

Олена ГРІНЕЧКО, студентка

ORCID:0009-0007-4017-6114

e-mail: olenagrinechko@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ПРО ВЗАЄМНО ПРОСТІ ЧИСЛА У ЗАДАЧАХ НА ПЕРЕЛИВАННЯ РІДИН

***Анотація.** Досліджуються особливості застосування властивості взаємно простих чисел у задачах на переливання рідин. Ці задачі мають важливе значення у розвитку логічного та алгоритмічного мислення в учнів. Акцент зроблено на використанні знань про взаємно прості числа для визначення можливості отримання певного об'єму рідини у задачах на переливання з двома посудинами. Розглядається підхід до розв'язування задач, що включає розуміння умов, застосування знань про взаємно прості числа та кратність чисел. Особлива увага приділена демонстрації того, що задачі на логіку часто потребують математичного пояснення, перед застосуванням стратегій чи розв'язуванні в цілому. У результаті дослідження описано метод, що дає змогу передбачати можливість отримання певного об'єму. Перспективи майбутніх досліджень пов'язані з розширенням умов на більшу кількість посудин або мінімальну кількість кроків.*

***Ключові слова:** взаємно прості числа; переливання рідин; граф станів; алгоритм Ойлера.*

1. Вступ

Розвиток умінь, необхідних для життя XXI століття, зокрема критичного, логічного та алгоритмічного мислення, є одним із ключових завдань сучасної математичної освіти, визначених концепцією Нової української школи. Значну роль у формуванні цих компетентностей відіграють навчальні математичні задачі прикладного змісту, що спонукають учнів до пошуку обґрунтованих рішень, аналізу можливих стратегій та встановлення закономірностей.

До таких завдань належать математичні задачі на переливання рідин між посудинами різного об'єму. Вони традиційно застосовуються на уроках математики, у роботі математичних гуртків, на олімпіадах та під час інтерактивних заходів для школярів. Подібні задачі не лише стимулюють пізнавальний інтерес, а й дозволяють будувати логічні міркування, пов'язані з фундаментальними поняттями теорії чисел.

Одним із таких ключових понять є взаємна простота чисел – тема, що входить до шкільного курсу математики, але на практиці часто розглядається поверхово, обмежуючись базовими означеннями та типовими вправами з підручника. Однак саме властивості взаємно простих чисел лежать в основі теоретичного обґрунтування розв'язності задач на переливання рідин: можливість отримати певний об'єм у посудині без вимірювальних інструментів визначається найбільшим спільним дільником заданих об'ємів.

На практиці учні нерідко застосовують перебірний підхід: виконують послідовні переливання, сподіваючись на випадкове отримання потрібного результату. Така

стратегія інколи приводить до правильної відповіді, проте не сприяє формуванню узагальненого методу чи усвідомленню математичної сутності задачі. Таким чином, виникає потреба у більш глибокому методичному опрацюванні даного типу задач (Козлова, Перебийніс & Бурлуцька, 2023).

Метою статті є опис і систематизація методу розв'язування задач на переливання рідин із застосуванням теорії взаємно простих чисел, а також демонстрація його ефективності через аналіз характерних прикладів.

Об'єктом дослідження є математичні задачі на переливання рідин між посудинами фіксованого об'єму.

Предмет дослідження – використання властивостей взаємно простих чисел під час об'ґрунтування можливості отримання заданого об'єму рідини.

2. Історія задач на переливання рідин

Задачі на переливання (або «задачі Пуассона») – це клас математичних головоломок, які вимагають мінімальної кількості переливань для отримання потрібної кількості рідини, використовуючи лише дві або три посудини відомого об'єму (зазвичай без міток). Вони є класичним прикладом застосування алгоритмічного мислення та теорії графів (або діофантових рівнянь) для пошуку оптимального рішення.



Рис. 1. Ілюстрація до задачі Пуассона

Симеон Дені Пуассон (21.06.1781 – 25.04.1840) – відомий французький математик, механік та фізик. Коли він був ще молодим і вагався у виборі життєвого шляху, приятель показав йому кілька задач, із якими сам не зміг упоратися. Пуассон швидко розв'язав усі. Але особливо йому сподобалася задача про дві посудини: «Дехто має 12 пінт виноградного соку (*пінта* – це 0,568 л) і хоче подарувати половину другу, але

у нього лише дві порожні посудини: одна – на 8, друга – на 5 пінт. Яким чином налити в більшу посудину 6 пінт?» (рис. 1) (Google. Gemini, 2025). «Ця задача визначила мою долю, – казав Пуассон. – Я вирішив, що обов'язково стану математиком».

Необхідно зауважити, що подібні задачі відомі ще з часів середньовічного математика *Фібоначчі* (справжнє ім'я Леонардо Пізанський (близько 1170 – близько 1250)), асоціація з іменем *Пуассона* закріпилася саме завдяки тому, що саме ця конкретна задача настільки сильно вплинула на його життєвий вибір і стала відомою історією.

Традиційно в таких задачах переливати можна тільки до тих пір, доки посудина, в яку заливається рідина, не буде вщент заповненою, або поки посудина, з якої виливається рідина, не буде повністю порожня. Просто зупинитися посередині або розлити вміст посудини на дві рівні частини теж не можна. Усі посудини без поділок.

3. Теоретичне підґрунтя

Ключовим питанням у задачах на переливання є *умова розв'язності (solvability condition)*, а саме: *чи можливо відміряти цільовий об'єм рідини, використовуючи лише обмежений набір посудин із заданими об'ємами*.

Задачі на переливання рідин мають цілком строгий математичний фундамент. Нехай задано дві посудини з об'ємами a і b . Ці об'єми розглядаємо як натуральні числа. Нехай також потрібно отримати об'єм c , де $0 < c \leq \max(a, b)$.

Твердження 1. *За допомогою двох посудин об'ємом a і b можна отримати рідину об'ємом c тоді й лише тоді, коли c ділиться на найбільший спільний дільник чисел a і b , тобто $\text{НСД}(a, b) \mid c$.*

У процесі переливання отримувані об'єми можна описати рівнянням:

$$x \cdot a + y \cdot b = c,$$

де x і y – цілі числа (можуть бути як додатні, так і від'ємні, оскільки можливе і додавання, і «віднімання» об'єму шляхом виливання).

Відомо, що лінійне діофантове рівняння має розв'язки тоді й лише тоді, коли

$$\text{НСД}(a, b) \mid c.$$

Таким чином, переливання рідини є *практичною моделлю* класичної задачі з числами.

Якщо об'єми посудин *взаємно прості*, то можна відміряти будь-який об'єм у межах від 1 л до більшої посудини.

Якщо ж $\text{НСД}(a, b) = d > 1$, то можна отримати лише ті об'єми, що кратні d . Наприклад, для посудин об'ємом 10 л і 6 л – $\text{НСД}(10, 6) = 2$. Відтак, неможливо відміряти 7 л, 9 л, 5 л тощо, але можна відміряти 2, 4, 6, 8, 10 л.

4. Класифікація задач на переливання рідин

Задачі на переливання класифікуються за критерієм *обмеженості вихідного ресурсу (рідини)*. Цей поділ є фундаментальним для вибору відповідного математичного апарату для розв'язання.

Задачі з *необмеженим ресурсом* (тип I). Ці задачі часто розглядаються як класичні *головоломки на відмірювання* і зазвичай не вимагають обліку загального об'єму рідини. Доступна кількість рідини вважається *необмеженою* (наприклад, вода з крана, озера, рідина у нескінченно великій ємності). Дозволяється *багаторазове наповнення* порожніх або частково наповнених посудин до верху. Також дозволяється *вилити* рідину з посудин (умовний «стік» або «злив»). Такі задачі моделюються за допомогою теорії графів для пошуку найкоротшого шляху (мінімальної кількості переливань) між станами.

Задачі з *обмеженим ресурсом* (тип II). Такі задачі є складнішими, оскільки вимагають підтримання *сталого загального об'єму* рідини протягом усього процесу. Їх розв'язання часто пов'язане з діофантовими рівняннями та пошуком цілочислових рішень, що задовольняють рівняння вигляду $ax + by = c$, де a та b – об'єми посудин, а c – цільовий об'єм. Тут загальна кількість рідини обмежена і відома, оскільки вона знаходиться в одній або кількох початкових посудинах (наприклад, сік, молоко, дорогоцінна хімічна речовина). Рідину, як правило, *не можна проливати* або *вилити* з системи. Будь-яке переливання має відбуватися між наявними посудинами.

5. Приклади

Наступні приклади демонструють критерії необхідності та достатності, які визначають можливість або неможливість досягнення бажаного об'єму (літражу) шляхом послідовних операцій переливання.

Задача 1. *Чи можна за допомогою двох посудин: одна на 11 літрів, друга на 7 літрів, отримати 5 літрів рідини?*

Розв'язання. Маємо посудини 11 л та 7 л (рис. 2) (Google. Gemini, 2025).

$$\text{НСД}(11,7) = 1.$$

Це означає, що за допомогою цих двох посудин можна отримати будь-який цілий об'єм рідини від 1 до 11 літрів включно. Зокрема:

$$1 \mid 5,$$

а отже отримання 5 л можливе.

Цей висновок повністю підтверджує практичне розв'язування.

Позначимо 11-літрову посудину через A , а 7-літрову – через B . Початково обидві посудини порожні. На кожному етапі дозволено виконувати одну з трьох операцій:

1. заповнення обраної посудини до повного об'єму;
2. спорожнення посудини;
3. переливання рідини з однієї посудини до іншої, доки перша не спорожніє або друга не заповниться.



Рис. 2. Ілюстрація до задачі 1

Для досягнення результату послідовно виконаємо дії, наведені у таблиці 1.

Таблиця 1

Послідовність операцій у задачі 1

| Крок | Операція | A , л | B , л |
|------|----------------------------|----------|---------|
| 1 | заповнити A | 11 | 0 |
| 2 | перелити $A \rightarrow B$ | 4 | 7 |
| 3 | спорожнити B | 4 | 0 |
| 4 | перелити $A \rightarrow B$ | 0 | 4 |
| 5 | заповнити A | 11 | 4 |
| 6 | перелити $A \rightarrow B$ | 8 | 7 |
| 7 | спорожнити B | 8 | 0 |
| 8 | перелити $A \rightarrow B$ | 1 | 7 |
| 9 | спорожнити B | 1 | 0 |
| 10 | перелити $A \rightarrow B$ | 0 | 1 |
| 11 | заповнити A | 11 | 1 |
| 12 | перелити $A \rightarrow B$ | 5 | 7 |

На 12-му кроці у посудині A залишається рівно 5 літрів рідини, що й було задано. Таким чином, операції з переливання та перенесення рідини дозволяють отримати шуканий об'єм.

Відповідь: Відміряти 5 л за допомогою посудин на 11 л та 7 л *можливо*.

Такий підхід до розв'язування задачі формує алгоритмічне мислення, показує зв'язок між абстрактною теорією і реальними задачами, допомагає учням побачити, для чого потрібні взаємно прості числа.

Для аналізу можливості отримання певного об'єму рідини за допомогою двох посудин зручно використовувати *граф станів*, який є математичною моделлю процесу переливань. Кожному можливому стану системи відповідає вершина графа, а кожній допустимій операції – орієнтоване ребро між вершинами.

Стан системи задається парами чисел (a, b) , де:

- a – кількість рідини в 11-літровій посудині,
- b – кількість рідини у 7-літровій посудині.

Отже, простір можливих станів:

$$0 \leq a \leq 11, \quad 0 \leq b \leq 7.$$

На кожному кроці дозволяється одна з таких операцій:

1. *Заповнення посудини до країв*

- $(a, b) \rightarrow (11, b)$,
- $(a, b) \rightarrow (a, 7)$.

2. *Повне спорожнення посудини*

- $(a, b) \rightarrow (0, b)$,
- $(a, b) \rightarrow (a, 0)$.

3. *Переливання між посудинами:*

- переливання з A в B :

$$(a, b) \rightarrow (a - \min(a, 7 - b), b + \min(a, 7 - b));$$

- переливання з B в A :

$$(a, b) \rightarrow (a + \min(b, 11 - a), b - \min(b, 11 - a)).$$

Побудову графа починаємо з початкового стану $(11, 0)$ і послідовно застосовуємо всі дозволені операції, додаючи нові стани як вершини графа і відповідні дії як орієнтовані ребра. Процес триває, доки не будуть отримані *усі можливі стани*, що досяжні з початкової конфігурації: кількість вершин (станів) 36, кількість орієнтованих ребер (операцій) 138 (рис. 3). Зауважимо, що на графі наведено усі можливі стани. Оптимальний шлях можна побудувати керуючись даними таблиці 1.

Зауважимо, що якщо загалом об'єми посудин m і n є взаємно простими, то можна отримати будь-який об'єм, що є лінійною комбінацією $am + bn$ у межах від 1 до $\max(m, n)$.

У нашому випадку $\text{НСД}(11,7) = 1$, тому отримання об'єму 5 л є теоретично можливим.

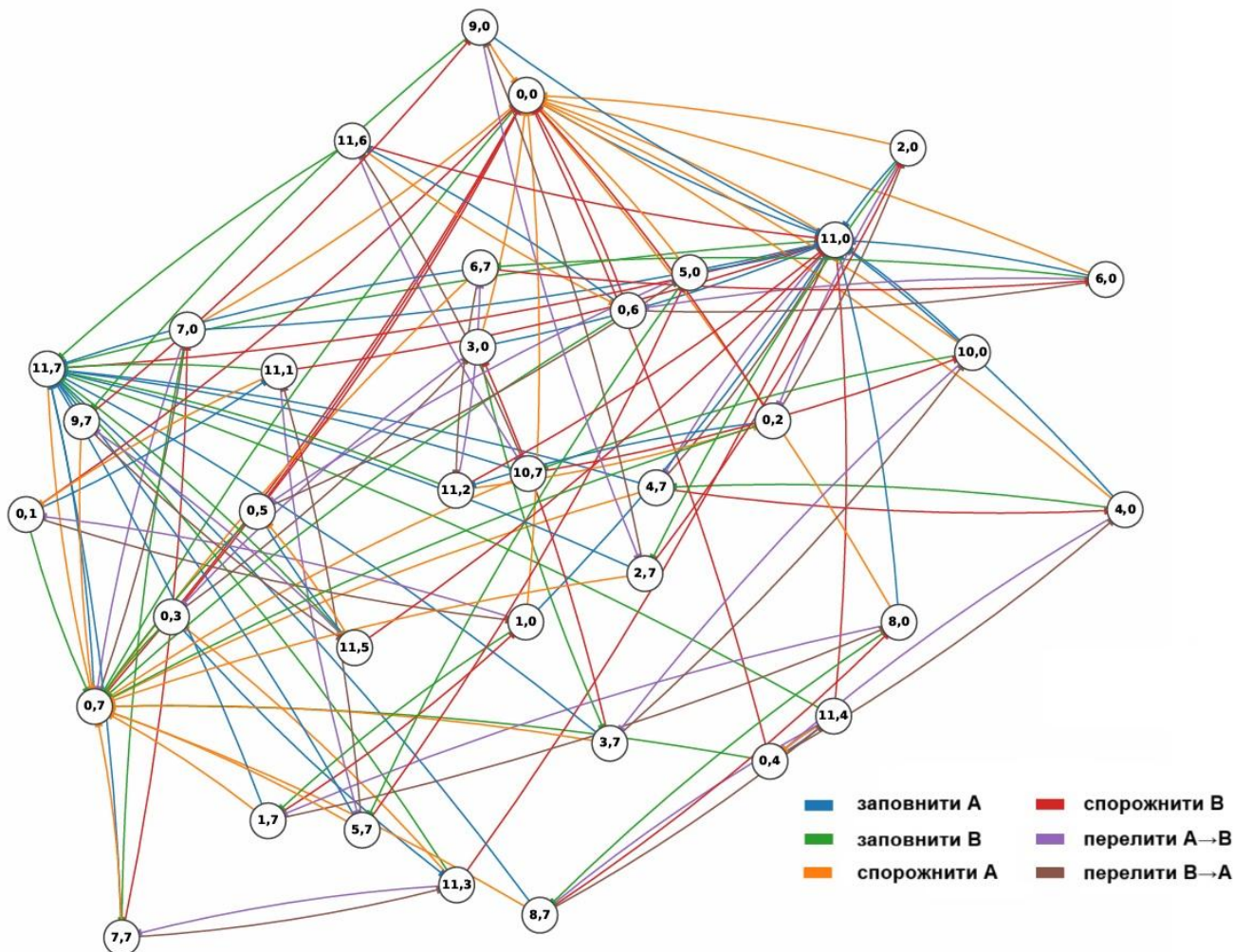


Рис. 3. Побудова графа станів до задачі 1

Задача 2. Є дві посудини: одна на 8 літрів, друга на 20 літрів. Чи можна, використовуючи їх, відміряти 6 літрів?

Розв'язання: Оскільки $\text{НСД}(8,20) = 4$, то усі досяжні об'єми повинні бути кратними 4. Тому величина 6 л, яка не є кратною 4, а відтак принципово не може бути отримана.

Це можна підтвердити й у результаті систематичного перебору станів (за таблицею переходів або графом досяжності) встановивши, що в посудинах виникають лише такі кількості води: 4 л, 8 л, 12 л, 16 л, 20 л та інші об'єми, що є кратними 4. Водночас значення 1 л, 2 л, 5 л, 6 л, 10 л, 11 л тощо жодного разу не з'являються.

Відповідь: Відміряти 6 л за допомогою посудин на 8 л та 20 л неможливо.

Задача 3. Є посудини об'ємами 15 і 21 літрів, чи можна отримати 3 літри?

Розв'язання: Для даної задачі: НСД (15,21) = 3. Шуканий об'єм також дорівнює 3 л, відтак, з точки зору теорії лінійних комбінацій цілих чисел та класичної задачі про мірні посудини, отримання 3 л є можливим.

А за яку найменшу кількість кроків можна відміряти 3 літри?

Для цього побудуємо таблицю переходів. Вважатимемо при цьому, що дозволені стандартні операції: повне наповнення будь-якої з посудин, її повне спорожнення, а також переливання води з однієї посудини в іншу до моменту наповнення останньої або спорожнення першої.

Таблиця 2

Таблиця переходів у задачі 3

| Крок | 15 літрів | 21 літр |
|------|-----------|---------|
| 1 | 15 | 0 |
| 2 | 0 | 15 |
| 3 | 15 | 15 |
| 4 | 9 | 21 |
| 5 | 9 | 0 |
| 6 | 0 | 9 |
| 7 | 15 | 9 |
| 8 | 3 | 21 |

На 8 кроці отримуємо потрібний об'єм.

Відповідь. Відміряти 3 л за допомогою посудин на 15 л та 21 л можна за щонайменше 8 кроків.

6. Алгоритм Евкліда розв'язування задач на переливання рідин

Обґрунтувати можливість того, що за допомогою посудин об'ємом 15 л та 21 л можна отримати будь-який об'єм, кратний 3 – зокрема й 3 л, можна, використовуючи *алгоритм Евкліда*. Алгоритм Евкліда – метод послідовного визначення найбільшого спільного дільника двох чисел. Використовуючи його, можна встановити, який саме об'єм є принципово можливим до отримання.

Для посудин місткістю 15 л і 21 л застосуємо алгоритм Евкліда:

$$21 = 15 \cdot 1 + 6,$$

$$15 = 6 \cdot 2 + 3,$$

$$6 = 3 \cdot 2 + 0.$$

Останній ненульовий залишковий член дорівнює 3, отже:

$$\text{НСД}(15,21) = 3.$$

Алгоритм Евкліда дає змогу зробити два важливі висновки:

1. Будь-який об'єм води, що отримуюється у мірних посудинах, є лінійною комбінацією їхніх місткостей

$$x \cdot 15 + y \cdot 21.$$

2. Алгоритм Евкліда встановлює, що всі такі комбінації дають лише об'єми, кратні $\text{НСД}(15,21) = 3$.

Оскільки шуканий об'єм дорівнює 3 л і

$$3 = 3 \cdot 1,$$

тобто є кратним $\text{НСД}(15,21)$, алгоритм Евкліда підтверджує, що цей об'єм можна отримати.

Крім того, зворотний хід алгоритму Евкліда дозволяє записати 3 як лінійну комбінацію 15 та 21:

$$3 = 15 - 2 \cdot 6,$$

а з першого співвідношення

$$6 = 21 - 15,$$

тому

$$3 = 15 - 2(21 - 15) = 3 \cdot 15 - 2 \cdot 21.$$

Ця рівність показує, що об'єм 3 л можна сформувати відповідними операціями наливання та переливання, оскільки кожен множник відповідає повторенню певних операцій.

7. Задачі для самостійної роботи

1. У смарт-кафе новий робот-бариста не вміє точно відміряти порції сиропу. У нього є лише дві мірні колби об'ємами 18 і 30 мл. Для приготування авторського напою йому потрібно отримати 6 мл сиропу, а інших інструментів немає. Чи може робот точно відміряти 6 мл?

2. У віртуальній хімлабораторії учень має змішати реагент так, щоб отримати рівно 4 г активної речовини. Але вимірювальні «контейнери» – це лише ємності 22 г і 40 г. Чи можливо отримати рівно 4 г речовини?

3. У системі автоматичного поливу сталася помилка. Поливальні ємності мають об'єми 21 і 33 літри, але для молодих рослин потрібно подати рівно 3 л води. Система може тільки: наповнити ємність повністю, спорожнити її, переливати воду між ємностями. Чи можна отримати 3 літри для точного поливу?

4. Інженери тестують дрон із новою паливною системою, де паливо вимірюється у «заряд-літрах». Є два резервуари: 32 і 48 «літрів». Для запуску тесту потрібні 8 одиниць палива, але датчик для точного наливання зламаний, доступне лише переливання. Чи реально виміряти 8 одиниць палива?

5. У відсіку космічного корабля потрібно точно відміряти 13 л гелію для стабілізації тиску. На борту є лише два гумові резервуари об'ємами 26 і 39 літрів, які можна наповнювати та переливати між собою. Чи можна отримати саме 13 л?

Зауваження 1. Вважаємо, що маємо необмежені можливості наповнити ємності, переливати їх і вилити вміст.

Зауваження 2. Відповідей «так» або «ні» не достатньо, розв'язок має містити доведення відповідного факту.

8. Висновки

У статті проаналізовано метод розв'язування задач на переливання рідини з використанням властивостей взаємно простих чисел. Проілюстровано, що подібні задачі мають чітке математичне підґрунтя, а їх розв'язання ґрунтується не лише на алгоритмічних діях, а й на теоретичних числових закономірностях. Дослідження трьох модельних задач показало, що можливість отримання заданого об'єму визначається структурою об'ємів доступних посудин. Зокрема, якщо об'єми є взаємно простими, то можна сформувати будь-який об'єм, що не перевищує більшу посудину; якщо ж об'єми мають спільний дільник, то досяжними є лише кратні цьому дільнику значення.

Запропонований підхід сприяє формуванню аналітичного мислення, переходу від механічного перебору можливостей до усвідомленого використання математичних понять, а також удосконаленню навичок логічного аргументування.

Розглянуті, на перший погляд ігрові задачі, мають важливе методичне значення, оскільки забезпечують глибше розуміння важливих математичних концепцій, які є інструментами формування ініціативності і підприємливості, інформаційно-цифрової компетентності школярів, які є такими необхідними в нинішньому висококонкурентному світі.

Список використаних джерел

Козлова О.М., Перебийніс С.М., Бурлуцька І.І. (2023). Матеріали для проведення занять факультативного курсу "Математичний калейдоскоп". – Режим доступу: <http://library.ippro.com.ua/attachments/article/718>
Google. Gemini [Електронний ресурс]. Режим доступу: [\[ai.google/gemini/\]](https://ai.google/gemini/)

Отримано редакцією журналу: 23.11.2025

Прорецензовано: 25.11.2025

Схвалено до друку: 26.12.2025

Olena HRINECHKO, Student

ORCID:0009-0007-4017-6114

e-mail: olenagrinechko@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ON COPRIME NUMBERS IN LIQUID-POURING PROBLEMS

Abstract. *This paper examines the application of the properties of coprime numbers in classical liquid-pouring problems. Such problems play an important role in developing students' logical and algorithmic thinking. The focus is placed on using knowledge about coprime integers to determine whether a specified volume of liquid can be obtained when working with two containers. The proposed approach to solving these problems involves a clear understanding of the task conditions, the application of number-theoretic concepts related to coprimality and divisibility, and the analysis of achievable volumes. Particular attention is given to demonstrating that logic-based puzzles often require underlying mathematical justification before solution strategies can be effectively applied. As a result of the study, a method is outlined that enables predicting the attainability of a given volume. Prospects for further work include extending the problem setting to a larger number of containers or optimizing solutions with respect to the minimal number of steps.*

Keywords: *coprime numbers; liquid-pouring problems; state graph; Euclidean algorithm.*