

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня бакалавра
за спеціальністю 113 Прикладна математика
на тему:

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА МОДЕЛЬ ГРОШОВИХ НАКОПИЧЕНЬ СІМЕЙ
З НЕПОВНО-ВИЗНАЧЕНИМИ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИМИ
УМОВАМИ**

Виконавець:
бакалавр четвертого курсу
Корчевський Владислав Богданович



Науковий керівник:
кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Волощук Сергій Дмитрович



Роботу заслухано на засіданні кафедри моделювання складних систем та
рекомендовано до захисту, протокол №18 від 10 червня 2022 р.

Завідувач кафедри МСС



д.т.н., доцент Дмитро ЧЕРНІЙ

ЗМІСТ

Вступ	4
Розділ 1. Моделювання грошових накопичень сім'ї	6
1.1 Моделювання грошових накопичень сім'ї за допомогою звичайних диференціальних рівнянь	6
1.2 Різницева модель грошових накопичень	11
1.3 Параболічне рівняння грошових накопичень сімей	12
Розділ 2. Параболічна модель з частково визначеними неперервними початково-крайовими умовами	20
2.1 Постановка задачі	20
2.2 Зведення диференціальної моделі грошових накопичень до системи функціональних співвідношень	22
Розділ 3. Алгоритм чисельної реалізації для параболічної моделі грошових накопичень сімей	29
Висновки	32
Перелік джерел посилання	33

Анотація

В даній кваліфікаційній роботі розглядається модель динаміки щільності грошових накопичень множини сімей параболічного типу з неповністю визначеними початковими умовами. Невизначеність полягає в тому, що початкова умова відома на деякому скінченному відрізку грошових накопичень, а не на всій області визначення. Поставлена задача розв'язується шляхом зведення до системи функціональних співвідношень і її псевдообернення.

ВСТУП

У сучасних умовах, особливо, в країнах з ринковою економікою, однією з важливих економічних потреб є сімейні накопичення. Виникає об'єктивна необхідність у контролі матеріального стану сім'ї та його вивчення за допомогою моделей. Без цих процесів неможливе раціональне планування витрат середньостатистичної сім'ї.

Головна властивість накопичень – це збалансований та зважений розподіл коштів. Тобто правильне співвідношення доходів і витрат. Історик Василь Ключевський казав, що «найпростіший спосіб не мати потреби в грошах – не отримувати більше, ніж потрібно, а прожити менше, ніж можна». Незважаючи на те, що це не економічне формулювання, а цитата, вона зараз актуальна в повсякденному житті людей.

Об'єкт дослідження є моделі соціальних явищ та процесів.

Предмет дослідження є диференціальна модель грошових накопичень сімей з неповністю відомими початково-крайовими умовами.

Методи дослідження є моделювання неповно-визначених початково-крайових умов за допомогою фіктивних впливів.

Метою даної кваліфікаційної роботи є розв'язання змішаної задачі з частково визначеними неперервними початково-крайовими умовами на основі параболічного рівняння, яке описує функцію щільності грошових накопичень для множини сімей.

Для досягнення даної цілі нам необхідно розглянути та розв'язати наступні задачі:

- проаналізувати, враховуючи всі можливі доходи та витрати, стохастичне диференціальне рівняння;
- на основі стохастичного диференціального рівняння отримати різницеву модель;
- дослідити параболічне рівняння грошових накопичень сімей;

- сформулювати загальну постановку змішаної задачі;
- розв'язати задачу шляхом зведення її до системи функціональних співвідношень;
- застосовувати методи псевдообернення лінійних функціональних рівнянь;
- обчислити точність з якою моделюється функція стану розглядуваної системи на основі знайдених векторів;
- чисельно реалізувати знайдену модель.

За структурою робота складається зі вступу, трьох розділів, висновку та переліку джерел посилання.

У першому розділі розглядається побудова моделі грошових накопичень сім'ї за допомогою звичайних диференціальних рівнянь. На основі щільності розподілу ймовірностей для марківського процесу описується різницева модель для стохастичного диференціального рівняння. Розглядається параболічне рівняння грошових накопичень множини сімей, розв'язком якого є функція щільності розподілу.

У другому розділі розв'язується задача побудови функції щільності сімей на основі математичної моделі параболічного типу з неперервною початковою умовою, відомою на деякому відрізку з області визначення. Задача розв'язується шляхом її зведення до системи функціональних співвідношень і псевдообернення її. Оцінюється точність отриманих розв'язків і формулюються умови їх однозначності.

У третьому розділі пропонується алгоритм чисельної реалізації моделі щільності множини сімей на відрізку грошових накопичень.

Проведенні в роботі дослідження моделі грошових накопичень сім'ї можуть бути цікавими для організацій соціального захисту населення та держави в цілому при аналізі добробуту населення. Тому актуальність роботи не викликає сумніву.

РОЗДІЛ 1

МОДЕЛЮВАННЯ ГРОШОВИХ НАКОПИЧЕНЬ СІМ'Ї

1.1 Моделювання грошових накопичень сім'ї за допомогою звичайних диференціальних рівнянь

Для математичного моделювання грошових накопичень сім'ї попередньо необхідно ввести деякі спрощенні припущення, застосовувані при моделюванні, а також функції та параметри, які описують динаміку грошових накопичень, дати економічну та фізичну інтерпретацію величин.

В реальності накопичення сім'ї мають переважно дискретний характер: сім'я отримує зарплату і накопичення сім'ї стрибкоподібно зростають і далі не змінюються до найближчих витрат грошей. При витратах, накопичення сім'ї стрибкоподібно зменшуються, тобто накопичення визначаються кусково-заданими функціями часу.

Нехай конкретна сім'я до моменту часу t накопичила деяку суму грошей, яку ми позначимо через $x(t)$. При побудові неперервної моделі, функцію $x(t)$ треба розглядати, як неперервно змінюючись в часі. Цього можна досягти, якщо припустити, що зарплата видається неперервно і до кінця місяця досягає окладу. Аналогічно і для витрат. В подальшому, для використання при моделюванні диференціальних рівнянь, доведеться припускати, що функція $x(t)$ є диференційованою.

Похідна функції $x(t)$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad (1.1)$$

Рівняння (1.1) означає швидкість зміни грошей в сім'ї. Якщо ввести вісь Ox , на якій відкладати накопичення конкретної сім'ї, то отримаємо простір накопичень N_1 , у якому в момент часу t сім'я позначається точкою (див. рис. 1.1).

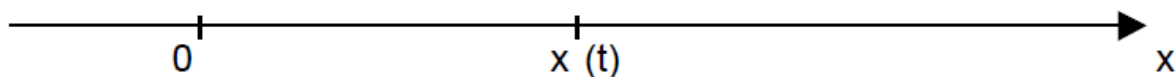


Рисунок 1.1 – Простір накопичень N_1

З плином часу, точка переміщається у просторі накопичень зі швидкістю $\frac{dx}{dt}$. Тут спостерігається аналогія зі звичайною швидкістю руху матеріальної точки в метричному просторі. Розмірність величини $\left[\frac{dx}{dt}\right] = \frac{грн}{міс}$.

Припустимо, що швидкість (1.1) може бути обчислена іншим способом. Можливість обчислень іншим способом виникає при детальному вивченні процесу витрат і заробітків у сім'ї. Припустимо, що швидкість виражена у вигляді деякої функції $F(x, t)$ – функції двох змінних x і t . В результаті отримаємо

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), t). \quad (1.2)$$

Рівняння (1.2) – звичайне диференціальне рівняння, яке описує динаміку доходів сім'ї; $x(t)$ – невідома функція; $F(x, t)$ – задана функція. Якщо в початковий момент часу $t = 0$ відомі накопичення сім'ї, то маємо початкову умову:

$$x(t)|_{t=0} = x_0. \quad (1.3)$$

Отримана задача Коші (1.2), (1.3) для звичайного диференціального рівняння.

Вид функції $F(x, t)$ в (1.2) залежить від конкретної сім'ї і від її економічної діяльності. Чим точніше ми запишемо функцію $F(x, t)$, тим точніше буде математична модель. Функцію F в цілому можна представити у вигляді

$$F = D - R \quad (D \geq 0, R \geq 0)$$

де $D(x, t)$ – функція, яка описує доходи сім'ї ($[D] = \frac{грн}{міс}$), а функція $R(x, t)$ – витрати сім'ї ($[R] = \frac{грн}{міс}$). Дійсно, якщо $R = 0, D > 0$, то $\frac{dx}{dt} = D > 0$, тобто функція $x(t)$ зростає – накопичення сім'ї збільшуються. Якщо $R > 0$,

$D = 0$, то $\frac{dx}{dt} = -R < 0$, тобто функція $x(t)$ спадає – накопичення сім'ї зменшуються.

Якщо функція $x(t)$ приймає від'ємне значення, такий випадок будемо інтерпретувати, як борг сім'ї.

Дамо приклади визначення функцій D і R [1].

1. Структура доходів сім'ї D :

$$D = D_0 + D_1.$$

а) Стабільні, постійні доходи (D_0).

D_0 – заробітна плата сім'ї ($[D_0] = \frac{zph}{\text{міс}}$). Якщо зарплата родини незмінюється з часом, тоді $D_0 = \text{const}$. Якщо припустити, що зарплата зміниться, тоді $D_0 = D_0(t)$.

б) Стабільний дохід від вкладень в банк (D_1).

$$D_1 = \alpha x \theta(x, x_0) \quad (1.4)$$

Припустимо, що всю наявну готівку $x(t)$ сім'я вкладає в банк на $p \frac{\%}{\text{міс}}$.

Коефіцієнт $\alpha = p \frac{\%}{\text{міс}} * \frac{1}{100\%} = \frac{p}{100 \text{ міс}}$, $\alpha = \frac{p}{100}$, $[\alpha] = \frac{1}{\text{міс}}$.

Функція $\theta(x, x_0)$ – функція Гевісайда:

$$\theta(x, x_0) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < x_0, \\ 1, & \text{при } x > x_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

де x_0 – мінімальна величина накопичень, що дозволяє зробити вкладення в банк.

В результаті отримаємо функцію доходів сім'ї:

$$D = D_0(t) + \alpha x(t) \theta(x(t), x_0). \quad (1.6)$$

2. Структура витрат сім'ї R :

$$R = R_0 + R_1 + R_2.$$

а) Мінімальні повсякденні витрати, що забезпечують існування сім'ї (R_0). У ці витрати входить оплата комунальних послуг, мінімальне харчування, витрат на необхідний одяг, транспортні витрати. R_0 – постійна величина, або функція часу ($[R_0] = \frac{zph}{\text{міс}}$).

б) Повсякденні витрати, що забезпечують добробут сім'ї (R_1). Ця категорія витрат пов'язана з тим, що коли сім'я має надлишки грошей, то вона збільшує витрати на поліпшення харчування, на таксі, на театр, на відпочинок і т.д. Цю функцію витрат представимо у вигляді

$$R_1 = C_1 \frac{x}{x + y_1} \theta(x, y_0). \quad (1.7)$$

Розмірність $[C_1] = \frac{грн}{міс}$. При $x \rightarrow \infty$, тобто при збільшенні накопичень сім'ї, $R_1 \rightarrow C_1$. Сенс коефіцієнта C_1 – це щомісячні витрати, що забезпечують благополучне існування сім'ї. Якби не були накопичення, сім'я не зможе витратити більше C_1 гривень на місяць, на задоволення основних потреб в силу природної доцільності; y_1 – величина накопичень, яка забезпечує напівблагополучне існування: при $x = y_1 \Rightarrow R_1 = \frac{C_1}{2}$; y_0 – мінімальне накопичення, що дозволяє почати поліпшення якості життя.

в) Витрати на елітні товари (R_2).

При досить великих накопиченнях сім'я може дозволити придбати товари, які не є товарами першої необхідності (техніка, автомобіль, квартира). R_2 представляється за допомогою виразу

$$R_2 = C_2 \frac{x - z_1}{(x - z_1) + (z_2 - z_1)} \theta(x, z_1). \quad (1.8)$$

Розмірність $[C_2] = \frac{грн}{міс}$. При $x \rightarrow \infty$, тобто при збільшенні накопичень сім'ї, $R_2 \rightarrow C_2$. Сенс коефіцієнта C_2 – це щомісячні витрати, що забезпечують розкішне існування сім'ї. Тут z_1 – ціна найбільш дешевого елітного товару. Якщо $x < z_1$, то завдяки наявності θ – функції витрати (1.8) припиняються; z_2 – ціна товару «середньої» розкоші: при $x = z_1 \Rightarrow R_2 = \frac{C_2}{2}$.

В результаті отримаємо функцію витрат сім'ї:

$$R = R_0(t) + C_1 \frac{x(t)}{x(t) + y_1} \theta(x(t), y_0) + C_2 \frac{x(t) - z_1}{(x(t) - z_1) + (z_2 - z_1)} \theta(x(t), z_1). \quad (1.9)$$

Для забезпечення диференціювання функцій (1.6), (1.9), функцію Гевісайда (1.5) замінюють гладкою функцією $\gamma(x, x_0)$.

Таким чином, рівняння (1.2) має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = D_0(t) + \alpha x \gamma(x, x_0) - R_0(t) - C_1 \frac{x}{x + y_1} \gamma(x, y_0) - C_2 \frac{x - z_1}{(x - z_1) + (z_2 - z_1)} \gamma(x, z_1). \quad (1.10)$$

Зауважимо, що при наявності інфляції величини $\alpha, x_0, y_0, y_1, z_1, z_2, C_1, C_2$ є функціями часу t , так як змінюються при зростанні цін.

Приведений математичний опис доходів і витрат може бути уточнений при більш детальному дослідженні економічної діяльності сім'ї.

Запишемо рівняння (1.10) в диференціалах:

$$dx = F(x, t)dt. \quad (1.11)$$

В реальності сім'я, крім гарантованих доходів і витрат, може мати випадкові доходи і витрати (премія, витрати у зв'язку з хворобою і інше). Для математичного опису такого явища введемо випадкову величину $X(t)$, яка б означала загальну кількість грошей, яку сім'я до моменту часу t накопичить з випадкових джерел. Величина $X(t + dt)$ – сумарні випадкові накопичення сім'ї до моменту часу $t + dt$, де dt – нескінченно малий інтервал часу.

Розглянемо величину

$$dX = X(t + dt) - X(t), \quad (1.12)$$

яка означає випадковий дохід сім'ї за елементарний проміжок часу dt при $dX > 0$ і випадкова витрата при $dX < 0$.

Цю величину будемо називати стохастичним диференціалом випадкового процесу $X(t)$. Додавши величину (1.12) до рівняння (1.11), отримаємо

$$dx = F(x, t)dt + dX. \quad (1.13)$$

Рівняння (1.13) називається стохастичним диференціальним рівнянням. Величина dX не є диференціалом у звичайному сенсі. У більш загальному випадку

$$dx = F(x, t)dt + G(x, t)dX. \quad (1.14)$$

Надалі припустимо, що $F(x, t)$, $G(x, t)$ – не випадкові функції, а X – марківський стохастичний процес.

1.2 Різницева модель грошових накопичень

Дамо наступну інтерпретацію рівнянню (1.14). Для стохастичного диференціала (1.12) величину $X(t)$ будемо розуміти, як реалізовану випадкову величину, яка в момент часу t прийняла конкретне значення $X(t) = y$. Випадкова величина $X(t + dt) = z$ визначається щільністю розподілу ймовірностей $p(z) = p(y, t; z, t + dt)$, так як X – марківський процес.

Запишемо рівняння (1.14) у різницевому вигляді:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = F(x(t), t)\Delta t + G(x(t), t)(X(t + \Delta t) - X(t)).$$

Покладемо

$$x(t) = G(x(t), t)X(t) = G(x(t), t)y,$$

тоді

$$y = \frac{x}{G(x, t)}, \quad x(t + \Delta t) = F(x(t), t)\Delta t + G(x(t), t)X(t + \Delta t).$$

Ці співвідношення можуть бути використані для чисельного визначення величини $x(t)$. Розіб'ємо часовий інтервал на елементарні часові відрізки Δt . Позначимо $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$, $t_0 = 0$, $x_i = x(t_i)$, $X(t_i) = z_i$, тоді

$$x_{i+1} = F(x_i, t_i)\Delta t_i + G(x_i, t_i)z_{i+1}, \quad (1.15)$$

де випадкові величини z_{i+1} визначаються щільністю розподілу ймовірностей

$$p(z) = p(y, t_i; z, t_i + \Delta t_i) = p\left(\frac{x_i}{G(x_i, t_i)}, t_i; z, t_i + \Delta t_i\right)$$

і можуть бути реалізовані чисельно.

Використовуючи початкову умову (1.3) і різницеву схему (1.15), визначаємо наближені значення величини $x(t)$ в моменти часу $t = t_i$, тобто визначаємо одну з можливих траєкторій випадкової величини $x(t)$.

1.3 Параболічне рівняння грошових накопичень сімей

Припустимо, що ми маємо N_0 сімей, прибутки яких визначаються розв'язками рівняння (1.13). У цьому рівнянні для стохастичного диференціала $dX = X(t + dt) - X(t)$, величина $X(t)$ буде розглядатись, як реалізована випадкова величина, яка в момент часу t набула конкретного значення $X(t) = y$. Це означає, що сім'я в момент часу t мала y гривень накопичень. Причому ці накопичення включають як детерміновані, так і випадкові накопичення. Ототожнимо $X(t) = y = x(t)$. Випадкова величина $X(t + dt) = z$ описує випадкові накопичення сім'ї в момент часу $t + dt$ при умові, що сім'я до момент часу t мала y накопичень. Ця випадкова величина задається щільністю розподілу ймовірностей $p(z) = p(y, t; z, t + dt)$. Початкові умови (1.3) для кожної сім'ї різні. У зв'язку з цим, сім'ї деяким чином розподілені по осі Ox . Припустимо, що N_0 – досить велике число. В результаті ми маємо деяку сукупність сімей – множина сімей.

Зрозуміло, що сім'ї в кожен момент часу розподілені нерівномірно на осі Ox .

Розглянемо вісь Ox – простір накопичень, на якій помістимо N_0 точок. Координата кожної точки означає кількість грошей, яку ця сім'я має в момент часу t (див. рис. 1.2).

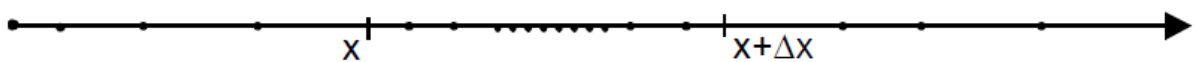


Рисунок 1.2 – Простір накопичень N_0

Розглянемо достатньо малий інтервал $[x, x + \Delta x]$ довжини Δx і нехай $\Delta Q(x, t)$ – число точок (сімей) на відрізку $[x, x + \Delta x]$ в момент часу t .

Введемо функцію

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q(x, t)}{\Delta x} = u(x, t), \quad (1.16)$$

де $u(x, t)$ – щільність розподілу сімей за накопиченням (щільність сімей).

Розмірність щільності $[u] = \frac{\text{сімей}}{\text{грн}}$.

Зрозуміло, що

$$Q(t) = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx, \quad (1.17)$$

– число сімей з грошовими заощадженнями в межах відрізка $[x_1, x_2]$ в

момент часу t . Маємо $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = N_0$.

Виведемо диференціальне рівняння для функції $u(x, t)$. Для цього розглянемо довільний інтервал $[x_1, x_2]$. Позначимо множину $\Omega_0 = (-\infty < x < x_1) \cup (x_2 < x < \infty)$.

Згодом накопичення сімей змінюються, тому точки, які позначають сім'ї, переміщуються по осі Ox . За проміжок часу $[t_1, t_2]$ частина сімей потрапить на відрізок $[x_1, x_2]$, частина покине цей відрізок. Запишемо рівняння балансу сімей [3] для інтервалу $[x_1, x_2]$ за проміжок часу від t_1 до t_2 :

$$\Delta Q_{t_1 t_2} = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3, \quad (1.18)$$

де $\Delta Q_{t_1 t_2}$ – зміна числа сімей за час від t_1 до t_2 , які мають накопичення в межах інтервалу $[x_1, x_2]$; Π_1 – число сімей, які потрапляють на інтервал $[x_1, x_2]$ за час від t_1 до t_2 за рахунок детермінованих доходів і витрат; Π_2 – за рахунок випадкових доходів і витрат; Π_3 – число сімей, які потрапляють на інтервал $[x_1, x_2]$ за час від t_1 до t_2 за рахунок еміграції. Зауважимо, якщо Π_j – негативні величини, то це означає, що сім'ї покидають відрізок $[x_1, x_2]$.

Обчислимо $\Delta Q_{t_1 t_2}$. Використовуючи вираз (1.17), отримуємо

$$\begin{aligned} \Delta Q_{t_1 t_2} &= Q(t_2) - Q(t_1) = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt dx. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Обчислимо Π_1 . Розглянемо довільну сім'ю в околі точки x_1 . Так як з часом накопичення сім'ї змінюються, то точка $x(t)$ рухається на осі Ox зі швидкістю $F(x_1, t)$ відповідно до рівняння (1.2). Причому точка рухається вправо, якщо $F(x_1, t) > 0$. $F(x_1, t)$ – швидкість за рахунок детермінованих накопичень.

За проміжок часу Δt точка (сім'я) пройде шлях $\Delta S = F(x_1, t)\Delta t$. Шлях ΔS вимірюється в гривнях.

Це означає, що всі сім'ї, які перебувають на відрізку ΔS , за проміжок Δt потраплять на відрізок $[x_1, x_2]$ через точку x_1 (див. рис. 1.3).

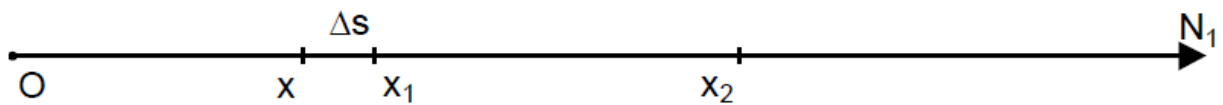


Рисунок 1.3 – Динаміка грошових накопичень сім'ї за проміжок часу Δt

Так як щільність сімей $u(x, t)$, в околі точки x_1 дорівнює $u(x_1, t)$, то кількість сімей, яка за час Δt потрапить на відрізок $[x_1, x_2]$ через точку x_1 , визначається виразом

$$M(x_1) = u(x_1, t)\Delta S = u(x_1, t)F(x_1, t)\Delta t \quad (1.20)$$

Аналогічно для точки x_2 маємо

$$M(x_2) = -u(x_2, t)F(x_2, t)\Delta t \quad (1.21)$$

– число сімей, яке за час Δt потрапить на відрізок $[x_1, x_2]$ через точку x_2 . Знак «-» присутній у формулі (1.21) у зв'язку з тим, що при позитивному $F(x_2, t)$ величина (1.21) означає вихід сімей з відрізка $[x_1, x_2]$.

Підсумовуючи (1.20) і (1.21), отримуємо

$$\Delta M = -[u(x_2, t)F(x_2, t) - u(x_1, t)F(x_1, t)]\Delta t$$

– число сімей, яке потрапить на $[x_1, x_2]$ за час Δt . Далі розіб'ємо проміжок $[t_1, t_2]$ на інтервали Δt_i . Підсумовуючи по всім проміжкам часу Δt_i від t_1 до t_2 , отримуємо інтегральну суму:

$$\sum_i \Delta M_i = - \sum_i [u(x_2, t_i)F(x_2, t_i) - u(x_1, t_i)F(x_1, t_i)]\Delta t_i \xrightarrow{\Delta t_i \rightarrow 0}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\Delta t_i \rightarrow 0} - \int_{t_1}^{t_2} [u(x_2, t)F(x_2, t) - u(x_1, t)F(x_1, t)] dt = \\ & = - \int_{t_1}^{t_2} u(x, t)F(x, t) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (uF) dx dt. \end{aligned}$$

Таким чином

$$\Pi_1 = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t)F(x, t)) dx dt. \quad (1.22)$$

Обчислимо Π_2 . Розглянемо два моменти часу t і $t + \Delta t$ і дві осі Ox , які зображують простори накопичень у ці моменти часу.

Обчислимо число сімей, які перемістяться на відрізок $[x_1, x_2]$ до моменту часу $t + \Delta t$ з множини Ω_0 , починаючи з моменту t , за рахунок випадкових накопичень [7]. Для цього множину Ω_0 розіб'ємо на елементарні відрізки довжиною Δy_i (див. рис. 1.4). На елементарному відрізку Δy_i знаходиться в момент часу t $u(y_i, t)\Delta y_i$ сімей. Через проміжок часу Δt ці сім'ї розподіляться по всій осі Ox ($-\infty < x < \infty$), але в момент часу $t + \Delta t$ з щільністю ймовірностей $p(y_i, t; x, t + \Delta t)$.

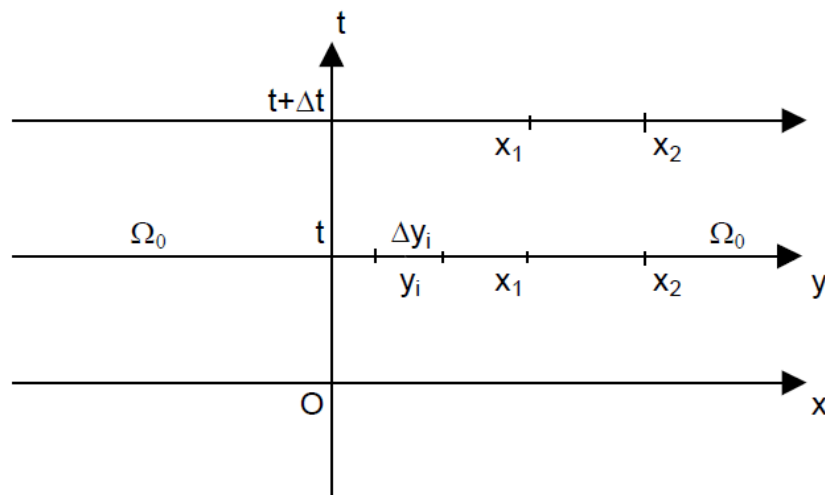


Рисунок 1.4 – Динаміка грошових накопичень за рахунок випадкових грошових надходжень

Інтеграл $\int_{x_1}^{x_2} p(y_i, t; x, t + \Delta t) dx$ означає ймовірність того, що сім'я з точки y_i потрапить на відрізок $[x_1, x_2]$ в момент часу $t + \Delta t$.

Звідси слідує що

$$\Delta L_i = \int_{x_1}^{x_2} p(y_i, t; x, t + \Delta t) dx u(y_i, t) \Delta y_i \quad (1.23)$$

– число сімей, яке переміститься з відрізка Δy_i на відрізок $[x_1, x_2]$.

Підсумовуючи величини (1.23) на всіх відрізках Δy_i множини Ω_0 , отримуємо інтегральну суму

$$\begin{aligned} \sum_i \Delta L_i &= \sum_i \int_{x_1}^{x_2} p(y_i, t; x, t + \Delta t) dx u(y_i, t) \Delta y_i \xrightarrow{\Delta y_i \rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{\Delta y_i \rightarrow 0} \int_{\Omega_0} \left[\int_{x_1}^{x_2} u(y, t) p(y, t; x, t + \Delta t) dx \right] dy = I_1. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Величина I_1 означає кількість сімей, яка потрапить з множини Ω_0 на відрізок $[x_1, x_2]$ за час Δt .

Тепер обчислимо число сімей I_2 , яке перейде з відрізка $[x_1, x_2]$ на множину Ω_0 .

Очевидно, що

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{\Omega_0} u(y, t) p(y, t; x, t + \Delta t) dy \right] dx.$$

В результаті приріст сімей за час Δt на відрізку $[x_1, x_2]$ визначиться величиною:

$$\begin{aligned} \Delta I = I_1 - I_2 &= \int_{\Omega_0} \left[\int_{x_1}^{x_2} u(y, t) p(y, t; x, t + \Delta t) dx \right] dy - \\ &\quad - \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{\Omega_0} u(y, t) p(y, t; x, t + \Delta t) dy \right] dx. \end{aligned}$$

Переставимо інтеграли і перетворимо:

$$\begin{aligned}
\Delta I &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{\Omega_0} u(y, t) p(y, t; x, t + \Delta t) dy \right] dx + \\
&+ \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} u(y, t) p(y, t; x, t + \Delta t) dy dx - \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} u(y, t) p(y, t; x, t + \Delta t) dy dx \\
&\quad - \int_{\Omega_0} \left[\int_{x_1}^{x_2} u(y, t) p(y, t; x, t + \Delta t) dy \right] dx = \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(y, t) p(y, t; x, t + \Delta t) dy \right] dx - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} u(y, t) p(y, t; x, t + \Delta t) dy dx.
\end{aligned}$$

З огляду на формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(y, s; x, t) dx = 1, \quad \forall s < t, \quad -\infty < y < \infty.$$

отримуємо

$$\Delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(y, t) p(y, t; x, t + \Delta t) dy - u(x, t) \right] dx. \quad (1.25)$$

Скористаємося лемою (властивості перехідної функції марківського процесу), яка показує, що існує рівномірний розподіл:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(y) p(y, t; x, t + \Delta t) dy - u(x) \right] = W(x),$$

і отримаємо

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} u(y, t) p(y, t; x, t + \Delta t) dy - u(x, t) = \\
&= \left[-\frac{\partial}{\partial x} (c(x, t) u(x)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (b(x, t) u(x)) \right] \Delta t + o(\Delta t). \quad (1.26)
\end{aligned}$$

Повернемося до співвідношення (1.25). Будемо вважати, що для $u(y, t)$ виконані всі умови леми (властивості перехідної функції марківського

процесу), тоді використовуючи (1.26), замінимо (1.25) еквівалентною величиною при $\Delta t \rightarrow 0$. В результаті

$$\Delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[-\frac{\partial}{\partial x}(cu) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(bu) \right] dx \Delta t. \quad (1.27)$$

Підсумовуючи ці інтеграли на всіх елементарних інтервалах Δt_i , на які розбивається часовий відрізок $[t_1, t_2]$, отримуємо інтегральну суму:

$$\begin{aligned} \sum_i \Delta I_i &= \sum_i \left[-\frac{\partial}{\partial x}(c(x, t_i)u(x, t_i)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(b(x, t_i)u(x, t_i)) \right] dx \Delta t_i \xrightarrow{\Delta t_i \rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{\Delta t_i \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[-\frac{\partial}{\partial x}(c(x, t)u(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(b(x, t)u(x, t)) \right] dx dt \equiv \Pi_2. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Обчислимо Π_3 . Для цього введемо допоміжну функцію f . $f(x, t)$ – число сімей, які потраплять з інших множин сімей на відрізок одиничної довжини простору N_1 за одиничний інтервал часу в околі x і t . Очевидно, що

$$\Pi_3 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx dt. \quad (1.29)$$

Підставивши (1.19), (1.22), (1.28), (1.29) в рівняння балансу (1.18), отримаємо інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(uF) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[-\frac{\partial}{\partial x}(cu) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(bu) \right] dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f dx dt. \end{aligned}$$

Нехтуючи інтегралами, у зв'язку з теоремою про повне загальне середнє і довільність інтервалів інтегрування $[t_1, t_2]$, $[x_1, x_2]$, отримуємо параболічне рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}((c + F)u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(bu) + f, \quad (1.30)$$

яке задовольняє щільність сімей u на просторі накопичень. Рівняння (1.30) будемо називати рівнянням грошових накопичень множини сімей.

Якщо стохастичний процес відсутній ($c = 0, b = 0$), ми отримуємо рівняння першого порядку $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Fu) = f$.

РОЗДІЛ 2

ПАРАБОЛІЧНА МОДЕЛЬ З ЧАСТКОВО ВИЗНАЧЕНИМИ НЕПЕРЕРВНИМИ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

2.1 Постановка задачі

Розглянемо першу змішану задачу, поставлену для параболічного рівняння грошових накопичень множини сімей в скінченному просторі накопичень [4]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Cu) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(bu) = f(x, t), (x, t) \in [0, \infty) \times [0, \infty),$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), x \in [0, \infty),$$

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, t \in [0, \infty),$$

$$u(x, t)|_{x=l} = 0, t \in [0, \infty).$$

Змінимо постановку цієї задачі наступним чином. Будемо вважати, що функція щільності множини сімей визначена на скінченній грошово-часовій області $S_0^T = [0, l] \times [0, T]$, а початкова умова відома на скінченному сегменті грошових накопичень $[l_1, l_2]$. Таким чином маємо задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Cu) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(bu) = f(x, t), (x, t) \in S_0^T = [0, l] \times [0, T], \quad (2.1)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), x \in [l_1, l_2], [l_1, l_2] \in [0, l], \quad (2.2)$$

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, t \in [0, T], \quad (2.3)$$

$$u(x, t)|_{x=l} = 0, t \in [0, T],$$

де C та b – сталі величини.

Поставлену задачу розв'яжемо шляхом зведення її до системи функціональних співвідношень.

Будемо вимагати, щоб функція щільності $u(x, t)$ задовольняла початково-крайові умови (2.2)-(2.3) в середньоквадратичному сенсі згідно критерію

$$\Phi = \int_{l_1}^{l_2} \left((u(x, t)|_{t=0} - \varphi(x)) \right)^2 dx + \int_0^T \left((u(x, t)|_{x=0}) \right)^2 dt + \int_0^T \left((u(x, t)|_{x=l}) \right)^2 dt \rightarrow \min_{u(x, t)} . \quad (2.4)$$

Зважаючи на [6] розв'яжемо шляхом зведення її до системи функціональних співвідношень. Згідно [6] функцію щільності будемо шукати у вигляді

$$u(x, t) = u_f(x, t) + u_0(x, t) + u_\Gamma(x, t). \quad (2.5)$$

Для цього дискретизуємо область $S_0^T = [0, l] \times [0, T]$ точками (x'_i, t'_j) , де $x'_i \in [0, l]$, $i = \overline{1, M_x}$; $t'_j \in [0, T]$, $j = \overline{1, M_T}$.

Область $S^0 = S_0 \times (-\infty, 0]$ з практичних міркувань подамо у вигляді

$$S^0 = [0, l] \times [-\tau, 0), \tau > 0, \tau = const$$

і дискретизуємо точками (x'_i, t'_j) де $x'_i \in [0, l]$, $i = \overline{1, M_x}$; $t'_j \in [-\tau, 0)$, $j = \overline{1, M_\tau}$.

Область $S^\Gamma = (R \setminus [0, l]) \times [0, T]$ так само, як і область S^0 подамо у більш зручному для обчислень вигляді

$$S^\Gamma = ([-L, 0) \cup (l, l + L]) \times (0, T], L > 0, L = const$$

і дискретизуємо точками (x'_i, t'_j) , де

$$x'_i \in [-L, 0] \cup (l, l + L], i = \overline{1, M_L};$$

$$t'_j \in [0, T], j = \overline{1, M_T}.$$

Функції $u_f(x, t)$, $u_0(x, t)$, $u_\Gamma(x, t)$, сума яких, згідно (2.5), буде шуканою функцією щільності згідно [6], відновимо у вигляді

$$u_f(x, t) = \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, t - t'_j) f_{ij}, \quad (2.6)$$

(x'_i, t'_j) , $i = \overline{1, M_x}$, $j = \overline{1, M_T}$ – точки дискретизації області S_0^T ;

$$u_0(x, t) = \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_\tau} G(x - x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(0)}, \quad (2.7)$$

(x'_i, t'_j) , $i = \overline{1, M_x}$, $j = \overline{1, M_t}$ – точки дискретизації області S^0 ;

$$u_\Gamma(x, t) = \sum_{i=1}^{M_L} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(\Gamma)}, \quad (2.8)$$

(x'_i, t'_j) , $i = \overline{1, M_L}$, $j = \overline{1, M_T}$ – точки дискретизації області S^Γ .

У виразі (2.6) $f_{ij} = f(x'_i, t'_j)$ – значення функції $f(x, t)$ в точках (x'_i, t'_j) , $i = \overline{1, M_x}$, $j = \overline{1, M_T}$ дискретизації області S_0^T .

У виразі (2.7) $f_{ij}^{(0)}$ – значення невідомої функції $f^{(0)}(x'_i, t'_j)$, $(x', t') \in S^0$ в точках (x'_i, t'_j) , $i = \overline{1, M_x}$, $j = \overline{1, M_t}$, які дискретизують область S^0 .

У виразі (2.8) $f_{ij}^{(\Gamma)}$ – значення невідомої функції $f^{(\Gamma)}(x'_i, t'_j)$, $(x', t') \in S^\Gamma$, в точках (x'_i, t'_j) , $i = \overline{1, M_L}$, $j = \overline{1, T}$, які дискретизують область S^Γ .

У формулах (2.6)-(2.8)

$$G(x - x', t - t') = \frac{H(t - t')}{\sqrt{2\pi b(t - t')}} e^{-\frac{((x-x')-c(t-t'))^2}{2b(t-t')}}$$

передатна функція [2], яка є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Cu) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(bu) = \delta(x, t)$$

і дозволяє подати задачу (2.1)-(2.3) у вигляді системи інтегральних або функціональних рівнянь [5], а $H(t - t')$ – функція Гевісайда свого аргументу.

2.2 Зведення диференціальної моделі грошових накопичень до системи функціональних співвідношень

Щоб звести задачу (2.1)-(2.3) до системи функціональних співвідношень підставимо у функцію (2.5) представлення (2.6)-(2.8).

Отримаємо наступне представлення функції щільності:

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, t - t'_j) f_{ij} + \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(0)} + \\
& + \sum_{i=1}^{M_L} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(\Gamma)}. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Підставимо функцію (2.9) у початково-крайові умови (2.2)-(2.3), отримаємо систему функціональних співвідношень:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, -t'_j) f_{ij} + \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, -t'_j) f_{ij}^{(0)} + \\
& \quad + \sum_{i=1}^{M_L} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, -t'_j) f_{ij}^{(\Gamma)} = \varphi(x), \quad x \in [l_1, l_2]; \\
& \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(-x'_i, t - t'_j) f_{ij} + \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(-x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(0)} + \\
& \quad + \sum_{i=1}^{M_L} \sum_{j=1}^{M_T} G(-x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(\Gamma)} = 0, \quad t \in [0, T]; \\
& \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(l - x'_i, t - t'_j) f_{ij} + \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(l - x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(0)} + \\
& \quad + \sum_{i=1}^{M_L} \sum_{j=1}^{M_T} G(l - x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(\Gamma)} = 0, \quad t \in [0, T].
\end{aligned} \right. \tag{2.10}$$

Оскільки перші доданки кожної з рівностей системи (2.10) відомі, перенесемо їх у праву частину. Отримаємо

$$\left\{ \begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, -t'_j) f_{ij}^{(0)} + \sum_{i=1}^{M_L} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, -t'_j) f_{ij}^{(\Gamma)} = \\
& \quad = \varphi(x) - \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, -t'_j) f_{ij}; \\
& \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(-x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(0)} + \sum_{i=1}^{M_L} \sum_{j=1}^{M_T} G(-x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(\Gamma)} = \\
& \quad = - \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(-x'_i, t - t'_j) f_{ij}; \\
& \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(l - x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(0)} + \sum_{i=1}^{M_L} \sum_{j=1}^{M_T} G(l - x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(\Gamma)} = \\
& \quad = - \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(l - x'_i, t - t'_j) f_{ij}.
\end{aligned} \right. \quad (2.11)$$

Систему (2.11) розв'яжемо наближено так, щоб мав місце середньоквадратичний критерій (2.4), який у цьому випадку запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
\Phi = & \int_{l_1}^{l_2} \left(\sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, t - t'_j) f_{ij} + \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(0)} + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^{M_L} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(\Gamma)} \Big|_{t=0} - \varphi(x) \right)^2 dx + \\
& + \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, t - t'_j) f_{ij} + \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(0)} + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^{M_L} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(\Gamma)} \Big|_{x=0} \right)^2 dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, t - t'_j) f_{ij} + \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(0)} + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^{M_L} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, t - t'_j) f_{ij}^{(\Gamma)} \Big|_{x=l} \right)^2 dt \rightarrow \min_{f^{(0)}, f^{(\Gamma)}}. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Для розв'язання задачі (2.11), (2.12) зведемо її до матричного вигляду

$$B(x, t)f = F(x, t). \quad (2.13)$$

Критерій (2.12) при цьому матиме вигляд

$$\Phi = \int_{(\cdot)} \|B(x, t)f - F(x, t)\|^2 dx dt, \quad (2.14)$$

де:

$$f = \text{col}(f_1, f_2)$$

– невідомий вектор, компонентами якого є

$$f_1 = \text{col}(f_{ij}^{(0)}, i = \overline{1, M_x}, j = \overline{1, M_T}),$$

$$f_2 = \text{col}(f_{ij}^{(\Gamma)}, i = \overline{1, M_L}, j = \overline{1, M_T});$$

$$F(x, t) = \text{col}(F_1(x), F_2(t), F_3(t))$$

– векторна функція правих частин системи (2.11), компонентами якої є

$$F_1(x) = \varphi(x) - \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(x - x'_i, -t'_j) f_{ij},$$

$$F_2(t) = - \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(-x'_i, t - t'_j) f_{ij}, \quad (2.15)$$

$$F_3(t) = - \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_T} G(l - x'_i, t - t'_j) f_{ij};$$

$$B(x, t) = \begin{pmatrix} B_{11}(x, t) & B_{12}(x, t) \\ B_{21}(x, t) & B_{22}(x, t) \\ B_{31}(x, t) & B_{32}(x, t) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

– матрична функція, яка складається з наступних блоків

$$\begin{aligned}
B_{11}(x, t) &= \text{str}(G(x - x'_i, -t'_j), i = \overline{1, M_x}, j = \overline{1, M_\tau}), \\
B_{12}(x, t) &= \text{str}(G(x - x'_i, -t'_j), i = \overline{1, M_L}, j = \overline{1, M_\tau}), \\
B_{21}(x, t) &= \text{str}(G(-x'_i, t - t'_j), i = \overline{1, M_x}, j = \overline{1, M_\tau}), \\
B_{22}(x, t) &= \text{str}(G(-x'_i, t - t'_j), i = \overline{1, M_L}, j = \overline{1, M_\tau}), \\
B_{31}(x, t) &= \text{str}(G(l - x'_i, t - t'_j), i = \overline{1, M_x}, j = \overline{1, M_\tau}), \\
B_{32}(x, t) &= \text{str}(G(l - x'_i, t - t'_j), i = \overline{1, M_L}, j = \overline{1, M_\tau}).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Таким чином побудова розв'язку задачі (2.13), (2.14) зводиться до відшукування таких векторів f , що

$$f = \arg \min_{f \in R^{M_x \times M_\tau + M_L \times M_T}} \int_{(\cdot)} \|B(x, t)f - F(x, t)\|^2 dxdt. \tag{2.18}$$

Згідно з результатами, отриманими у [6], множина розв'язків або псевдорозв'язків задачі (2.13), (2.14) матиме вигляд

$$\Omega_f = \{f: f = P^+ B_F + v - P^+ P v, \quad \forall v \in R^{M_x \times M_\tau + M_L \times M_T}\}, \tag{2.19}$$

де

$$P = \int_{(\cdot)} B^T(x, t)B(x, t)dxdt, \quad B_F = \int_{(\cdot)} B^T(x, t)F(x, t)dxdt, \tag{2.20}$$

а P^+ – матриця псевдообернена до матриці P .

Інтегрування у формулах (2.20) ведеться по областях визначення підінтегральних матричних добутоків.

Матриця P і вектор B_F мають таку структуру:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad B_F = \begin{pmatrix} B_{F1} \\ B_{F2} \end{pmatrix},$$

де

$$P_{11} = \int_{(\cdot)} (B_{11}^2(x, t) + B_{21}^2(x, t) + B_{31}^2(x, t))dxdt,$$

$$P_{12} = \int_{(\cdot)} (B_{11}(x, t)B_{12}(x, t) + B_{21}(x, t)B_{22}(x, t) + B_{31}(x, t)B_{32}(x, t)) dxdt,$$

$$P_{21} = \int_{(\cdot)} (B_{12}(x, t)B_{11}(x, t) + B_{22}(x, t)B_{21}(x, t) + B_{32}(x, t)B_{31}(x, t)) dxdt,$$

$$P_{22} = \int_{(\cdot)} (B_{12}^2(x, t) + B_{22}^2(x, t) + B_{32}^2(x, t)) dxdt,$$

$$B_{F1} = \int_{(\cdot)} (B_{11}(x, t)F_1(x) + B_{21}(x, t)F_2(t) + B_{31}(x, t)F_3(t)) dxdt,$$

$$B_{F2} = \int_{(\cdot)} (B_{12}(x, t)F_1(x) + B_{22}(x, t)F_2(t) + B_{32}(x, t)F_3(t)) dxdt.$$

Вектор f отриманий, як елемент множини Ω_f , має наступну структуру:

- перші $M_x \times M_t$ елементів цього вектора є значеннями функції $f^{(0)}(x'_i, t'_j)$, $(x', t') \in S^0$, в точках (x'_i, t'_j) , $i = \overline{1, M_x}$, $j = \overline{1, M_t}$, які дискретизують область S^0 ;

- наступні $M_L \times M_T$ елементи цього вектора є значеннями функції $f^{(\Gamma)}(x'_i, t'_j)$, $(x', t') \in S^\Gamma$, в точках (x'_i, t'_j) , $i = \overline{1, M_L}$, $j = \overline{1, T}$, які дискретизують область S^Γ .

Знайдений згідно з (2.18) вектор f з урахуванням (2.5), (2.6)-(2.8) дозволяє знайти функцію $u(x, t)$ стану розглядуваної системи, яка, задовольняючи (2.1) точно, початково-крайові умови (2.2), (2.3) моделює з точністю

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2 = \min_{f \in \Omega_f} \Phi = \min_{f \in \Omega_f} \int_{(\cdot)} ||B(x, t)f - F(x, t)||^2 dxdt = \int_{S_0^T} F_1^T(x)F_1(x)dx + \\ + \int_{S^0} F_2^T(x)F_2(x)dx + \int_{S^\Gamma} F_3^T(t)F_3(t)dt - B_y^T P^+ B_y, \end{aligned} \quad (2.21)$$

де Φ визначене співвідношенням (2.14).

Множина (2.19) буде однозначною ($v - P^+Pv = 0$) при $\det P > 0$, тобто, коли матриця P буде невиродженою. За інших умов множина Ω_f буде неоднозначною.

РОЗДІЛ 3

АЛГОРИТМ ЧИСЕЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ МОДЕЛІ ГРОШОВИХ НАКОПИЧЕНЬ СІМЕЙ

Розглянемо алгоритм проведення чисельної реалізації моделі, запропонованої у другому розділі та її тестування. Ідея проведення тесту полягає в наступному. На першому кроці необхідно задати всі параметри моделі, а саме:

- параметри C , b параболічного диференціального рівняння;
- визначити область визначення S_0^T моделі, задавши параметри l , T ;
- визначити область визначення початкової умови, задавши параметри l_1 , l_2 . При цьому слід враховувати, що $[l_1, l_2] \in [0, l]$.

На другому кроці потрібно обрати деяку неперервну функцію щільності $u(x, t)$, визначену в області S_0^T . Потім треба подіяти на неї диференціальним оператором моделі, отримавши при цьому праву частину рівняння. Подібним чином отримати функцію $\varphi(x)$, яка визначена на сегменті $[l_1, l_2]$ і є правою частиною початкової умови, а саме:

$$\varphi(x) = u(x, 0), x \in [l_1, l_2], [l_1, l_2] \in [0, l].$$

Крайові умови, які визначаються формулами (2.3), в силу специфіки розглянутої в роботі задачі залишаються рівними нулю.

В результаті ми сформуваємо тестову початково-крайову задачу для диференціального рівняння параболічного типу з початковою умовою, визначеною на деякому відрізку $[l_1, l_2] \in [0, l]$. Розв'язавши цю задачу, ми зможемо порівняти отриманий розв'язок з обраною нами функцією $u(x, t)$ і зробити відповідні висновки.

Подальші розрахунки будемо проводити, дотримуючись наступної послідовності дій.

1. Визначити область $S^0 = [0, l] \times [-\tau, 0)$, $\tau > 0$, ввівши конкретне значення параметра τ .
2. Задати параметри M_x , M_τ та точки (x'_i, t'_j) , $x'_i \in [0, l]$, $i = \overline{1, M_x}$, $t'_j \in [-\tau, 0)$, $j = \overline{1, M_\tau}$ дискретизації області S^0 .
3. Визначити область $S^\Gamma = ([-L, 0) \cup (l, l + L]) \times (0, T]$, $L > 0$, ввівши конкретне значення параметра L .
4. Задати параметри M_L , M_T та точки (x'_i, t'_j) , $x'_i \in [-L, 0] \cup (l, l + L]$, $i = \overline{1, M_L}$, $t'_j \in [0, T]$, $j = \overline{1, M_T}$ дискретизації області S^Γ .
5. Ввести передатну функцію $G(x - x', t - t')$.
6. За формулою (2.6) обчислити функцію $u_f(x, t)$, враховуючи вибрані у пунктах 2, 4 точки дискретизації $x'_i \in [0, l]$, $i = \overline{1, M_x}$, $t'_j \in [0, T]$, $j = \overline{1, M_T}$.
7. За формулами (2.17) сформуванати блоки $B_{11}(x, t)$, $B_{12}(x, t)$, $B_{21}(x, t)$, $B_{22}(x, t)$, $B_{31}(x, t)$, $B_{32}(x, t)$ матричної функції $B(x, t)$, використовуючи при цьому введені вище точки дискретизації областей S^0, S^Γ .
8. З отриманих у пункті 7 блоків, за формулою (2.16), утворити матричну функцію $B(x, t)$.
9. За формулами (2.15) сформуванати компоненти $F_1(x), F_2(t), F_3(t)$ векторної функції $F(x, t)$.
10. Сформуванати векторну функцію $F(x, t) = \text{col}(F_1(x), F_2(t), F_3(t))$.
11. Визначити матричну функцію $B^T(x, t)$, транспоновану до матричної функції $B(x, t)$.
12. Обчислити матричні добутки $B^T(x, t)B(x, t)$, $B^T(x, t)F(x, t)$.
13. За формулами (2.20) обчислити матриці P та B_F . Інтегрування проводити по областях визначення компонент підінтегральних матричних добутків.
14. Знайти матрицю P^+ , псевдообернену до матриці P .
15. Вибрати довільний скалярний вектор $\forall v \in R^{M_x \times M_\tau + M_L \times M_T}$.

16. За формулою (2.19) обчислити вектор f , який є елементом множини Ω_f , що відповідає вибраному у пункті 15 вектору v .
17. За формулою (2.21) обчислити точність ε_0^2 .
18. Перевірити умову $\det P > 0$ однозначності множини Ω_f .
19. За формулою (2.7), використовуючи перші $M_x \times M_t$ компонент вектора f , знайти функцію $u_0(x, t)$.
20. За формулою (2.8), використовуючи останні $M_L \times M_T$ компонент вектора f , знайти функцію $u_T(x, t)$.
21. За формулою (2.5) знайти функцію щільності множини сімей $u(x, t)$.

Для перевірки проведених обчислень необхідно порівняти значення функції отриманої у пункті 21 зі значеннями функції, обраної на другому кроці етапу формування умови тестової задачі. Для візуалізації отриманих результатів варто побудувати графіки обраної та отриманої функцій і порівняти їх.

ВИСНОВКИ

У даній кваліфікаційній роботі розглянуто питання побудови розв'язку параболічного рівняння, яке описує динаміку щільності грошових накопичень множини сімей з неповністю визначеною початковою умовою та нульовими крайовими умовами.

У першому розділі зроблено огляд деяких моделей грошових накопичень сім'ї. Зокрема розглянуто модель грошових накопичень у вигляді задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку. Також розглянуто стохастичну диференціальну модель, де неочікувані доходи враховуються у вигляді диференціалу випадкової величини з відомим розподілом. Для спрощення реалізації, ці моделі представлені у різницевому вигляді. Для множини однотипних сімей, розглянуто модель щільності грошових накопичень у вигляді початково-крайової задачі для диференціального рівняння параболічного типу.

У другому розділі для параболічного рівняння динаміки щільності сімей поставлено початково-крайову задачу з обмеженнями щодо початкової умови. У запропонованій постановці початкова умова задається у вигляді неперервної функції, визначеної на деякому скінченному сегменті грошових накопичень, який повністю належить області грошових накопичень множини сімей. З використанням фундаментального розв'язку даного параболічного рівняння, задача зведена до системи функціональних рівнянь. Побудована множина розв'язків або псевдорозв'язків цієї системи, на основі яких будується функція щільності сімей на проміжку грошових накопичень. Отримано умови однозначності побудованої множини та середньоквадратична точність.

У третьому розділі розроблено алгоритм чисельної реалізації параболічної моделі щільності множини сімей на відрізку грошових накопичень.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Guriev S. M. A model of saving and demand for money. I, *Matem. Mod.*, 1994, Volume 6, Number 7, 15–40.
2. Ерофеенко В.Т. Уравнения с частными производными и математические модели в экономике: курс лекций [изд. 2-е, перераб. и доп.] / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 248 с.
3. Meyerson A.Yu., Chernyaev A.P. Properties of Solutions to the Dynamic Family Balance Equation // *Some problems of fundamental and applied mathematics*. – М.: МИРТ, 1997. P. 124–131.
4. Скопецький В.В Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів // В.В. Скопецький, В.А. Стоян, В.Б. Зваридчук. – К. : Вид-во «Сталь», 2008.
5. Стоян В.А. Моделювання та ідентифікація динаміки систем із розподіленими параметрами // *Навчальний посібник*. –К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2003. – 187с.
6. Стоян В.А. Основи лабораторного моделювання просторово розподілених динамічних систем // *Математичне моделювання динаміки просторово розподілених процесів з неперервно заданим початково-крайовим станом*. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2017. С. 35–42.
7. Chernyaev A.P. Differential Equations of Dynamic Balance and Their Applications // *Soros Educational Journal*. – Moscow Institute of Physics and Technology, Vol. 6, No. 11, 2000. P. 119-121.

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СИСТЕМА ЗАПОБІГАННЯ ТА ВИЯВЛЕННЯ АКАДЕМІЧНОГО ПЛАГІАТУ

Довідка про оригінальність кваліфікаційної роботи за освітнім рівнем бакалавр



Ім'я користувача:
Шатирко Андрій ФКомпНаук

ID перевірки:
1011566261

Дата перевірки:
13.06.2022 18:15:07 EEST

Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library

Дата звіту:
13.06.2022 18:15:43 EEST

ID користувача:
100007163

Назва документа: Корчевський_Волощук Диплом Prepare

Кількість сторінок: 32 Кількість слів: 6544 Кількість символів: 38026 Розмір файлу: 820.75 KB ID файлу: 1011437146

Виявлено модифікації тексту (можуть впливати на відсоток схожості)

3.56%

Схожість

Найбільша схожість: 2.55% з джерелом з Бібліотеки (ID файлу: 1011430080)

Сторінка 34

Сторінка 34



0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0%

Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи

31

Підозріле форматування

13

сторінок

Експертна оцінка роботи науковим керівником :

Кваліфікаційна робота Корчевського Владислава Богдановича на здобуття ступеня бакалавра за спеціальністю 113 «Прикладна математика» повністю відповідає вимогам академічної доброчесності та рекомендується до захисту на екзаменаційній комісії.

Науковий керівник:


(підпис)

Сергій ВОЛОЩУК

(ПІБ)

Оператор:



(підпис)

А.В.Шатирко

(ПІБ)

ВІДГУК

наукового керівника

на кваліфікаційну роботу бакалавра на тему:

«Диференціальна модель грошових накопичень сімей
з неповно-визначеними початково-крайовими умовами»

студента 4-го курсу факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Корчевського Владислава Богдановича

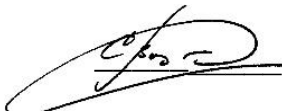
У своїй випускній кваліфікаційній роботі Корчевський В.Б. розглядає параболічну модель щільності сімей на скінченному проміжку грошових накопичень з початковою умовою, відомою на деякому скінченному відрізку з проміжку грошових накопичень. Специфіка задачі полягає в тому, що крайові умови рівні нулю, а отже завжди відомі. Отже неповністю визначеною у розглянутій задачі є лише початкова умова. Тема роботи є актуальною, як для соціальних організацій так і для держави, оскільки проведені дослідження можна використати для аналізу добробуту населення і вивчення його динаміки.

Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку джерел посилання. У розділі 1 зроблено огляд моделей грошових накопичень сім'ї. Розглянуто звичайну та стохастичну диференціальну модель. Для множини сімей розглянуто диференціальну модель їх щільності на грошово-часовій області. У розділі 2 автор робить постановку задачі моделювання щільності грошових накопичень множини сімей з початковою умовою, визначеною на деякому скінченному відрізку з проміжку грошових накопичень. Застосовуючи фундаментальний розв'язок рівняння як передатну функцію, Корчевський В.Б. зводить поставлену задачу до системи функціональних співвідношень, яку псевдообертає. Отриманий розв'язок в середньоквадратичному сенсі буде задовольняти частково відому початкову і крайові умови. У розділі 3 Корчевський В.Б. розробляє детальний алгоритм чисельної реалізації моделі щільності сімей у області грошових накопичень, розглянутої у другому розділі.

Як зауваження слід відмітити відсутність чисельної реалізації моделі щільності грошових накопичень за розробленим у третьому розділі алгоритмом.

Кваліфікаційна робота Корчевського В.Б. написана ним самостійно, на належному науковому рівні та правильно оформлена. Студент продемонстрував хороший рівень математичної підготовки. Вважаю, що випускна кваліфікаційна робота Корчевського Владислава Богдановича відповідає вимогам щодо написання кваліфікаційних робіт бакалавра та заслуговує на оцінку «добре», а її автор – на присвоєння ступеня бакалавра за спеціальністю 113 «Прикладна математика».

Науковий керівник, к.ф.-м.н., доцент кафедри МСС
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету
Імені Тараса Шевченка

 Сергій ВОЛОЩУК

РЕЦЕНЗІЯ

на кваліфікаційну роботу бакалавра на тему:

«Диференціальна модель грошових накопичень сімей з неповно-визначеними початково-крайовими умовами»

студента 4-го курсу бакалаврату факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Корчевського Владислава Богдановича

Кваліфікаційна робота Корчевського В.Б. присвячена моделюванню грошових накопичень множини сімей. В умовах ринкової економіки важливим є рух фінансів серед населення, який є можливим, коли населення матиме можливість витратити частину накопичених коштів. Тому моделювання грошових накопичень сімей є актуальною темою для досліджень.

Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку джерел посилань. У першому розділі Корчевський В.Б. зробив огляд кількох моделей грошових накопичень сім'ї, а саме: моделі на основі задачі Коші для звичайного диференціального рівняння, стохастичної диференціальної моделі, різницевої моделі та параболічної моделі грошових накопичень для множини сімей. У другому розділі автор розглядає параболічну модель грошових накопичень у постановці, де початкова умова відома не повністю, а лише на деякому відрізку з області визначення моделі у початковий момент часу. При цьому моделюється щільність сімей, грошові накопичення яких на певний момент часу досягли певного рівня. За допомогою фундаментального розв'язку оператора, породженого рівнянням моделі та спираючись на частково відому початкову і крайові умови, студент отримує систему функціональних співвідношень, псевдообертає її і на основі отриманих розв'язків або псевдорозв'язків відновлює функцію щільності сімей. У третьому розділі Корчевський В.Б. описує алгоритм проведення чисельного експерименту з розглянутою у другому розділі моделлю.

Як зауваження слід відмітити відсутність чисельного експерименту, який би підтвердив отримані у другому розділі результати.

Кваліфікаційна робота Корчевського Владислава Богдановича написана грамотно, на достатньому науковому рівні, правильно оформлена та відповідає всім вимогам щодо написання та оформлення кваліфікаційних робіт бакалавра. Вважаю, що кваліфікаційна робота Корчевського Владислава Богдановича заслуговує на оцінку «добре», а її автор заслуговує на присвоєння ступеня бакалавра за спеціальністю 113 «Прикладна математика».

Рецензент

кандидат технічних наук,
старший дослідник,
заступник директора
ІТГП НАН України



О.Г.Лебідь