Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня бакалавра

за спеціальністю 113 Прикладна математика

на тему:

Застосування апріорних оцінок в негативних нормах для дослідження коректності задачі Діріхле для інтегро-диференціального рівняння псевдопараболічного типу

Виконала студентка 4-го курсу бакалаврату
Андарал Анастасія Ігорівна ____________

Науковий керівник:
кандидат фізико-математичних наук
Анікушин Андрій Валерійович ____________

Засвідчую, що в цій роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студентка ____________

Роботу розглянуто й допущено до захисту на засіданні кафедри обчислювальної математики
«29» травня 2023 р.,
протокол № 8
Завідувач кафедри
проф. Сергій Ляшко ____________

Київ — 2023

РЕФЕРАТ

Обсяг роботи 29, 34 джерел посилання.

Ключові слова:
ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНЕ РІВНЯННЯ, ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, ОПЕРАТОР ВОЛЬТЕРРА, АПРІОРНІ ОЦІНКИ В НЕГАТИВНИХ НОРМАХ, УЗАГАЛЬНЕНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ

Об'єкт дослідження – початково крайова задача для інтегро-диференціального рівняння псевдопараболічного типу з початково-крайовими умовами типу Діріхле.

Мета роботи – довести коректність постановки вказаної задачі, застосовуючи метод апріорних оцінок в негативних нормах.

Результати: було доведено апріорні оцінки в негативних нормах для інтегро-диференціального оператора псевдопараболічного типу та для спряженого оператора, обґрунтовано коректність поставленої задачі.

Робота організована таким чином. У вступі наявний короткий огляд досліджень щодо диференціального псевдопараболічного рівняння, наведено приклади його застосувань, наведено бібліографію, що стосується методики апріорних нерівностей в негативних нормах та її застосування до інтегро-диференціальних рівнянь, а також представлено декілька нових робіт, де розглядаються схожі постановки задачі. Основна частина складається з 4 розділів. У цих розділах розглядається постановка задачі та основні позначення, доведено допоміжні твердження та апріорні оцінки для оператора задачі, сформульовано означення та теореми узагальненої розв'язності.

Зміст

Вступ

У нашій роботі ми розглянемо початково крайову задачу для лінійного псевдопараболічного інтегро-диференціального рівняння з інтегральним оператором типу Вольтерра

$$a(x)u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{tx_j})_{x_i} + b(x)u - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} + \\ + \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \left(K_i(x,t,\tau)u_{x_i}\right)_{x_i} \, d\tau = f(x,t), \tag{1}$$

з умовами типу Діріхле

$$\begin{aligned} u|_{x\in\partial\Omega} &= 0, \\ u|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Рівняння такого типу зустрічаються при розв'язанні різноманітних задач прикладної математики. Історично, в одній з перших робіт превдопараболічне рівняння було отримане при дослідженні процесів теплопереносу в гетерогенному середовищі як більш адекватна модель процесів [1], а питання пов'язані з дослідженням псевдопараболічних рівнянь з'являються вже у середини 20 сторіччя, коли, зокрема, у роботах Showalter & Ting [2] та Gopala Rao & Ting [3] було показано коректність постановок початково крайових задач для рівняння типу $\left(au - \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}u_{x_j})_{x_i}\right)_t + bu - \sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}u_{x_j})_{x_i} = f$.

Псевдопараболічні диференціальні рівняння зустрічаються при моделюванні різноманітних процесів: випромінювання із затримкою в часі [4], двофазні моделі потоку пористого середовища з динамічною капілярністю або гістерезисом [5], фазова модель поля для потоків ненасиченого пористого середовища [6], модель теплопровідності [7], моделі для опису світла [8] та інші. Для псевдопараболічного рівняння було отримано результати щодо існування, єдиності та неіснування класичних і узагальнених розв'язків, регулярність та асимптотичної поведінки розв'язків тощо (див., наприклад, [9] та наведені там посилання).

Псевдопараболічні диференціальні рівняння виникають також при дослідженнях фільтрації рідини та газу в пористих середовищах та середовищах "з тріщинами", теплопровідності в неоднорідних середовищах, міграції іонів у ґрунті, хвиль розповсюдження в дисперсному середовищі та в тонкому еластичному склі тощо [1].

Багато результатів щодо коректності постановок, оптимального керування та керованості процесами, що описуються рівняннями псевдопараболічного типу було отримано С.І. Ляшком за допомогою методики апріорних оцінок в негативних нормах. Це зокрема роботи [10], [11], [12], а також див., наприклад, [13] та наведену там бібліографію.

Основні положення теорії апріорних оцінок в негативних нормах та деякі її застосування описано у класичній монографії [1] та, частково, роботах [14], [15]. Підхід розроблений С.І. Ляшком та його учнями виявився досить ефективним для дослідження різноманітних питань коректності постановок, оптимального керування, керованості систем з розподіленими параметрами. Ми не ставимо собі за мету навести тут повну бібліографію, що стосується цих питань, обмежившись лише деякими роботами: [12], [16], [17], [18].

Як виявилося, вказаний підхід може бути з успіхом застосований і до задач Діріхле для інтегро-диференціальних рівнянь з інтегральними складовими типу Вольтерра. У роботах [19], [20] було досліджено задачі з інтегро-диференціальним рівнянням гіперболічного типу, у роботі [21] для рівнянь еліптичного, а у роботах [22], [23] – параболічних типів. Деякі спеціальні типи рівнянь з інтегральними складовими типу Вольтерра розглянуто, також, у [24], [25], [26]. У роботі [27] було зібрано результати у цій галузі.

Відзначимо, що на відміну від звичайного псевдопараболічного рівняння, у якому майбутнє процесу залежить тільки від стану у цей момент, наявність інтегральної складової типу Вольтерра дозволяє врахувати історію процесу (див., наприклад, [28], та наведену там бібліографію).

Останнім часом у літературі з’явилося багато робіт, де розглядаються інтегро-диференціальні рівняння типу (1) або близькі до нього. Так, у роботі [29] автори вивчають адаптивний метод найменших квадратів і оцінки апостеріорних похибок для задачі

$$u_t - \nabla \cdot (a(x)\nabla u_t + b(x)\nabla u + d(x)\int_0^t \nabla u(x,\tau)\ d\tau) + qu = f(x,t),$$

в області $\Omega \times (0,T]$, з умовами типу Діріхле

$$\begin{aligned} &u(x,t) = 0, && x \in \partial\Omega, t \in (0,T], \\ &u(x,0) = u_0(x), && x \in \Omega. \end{aligned}$$

У роботі [30] розглядається одновимірна задача виду

$$u_t = \left(a(x,t)u_{xt} + b(x,t)u_x + \int_0^t c(x,t,\tau)u_x(x,\tau)\ ds \right)_x + f(x,t),$$

для $(x,t) \in [0,1] \times J$, з початко-крайовими умовами

$$\begin{aligned} &u(0,t) = u(1,t) = 0, && t \in J, \\ &u(x,0) = u_0(x), && x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Автор запропонував дискретний H^1 змішаний метод скінченних елементів Гальоркіна для вказаного рівняння в одновимірному випадку. Отримано оцінки похибки оптимального порядку для невідомої скалярної функції u та її градієнту в L^2 та H^1 нормах.

Chen & Hou у [31] отримали апріорні та апостеріорні оцінки похибки для H^1 змішаного методу скінченних елементів Гальоркіна для задачі оптимального керування системами, що описуються лінійним псевдогіперболічним рівнянням

$$y_{tt} - \mathrm{div}\nabla y - \mathrm{div}\nabla y_t + \int_0^t \mathrm{div}\nabla y(s)\ ds = f + u, \text{ для } x \in \Omega, t \in (0,T]$$

з умовами

$$\begin{aligned} &y(x,t) = 0, && x \in \partial\Omega, t \in (0,T], \\ &y(x,0) = y_0(x), && x \in \Omega, \\ &y_t(x,0) = y_1(x), && x \in \Omega. \end{aligned}$$

У праці [32] запропоновано методику аналізу існування та єдиності розв'язку змішаної задачі для нелінійного інтегро-диференціального рівняння третього порядку псевдопараболічного типу з виродженим ядром

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t) a_i(s)$$

на основі методу послідовних наближень. Зокрема, розглядається задача

$$\begin{aligned} U_t(t,x) - &U_{txx}(t,x) - \mu \int_0^T K(t,s) U_{xx}(s,x)\, ds = \\ &= \nu(t) \int_0^T U(\theta,x)\, d\theta + f\left(x, \int_0^T \int_0^l H(\theta,y) U(\theta,y) dy d\theta\right) \end{aligned}$$

з початково-крайовими умовами

$$\begin{aligned} U(0,x) &= \varphi(x), \\ U(t,0) &= U(t,l) = 0. \end{aligned}$$

та деякими обмеженнями на коефіцієнти.

Di & Shang вивчали [33] початково-крайову задачу для нелінійного псевдопараболічного рівняння з інтегральної складовою

$$u_t - \Delta u - \Delta u_t + \int_0^t \lambda(t-\tau) \Delta u(\tau)\, d\tau = |u|^{p-1} u$$

з початковими та граничними умовами Діріхле. За допомогою методу Гальоркіна і теорії потенціалів було доведено існування глобального розв'язку та деякі властивості розривності розв'язків.

Великий огляд присвячений нелінійним диференціальним та інтегро-диференціальним рівнянням псевдопараболічного типу подано у [9].

Основна мета цієї роботи – показати коректність постановки початково-крайової задачі для рівняння (1)–(2), застосувавши той самий підхід. Наскільки нам відомо, це буде перше застосування цитованої методики до інтегро-диференціальних рівнянь псевдопараболічного чи псевдогіперболічного типів. Тим самим буде розширено "область застосування" методу апріорних оцінок в негативних нормах.

Нашу роботу побудовано так:

- у першій частини подано постановку задачі, вказано на припущення щодо оператора задачі, уведено основні позначення;
- друга частина має технічний характер. Тут ми проводимо оцінку інтегрального доданка Вольтерра у потрібний спосіб;
- у третій частині доводяться апріорні оцінки для рівняння, що розглядається. Це основна змістовна частина роботи;
- в останньому розділі, ґрунтуючись на отриманих апріорних оцінках, ми формулюємо означення узагальнених розв'язків та теореми про коректність постановки нашої задачі.

1 Постановка задачі

Розглянемо циліндричну область $Q = \Omega \times (0, T)$, де Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з гладкою межею $\partial\Omega$, та лінійне рівняння з інтегро-диференціальним оператором

$$\mathcal{L}u \equiv L_D u + L_I u = f(x,t). \tag{3}$$

Тут $u(x,t)$ – шукана функція, що описує стан системи в області Q, а диференціальна та інтегральна частини оператора $\mathcal{L}$ задано виразами

$$L_D u \equiv (Au)_t + Bu, \tag{4}$$

$$L_I u \equiv \int_0^t \sum_{i=1}^{n} (K_i(x,t,\tau)\; u_{x_i}(x,\tau))_{x_i} d\tau, \tag{5}$$

де

$$Au \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)\; u_{x_j})_{x_i} + a(x)u, \tag{6}$$

$$Bu \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(x)\; u_{x_j})_{x_i} + b(x)u. \tag{7}$$

Надалі будемо вважати, що $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n \subset C^1\left(\overline{\Omega}\right), a, b \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, для всіх $x \in \Omega$ мають місце співвідношення

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), b_{ij}(x) = b_{ji}(x), a(x) \geq 0,\; b(x) \geq 0, \tag{8}$$

та, що коефіцієнти $a_{ij}(x)$ та $b_{ij}(x)$ при довільних $\xi_i \in \mathbb{R}^1,\; i = \overline{1,n}$ задовольняють умовам

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \tag{9}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\xi_i\xi_j \geq 0, \tag{10}$$

для деякої додатної сталої α. Зазначимо, що це класичні обмеження з [1]. Уважатимемо також, що ядра $K_i(x,t,\tau)$ є обмеженими та інтегровними, тобто для деякої сталої M справджується нерівність $|K_i(x,t,\tau)| < M$ для всіх $x \in \Omega$ та $t, \tau \in [0,T]$.

Областю визначення оператора $\mathcal{L}$ вважатимемо простір, що складається з множини гладких, тобто нескінченну кількість разів диференційовних в області $\overline{Q}$ функцій, що задовольняють однорідним початковим та граничним умовам типу Діріхле

$$u|_{t=0} = 0, \tag{11}$$

$$u|_{x\in\partial\Omega} = 0. \tag{12}$$

Множину гладких функцій, що задовольняють умови (11) і (12) будемо позначати C^∞_{BR}.

Розглянемо простір W^+_{BR}, що є поповненням C^∞_{BR} за нормою

$$\|u\|_{W^+_{BR}} = \left(\int_Q u_t^2 + \sum_{i=1}^n u^2_{x_i t} dQ \right)^{1/2}. \tag{13}$$

Зауваження 1. Відзначимо, що норма (13) є еквівалентною до норми

$$\|u\| = \left(\int_Q u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j t} dQ \right)^{1/2}.$$

Доведення. Справді, позначаючи через C_a сталу, що мажорує всі коефіцієнти a_{ij} в області Ω, з нерівністю Коші отримаємо, що

$$\|u\|^2 \le \int_Q u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n |a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j t}| \, dQ \le \int_Q u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n \frac{C_a}{2} (u^2_{x_i t} + u^2_{x_j t}) \, dQ =$$

$$= \int_Q u_t^2 + nC_a \sum_{i,j=1}^n u^2_{x_i t} dQ \le C_2 \|u\|^2_{W^+_{BR}},$$

де $C_2 = \max\{1, nC_a\}$.

З іншої сторони, з умови (9), маємо

$$\|u\|^2 = \int_Q u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j t} dQ \geq \int_Q u_t^2 + \alpha \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i t}^2 dQ \geq$$

$$\geq C_1 \int_Q u_t^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i t}^2 dQ = C_1 \|u\|^2_{W^+_{BR}},$$

де $C_1 = \min\{1, \alpha\}$. □

Також розглянемо спряжений оператор, що має вигляд

$$\mathcal{L}^* v \equiv L_D^* v + L_I^* v, \tag{14}$$

$$L_D^* v \equiv -(Av)_t + Bv, \tag{15}$$

$$L_I^* v \equiv \int_t^T \sum_{i=1}^{n} (K_i(x,\tau,t)\ v_{x_i}(x,\tau))_{x_i} d\tau. \tag{16}$$

Областю визначення оператора $\mathcal{L}^*$ вважаємо простір, який складається з множини гладких в області $\overline{Q}$ функцій, що задовольняють початковим та граничним умовам

$$v|_{t=T} = 0, \tag{17}$$

$$v|_{x\in\partial\Omega} = 0. \tag{18}$$

Множину таких функцій позначатимемо $C^\infty_{BR^+}$, а через $W^+_{BR^+}$ позначимо поповнення множини $C^\infty_{BR^+}$ за тією ж нормою (13).

Розглянемо негативні простори W^-_{BR}, $W^-_{BR^+}$ [34], що побудовано за позитивними просторами W^+_{BR}, $W^+_{BR^+}$, відповідно, відносно $L_2(Q)$. Зокрема, справедливі такі щільні та неперервні вкладення:

$$W^+_{BR} \subset L_2(Q) \subset W^-_{BR},\ W^+_{BR^+} \subset L_2(Q) \subset W^-_{BR^+}.$$

Через H^+_{BR} позначимо поповнення простору гладких функцій в області $\overline{Q}$, що задовольняють початковим та граничним умовам (11), (12) за нормою

$$\|u\|^2_{H^+_{BR}} = \int_Q \left(u^2 + \sum_{i=1}^{n} u^2_{x_i} \right) dQ. \tag{19}$$

Простір $H^+_{BR^+}$ – поповнення простору гладких функцій в області $\overline{Q}$, що задовольняють початковим та граничним умовам (17), (18) за тією ж самою нормою (19). Через H^-_{BR}, $H^-_{BR^+}$ позначимо відповідні негативні простори.

Зауваження 2. Простори H^+_{BR}, $H^+_{BR^+}$ щільно та неперервно вкладаються в $L_2(Q)$.

2 Допоміжні твердження

Надалі нам знадобляться такі леми, що доводяться аналогічно до роботи [19].

Лема 1. *Нехай* $f \in C^1([0,T])$, $f(T) = 0$ *та для довільних* $t, \tau \in [0,T]$ *справджується нерівність* $|K(t,\tau)| \le M$. *Тоді для довільної сталої* $c > 0$ *має місце нерівність:*

$$\left| \int_0^T \int_0^t K(t,\tau) e^{c\tau} f'(\tau) d\tau \ f(t) dt \right| \le \frac{MT}{c} \int_0^T e^{ct} (f'(t))^2 dt.$$

Доведення. Інтегруючи частинами, маємо

$$\int_0^T f(t) \int_0^t K(t,\tau) e^{c\tau} f'(\tau) d\tau dt = \left[f(t) \int_0^t \left(\int_0^s K(s,\tau) e^{c\tau} f'(\tau) d\tau \right) ds \right] \Bigg|_{t=0}^T -$$

$$- \int_0^T \left[f'(t) \ \int_0^t \left(\int_0^s K(s,\tau) e^{c\tau} f'(\tau) d\tau \right) ds \right] dt.$$

З умови $f(T) = 0$ випливає, що

$$\left[f(t) \int_0^t \left(\int_0^s K(s,\tau) e^{c\tau} f'(\tau) d\tau \right) ds \right] \Bigg|_{t=0}^T = 0.$$

Тоді

$$\int_0^T f(t) \int_0^t K(t,\tau) e^{c\tau} f'(\tau) d\tau dt =$$

$$= - \int_0^T \left[f'(t) \ \int_0^t \left(\int_0^s K(s,\tau) e^{c\tau} f'(\tau) d\tau \right) ds \right] dt = I.$$

Оцінимо цей вираз у такий спосіб

$$|I| \le \int_0^T \left[|f'(t)| \ \int_0^t \left(\int_0^s |K(s,\tau) e^{c\tau} f'(\tau)| d\tau \right) ds \right] dt \le$$

$$\le M \int_0^T \left[|f'(t)| \int_0^t \left(\int_0^s e^{c\tau} |f'(\tau)| d\tau \right) ds \right] dt.$$

За допомогою нерівності Коші-Буняковського отримаємо

$$\int_0^s e^{c\tau}|f'(\tau)|d\tau \le \left(\int_0^s e^{c\tau}d\tau \int_0^s e^{c\tau}(f'(\tau))^2 d\tau\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{1}{c}(e^{cs}-1)\int_0^s e^{c\tau}(f'(\tau))^2 d\tau\right)^{1/2}.$$

Використовуючи останню нерівність та застосовуючи нерівність Коші-Буняковського ще раз, маємо, що

$$|I| \le M\int_0^T \left[|f'(t)|\int_0^t \left(\frac{1}{c}(e^{cs}-1)\int_0^s e^{c\tau}(f'(\tau))^2 d\tau\right)^{1/2} ds\right]dt \le$$

$$\le M\int_0^T \left[|f'(t)|\left(\int_0^t \frac{1}{c}(e^{cs}-1)ds \ \int_0^t\int_0^s e^{c\tau}(f'(\tau))^2 d\tau\ ds\right)^{1/2}\right]dt.$$

Очевидно, що має місце рівність

$$\int_0^t \frac{1}{c}(e^{cs}-1)ds = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{c}(e^{ct}-1)-t\right) = \frac{e^{ct}-1-ct}{c^2},$$

де права частина є невід'ємною. Змінюючи порядок інтегрування отримаємо, що

$$\int_0^t\int_0^s e^{c\tau}(f'(\tau))^2 d\tau ds = \int_0^t\int_\tau^t e^{c\tau}(f'(\tau))^2 ds d\tau = \int_0^t (t-\tau)e^{c\tau}(f'(\tau))^2 d\tau.$$

Таким чином, маємо

$$|I| \le M\int_0^T \left[|f'(t)|\left(\frac{e^{ct}-1-ct}{c^2}\ \int_0^t (t-\tau)e^{c\tau}(f'(\tau))^2 d\tau\right)^{1/2}\right]dt =$$

$$= M\int_0^T e^{ct/2}|f'(t)|\ e^{-ct/2}\left(\frac{e^{ct}-1-ct}{c^2}\ \int_0^t (t-\tau)e^{c\tau}(f'(\tau))^2 d\tau\right)^{1/2} dt \le$$

$$\le M\left[\int_0^T e^{ct}(f'(t))^2\,dt \cdot \int_0^T \left(e^{-ct}\ \frac{e^{ct}-1-ct}{c^2}\cdot\int_0^t (t-\tau)e^{c\tau}(f'(\tau))^2 d\tau\right)dt\right]^{1/2}.$$

Оскільки $0 \le \frac{e^{ct}-1-ct}{e^{ct}} \le 1$ та $t-\tau \le T$ для $\tau \in [0,t], t \le T$, то

$$\int_0^T e^{-ct}\left(\frac{e^{ct}-1-ct}{c^2}\ \int_0^t (t-\tau)e^{c\tau}(f'(\tau))^2 d\tau\right)dt =$$

$$= \int_0^T \left(\frac{e^{ct}-1-ct}{c^2 e^{ct}}\ \int_0^t (t-\tau)e^{c\tau}(f'(\tau))^2 d\tau\right)dt \le$$

$$\le \int_0^T \frac{1}{c^2}\ \int_0^T T e^{c\tau}(f'(\tau))^2 d\tau dt = \frac{T^2}{c^2}\int_0^T e^{c\tau}(f'(\tau))^2 d\tau.$$

Остаточно отримуємо, що

$$|I| \le M\left[\frac{T^2}{c^2}\int_0^T e^{ct}(f'(t))^2 dt\ \int_0^T e^{c\tau}(f'(\tau))^2 d\tau\right]^{1/2} = \frac{MT}{c}\int_0^T e^{ct}(f'(\tau))^2 dt,$$

що й доводить потрібне твердження. $\square$

Аналогічно можна довести й таке твердження

Лема 2. *Нехай* $f \in C^1([0,T])$, $f(0) = 0$ *та для довільних* $t, \tau \in [0,T]$ *справджується нерівність* $|K(t,\tau)| \le M$. *Тоді для довільної сталої* $c > 0$ *має місце нерівність:*

$$\left|\int_0^T \int_t^T K(\tau,t)e^{-c\tau}f'(\tau)d\tau\ f(t)dt\right| \le \frac{MT}{c}\int_0^T e^{-ct}(f'(t))^2 dt.$$

3 Апріорні оцінки

Для дослідження існування та єдиності узагальненого розв'язку доведемо деякі нерівності для операторів $\mathcal{L}, \mathcal{L}^*$. У наступних лемах уважатимемо, що C може позначати різні сталі, коли це неважливо.

Лема 3. *Існує така стала* $C > 0$*, що для довільної функції* $u(x,t) \in W^+_{BR}$ *виконується нерівність:*

$$C \left\| u \right\|_{W^+_{BR}} \geq \left\| \mathcal{L}u \right\|_{W^-_{BR^+}}.$$

Доведення. Розглянемо гладку функцію $u(x,t) \in W^+_{BR}$, яка задовольняє умови (11) і (12). За визначенням маємо, що

$$\left\| \mathcal{L}u \right\|_{W^-_{BR^+}} = \sup_{v \in W^+_{BR^+}, v \neq 0} \frac{|(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)}|}{\left\| v \right\|_{W^+_{BR^+}}}. \tag{20}$$

Для будь-якої функції $v(x,t) \in C^\infty_{BR^+}$ розглянемо скалярний добуток $(L_D u, v)_{L_2(Q)}$ та отримаємо оцінки для всіх його доданків.

Оскільки $a \in C(\overline{\Omega})$, то функція $a(x)$ є обмеженою на множині $\overline{\Omega}$. Зважаючи на це, використовуючи нерівність Коші-Буняковського та нерівність Пуанкаре, яка має вигляд

$$\left\| u \right\|_{L_2(Q)} \leq C_p \left\| u_t \right\|_{L_2(Q)},$$

для деякої сталої C_p, маємо

$$\left| \int_Q a(x) u_t v dQ \right| \leq \int_Q |a(x) u_t v| dQ \leq \left(\int_Q a(x) v^2 dQ \right)^{1/2} \left(\int_Q a(x) u_t^2 dQ \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C_p \left(\int_Q a(x) v_t^2 dQ \right)^{1/2} \left(\int_Q a(x) u_t^2 dQ \right)^{1/2} \leq C \left\| v \right\|_{W^+_{BR^+}} \left\| u \right\|_{W^+_{BR}}.$$

Аналогічно

$$\left|\int_Q b(x)uvdQ\right| \leq \int_Q |b(x)uv|dQ \leq \left(\int_Q b(x)v^2dQ\right)^{1/2} \left(\int_Q b(x)u^2dQ\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C_p \left(\int_Q b(x)v_t^2dQ\right)^{1/2} \left(\int_Q b(x)u_t^2dQ\right)^{1/2} \leq C\,\|v\|_{W^+_{BR^+}}\,\|u\|_{W^+_{BR}}.$$

Використовуючи формулу Гаусса-Остроградського, враховуючи умови (17) і (18) та обмеженість функцій a_{ij} отримаємо, що

$$\left| -\int_Q \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_j})_{x_i t} v dQ\right| = \left|\int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j t}v_{x_i}dQ\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^n \int_Q |a_{ij}u_{x_j t}v_{x_i}|dQ \leq C\sum_{i,j=1}^n \left(\int_Q u^2_{x_j t}dQ \int_Q v^2_{x_i}dQ\right)^{1/2} =$$

$$= C\sum_{j=1}^n \left(\int_Q u^2_{x_j t}dQ\right)^{1/2} \sum_{i=1}^n \left(\int_Q v^2_{x_i}dQ\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C_p C\sum_{j=1}^n \left(\int_Q u^2_{x_j t}dQ\right)^{1/2} \sum_{i=1}^n \left(\int_Q v^2_{x_i t}dQ\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq nC_pC\left(\int_Q \sum_{j=1}^n u^2_{x_j t}dQ\right)^{1/2} \left(\int_Q \sum_{i=1}^n v^2_{x_i t}dQ\right)^{1/2} \leq nC_pC\,\|v\|_{W^+_{BR^+}}\,\|u\|_{W^+_{BR}}.$$

Аналогічно згідно з формулою Гаусса-Остроградського та враховуючи умови (17) і (18) отримаємо, що

$$\left|\int_Q \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}u_{x_j})_{x_i} v dQ\right| = \left| -\int_Q \sum_{i,j=1}^n b_{ij}u_{x_j}v_{x_i}dQ\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^n \int_Q |b_{ij}u_{x_j}v_{x_i}|dQ \leq C\sum_{i,j=1}^n \left(\int_Q u^2_{x_j}dQ \int_Q v^2_{x_i}dQ\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq CC_p^2 \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_Q u_{x_j t}^2 dQ \int_Q v_{x_i t}^2 dQ \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq nCC_p^2 \left(\sum_{j=1}^{n} \int_Q u_{x_j t}^2 dQ \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_Q v_{x_i t}^2 dQ \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq nCC_p^2 \|v\|_{W_{BR^+}^+} \|u\|_{W_{BR}^+} .$$

Отже, для деякої сталої C виконується нерівність

$$|(L_D u, v)_{L_2(Q)}| \leq C \|v\|_{W_{BR^+}^+} \|u\|_{W_{BR}^+} .$$

Далі оцінимо $(L_I u, v)_{L_2(Q)}$ для будь-якої функції $v(x,t) \in C_{BR^+}^\infty$. Проінтегруємо частинами та застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$|(L_I u, v)_{L_2(Q)}| = \left| \int_Q \int_0^t \sum_{i=1}^{n} (K_i(x,t,\tau)\ u_{x_i}(x,\tau))_{x_i} d\tau\ v(x,t) dQ \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_Q \int_0^t K_i(x,t,\tau) u_{x_i}(x,\tau) v_{x_i}(x,t) d\tau dQ \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \int_Q \int_0^t |K_i(x,t,\tau)\ u_{x_i}(x,\tau)\ v_{x_i}(x,t)| d\tau dQ \leq$$

$$\leq M \sum_{i=1}^{n} \int_Q |v_{x_i}(x,t)| \int_0^t |u_{x_i}(x,\tau)| d\tau dQ \leq$$

$$\leq M \sum_{i=1}^{n} \int_Q |v_{x_i}(x,t)| \left(\int_0^t d\tau\ \int_0^t u_{x_i}^2(x,\tau) d\tau \right)^{1/2} dQ \leq$$

$$\leq M \sum_{i=1}^{n} \left(\int_Q v_{x_i}^2(x,t)\ dQ \int_Q T \int_0^t u_{x_i}^2(x,\tau) d\tau dQ \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq M \sum_{i=1}^{n} \left(\int_Q v_{x_i}^2(x,t)\ dQ \int_Q T \int_0^T u_{x_i}^2(x,\tau) d\tau dQ \right)^{1/2} =$$

$$= MT \sum_{i=1}^{n} \left(\int_Q v_{x_i}^2(x,t)\, dQ \int_Q u_{x_i}^2(x,t) dQ \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq MT \left(\sum_{i=1}^{n} \int_Q v_{x_i}^2(x,t) dQ \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_Q u_{x_i}^2(x,t) dQ \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq MTC_p^2 \left(\int_Q \sum_{i=1}^{n} v_{x_i t}^2(x,t) dQ \right)^{1/2} \left(\int_Q \sum_{i=1}^{n} u_{x_i t}^2(x,t) dQ \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq MTC_p^2 \|v\|_{W_{BR^+}^+} \|u\|_{W_{BR}^+} .$$

Загалом, маємо, що

$$|(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)}| = |(L_D u, v)_{L_2(Q)} + (L_I u, v)_{L_2(Q)}| \leq$$

$$\leq |(L_D u, v)_{L_2(Q)}| + |(L_I u, v)_{L_2(Q)}| \leq$$

$$\leq C \|v\|_{W_{BR^+}^+} \|u\|_{W_{BR}^+} + MTC_p^2 \|v\|_{W_{BR^+}^+} \|u\|_{W_{BR}^+} \leq$$

$$\leq C_1 \|v\|_{W_{BR^+}^+} \|u\|_{W_{BR}^+} ,$$

для деякої сталої C_1. Поділивши останню нерівність на $\|v\|_{W_{BR^+}^+}$, перейшовши до супремуму по v та спираючись на щільність множини $C_{BR^+}^\infty$ у просторі W_{BR}^+ отримаємо

$$\sup_{v \in W_{BR^+}^+, v \neq 0} \frac{|(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)}|}{\|v\|_{W_{BR^+}^+}} = \sup_{v \in C_{BR^+}^\infty, v \neq 0} \frac{|(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)}|}{\|v\|_{W_{BR^+}^+}} \leq C_1 \|u\|_{W_{BR}^+} ,$$

що й завершує доведення леми. □

Аналогічно можна довести і таке твердження.

Лема 4. *Існує така стала $C > 0$, що для довільної функції $v(x,t) \in W_{BR^+}^+$ виконуєтьcя нерівність:*

$$C \|v\|_{W_{BR^+}^+} \geq \|\mathcal{L}^* v\|_{W_{BR}^-} .$$

Зауваження 3. Нерівності, що доведено у лемах 3 і 4 дозволяють розширити оператори $\mathcal{L}, \mathcal{L}^*$ з їх областей визначення на простори W^+_{BR}, $W^+_{BR^+}$, відповідно, за неперервністю. Збережемо за розширеними операторами ті самі позначення. Тепер нерівності, вказані у лемах 3, 4 будуть справджуватися вже для всіх $u \in W^+_{BR}, v \in W^+_{BR^+}$.

Лема 5. *Існує така стала $C > 0$, що для довільної функції $u(x,t) \in W^+_{BR}$ виконується нерівність:*

$$\|\mathcal{L}u\|_{W^-_{BR^+}} \geq C \|u\|_{H^+_{BR}}.$$

Доведення. Спочатку розглянемо гладку функцію $u(x,t) \in C^\infty_{BR}$. Нехай

$$v(x,t) = -\int_T^t e^{-c\tau} u(x,\tau) d\tau, \tag{21}$$

де c – додатна стала. Тоді $u(x,t) = -e^{ct} v_t(x,t)$ та очевидно, що $v(x,t) \in W^+_{BR^+}$. Доведемо, що

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} \geq C \|v\|^2_{W^+_{BR^+}}.$$

Розглянемо спочатку $(L_D u, v)_{L_2(Q)}$. За допомогою інтегрування частинами отримаємо, що

$$\int_Q a(x) u_t v dQ = \int_Q (a(x)uv)_t dQ - \int_Q a(x) v_t u dQ.$$

З граничних умов (11) та співвідношення (21) маємо

$$\int_Q (a(x)uv)_t dQ = \int_\Omega \int_0^T (a(x)uv)_t dt d\Omega =$$

$$= \int_\Omega (a(x)u(x,T)v(x,T) - a(x)u(x,0)v(x,0) d\Omega = 0.$$

Тоді

$$\int_Q a(x) u_t v dQ = -\int_Q a(x) v_t u dQ = -\int_Q a(x) v_t (-e^{ct} v_t) dQ = \int_Q a(x) e^{ct} v_t^2 dQ. \tag{22}$$

Далі маємо, що

$$\int_Q b(x)uvdQ = -\int_Q b(x)e^{ct}v_t v dQ = -\frac{1}{2}\int_Q (b(x)e^{ct}v^2)_t dQ + \frac{1}{2}\int_Q cb(x)e^{ct}v^2 dQ =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^T (b(x)e^{ct}v^2)_t dt d\Omega + \frac{1}{2}\int_Q cb(x)e^{ct}v^2 dQ = \frac{1}{2}\int_\Omega b(x)v^2(x,0)d\Omega +$$

$$+\frac{1}{2}\int_Q cb(x)e^{ct}v^2 dQ \geq \frac{1}{2}\int_Q cb(x)e^{ct}v^2 dQ. \tag{23}$$

Використовуючи інтегрування частинами отримаємо, що

$$-\int_Q v \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_j})_{x_i t} dQ = -\int_Q \sum_{i,j=1}^n ((a_{ij}u_{x_j})_{x_i} v)_t dQ + \int_Q \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_j})_{x_i} v_t dQ.$$

З граничних умов (11) та співвідношення (21) можна отримати, що $u_{x_j}(x,0) = v(x,T) = 0$, а тому

$$\int_Q \sum_{i,j=1}^n ((a_{ij}u_{x_j})_{x_i} v)_t dQ = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \int_0^T ((a_{ij}u_{x_j})_{x_i} v)_t dt d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \Big((a_{ij}u_{x_j}(x,T))_{x_i} v(x,T) - (a_{ij}u_{x_j}(x,0))_{x_i} v(x,0) \Big) d\Omega = 0.$$

Тоді використовуючи формулу Гаусса-Остроградського та враховуючи умови (17) і (18) отримаємо, що

$$-\int_Q v \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_j})_{x_i t} dQ = \int_Q \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_j})_{x_i} v_t dQ = \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}e^{ct} v_{x_j t} v_{x_i t} dQ.$$

З умови (9) отримаємо, що

$$-\int_Q v \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_j})_{x_i t} dQ = \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}e^{ct} v_{x_j t} v_{x_i t} dQ \geq \alpha \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 dQ. \tag{24}$$

Аналогічно з формули Гаусса-Остроградського та враховуючи умови

(17) і (18) отримаємо, що

$$-\int_Q v\sum_{i,j=1}^n (b_{ij}u_{x_j})_{x_i}dQ=\int_Q\sum_{i,j=1}^n b_{ij}u_{x_j}v_{x_i}dQ=-\int_Q e^{ct}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}v_{x_jt}v_{x_i}dQ. \tag{25}$$

Тепер розглянемо рівність

$$\int_Q e^{ct}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}v_{x_jt}v_{x_i}dQ=\int_Q\sum_{i,j=1}^n (b_{ij}e^{ct}v_{x_j}v_{x_i})_t dQ-\int_Q\sum_{i,j=1}^n (b_{ij}e^{ct}v_{x_i})_t v_{x_j}dQ= \tag{26}$$

$$=\int_Q\sum_{i,j=1}^n (b_{ij}e^{ct}v_{x_j}v_{x_i})_t dQ-\int_Q\sum_{i,j=1}^n cb_{ij}e^{ct}v_{x_i}v_{x_j}dQ-\int_Q\sum_{i,j=1}^n b_{ij}e^{ct}v_{x_it}v_{x_j}dQ.$$

Оскільки за умовою $b_{ij}=b_{ji}$ та якщо змінити i на j і навпаки, то запишемо останній інтеграл у вигляді

$$\int_Q\sum_{i,j=1}^n b_{ij}e^{ct}v_{x_it}v_{x_j}dQ=\int_Q\sum_{i,j=1}^n b_{ji}e^{ct}v_{x_it}v_{x_j}dQ=\int_Q\sum_{i,j=1}^n b_{ij}e^{ct}v_{x_jt}v_{x_i}dQ.$$

Тоді, використовучи (26), отримаємо, що

$$\int_Q e^{ct}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}v_{x_jt}v_{x_i}dQ=\frac{1}{2}\int_Q\sum_{i,j=1}^n (b_{ij}e^{ct}v_{x_j}v_{x_i})_t dQ-\frac{1}{2}\int_Q\sum_{i,j=1}^n cb_{ij}e^{ct}v_{x_i}v_{x_j}dQ.$$

Таким чином, рівність (25) можна продовжити так

$$-\int_Q v\sum_{i,j=1}^n (b_{ij}u_{x_j})_{x_i}dQ=-\int_Q e^{ct}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}v_{x_jt}v_{x_i}dQ=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_Q\sum_{i,j=1}^n (b_{ij}e^{ct}v_{x_j}v_{x_i})_t dQ+\frac{1}{2}\int_Q\sum_{i,j=1}^n cb_{ij}e^{ct}v_{x_i}v_{x_j}dQ=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n\int_0^T (b_{ij}e^{ct}v_{x_j}v_{x_i})_t dt d\Omega+\frac{1}{2}\int_Q\sum_{i,j=1}^n cb_{ij}e^{ct}v_{x_i}v_{x_j}dQ=$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} v_{x_j}(x,0) v_{x_i}(x,0) d\Omega + \frac{1}{2}\int_Q \sum_{i,j=1}^{n} c b_{ij} e^{ct} v_{x_i} v_{x_j} dQ \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_Q \sum_{i,j=1}^{n} c b_{ij} e^{ct} v_{x_i} v_{x_j} dQ. \qquad (27)$$

Враховуючи (22), (23), (24) та (27), запишемо загальну оцінку

$$(L_D u, v)_{L_2(Q)} = \int_Q a(x) u_t v dQ + \int_Q b(x) u v dQ -$$

$$- \int_Q v \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_j})_{x_i t} dQ - \int_Q v \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij} u_{x_j})_{x_i} dQ \geq$$

$$\geq \int_Q a(x) e^{ct} v_t^2 dQ + \frac{1}{2}\int_Q c b(x) e^{ct} v^2 dQ + \alpha \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i t}^2 dQ +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_Q \sum_{i,j=1}^{n} c b_{ij} e^{ct} v_{x_i} v_{x_j} dQ.$$

Врахуємо, що

$$\int_Q a(x) e^{ct} v_t^2 dQ \geq 0;\ \frac{1}{2}\int_Q c b(x) e^{ct} v^2 dQ \geq 0,$$

а з умови (10) випливає, що

$$\frac{1}{2}\int_Q \sum_{i,j=1}^{n} c b_{ij} e^{ct} v_{x_i} v_{x_j} dQ \geq 0.$$

Тоді

$$(L_D u, v)_{L_2(Q)} \geq \alpha \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i t}^2 dQ. \qquad (28)$$

Тепер розглянемо $(L_I u, v)_{L_2(Q)}$. З формули Гаусса-Остроградського та враховуючи початково-крайові умови отримаємо

$$(L_I u, v)_{L_2(Q)} = \sum_{i=1}^{n} \int_Q \int_0^t (K_i(x,t,\tau)\ u_{x_i}(x,\tau))_{x_i} d\tau\ v(x,t) dQ =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \int_Q \int_0^t K_i(x,t,\tau)\ u_{x_i}(x,\tau) d\tau\ v_{x_i}(x,t) dQ =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_Q \int_0^t K_i(x,t,\tau) e^{c\tau} v_{x_i\tau}(x,\tau) d\tau\ v_{x_i}(x,t) dQ.$$

Скористаємось лемою 1 для кожного доданку в сумі та отримаємо, що

$$|(L_I u, v)_{L_2(Q)}| = \left| \int_Q \int_0^t \sum_{i=1}^{n} K_i(x,t,\tau) e^{c\tau} v_{x_i\tau}(x,\tau) d\tau\ v_{x_i}(x,t) dQ \right| \leq$$

$$\leq \frac{MT}{c} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i t}^2 dQ. \tag{29}$$

Комбінуючи (28) та (29) маємо, що

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} = (L_D u, v)_{L_2(Q)} + (L_I u, v)_{L_2(Q)} \geq$$

$$\geq (L_D u, v)_{L_2(Q)} - |(L_I u, v)_{L_2(Q)}| \geq \alpha \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i t}^2 dQ - \frac{MT}{c} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i t}^2 dQ.$$

Обираючи тепер $c = \frac{2MT}{\alpha}$ маємо, що

$$\alpha \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i t}^2 dQ - \frac{MT}{c} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i t}^2 dQ = \frac{\alpha}{2} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i t}^2 dQ.$$

Отже,

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} \geq \frac{\alpha}{2} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i t}^2 dQ. \tag{30}$$

Враховуючи, що з нерівності Пуанкаре випливає справедливість (для деякої сталої $C > 0$) оцінки

$$\int_Q \left(v_t^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 \right) dQ \le C \int_Q \left(v_{tx_1}^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 \right) dQ \le 2C \int_Q \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 dQ,$$

то нерівність (30) можемо переписати у вигляді

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} \ge \frac{\alpha}{2} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 dQ \ge C \|v\|^2_{W^+_{BR^+}}. \tag{31}$$

Застосовуючи, стандартним чином, нерівність Шварца до лівої частини, маємо

$$C\|v\|^2_{W^+_{BR^+}} \le (\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} \le \|\mathcal{L}u\|_{W^-_{BR^+}} \|v\|_{W^+_{BR^+}}.$$

Поділивши обидві частини на $\|v\|_{W^+_{BR^+}}$ отримаємо

$$C\|v\|_{W^+_{BR^+}} \le \|\mathcal{L}u\|_{W^-_{BR^+}}.$$

Відзначимо, що між $u(x,t)$ та $v(x,t)$ справджується таке співвідношення

$$\|u\|^2_{H^+_{BR}} = \int_Q \left(u^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) dQ = \int_Q \left(e^{2ct} v_t^2 + \sum_{i=1}^n e^{2ct} v_{x_i t}^2 \right) dQ \le$$

$$\le e^{2cT} \int_Q \left(v_t^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 \right) dQ = e^{2cT} \|v\|^2_{W^+_{BR^+}}.$$

Отже,

$$\|\mathcal{L}u\|_{W^-_{BR^+}} \ge C\|v\|_{W^+_{BR^+}} \ge Ce^{-2cT}\|u\|_{H^+_{BR}} \ge C_1 \|u\|_{H^+_{BR}},$$

для деякої сталої C_1. Таким чином твердження леми доведено для усіх $u \in C^\infty_{BR}$.

Для решти функцій з W^+_{BR} потрібне твердження встановлюється за допомогою граничного переходу. А саме: нехай $u \in W^+_{BR}$ (не обов'язково гладка). Внаслідок щільності вкладення $C^{\infty}_{BR} \subset W^{+}_{BR}$ елемент u можна наблизити послідовністю елементів $u_m \in C^{\infty}_{BR}$. Тобто $||u - u_m||_{W^{+}_{BR}} \to 0$, при $m \to \infty$. Внаслідок леми 3 має місце нерівність $||\mathcal{L}u - \mathcal{L}u_m||_{W^{-}_{BR^{+}}} \leq C_1||u - u_m||_{W^{+}_{BR}}$. А отже, $\mathcal{L}u_m \to \mathcal{L}u$ у просторі $W^{-}_{BR^{+}}$. При цьому, для кожного елементу u_m внаслідок доведеного вище, має місце нерівність

$$C||u_m||_{H^{+}_{BR}} \leq ||\mathcal{L}u_m||_{W^{-}_{BR^{+}}}. \tag{32}$$

Залишилося зазначити, що зі збіжності у просторі W^{+}_{BR} випливає збіжність у H^{+}_{BR}, а тому $||u - u_m||_{H^{+}_{BR}} \to 0$. Тепер, переходячи до границі при $m \to \infty$ у нерівності (32), отримаємо потрібне твердження. □

Лема 6. *Існує така стала $C > 0$, що для довільної функції $v(x,t) \in W^{+}_{BR^{+}}$ виконується нерівність:*

$$\|\mathcal{L}^{*}v\|_{W^{-}_{BR}} \geq C\,\|v\|_{H^{+}_{BR^{+}}}.$$

Доведення. Доведення аналогічне до леми (4), якщо розглянути допоміжну функцію

$$u(x,t) = \int_0^t e^{c\tau} v(x,\tau)d\tau,$$

де c – додатна стала, а для оцінки інтегральної складової скористатися лемою 2. □

4 Узагальнена розв'язність

Розглянемо задачі

$$\mathcal{L}u = f,\ f \in W^-_{BR^+} \tag{33}$$

$$\mathcal{L}^*v = g,\ g \in W^-_{BR}. \tag{34}$$

Розв'язки задачі (33) будемо розуміти в сенсі таких означень

Означення 1. Розв'язком задачі (33) з правою частиною $f \in W^-_{BR^+}$ називається функція $u \in W^+_{BR}$, для якої існує послідовність функцій $u_i \in C^\infty_{BR}$, $i = 1, 2, ...$ таких, що

$$\|u - u_i\|_{W^+_{BR}} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \|\mathcal{L}u_i - f\|_{W^-_{BR^+}} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Означення 2. Сильним розв'язком задачі (33) з правою частиною $f \in W^-_{BR^+}$ називається функція $u \in W^+_{BR}$, така, що $\mathcal{L}u = f$ в просторі $W^-_{BR^+}$.

Означення 3. Слабким розв'язком задачі (33) з правою частиною $f \in W^-_{BR^+}$ називається функція $u \in W^+_{BR}$, така, що рівність

$$(\mathcal{L}u, v)_{W^+_{BR}} = (f, v)_{W^+_{BR^+}},$$

виконується для будь-яких функцій $v \in W^+_{BR^+}$.

Можна розглянути визначення розв'язку задачі (33) в ширшому класі H^+_{BR}.

Означення 4. Розв'язком задачі (33) з правою частиною $f \in W^-_{BR^+}$ називається функція $u \in H^+_{BR}$, для якої існує послідовність функцій $u_i \in C^\infty_{BR}$, $i = 1, 2, ...$ таких, що

$$\|u - u_i\|_{H^+_{BR}} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \|\mathcal{L}u_i - f\|_{W^-_{BR^+}} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Означення 5. Слабким розв'язком задачі (33) з правою частиною $f \in W^-_{BR^+}$ називається функція $u \in H^+_{BR}$, така, що рівність

$$(u, \mathcal{L}^*v)_{H^+_{BR}} = (F, v)_{W^+_{BR^+}},$$

виконується для будь-яких функцій $v \in W^+_{BR^+}$.

Аналогічно вводяться означення і для розв'язку спряженої задачі (34).

В попередньому розділі для операторів $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*$ було доведено нерівності

$$C_1\|u\|_{H^+_{BR}} \leq \|Lu\|_{W^-_{BR^+}} \leq C_2\|u\|_{W^+_{BR}}, \tag{35}$$

$$C_1\|v\|_{H^+_{BR^+}} \leq \|L^*v\|_{W^-_{BR}} \leq C_2\|v\|_{W^+_{BR^+}}, \tag{36}$$

для довільних $u \in W^+_{BR}, v \in W^+_{BR^+}$.

Завдяки цим оцінкам та використовуючи результати роботи [1] можна сформулювати теореми узагальненої розв'язності.

Теорема 1. *Тоді означення (1), (2), (3) еквівалентні.*

Теорема 2. *Тоді означення (4), (5) еквівалентні.*

Теорема 3. *Для будь-якої функції* $f \in H^-_{BR^+}$ *існує єдиний розв'язок* $u \in W^+_{BR}$ *задачі* (33) *в сенсі означень* $1-3$. *Причому для деякої сталої* C, *що не залежить від* f, *справедлива нерівність*

$$||u||_{W^+_{BR}} \leq C||f||_{H^-_{BR^+}}.$$

Теорема 4. *Для будь-якої функції* $f \in W^-_{BR^+}$ *існує єдиний розв'язок* $u \in H^+_{BR}$ *задачі* (33) *в сенсі означень* $4-5$. *Причому для деякої сталої* C, *що не залежить від* f, *справедлива нерівність*

$$||u||_{H^+_{BR}} \leq C||f||_{W^-_{BR^+}}.$$

Зауваження 4. Аналогічні теореми можна сформулювати й для спряженої задачі (34).

Результати

У роботі розглянуто початково-крайову задачу для інтегро-диференціального рівняння псевдопараболічного типу з інтегральним доданком Вольтерра та початково-крайовими умовами типу Діріхле (1) і отримано такі результати:

- доведено апріорні оцінки для диференціальної частини;
- доведено апріорні оцінки для інтегральної частини;
- скомбіновано попередні результати та отримано апріорні оцінки для інтегро-диференціального оператора псевдопараболічного типу з інтегральним доданком Вольтерра;
- на основі доведених апріорних нерівностей в негативних нормах сформульовано теореми існування, єдиності узагальненого розв'язку та неперервної залежності від правої частини рівняння.

Таким чином, зокрема, розширено клас інтегро-диференціальних операторів, до яких можна застосовувати метод апріорних оцінок в негативних нормах.

Література

[1] Lyashko S.I. Generalized Optimal Control of Linear Systems with Distributed Parameters. Kluwer Academic Publishers, 2002. 455 p.

[2] Showalter R.E., Ting T.W. Pseudoparabolic partial differential equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis.* 1970. Vol. 1, № 1. P. 1–24.

[3] Gopala Rao V.R., Ting T.W. Solutions of pseudo-heat equations in the whole space. *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* 1972. Vol. 247, № 49. P. 57–78.

[4] Milne E. The diffusion of imprisoned radiation through a gas. *Journal of the London Mathematical Society.* 1926. № 1. P. 40–51.

[5] Hassanizadeh S.M., Gray W.G. Thermodynamic basis of capillary pressure in porous media. *Water Resources Research.* 1993. № 29. P. 3389–3405.

[6] Cueto-Felgueroso L., Juanes R. A phase-field model of unsaturated flow. *Water Resources Research.* 2009. Vol. 45. P. 1–23.

[7] Rubinstein L.I. On the problem of the process of propagation of heat in heterogeneous media. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR.* 1948. № 12. P. 27–45.

[8] Aslan B.C., Hager W.W., Moskow S. A generalized eigenproblem for the Laplacian which arises in lightning. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2008. № 341. P. 1028–1041.

[9] Huafei Di, Yadong Shang. Global well-posedness for a fourth order pseudo-parabolitic equattion with memory and source terms. *Discrete and continuous dynamic systems.* 2016. Vol. 21, № 3. P. 781–801.

[10] Lyashko S.I. Some issues of pulse-point control in pseudo-parabolic systems. *Ukrainian Mathematical Journal.* 1985. № 3. P. 368–371.

[11] Lyashko S.I. Pulse-point control of pseudo-parabolic systems. *Cybernetics.* 1986. № 2. P. 122–123.

[12] Lyashko S.I., Semenov V.V. Controllability of linear distributed systems in classes of generalized actions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. № 37. P. 13–32.

[13] Sergienko I.V., Khimich O.M., Klyushin D.A., Lyashko V.I., Lyashko S.I., Semenov V.V. Formation and Development of the Scientific School of the Mathematical Theory of Filtration. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2023. № 59. P. 61–70.

[14] Klyushin D.A., Lyashko S.I., Nomirovskii D.A., Petunin Yu.I., Semenov V.V. Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements. Springer Science+Business Media, 2011. 202 p.

[15] Anikushyn A.V., Nomirovskyi D.A. Generalized solutions for linear operators with weakened a priori inequalities. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2011. Vol. 62, № 8. P. 1175–1186.

[16] Lyashko S.I., Nomirovskii D.A. The generalized solvability and optimization of parabolic systems in domains with thin low-permeable inclusions. *Cybernetics and systems analysis.* 2003. Vol. 39. P. 737–745.

[17] Nomirovskyi D.A. Generalized solvability and optimization of a parabolic system with a discontinuous solution. *Journal of Differential Equations.* 2007. Vol. 233. № 1. P. 1–21.

[18] Tymchyshyn I.B., Nomirovskii D.A. Generalized Solvability of a Parabolic Model Describing Transfer Processes in Domains with Thin Inclusions. *Differential Equations.* 2021. № 57. P. 1053–1062.

[19] Анікушин А.В. Узагальнена розв'язність гіперболічних інтегро-диференціальних рівнянь. *Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки.* 2013. № 4. С. 60–65.

[20] Anikushyn A.V., Hranishak H.M. On a weak solvability of a hyperbolic integro-differential equation. *5-th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky.* Kyiv, 2016. P. 31–33.

[21] Анікушин А.В. Узагальнена розв'язність лінійних інтегро-диференціальних рівнянь еліптичного типу. *Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки.* 2010. № 3. С. 163–168.

[22] Hulianytskyi A., Anikushyn A. Generalized solvability of parabolic integro-differential equations. *Differential Equations.* 2014. Vol. 50. № 1. P. 98–109.

[23] Анікушин А.В. Оптимальне керування інтегро-диференціальними системами параболічного типу. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2010. № 3. С. 3–16.

[24] Костєєва Л.О., Анікушин А.В. Апріорні оцінки та узагальнена розв'язність початково крайової задачі для одного інтегро-диференціального рівняння. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2018. № 3. С. 2–14.

[25] Anikushyn A.V. Weak solvability and optimal control for a class of partial Integro-differential equations. *International Conference on Differential Equations Dedicated to 110th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky.* Lviv, 2016. P. 13.

[26] Anikushyn A.V. Generalized optimal control for systems described by linear integro-differential equations with nonnegative definite integral operators. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2014. Vol. 46. № 6. P. 58–67.

[27] Анікушин А.В., Гранішак Х.М., Гуляницький А.Л., Номіровський Д.А. Моделювання та оптимізація процесів, що описуються лінійними інтегро-диференціальними рівняннями. К.: «Паперовий змій», 2015. 134 с.

[28] Pruss J. Evolutionary Integral Equations and Applications. Springer Science & Business Media, 2012. 366 p.

[29] Feng Z., Li H., Liu Yang, He S. An adaptive least-squares mixed finite element method for pseudo-parabolic integro-differential equations. *World Academy of Science, Engineering and Technology.* 2011. № 60. P. 1718–1725.

[30] Chen F. Fully-discrete H1-Galerkin mixed finite element method for pseudo-parabolic integro-differential equations. *Journal of Mathematical and Computational Science.* 2013. № 3. P. 631–640.

[31] Hongbo Chen, Tianliang Hou. A priori and a posteriori error estimates of H1-Galerkin mixed finite element methods for optimal control problems governed by pseudo-hyperbolic integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation.* 2018. Vol. 328. P. 100–112.

[32] Yuldashev T.K. Mixed problem for pseudoparabolic integro-differential equation with degenerate kernel. *Differential Equations.* 2017. № 53. P. 99–108.

[33] Huafei Di, Yadong Shang. Global existence and nonexistence of solutions for the nonlinear pseudo-parabolic equation with a memory term. *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 2015. Vol. 38, № 17. P. 3923–3936.

[34] Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. К.: Вища школа, 1990. 600 с.

Відгук наукового керівника

на кваліфікаційну роботу на здобуття ступеня бакалавра
студентки групи ОМ-4 факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Андарал Анастасії Ігорівни

Кваліфікаційна робота на здобуття ступеня бакалавра "Застосування апріорних оцінок в негативних нормах для дослідження коректності задачі Діріхле для інтегро-диференціального рівняння псевдопараболічного типу" присвячена узагальненій розв'язності еволюційних рівнянь. А саме, псевдопараболічного рівняння з інтегральною складовою типу Волетерра. Як випливає з назви, для встановлення коректності постановки початково-крайової задачі використовується метод апріорних оцінок, що дає можливість легки продовжити отримані результати і довести теореми про існування оптимального керування відповідними системами, дослідити питання керованості, побудувати обчислювальні методи тощо.

У роботі подано грунтовний огляд релевантної літератури, присутня постановка задачі, доведено допоміжні твердження та "ядро" методу – апріорні оцінки для операторів прямої та спряженої задач. На основі отриманих апріорних нерівностей сформульовано означення узагальненого розв'язку рівняння та теореми про його існування, єдиність, неперервну залежність від правої частини. Таким чином показано, що задача є коректною «за Адамаром».

Роботу виконано на високому рівні. Всі твердження сформульовано математично грамотно та коректно. До всіх теорем та лем подано доведення з достатнім рівнем деталізації. Вважаю, що кваліфікаційна робота Андарал Анастасії Ігорівни відповідає всім вимогам до робіт відповідного рівня та заслуговує оцінки «відмінно» (97).

Науковий керівник,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент А.В. Анікушин

РЕЦЕНЗІЯ

на кваліфікаційну роботу бакалавра
"Застосування апріорних оцінок в негативних нормах для дослідження коректності задачі Діріхле для інтегро-диференціального рівняння псевдопараболічного типу"
студентки групи ОМ-4 факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Андарал Анастасії Ігорівни

Інтегро-диференціальні рівняння з частинними похідними описують широкий спектр фізичних процесів. Зокрема, рівняння з інтегральними складовими типу Вольтерра дозволяють врахувати «історію процесу» та побудувати точнішу математичну модель явища.

Представлена робота Анастасії Андарал присвячена дослідженню коректності постановки задачі Діріхле для інтегро-диференціального рівняння псевдопараболічного типу. У роботі, зокрема, отримано апріорні оцінки для операторів прямої та спряженої задач, на їх основі сформульовано теореми про існування та єдиність узагальнених розв'язків та їх неперервну залежність від правої частини рівняння.

Робота продовжує відомі попередні дослідження узагальненої розв'язності інтегро-диференціальних рівнянь і розширює клас задач, до яких можна застосувати метод апріорних оцінок в негативних нормах.

Вважаю, що кваліфікаційна робота бакалавра Анастасії Андарал виконана на високому рівні та заслуговує позитивної оцінки.

Доктор фіз.-мат. наук,
професор

Дмитро Номіровський

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СИСТЕМА ЗАПОБІГАННЯ ТА ВИЯВЛЕННЯ АКАДЕМІЧНОГО ПЛАГІАТУ

Довідка про оригінальність кваліфікаційної роботи за освітнім рівнем бакалавр

UNICHECK

Ім'я користувача:
Оноцький В'ячеслав ФКомпНаук

ID перевірки:
1015605003

Дата перевірки:
14.06.2023 20:59:30 EEST

Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library

Дата звіту:
14.06.2023 21:03:17 EEST

ID користувача:
100002816

Назва документа: **АндаралАнастасіяІгорівна**

Кількість сторінок: **28** Кількість слів: **5230** Кількість символів: **27896** Розмір файлу: **280.74 KB** ID файлу: **1015253175**

Виявлено модифікації тексту (можуть впливати на відсоток схожості)

0.92% Схожість

Найбільша схожість: **0.33%** з Інтернет-джерелом (https://web.archive.org/web/20200322042347if_/https:/arxiv.org/pdf/20

0.63% Джерела з Інтернету | 54 .... Сторінка 30

0.29% Джерела з Бібліотеки | 1 .... Сторінка 30

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0% Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи | 131

Підозріле форматування | 27 сторінок

Експертна оцінка роботи науковим керівником:

Робота є оригінальною. Всі використані джерела мають посилання.
Співпадіння з наведеними джерелами тільки в деяких частинах позначень.

Науковий керівник: ______ (підпис) Анікушин А. В. (ПІБ)

Оператор: ______ (підпис) Оноцький В.В. (ПІБ)