УДК 539.375
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.4

Зражевський Г.М.[1], к.ф.-м.н., доцент,
Зражевська В.Ф.[2], к.ф.-м.н., доцент.

Комбінування детермінованого та стохастичного методів до розв'язання задачі дефектоскопії пружного стрижня

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua
[2] Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 03056, м. Київ, пр-т. Перемоги, 37,
e-mail: vera.zrazhevska@gmail.com

G.M. Zrazhevsky[1], PhD,
V.F. Zrazhevska[2], PhD.

Deterministic and stochastic methods combining while solving the problem of defectoscopy of an elastic rod

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

[2] National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kiev Polytechnic Institute", 03056, Kyiv, Peremogi av., 37,
e-mail: vera.zrazhevska@gmail.com

У роботі розглянута задача про власні гармонійні коливання пружного стрижня з вільними від напружень торцями при наявності в ньому одного або сукупності дефектів. Дефекти моделюються неоднорідністю модуля Юнга. За параметри дефектів прийняті їх розташування, геометричні розміри, що вважаються малими, та зміни пружних властивостей. Предметом дослідження є аналіз зсувів власних частот коливань, що спричинені дефектністю стрижня. Метою роботи є математичне обґрунтування для побудови швидких та стійких алгоритмів визначення параметрів дефектності пружних тіл шляхом аналізу вільних коливань. У роботі використовуються та порівнюються принципово різні методи дослідження. Перші методи є класичними математичними методами механіки, що застосовуються до аналізу детермінованих систем та базуються на аналітичних дослідженнях, поєднаних з чисельною реалізацією. На противагу їм, для розв'язання оберненої задачі використаний Bootstrap-aggregated Regression Trees (BART) - метаалгоритм композиційного машинного навчання, що стандартним чином застосовується в статистичній класифікації та регресуванні.

Ключові слова: гармонійні коливання стрижня, власні частоти, дефектоскопія, Bootstrap-aggregated Regression Trees.

The paper considers the problem of natural harmonic oscillations of an elastic rod with stress-free ends in the presence of one or a set of defects. Defects are modeled by the inhomogeneity of the Young's modulus. The location of the defects, their geometric size, which is considered small, and the change in elastic properties are the parameters of the defects. The analysis of natural frequency shifts caused by the defect of the rod is the subject of the study. The aim of the work is a mathematical substantiation for the construction of fast and stable algorithms for determining the defect parameters of elastic bodies by analyzing free oscillations. The paper uses and compares fundamentally different research methods. The first methods are classical mathematical methods of mechanics, applied to the analysis of deterministic systems and based on analytical studies combined with numerical implementation. In contrast, a composite machine learning meta-algorithm used in standard statistical classification and regression - Bootstrap-aggregated Regression Trees (BART) - is used to solve the inverse problem. When comparing the constructed algorithms, the statistical method Sampling was used, which allowed to quantify the accuracy and stability of the algorithms.

Key words: harmonic rod oscillations, natural frequencies, flaw detection, Bootstrap-aggregated Regression Trees.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. , член-кор. НАН України Жук Я.О.

Вступ

Дослідження, в яких розглядаються коливання фізично і геометрично неоднорідних механічних систем, є предметом численних публікацій [1-7]. Це пояснюється широким використанням таких систем в інженерних конструкціях. При цьому метою дослідження може бути як розрахунок і моделювання поведінки таких систем [1,4,7], так і розробка методів діагностики функціональної здатності виробів і конструкцій [2,3,5,6]. У багатьох випадках метою дослідження коливання об'єктів є визначення характеристик спектрів коливань, наприклад, визначення власних частот вільних гармонійних коливань і їх залежність від типу і властивостей неоднорідностей. Дослідження охоплюють випадки неперервної зміни характеристик уздовж стрижня [1,5,6], стрибкоподібної [2,3] і кусково-неперервної [1,4,5,7]. При цьому використовуються точні аналітичні методи дослідження [2,3], чисельні [3] і аналітично наближені [3,5,6,10].

У статті розглядається задача визначення зсувів власних частот і зміна форм вільних коливань для одновимірної моделі лінійно-пружного стрижня, що містить локальні ступінчасті неоднорідності (дефекти). Передбачається, що дефекти мають малі в порівнянні з довжиною стрижня лінійні розміри і характеризуються зміною модуля Юнга.

Постановка задачі

Розглянемо задачу про власні гармонійні коливання пружного стрижня з вільними від напружень торцями при наявності в ньому одного або сукупності дефектів. Дефекти моделюються неоднорідністю модуля Юнга.

При наявності єдиного дефекту задача в безрозмірній постановці має вигляд:

$$\begin{cases} \varphi''(x)+k^2\pi^2\varphi(x)=0,\ x\in(0,X-l)\cup(X+l,1) \\ \varphi''(x)+\dfrac{k^2\pi^2}{1-\kappa}\varphi(x)=0,\ x\in(X-l,X+l) \end{cases} \quad (1)$$

де $X\in(0,1/2)$ - розташування дефекту, $2l<<1$ величина дефекту, $\kappa=\dfrac{\Delta E}{E_0}\in(-\infty,1)$ - зміна модуля Юнга в області дефекту. Торці стержня вважаємо вільними від напружень, що визначає граничні умови:

$$\varphi'(0)=\varphi'(1)=0\,. \quad (2)$$

Повинні бути також виконані умови зшивання на межах дефекту:

$$\begin{cases} \varphi(X-l-0)=\varphi(X-l+0) \\ \varphi(X+l-0)=\varphi(X+l+0) \end{cases},$$

$$\begin{cases} \varphi'(X-l-0)=\varphi'(X-l+0) \\ \varphi'(X+l-0)=\varphi'(X+l+0) \end{cases}. \quad (3)$$

Побудова розв'язку

Задача знаходження власних частот коливань (1) - (3) може бути зведена до знаходження коренів трансцендентного рівняння [9, 10]

$$F(s,X,l,\kappa)=0\,, \quad (4)$$

при відомих характеристиках дефекту (X,l,κ).
В силу нормування (1)-(3), (4) має очевидний частковий розв'язок:

$$F(s,X,0,\kappa)=0, s=1,2,...,X\in(0,1/2),\kappa\in(-\infty,1/2)$$

$$F(s,X,l,0)=0, s=1,2,...,X\in(0,1/2), l\in(0,+\infty)$$

що відповідає відсутності дефекту.

Припущення $l<<1$ дозволяє спростити задачу (1) - (3) шляхом розв'язання наближеної задачі. В [6] показано, що задача (1) - (3) може бути зведена до рекурентного набору задач шляхом розвинення розв'язку в асимптотичний ряд по малому параметру. Відповідно до такого розвинення, рівняння (4) також може бути зведене до послідовності рівнянь, що дозволяє контролювати похибку наближення розв'язку.

Легко показати, що

$$\begin{gathered} F^{(1)}(x,X,l,\kappa)=\frac{\kappa\pi l}{1-\kappa}(\cos k\pi-\cos(k\pi(1-2X))) \\ +\sin k\pi, \\ F^{(2)}(x,X,l,\kappa)=F^{(1)}(x,X,l,\kappa) \\ F^{(3)}(x,X,l,\kappa)=\frac{\kappa\pi l}{1-\kappa}(\cos k\pi-\cos(k\pi(1-2X))) \\ -2\frac{k^3\kappa\pi^3 l^3}{3(1-\kappa)^2}(\kappa\cos k\pi - \\ -\cos(k\pi(1-2X)))+\sin k\pi \end{gathered} \quad .(5)$$

В [6] наведені характеристики наближень (5) рівняння (4). Зокрема, показано, що вже перше наближення забезпечує точність визначення власних частот коливань з відносною точністю, меншою за один відсоток.

Обернена задача передбачає визначення характеристик дефекту (X,l,κ) при відомих зсувах частот власних коливань Δk_s $(k_s=s+\Delta k_s)$. Безпосередій розв'язок (4) методами з сімейства ньютонових є нестійкий і вимагає задати точне початкове наближення. Це пов'язано з тим, що, відповідно до (5), другий член розкладу тотожно дорівнює нулю. Перше наближення в (5) не дозволяє визначити l та κ (лише $\kappa\pi/(1-\kappa)$), отже, для розв'язання оберненої задачі потрібно проводити обчислення з малими порядку l^3. Окрім того, легко бачити, що рівняння (4) та послідовність рівнянь (5) мають нефізичні розв'язки.

Перші наближення розв'язку (4) можуть бути отримані з використанням асимптотичного аналізу. Зокрема, перше наближення з (5) дозволяє отримати:

$$\Delta k_s = -2s\frac{l\kappa_0}{1-\kappa_0}\sin^2 \pi s X_0,\ s = 1,2,... \qquad (6)$$

Вираз (6) може бути покладено в основу визначення комбінованих характеристик дефекту $(X, l\kappa/(1-\kappa))$ в першому наближенні, що можуть бути використані в системах діагностики, а також, як початкові значення ітераційних методів для розв'язання (4). В той же час, чисельні розрахунки свідчать, що початкові наближення отримані з (6) в силу топології $F(s,X,l,\kappa)$ не дозволяють отримати фізичний розв'язок для 20% випадків незалежного випадкового розподілення характеристик дефектів.

На противагу детермінованому методу розв'язання оберненої задачі в роботі запропонований статистичний метод Bootstrap-aggregated regression trees (BART) - метаалгоритм композиційного навчання машин, що використовується в теорії статистичної класифікації і регресування. Цей метод застосовується в різних областях. Перша проблема використання BART в даній задачі полягає в тому, що стандартна його реалізація є скалярною. Вихідна задача векторна. Однак, проведені дослідження показують, що в другому наближенні невідомі можуть бути розділені. Друга проблема полягає в тому, що для реалізації BART потрібна навчальна вибірка значного обсягу. Ця проблема (скорочення обсягу навчальної вибірки) може бути вирішена методами статистичного моделювання (наприклад, [5]). В якості навчальної вибірки використовувалися 1000 сценаріїв з випадково розподіленими значеннями: $X \sim U(0,1/2)$, $l \sim U(0,0.1)$, $\kappa \sim U(-1,0.5)$, на яких виконувалися налаштування скалярних моделей для визначення параметрів дефекту. В якості пояснювальних змінних використовувалися точні значення зсувів частот власних коливань. Перевірка моделей виконувалася на 100 сценаріях, побудованих незалежно від навчальної вибірки (екстраполяція). Результати чисельного моделювання у цьому випадку суттєво перевищили результати, отримані детермінованим методом. Окрім того, в порівнянні з напіваналітичним розв'язанням, застосування BART звелось до використання стандартного модуля TreeBagger системи MATLAB практично без модифікування та налаштування. Звичайно, застосування BART дозволяє отримати лише наближене розв'язання (5), але його точність на порядок перевищила точність отриману з (6), фізичні розв'язки були отримані в 100% сценаріїв. Використання отриманих за BART результатів в якості початкових значень при розв'язанні задачі в детермінованій постановці забезпечило точність на рівні машинної похибки, а фізичні розв'язки були отримані в 100% сценаріїв. Таким чином, при практичному застосуванні в системах діагностики найбільш ефективним є використання систем машинного навчання, при наукових дослідженнях доцільним є використання комбінованого методу, в якому початкові наближення отримуються з використанням статистичних методів, а точний розв'язок будується методами чисельного розв'язання.

Використання статистичних методів дозволяє (на відміну від детермінованих методів) розв'язувати обернену задачу визначення дефектності стрижня при наявності множинних дефектів. У цьому випадку комплексною характеристикою дефектності стрижня зручно вважати величину: $C = 2\sum_s \frac{l_s\kappa_s}{1-\kappa_s}$. З практичної точки зору, важливими характеристиками дефектності є також $C^{\pm} = 2\sum_s \frac{l_s\kappa_s^{\pm}}{1-\kappa_s^{\pm}}$, $\kappa_s^+ = \max(\kappa_s, 0)$, $\kappa_s^- = \min(\kappa_s, 0)$, оскільки $\kappa > 0$ та $\kappa < 0$ визначають випадки ослаблення (наприклад, тріщина) і посилення (наприклад, жорстка вставка) перерізу стрижня. Моделювання множинних дефектів зводиться до розв'язання рекурсивної сукупності задач та описане в [6,7]. В практичних застосуваннях таке моделювання виконується лише в першому наближенні (хоча теорія, розвинута в [7] дозволяє отримати наближення довільного порядку). В детермінованій постановці визначення дефектності при наявності множинних дефектів не має сенсу ні в постановці задачі, ні в її розв'язанні, але легко може бути реалізоване при використанні BART.

Список використаних джерел

1. Kaplunov, J., Prikazchikov., D., Sergushova, O. / J. Kaplunov, D. Prikazchikov, O. Sergushova. Multi-parametric analysis of the lowest natural frequencies of strongly inhomogeneous elastic rods // Journal of Sound and Vibration, 2016, 366, pp. 264–276. Режим доступу до журн.: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.12.008
2. Rubio, L., Fernández-Sáez, J., Morassi, A. The full nonlinear crack detection problem in uniform vibrating rods / L. Rubio, J.Fernández-Sáez, A. Morassi // Journal of Sound and Vibration, 2015, 339, pp. 99–111. Режим доступу до журн.: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.11.011
3. Soloviev A.N., Parinov I.A., Cherpakov A.V., Chaika Yu.A., Rozhkov E.V. Analysis of oscillation forms at defect identification in node of truss based on finite element modeling / A.N. Soloviev, I.A. Parinov, A.V. Cherpakov, Yu.A. Chaika, E.V. Rozhkov // Materials Physics and Mechanics, 2018, 37, pp. 192-197.
4. Zrazhevsky, G., Zrazhevska, V. Obtaining and investigation of the integral representation of solution and boundary integral equation for the non-stationary problem of thermal conductivity / Zrazhevsky, G., Zrazhevska, V. // Eureka: Physics and Engineering, 2016, 6, pp. 53–58. doi: 10.21303/2461-4262.2016.00216
5. Zrazhevsky, G., Golodnikov, A., Uryasev, S. Mathematical Methods to Find Optimal Control of Oscillations of a Hinged Beam (Deterministic Case). / G. Zrazhevsky, A. Golodnikov, S. Uryasev, // Cybernetics and Systems Analysis, 2019, 55 (6), p. 1009-1026. doi: 10.1007/s10559-019-00211-x
6. Zrazhevsky, G., Zrazhevska, V. The extension method for solving boundary value problems of the theory of oscillations of bodies with heterogeneity / G. Zrazhevsky, V. Zrazhevska. // World Journale of Engineering Research and Technology 2020 6 (2), pp. 503-514.
7. Зражевський Г.М., Зражевська В.Ф. Моделювання скінченних неоднорідностей дискретними особливостями / Г.М. Зражевський, В.Ф. Зражевська // Журнал обчислювальгої та прикладної математики. 2021, 1 (135) с. 138-144.

References

1. KAPLUNOV, J., PRIKAZCHIKOV., D., SERGUSHOVA, O. (2016). *Journal of Sound and Vibration*, 366, p. 264 – 276. Available from: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.12.008
2. RUBIO, L., FERNÁNDEZ-SÁEZ, J., MORASSI, A. (2015). The full nonlinear crack detection problem in uniform vibrating rods. *Journal of Sound and Vibration*, 339, p. 99–111. Available from: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.11.011
3. SOLOVIEV A.N., PARINOV I.A., CHERPAKOV A.V., CHAIKA YU.A., ROZHKOV E.V. Analysis of oscillation forms at defect identification in node of truss based on finite element modeling (2018). *Materials Physics and Mechanics*, 37, p. 192-197.
4. ZRAZHEVSKY, G., ZRAZHEVSKA, V. Obtaining and investigation of the integral representation of solution and boundary integral equation for the non-stationary problem of thermal conductivity (2016). *Eureka: Physics and Engineering*, 6, p. 53–58. doi: 10.21303/2461-4262.2016.00216
5. ZRAZHEVSKY, G., GOLODNIKOV, A., URYASEV, S. (2019). Mathematical Methods to Find Optimal Control of Oscillations of a Hinged Beam (Deterministic Case). *Cybernetics and Systems Analysis*, 55 (6), p. 1009-1026. doi: 10.1007/s10559-019-00211-x
6. ZRAZHEVSKY, G., ZRAZHEVSKA, V. (2020). The extension method for solving boundary value problems of the theory of oscillations of bodies with heterogeneity *World Journal of Engineering Research and Technology* 6 (2), p. 503-514.
7. ZRAZHEVSKY G.M., ZRAZHEVSKA V.F. (2021) Modeling of Finite Inhomogeneities by Discret Singularities. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1 (135) p. 138-144.

Надійшла до редколегії 25.08.2021