephard // Journal of the Royal Statistical Society: Series B, Statistical Methodology. — 2001. — Vol. 63, No.2. — P. 167—241.
20. Bates D. Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options. / D. Bates // Review of Financial Studies. — 1996. — Vol. 9. — P. 69–108.
21. Bates D. Post-'87 Crash fears in S&P 500 Futures Options. / D. Bates // Journal of Econometrics. — 2000. — Vol. 94, No.1-2. — P. 181–238.
22. Berkaoui A. Euler scheme for SDEs with non-Lipschitz diffusion coefficient: strong convergence. / A. Berkaoui, M. Bossy and A. Diop // ESAIM, Probab. Stat. — 2008. — Vol. 12. — P. 1–11.
23. Billingsley P. Convergence of probability measures / P. Billingsley. — New York-London-Sydney-Toronto: John Wiley and Sons. — 1968. — 253 p.

24. Black F. The Pricing of options and corporate liabilities. / F. Black and M. Scholes // Journal of Political Economy. — 1973. — Vol. 81, No.3. — P. 637–659.
25. Bossy M. An efficient discretization scheme for one dimensional SDEs with a diffusion coefficient function of the form $|x|^a$, $a \in [1/2, 1)$. / M. Bossy and A. Diop // INRIA, Sophia Antipolis. — Vol. 5396. — 2007.
26. Brigo D. Interest rate models – theory and practice. With smile, inflation and credit. 2nd ed / D. Brigo and F. Mercurio. — Springer Finance. Berlin: Springer. — 2006. — 981 p.
27. Broadie M. Connecting discrete continuous path-dependent options / M. Broadie, O. Glasserman and S.J. Kou // Finance Stochast. — 1999. — Vol. 3, No. 1. — P. 55–82.
28. Chang L.-B. Smooth convergence in the binomial model / L.-B. Chang and K. Palmer // Finance Stochast. — 2007. — Vol. 11, No. 1. — P. 91–105.
29. Cox J. A Theory of the Term Structure of Interest Rates / J. Cox, J. Ingersoll and S. Ross // Econometrica. — 1985. — Vol. 53, No.2. — P. 385–407.
30. Cutland N. From discrete to continuous financial models: new convergence results for option pricing / N. Cutland, E. Kopp and W. Willinger // Math. Finance. — 1993. — Vol. 3, No. 2. — P. 101–123.
31. Deelstra G. Long-term returns in stochastic interest rate models: different convergence results / G. Deelstra and F. Delbaen // Applied stochastic models and data analysis. — 1997. — Vol. 13, No. 3-4. — P. 401–407.
32. Deelstra G. Convergence of discretized stochastic (interest rate) processes with stochastic drift term / G. Deelstra and F. Delbaen // Applied stochastic models and data analysis. — 1998. — Vol. 14, No. 1. — P. 77–84.
33. Deelstra G. Long-term returns in stochastic interest rate models: Applications / G. Deelstra // Astin Bull. — 2000. — Vol. 30, No. 1. — P. 123–140.
34. Delbaen F. The Mathematics of Arbitrage / F. Delbaen and W. Schachermayer. — Springer-Finance. Berlin: Springer. — 2006. — 373 p.

35. Dereich S. An Euler-type method for the strong approximation of the Cox-Ingersoll-Ross process / S. Dereich, A. Neuenkirch and L. Szpruch // Royal Society. — 2012. — Vol. 468, No. 2140. — P. 1105–1115.
36. D'Ippoliti F. Exact and approximated option pricing in a stochastic volatility jump-diffusion model / F. D'Ippoliti, E. Moretto, S. Pasquali and B. Trivellato // Springer Milan. — 2010. — P. 133–142.— doi: 10.1007/978-88-470-1481-7_14.
37. Duffie D. From discrete- to continuous- time finance: weak convergence of the financial gain process / D. Duffie and P. Protter // Math. Finance. — 1992. — Vol. 2, No. 1. — P. 1–15.
38. Duffie D. Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions / D. Duffie, J. Pan, and K. Singleton // Econometrica. — 2000. — Vol. 68, No.6. — P. 1343–1376.
39. Feller W. An introduction to probability theory and its applications. Vol II. 2nd ed. / W. Feller. — New York etc.: John Wiley and Sons, Inc.: Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. — 1971. — 669 p.
40. Föllmer H. Stochastic finance. An introduction in discrete time / H. Föllmer, A. Schied. — Walter de Gruyter. — 2004. — 459 p.
41. Fournie E. Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance / E. Fournie, J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, P.-L. Lions P.-L, and N. Touzi // Fin. and Stoch. — 1999. — Vol. 3, No. 4. — P. 391—412.
42. Garman M. A general theory of asset valuation under diffusion state processes / M. Garman. „— Center for Research in Management Science. — 1976. — 54 p.
43. Geman H. Stochastic Volatility, Jumps and Hidden Time Changes / H. Geman, D. Madan and M. Yor // Finance and Stochastics. — 2002. — Vol. 6, No. 1. — P. 63–90.
44. Giles M. Improved multilevel Monte Carlo convergence using the Milstein scheme / M.B. Giles // In Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods 2006. Springer: Berlin. — 2008. — P. 343–358.

45. Goard J. Exact and approximate solutions for options with time-dependent stochastic volatility / J. Goard // Applied Mathematical Modelling. — 2014. — Vol. 38, No. 11-12. — P. 2771–2780.
46. Gunther M. Structure preserving stochastic integration schemes in interest rate derivative modeling / M. Gunther, C. Kahl and T. Rossberg // Appl. Numer. Math. — 2008. — Vol. 58, No. 3. — P. 284–295.
47. Gyöngy I. A note on Euler approximations for SDEs with Hölder continuous diffusion coefficients / I. Gyöngy and M. Rasonyi // Stoch. Proc. Appl. — 2011. — Vol. 121, No. 10. — P. 2189–2200.
48. Heinrich S. Monte Carlo complexity of global solution of integral equations / S. Heinrich // J. Complexity. — 1998. — Vol. 14, No. 2. — P. 151–175.
49. Heinrich S. Multilevel Monte Carlo methods / S. Heinrich // Large-Scale Scientific Computing, vol. 2179 of Lect. Notes Comput. Sci. Springer: Berlin. — 2001. — P. 58–67.
50. Heston S. A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bonds and currency options / S. Heston // Rev. Financ. Stud. — 1993. — Vol. 6, No. 2. — P. 327–343.
51. Heston S. On the rate of convergence of discrete-time contingent claims / S. Heston and G. Zhou // Math. Finance. — 2000. — Vol. 10, No. 1. — P. 53–75.
52. Higham D. Convergence of Monte Carlo simulations involving the mean-reverting square root process / D. Higham and X. Mao // Journal of Computational Finance. — 2005. — Vol. 8, No. 3. — P. 35—62.
53. Hubalek F. When does convergence of asset price processes imply convergence of option prices? / F. Hubalek and W. Schachermayer // Math. Finance. — 1998. — Vol. 8, No. 4. — P. 385–403.
54. Hull J. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities / J. Hull and A. White // J. Finance. — 1987. — Vol. 42, No. 2. — P. 281–300.
55. Ikeda N. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Second Edition / N. Ikeda and S. Watanabe. — Amsterdam: North-Holland Math-

cmnticnl Library, 24. — 1989. — 555 p.

56. Jäckel P. Fast strong approximation Monte-Carlo schemes for stochastic volatility models / P. Jäckel and C. Kahl // Quant. Finance. — 2006. — Vol. 6, No. 6. — P. 513–536.
57. Kahl C. Not-so-complex logarithms in the Heston model / C. Kahl and P. Jäckel // Wilmott magazine. — 2005. — Vol. 19, No. 9. — P. 94–103.
58. Karatzas I. Brownian Motion and Stochastic Calculus / I. Karatzas and S. Shreve. — Graduate Texts in Mathematics, 113. New York etc.: Springer-Verlag. — 1991. — 470 p.
59. Kebaier A. Statistical Romberg extrapolation: a new variance reduction method and applications to option pricing / A. Kebaier // Ann. Appl. Probab. — 2005. — Vol. 15, No. 4. — P. 2681–2705.
60. Kou S. A jump-diffusion model with three properties: leptokurtic feature, volatility smile, and analytical tractability / S. Kou // Columbia University working paper. — 1999.
61. Kuchuk-Iatsenko S. Pricing the European call option in the model with stochastic volatility driven by Ornstein-Uhlenbeck process. Exact formulas / S. Kuchuk-Iatsenko and Yu. Mishura // Modern Stoch. Theory Appl. — 2015. — Vol. 2, No. 3. — P. 233–249.
62. Kuchuk-Iatsenko S. Pricing the European call option in the model with stochastic volatility driven by Ornstein-Uhlenbeck process. Simulation / S. Kuchuk-Iatsenko and Yu. Mishura // Modern Stoch. Theory Appl. — 2015. — Vol. 2, No. 4. — P. 355–369.
63. Leon J.A. Stochastic evolution equations with random generators / J.A. Leon and D. Nualart // The Annals of Probability. — 1998. — Vol. 26, No. 1. — P. 149–186.
64. Loeve M. Probability Theory I / M. Loeve. — New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag. XVI. — 1977. — 425 p.
65. Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications / X. Mao // Horwood Pub. — 2008. — 422 P.

66. Merton R.C. Theory of rational option pricing / R.C. Merton // Econom. Manage. Sci. — 1973. — Vol. 4, No. 1. — P. 141–183.
67. Merton R.C. Option Pricing When Underlying Asset Returns are Discontinuous / R.C. Merton // Journal of Financial Economics. — 1976. — Vol. 3. — P. 125–144.
68. Mishura Yu. The rate of convergence of option prices on the asset following geometric Ornstein-Uhlenbeck process / Yu. Mishura // Lithuanian Mathematical Journal. — 2015. — Vol. 55, No. 1. — P. 134–149.
69. Mishura Yu. The rate of convergence of option prices when general martingale discrete-time scheme approximated the Black-Scholes model / Yu. Mishura //.. Advances in Mathematics of Finance, Banach center publication. — 2015. — Vol. 104. — P. 151–165.
70. Mishura Yu. Diffusion approximation of recurrent schemes for financial markets, with application to the Ornstein-Uhlenbeck process / Yu. Mishura // Opuscula Mathematica. — 2015. — Vol. 35, No. 1. — P. 99–116.
71. Mishura Yu. The rate of convergence to the normal law in terms of pseudomoments / Yu. Mishura, Ye. Munchak, P. Slyusarchuk // International conference. Probability, reability and stochastic optimization. Conference materials. — Kyiv, Ukraine. — 2015. — P. 14.
72. Mishura Yu. The rate of convergence to the normal law in terms of pseudomoments / Yu. Mishura, Ye. Munchak, P. Slyusarchuk // Modern Stoch. Theory Appl.. — 2015. — Vol. 2, No. 1. — P. 95–106.
73. Mishura Yu. Functional limit theorems for additive and multiplicative schemes in the Cox-Ingersoll-Ross model / Yu. Mishura, Ye. Munchak // Modern Stoch. Theory Appl.. — 2016. — Vol. 3, No. 1. — P. 1–17.
74. Mishura Yu. European call option issued on a bond governed by a geometric or a fractional geometric Ornstein-Uhlenbeck process / Yu. Mishura, G. Rizhniak and V. Zubchenko // Modern Stoch. Theory Appl. — 2014. — Vol. 1, No. 1. — P. 95–108.

75. Moro E. Boundary preserving semianalytic numerical algorithms for stochastic differential equations / E. Moro, H. Schurz // SIAM J. Sci. Comput. — 2007. — Vol. 29. — P. 1525–1549.
76. Nicolato E. Option Pricing in Stochastic Volatility Models of the Ornstein-Uhlenbeck type / E. Nicolato and E. Venardos // Mathematical Finance. — 2003. — Vol. 13, No. 4. — P. 445-–466.
77. Nualart D. The Malliavin Calculus and Related Topics / D. Nualart. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg. — 2006. — 382 p.
78. Nualart D. Stochastic Calculus with Anticipating Integrands / D. Nualart and E. Pardoux // Probab. Th. Rel. Fields. — 1988. — Vol. 78, No. 4. — P. 535–581.
79. Di Nunno G. Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance / G. Di Nunno, B. Øksendal and F. Proske. — - Springer-Verlag Berlin Heidelberg. — 2009. — 418 p.
80. Ouknine Y. Fubini-type theorem for anticipating integrals / Y. Ouknine // Random Oper. Stoch. Equ. — 1996. — Vol. 4, No. 4. — P. 351–354.
81. Ocone D.L. A generalized Clark representation formula, with application to optimal portfolios / D.L. Ocone and I. Karatzas // Stochastics and Stochastics Reports. — 1991. — Vol. 34, No. 3-4. — P. 187–220.
82. Paulauskas V.M. On the reinforcement of the Lyapunov theorem / V.M. Paulauskas // Lietuvos Matematikos Rinkinys. — 1969. — Vol. 9, No. 2 — P. 323–328.
83. Pearson N.D. Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure: An Application to the Cox, Ingersoll and Ross Model / N.D. Pearson and T.-S. Sun // The Journal of Finance. — 1994. — Vol. 49, No. 4. — P. 1279-1304.
84. Perelló J. Option Pricing under stochastic volatility: the exponential Ornstein-Uhlenbeck model / J. Perelló, R. Sircar and J. Masoliver // J. Stat. Mech. — 2008. — doi:10.1088/1742-5468/2008/06/P06010.

85. Petrov V.V. Sums of independent random variables / V.V. Petrov. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg. — 1975. — 348 p.

86. Prigent J.-L.. Weak convergence of Financial Markets / J.-L. Prigent. — Springer Finance. Berlin: Springer. — 2003. — 422 p.

87. Sanz-Solé M. Malliavin Calculus with Applications to Stochastic Partial Differential Equations / M. Sanz-Solé // EPFL Press, Lausanne — 2005. — 162 P.

88. Shephard N. Handbook of Financial Time Series. Chapter: Stochastic Volatility: Origins and Overview / N. Shephard and T.G. Andersen // Springer Berlin Heidelberg. — 2009. — P. 233–254. — doi: 10.1007/978-3-540-71297-8_10.

89. Shiryaev A.N. Essentials of stochastic finance: facts, models, theory / A.N. Shiryaev. — World scientific Pub Co Inc. — 1999. — 852 p.

90. Shreve S.E. Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models / S.E. Shreve. — Springer Finance. New York, NY: Springer. — 2004. — 550 p.

91. Statulyavichus V.A. Limit theorems for densities and asymptotic expansions for the distributions of sums of independent random variables / V.A. Statulyavichus // Theory of Probability and its Applications. — 1965. — Vol. 10, No. 4. — P. 582–595.

92. Stein E.M. Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach / E.M. Stein and J.C. Stein // The Review of Financial Studies. — 1991. — Vol. 4, No. 4. — P. 727–752.

93. Studnyev Yu.P. One form of estimating the rate of convergence to a normal law / Yu.P. Studnyev // Ukrainian Math. J.. — 1968. — Vol. 20. — P. 256–259.

94. Walsh J.B. The rate of convergence of the binomial tree scheme / J.B. Walsh // Finance Stochast. — 2003. — Vol. 7, No. 3. — P. 337-361.

95. Walsh J.B. Embedding and the convergence of the binomial and trinomial tree schemes / J.B. Walsh and O.D. Walsh // Lyons, Terry J. (ed.) et al., Numerical methods and stochastics. Proceedings of the workshop, Waterloo,

Ontario, Canada, April 20–23, 1999. Providence, RI: AMS, American Mathematical Society (ISBN 0-8218-1994-1). Fields Inst. Commun.. — 2002. — Vol. 34. — P. 101-121.

96. Wiggins J. Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates / J. Wiggins // Journal of Financial Economics. — 1987. — Vol. 19, No. 2 — P. 351–372.
97. Wong B. On changes of measure in stochastic volatility models / B. Wong and C.C. Heyde // J. Appl. Math. Stochastic Anal.. — 2006. — Vol. 2006. — P. 1–13. — Article ID 18130.
98. Zolotarev V.M. On the closeness of the distributions of two sums of independent random variables / V.M. Zolotarev // Theory of Probability and its Applications. — 1965. — Vol. 10. — P. 472–479.
99. Zolotarev V.M. Exactness of an approximation in the central limit theorem / V.M. Zolotarev // Proc. 2nd Japan-USSR Sympos. Probab. Theory, Kyoto 1972, Lect. Notes Math. 330. — 1973. — P. 531–543.
100. Zolotarev V.M. Modern theory of summing the independent random variables / V.M. Zolotarev. — Moscow: Nauka. — 1986. — 416 p.
101. Zhu L. Limit Theorems for a Cox-Ingersoll-Ross Process with Hawkes Jumps / L. Zhu // Journal of Applied Probability. — 2014. — Vol. 51, No. 3. — P. 699–712.

ДОДАТОК

Список публікацій

1. Mishura Yu. The rate of convergence to the normal law in terms of pseudomoments / Yu. Mishura, Ye. Munchak, P. Slyusarchuk // Modern Stoch. Theory Appl.. — 2015. — Vol. 2, No. 1. — P. 95–106.
2. Мішура Ю.С. Швидкість збіжності цін опціонів з використанням методу псевдомоментів / Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Теорія ймовірностей і математична статистика. — 2015. — Вип. 92. — С. 110-124.
3. Мішура Ю.С. Швидкість збіжності цін опціонів при дискретизації геометричного процесу Орнштейна-Уленбека бернуллієвськими стрибками цін акцій / Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Теорія ймовірностей і математична статистика. — 2015. — Вип. 93. — С. 127-141.
4. Mishura Yu. Functional limit theorems for additive and multiplicative schemes in the Cox-Ingersoll-Ross model / Yu. Mishura, Ye. Munchak // Modern Stoch. Theory Appl. — 2016. — Vol. 3, No. 1. — P. 1–17.
5. Кучук-Яценко С.В. Застосування числення Маллявена до точного і наближеного оцінювання опціонів на акції зі стохастичною волатильністю / С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Теорія ймовірностей і математична статистика. — 2016. — Вип. 94. — С. 93–115.
5. Kuchuk-Yatsenko S.V. An application of the Malliavin calculus for calculating the precise and approximate prices of options with stochastic volatility / S.V. Kuchuk-Yatsenko, Yu.S. Mishura and Ye.Yu. Munchak // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2017. — No. 94. — P. 97–120.
6. Mishura Yu. The rate of convergence to the normal law in terms of pseudomoments / Yu. Mishura, Ye. Munchak, P. Slyusarchuk // Internati-

onal conference. Probability, reability and stochastic optimization. Conference materials. — Kyiv, Ukraine. — 2015. — P. 14.

7. Мішура Ю.С. Оцінка швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу/ Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Всеукраїнська наукова конференція. Тези доповідей. — Ворохта, Україна. — 2016. — С. 42.
8. Мішура Ю.С. Оцінка швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу із застосуванням методу псевдомоментів/ Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2016". — Київ, Україна. — 2016. — С. 54–57.
9. Мішура Ю.С. Швидкість збіжності об'єктивних цін опціонів у схемі Бернуллі/ Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. Матеріали конференції. Т. 3. — Київ, Україна. — 2016. — С. 110–112.
10. Кучук-Яценко С.В. Обчислення цін опціонів у моделях фінансових ринків, заданих лінійними стохастичними диференціальними рівняннями зі стохастичним коефіцієнтом дифузії/ С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // "Міжнародна літня математична школа пам'яті В.О. Плотнікова". Тези доповідей. (Одеса, Україна). — 2016. — С. 40.
11. Кучук-Яценко С.В. Модель фінансового ринку, задана лінійним стохастичним диференціальним рівнянням зі стохастичним коефіцієнтом дифузії/ С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування". Тези доповідей. (Ужгород, Україна). — 2016. — С. 86.
12. Мішура Ю.С. Функціональні граничні теореми в моделі Кокса-Інгерсолла-Росса/ Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Матеріали XV Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2017". — Київ, Україна. — 2017. —

С. 57–60.

Апробація результатів дисертації

Результати дослідження доповідалися на наукових конференціях та наукових семінарах, а саме:

1. International conference "Probability, reability and stochastic optimization", м. Київ, Україна, 7.04.2015–10.04.2015.
2. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", смт. Ворохта, Україна, 24.02.2016–27.02.2016
3. XIV Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2016", м. Київ, Україна, 6.04.2016–8.04.2016.
4. "Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука", м. Київ, Україна, 19.05.2016–20.05.2016.
5. Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", м. Ужгород, Україна, 19.05.2016–21.05.2016.
6. "Міжнародна літня математична школа пам'яті В.О. Плотнікова", м. Одеса, Україна, 12.09.2016 – 17.09.2016.
7. Засідання наукового семінару "Теорія ймовірностей та математична статистика" при кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Мішури Ю.С. та проф. Козаченка Ю.В. (м. Київ, Україна, 2017).
8. Засідання наукового семінару кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Наконечного О. Г. (м. Київ, Україна, 2016).

9. Засідання наукового семінару Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України під керівництвом проф. Кнопова П. С. (м. Київ, Україна, 2016).
10. Засідання наукового семінару кафедри теоретичної та прикладної статистики ЛНУ ім.І.Франка під керівництвом проф. Єлейка Я.І. (м.Львів, Україна, 2016).
11. XV Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2017", м. Київ, Україна, 4.04.2016–6.04.2017.