

Василь ЮСИПІВ, вчитель вищої категорії
ORCID ID: 0009-0006-4461-7514
e-mail: yusypiv.vd@gmail.com

Тарас ЮСИПІВ, доктор філософії
ORCID ID: 0000-0003-2798-9472
e-mail: taras.yusypiv@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

МЕТОД НЕСКІНЧЕННОГО СПУСКУ, МЕТОД ЧАКРАВАЛА ТА ЧИСЛА ПЕЛЛЯ

Анотація. Метод нескінченного спуску є елегантним інструментом для доведення неможливості певних розв'язків, використовуючи логіку зменшення параметрів до абсурду. Метод вперше був чітко сформульований і використаний П'єром де Ферма у XVII столітті, хоча ідеї, схожі на цей метод, могли з'явитися в математиці раніше в менш формалізованому вигляді. Ферма застосував цей метод у своїх працях з теорії чисел для доведення тверджень, пов'язаних із діофантовими рівняннями, і зокрема – Великої теореми Ферма¹. Цей метод і зараз залишається актуальним, допомагаючи розв'язувати складні діофантові рівняння. У той же час, метод чакравала, розроблений індійськими математиками та описаний Брахмагуптою та Бхаскарою, є потужним алгоритмом для знаходження цілочисельних розв'язків рівняння Пелля, що є відомим діофантовим рівнянням. Цей циклічний метод базується на послідовному «зортанні» трійок знайдених розв'язків і має на меті ефективно наближати ірраціональні числа раціональними дробами. Завдяки своїй простоті та універсальності метод чакравала перевершує за ефективністю деякі сучасні підходи, такі як метод Лагранжа, і знаходить застосування в криптографії, комбінаториці та теорії чисел. Числа Пелля та відповідні рівняння Пелля відіграють ключову роль у теорії чисел, зокрема при розв'язуванні діофантових рівнянь виду $x^2 - ny^2 = \pm 1$ та мають зв'язок з ланцюговими дробами.

Ключові слова: метод нескінченного спуску; метод чакравала; рівняння Пелля; числа Пелля; діофантове рівняння; діофантові наближення; ірраціональні числа.

1. Вступ

Дослідження методів нескінченного спуску, чакравали² та чисел Пелля має значну актуальність у сучасній математиці, зокрема в теорії чисел, криптографії та комбінаториці. Ці методи знаходять застосування в практичних задачах, таких як от наближення ірраціональних чисел, створення безпечних криптографічних алгоритмів та оптимізація форматів даних. Актуальність теми посилюється її історичною значимістю, адже ці методи, розроблені математиками минулого, залишаються релевантними для сучасних обчислень, що обумовлює необхідність поглибленого аналізу цих методів, їхньої ефективності та адаптації до нових видів завдань, таких як масштабні обчислення в криптографії чи аналізі даних.

¹ Наразі достеменно невідомо, чи мав Ферма математично завершене доведення Великої теореми.

² Метод чакравали – на санскриті «чакра» означає «колесо», що вказує на циклічну природу методу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі Edwards (2000) досліджується історичний контекст методу нескінченного спуску, звертаючи увагу на його еволюцію від Ферма до сучасних алгебраїчних структур. Питання розв'язання діофантових рівнянь і застосування чисел Пелля активно досліджується в сучасній літературі. Наприклад, у роботі Varbeau (2003) детально описано зв'язок рівнянь Пелля з ланцюговими дробами та їхнє застосування в теорії чисел, підкреслюючи важливість методу чакравали. Більше того, у дослідженні Lenstra (2002) показано, як методи, подібні до чакравали, використовуються в сучасній криптографії, зокрема, в системах, заснованих на дискретному логарифмі та факторизації. Розв'язки рівняння Пелля використовуються для побудови криптографічних алгоритмів, таких як схеми шифрування, що базуються на еліптичних кривих, або для атак на певні криптосистеми, де використовуються великі цілі числа з особливими властивостями.

Об'єктом дослідження є методи нескінченного спуску та чакравали, а також числа Пелля як важливі інструменти для розв'язування діофантових рівнянь та наближення ірраціональних чисел.

Метою роботи є аналіз методів нескінченного спуску та чакравали, їхньої історичної еволюції, математичної структури та сучасних застосувань. Завдання дослідження включають:

- висвітлення історичного контексту виникнення методів;
- аналіз їхньої математичної структури та алгоритмів;
- демонстрацію зв'язку чисел Пелля з ланцюговими дробами.

Нижче у статті розглянуто історичні витоки дослідження ірраціональності чисел та методів доведення від супротивного, описано метод нескінченного спуску, наведено приклади розв'язування задач з його використанням. Також розглянуто рівняння Пелля та метод чакравала, представлено зв'язок рівняння Пелля з ланцюговими дробами й практичне застосування наближених дробів для раціональних чисел.

2. Витоки: піфагорійська школа та корінь з числа 2

У VI столітті до нашої ери піфагорійська школа, заснована Піфагором на півдні Італії, була осередком математичних і філософських ідей. Піфагорійці вважали, що все у Всесвіті можна виразити через цілі числа або їхні відношення – раціональні числа. Це була основа їхньої гармонійної картини світу, де числа мали майже містичне значення.

Однак усе змінилося, коли піфагорійці зіткнулися з коренем із числа 2. Це число природно з'являється при розгляді діагоналі квадрата зі стороною 1 (за теоремою Піфагора: $1^2 + 1^2 = d^2$, звідки $d = \sqrt{2}$). Піфагорійці намагалися представити $\sqrt{2}$ як дріб a/b , де a і b – натуральні числа, але їхні зусилля постійно зазнавали краху, оскільки $\sqrt{2}$ є *ірраціональним числом* (тобто, не може бути виражене жодним раціональним дробом).

Відома легенда розповідає про піфагорійця Гіппаса, який першим довів неможливість виразити число $\sqrt{2}$ як відношення двох натуральних чисел. Це відкриття похитнуло основи піфагорійської школи, адже воно підривало їхню віру в

універсальність раціональних чисел. За однією з версій, піфагорійці, які присягалися зберігати свої відкриття в таємниці, вважали це знання небезпечним. Існує міф, що Гіппаса покарали за розголошення: його або вигнали, або перевезли на безлюдний острів, або ж навіть скинули в море. Хоча історичних доказів цього немає, легенда відображає напругу та драматизм, які були викликані відкриттям факту існування ірраціональних чисел (навіть у прикладах з повсякденного життя). Це відкриття змусило математиків переосмислити природу чисел і заклало підґрунтя для розвитку теорії чисел.

Доведення ірраціональності $\sqrt{2}$, яке приписують Гіппасу, очевидно використовувало метод доведення від супротивного. Припустимо, що $\sqrt{2} = a/b$, де a і b – натуральні, взаємно прості числа, тобто, дріб нескоротний. Тоді $a^2 = 2b^2$. Це означає, що a^2 парне, отже, і саме число a ділиться на 2. Нехай $a = 2k$. Підставимо: $(2k)^2 = 4k^2 = 2b^2$, звідки $b^2 = 2k^2$. Отже, b^2 парне, тому і саме число b парне. Але якщо a і b обидва парні, вони не можуть бути взаємно простими – отримали суперечність, яка й доводить, що $\sqrt{2}$ не може бути раціональним числом.

2. Метод нескінченного спуску

Метод нескінченного спуску (МНС), який часто приписують П'єру Ферма, є потужним інструментом у теорії чисел. Він базується на ідеї, що якщо припущення про існування розв'язку для певної задачі приводить до іншого розв'язку, але з меншими значеннями, і цей процес повторюється нескінченно, то початкове припущення хибне. Це особливо корисно для доведення неможливості певних цілочисельних розв'язків.

Метод часто застосовується до рівнянь, де потрібно знайти цілі або раціональні розв'язки. Наприклад, при доведенні ірраціональності \sqrt{n} (де n не є квадратом цілого числа, $n \neq 1, 4, 9, \dots$) можна використати ідею спуску: якщо $\sqrt{n} = x/y$, де x та y – натуральні числа, то з $x^2 = ny^2$ ми отримуємо $x = nk$, а значить $y^2 = nk^2$, тобто, отримали послідовність чисел, яка постійно зменшується, але ніколи не зупиняється на деяких взаємно простих (нескоротних) числах x і y , що неможливо, оскільки множина натуральних чисел має найменший елемент.

3. Приклади розв'язування задач із застосуванням методу нескінченного спуску

Діофантовими називають такі (невизначені поліноміальні) рівняння з цілими коефіцієнтами, в яких невідомі змінні можуть набувати тільки цілих значень. Природно, доведення відсутності (нетривіальних) розв'язків для таких рівнянь проводити з використанням МНС. Наведемо кілька прикладів таких доведень.

Приклад 1. Довести, що діофантове рівняння $x^2 + y^2 = 3z^2$ має лише тривіальний розв'язок ($x = y = z = 0$).

Доведення. Припустимо, що для даного рівняння існує нетривіальний розв'язок $(x; y; z)$. Можна довести, що в такому разі x та y діляться без остачі на 3. Дійсно,

розглянувши вихідне рівняння за модулем 3, отримуємо, що $x^2 + y^2 = 0 \pmod{3}$ (іншими словами, $x^2 + y^2$ ділиться на 3 без остачі). Проаналізуємо числа x^2 та y^2 за модулем 3:

якщо $x \equiv 0 \pmod{3}$, то $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$,

якщо $x \equiv 1 \pmod{3}$, то $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$,

якщо $x \equiv 2 \pmod{3}$, то $x^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$,

аналогічно, якщо $y \equiv 0 \pmod{3}$, то $y^2 \equiv 0 \pmod{3}$,

якщо $y \equiv 1 \pmod{3}$, то $y^2 \equiv 1 \pmod{3}$,

якщо $y \equiv 2 \pmod{3}$, то $y^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$.

Отже, з усіх можливих варіантів сум квадратів, підходить лише той, де $x \equiv y \equiv 0 \pmod{3}$, тобто числа x та y дійсно діляться на 3. Позначимо $x = 3k, y = 3l$. Тоді $3z^2 = (3k)^2 + (3l)^2$ або

$$z^2 = 3k^2 + 3l^2.$$

Отже, виходить, що число z теж ділиться на 3, звідки $z = 3m$. Тоді

$$(3m)^2 = 3k^2 + 3l^2 \text{ або } 3m^2 = k^2 + l^2.$$

Таким чином, прийшли до рівняння, аналогічного вихідному, але з утричі меншими числами. Оскільки множина натуральних чисел має найменший елемент, то процес такого спуску не може тривати нескінченно, тому маємо суперечність. Доведено. ■

Приклад 2. Діофантове рівняння $x^4 + y^4 = z^2$ не має розв'язків у натуральних числах. Зокрема, не має розв'язків в натуральних числах рівняння $x^4 + y^4 = z^4$.

Доведення. Нехай $(x; y; z)$ – розв'язок першого рівняння в натуральних числах x, y, z . Якщо G – найбільший спільний дільник чисел x та y , $G \neq 1$, то його можна розкласти на прості множники

$$G = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}.$$

Враховуємо, що x^4 та y^4 діляться на кожне $p_i^4, i = \overline{1, s}$ та припустимо, що числа x, y, z не є попарно взаємно простими, тоді число z повинно містити в розкладі принаймні одне p_i^2 . Продовжуючи цей процес, ми або прийдемо до попарно взаємно простих чисел x, y, z , або, в силу неможливості нескінченного спуску, – до суперечності.

Тепер, якщо $(x; y; z)$ – примітивний (нескоротний) розв'язок рівняння $x^4 + y^4 = z^2$ в натуральних числах, то $(x^2; y^2; z)$ – примітивна піфагорова трійка. Для таких трійок можлива лише одна з двох опцій:

$$\begin{cases} x^2 = 2uv, \\ y^2 = u^2 - v^2, \\ z = u^2 + v^2, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2 = u^2 - v^2, \\ y^2 = 2uv, \\ z = u^2 + v^2, \end{cases}$$

де u і v – взаємно прості натуральні числа різної парності. Не обмежуючи загальності (змінні x та y можна поміняти місцями), достатньо розглянути лише першу систему, звідки $y^2 + v^2 = u^2$, тобто отримали ще одну примітивну піфагорову трійку (оскільки u і v – взаємно прості). Тому можна вважати³, що $y = r^2 - t^2, v = 2rt, u = r^2 + t^2$ для деяких взаємно простих чисел r і t . Підставляючи в перше рівняння системи, матимемо, що $x^2 = 4rt(r^2 + t^2)$, звідки $x = 2x_1$, де $x_1^2 = rt(r^2 + t^2)$, причому числа rt та $r^2 + t^2$ – взаємно прості: якщо б існувало просте число p – їх спільний дільник, то він був би спільним дільником взаємно простих чисел r і t , що неможливо. Отже, відповідно до наслідку з основної теореми арифметики, маємо $rt = a^2, r^2 + t^2 = b^2$ і

$$r = c^2, \quad t = d^2, \quad c^4 + d^4 = b^2.$$

Таким чином, за примітивним розв'язком $(x; y; z)$ побудовано новий примітивний розв'язок $(c; d; b)$, причому $b < x_1^2 < z$, тобто реалізовано метод нескінченного спуску, який зрештою приводить до неможливості такого розв'язку. Отже, діофантове рівняння $x^4 + y^4 = z^2$ дійсно не має нетривіальних розв'язків, а значить їх не має і його частковий випадок – рівняння $x^4 + y^4 = z^4$ (Велика теорема Ферма для випадку $n = 4$). ■

4. Рівняння Пелля та метод чакравала

Виявивши неможливість розв'язати в цілих відмінних від нуля числах x та y рівняння $x^2 = ny^2$ для натурального числа n , що не є квадратом цілого числа, математики ще у сиву давнину звернули увагу на подібне до цього рівняння

$$x^2 - ny^2 = \pm 1.$$

Такі рівняння називаються рівняннями Пелля⁴ та мають застосування не тільки в теорії чисел, але й в криптографії, комбінаториці та при раціональних наближеннях ірраціональних чисел, оскільки з виразу

$$n = \frac{x^2 \pm 1}{y^2} \quad \text{або} \quad \sqrt{n} = \frac{x}{y} \sqrt{1 \pm \frac{1}{x^2}}$$

³ Якщо обрати $y = 2rt$ та $v = r^2 - t^2$, подальші кроки залишаться однаковими, оскільки знову $x^2 = 4rt(r^2 + t^2)$.

⁴ Назва з'явилася завдяки Леонарду Ойлеру, який помилково приписав їх авторство Джону Пеллю.

впливає, що раціональний дріб $\frac{x}{y}$ при необмеженому зростанні числа x (відповідно і числа y) наближає число \sqrt{n} .

Хоча й розв'язки конкретних прикладів рівняння (такі як числа Пелля, що можна отримати при $n = 2$) були відомі з часів Піфагора в Греції та Індії, вперше рівняння Пелля були ретельно досліджені в Індії, починаючи з Брахмагупти, який (запровадивши близько 628 року в своїй праці «Брахмаспхутасіддханта» циклічний метод розв'язання невизначених квадратних рівнянь, відомий як чакравала) знайшов цілочисельні розв'язки для кількох початкових значень числа n . Джаядева розвинув цей метод, а Бхаскара II наводить приклад знаходження мінімального нетривіального розв'язку рівняння Пелля $x^2 - 61y^2 = 1$: $x = 1766319049$, $y = 226153980$.

Саме випадок $n = 61$ був здавна відомий своєю складністю. У лютому 1657 року П'єр Ферма надіслав листа європейським математикам, зокрема англійським, через Кенелма Дігбі, у якому запропонував виклик: знайти цілі розв'язки для рівнянь Пелля виду $x^2 - ny^2 = 1$ для різних n , зокрема для $n = 61, 109, 149, 313$ та інших. Ферма стверджував, що знайшов найменші розв'язки для всіх n до 150, і кинув виклик англійським математикам, зокрема Джону Воллісу та Вільяму Браункеру, розв'язати ці рівняння. Вільям Браункер, працюючи разом із Воллісом, розробив метод розв'язання рівняння Пелля, який по суті був еквівалентний методу чакравала. У листуванні 1657–1658 років, опублікованому Воллісом у праці "Commercium epistolicum" (1658), Браункер надав розв'язки для рівнянь, запропонованих Ферма, включаючи $n = 61$ (який, очевидно, співпав з розв'язком Бхаскари II).

Метод розв'язування загальної задачі $x^2 - ny^2 = 1$ був вперше описаний Жозефом-Луї Лагранжем у 1766 році, проте для $n = 61$ вимагає обчислення 21 послідовної збіжності ланцюгового дроби, в той час як метод чакравала виявляється значно простішим. Важливо, що Лагранж також довів, що при кожному значенні числа n , яке не є квадратом цілого числа⁵, рівняння має задану нескінченну послідовність розв'язків.

Опишемо детальніше метод чакравала. З тотожності Брахмагупти для заданого n маємо:

$$(x_1x_2 + ny_1y_2)^2 - n(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (x_1^2 - ny_1^2)(x_2^2 - ny_2^2).$$

Для рівняння вигляду $x^2 - ny^2 = t$ це дозволяє «згорнути» дві трійки розв'язків $(x_1; y_1; t_1)$ та $(x_2; y_2; t_2)$ в нову трійку

$$(x_1x_2 + ny_1y_2; x_1y_2 + x_2y_1; t_1t_2),$$

яка також буде розв'язком. У загальному випадку, будь-яку трійку $(a; b; t)$ можна «згорнути» з тривіальною трійкою $(m; 1; m^2 - n)$ та отримати нову трійку $(am + nb; a + bm; t(m^2 - n))$ для будь-якого m . Якщо додатково припустити, що числа a і b – взаємно прості, значення можна зменшити ще на t :

⁵ Якщо n є квадратом цілого числа, то рівняння матиме лише тривіальний розв'язок

$$a^2 - nb^2 = t \Rightarrow \left(\frac{am + nb}{t}\right)^2 - n\left(\frac{a + bm}{t}\right)^2 = \frac{m^2 - n}{t}.$$

Оскільки знаки всередині квадратів не мають значення, то можна виконати заміни:

$$a \leftarrow \frac{am + nb}{|t|}, \quad b \leftarrow \frac{a + bm}{|t|}, \quad k \leftarrow \frac{m^2 - n}{t}.$$

Якщо натуральне m обране таким чином, що $\frac{a+bm}{t}$ є цілим числом, то два інші в трійці також будуть цілими числами. Серед таких m метод обирає те, що мінімізує абсолютне значення $m^2 - n$, а отже, й $\frac{m^2-n}{t}$. Потім для цього m застосовуються співвідношення заміщення, що приводить до нової трійки $(a; b; t)$. Процес повторюється доти, поки не буде отримано $t = 1$. У 1768 році Лагранж довів, що даний метод завжди завершується розв'язком.

Приклад 3. Знайти всі розв'язки в натуральних числах рівняння

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

Розв'язання. Очевидно, маємо справу з рівнянням Пелля для $n = 2$, а також $x_1 = 3, y_1 = 2$ – розв'язки. Використовуючи описаний метод чакравала, запишемо тотожність Брахмагупти для цього випадку:

$$(3x + 4y)^2 - 2(2x + 3y)^2 = x^2 - 2y^2.$$

Це означає, що якщо пара $(x; y)$ – розв'язок, то й пара $(3x + 4y; 2x + 3y)$ також буде розв'язком. Таким чином,

$$x_2 = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 17, \quad y_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12, \quad x_3 = 99, \quad y_3 = 70, \dots$$

Отже, отримали нескінченну послідовність розв'язків $(x_s; y_s), s \geq 1$.

Покажемо тепер, що інших розв'язків дане рівняння не має. З того, що пара $(x; y)$ – розв'язок, можна вивести, що й пара $(3x - 4y; 2x - 3y)$ також буде розв'язком, використовуючи тотожність Брахмагупти. Помножимо задане рівняння на 9, маємо: $9 = 9x^2 - 18y^2 > 2y^2$, звідки $3x > 4y$. При $y > 2$ з умови $4 = 4x^2 - 8y^2 < y^2$ випливає, що $3y > 2x$. Це все означає, що з при $y > 2$ з розв'язку $(x; y)$ можна отримати розв'язок $(x^{(1)}; y^{(1)})$ в натуральних числах, причому $x^{(1)} < x, y^{(1)} < y$. Оскільки цей процес не може відбуватися нескінченно, то ми отримаємо розв'язок $(x^{(i)}; y^{(i)})$, де $y^{(i)} \leq 2$. Але оскільки $y^{(i)} \neq 1$, то $y^{(i)} = 2$. Тоді $x^{(i)} = 3$. Це означає, що знайдені числа належать знайденій раніше послідовності, тому інших розв'язків немає.

Знайдені вирази $\frac{x_s}{y_s}$ наближають число $\sqrt{2}$ наступним чином:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \dots$$

Знаменники цих дробів є числами Пелля (послідовність A000129) та виражаються формулою:

$$P_k = \frac{(1 + \sqrt{2})^k - (1 - \sqrt{2})^k}{2\sqrt{2}},$$

а чисельники – сумами відповідних чисел Пелля та їх попередників у цій послідовності.

5. Зв'язок рівняння Пелля з ланцюговими дробами

Ще в 300 р. до н.е. в «Початках» Евкліда міститься алгоритм для знаходження найбільшого спільного дільника, сучасна версія якого генерує ланцюговий дріб як послідовність часток евклідових ділень. Математики Стародавньої Індії, такі як Аріабхата та Бхаскара, розробили ланцюгові дроби для наближення ірраціональних чисел. Так, ланцюговий дріб для $\sqrt{2}$ має вигляд:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Якщо «обривати» даний дріб на певному кроці і знаходити його значення, то отримаємо наступні наближення:

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots$$

Виявляється, що ланцюгові дроби тісно пов'язані з рівнянням Пелля, а саме – кожне наближення x/y задовольняє рівняння Пелля, При цьому знаки «+» та «-» чергуються:

$$3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1, 7^2 - 2 \cdot 5^2 = -1, \dots$$

6. Практичне застосування наближених дробів для раціональних чисел

Цікаво, що вказана точність знаходження числа $\sqrt{2}$ була необхідною на практиці при встановленні офіційних форматів паперу, оскільки кожен наступний після A0 формат повинен бути вдвічі меншим (тобто, мати лінійні розміри у $\sqrt{2}$ разів менші за попередні з достатньою точністю). При цьому сам A0 повинен мати площу близьку до 1 м².

Найпоширеніший формат А4 отримав розміри 297 на 210 мм, що відповідає співвідношенню $\frac{99}{70}$.

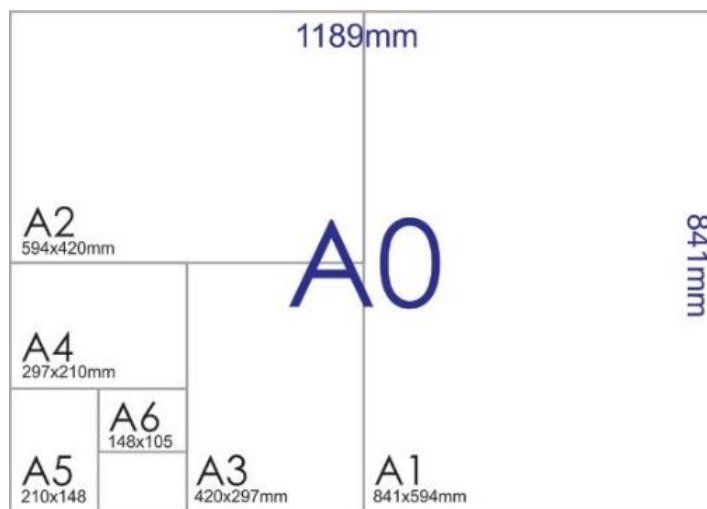


Рис. 1. Розміри загальноживаних форматів паперу в міліметрах

7. Висновки

Методи нескінченного спуску та чакравали залишаються важливими інструментами в теорії чисел, демонструючи унікальне поєднання історичної глибини та сучасної актуальності. Аналіз показав, що метод нескінченного спуску, започаткований піфагорійцями та розвинений Ферма, ефективно доводить неможливість розв'язків цілочисельних (діофантових) рівнянь, зокрема рівнянь Пелля, а їхній зв'язок із ланцюговими дробами відкриває нові перспективи для наближення ірраціональних чисел. Також ефективні методи розв'язання рівняння Пелля, зокрема через ланцюгові дроби, дозволяють швидко знаходити великі розв'язки, що є важливим для практичного застосування в криптографії.

Внесок авторів

Василь Юсипів – концептуалізація, методика, збір і перевірка емпіричних даних; Тарас Юсипів – емпіричне дослідження, аналіз джерел та підготовка огляду літератури або теоретичних основ дослідження.

Список використаних джерел

- Bell E.T. (1937). *Men of Mathematics*. Simon & Schuster, Ink., New York. 608 p.
- Barbeau, Edward J. (2003). *Pell's Equation, Problem Books in Mathematics*, Springer-Verlag, MR1949691, ISBN 0387955291.
- Lenstra, H. W. (2002). *Solving the Pell Equation*. Notices of the AMS, 49(2), 182–192.
- Edwards, H. M. (2000). *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*. Springer.
- Hoiberg & Ramchandani. (2000). *Students' Britannica India: Bhaskaracharya II*, ISBN, 0852297602, 9780852297605. <https://oeis.org/A000129>

Отримано редакцією журналу: 01.03.2025

Прорецензовано: 15.04.2025

Схвалено до друку: 10.06.2025

Vasyl YUSYPIV, High-Category Teacher

ORCID ID: 0009-0006-4461-7514

e-mail: yusypiv.vd@gmail.com

Taras YUSYPIV, PhD

ORCID ID: 0000-0003-2798-9472

e-mail: taras.yusypiv@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

METHOD OF INFINITE DESCENT, CHAKRAVALA METHOD, AND PELL NUMBERS

Abstract. *The method of infinite descent is an elegant tool for proving the impossibility of certain solutions by using the logic of reducing parameters to an absurdity. The method was first clearly formulated and used by Pierre de Fermat in the 17th century, although ideas similar to this method may have appeared in mathematics earlier in a less formalized form. Fermat applied this method in his works on number theory, particularly to prove statements related to Diophantine equations. This method remains relevant today, aiding in the solution of complex Diophantine equations. The chakravala method, developed by Indian mathematicians and described by Brahmagupta and Bhaskara, is a powerful algorithm for finding integer solutions to Pell's equations. This cyclic approach iteratively "folds" solution triples, efficiently approximating irrational numbers with rational fractions. Its simplicity and versatility outshine some modern techniques, like Lagrange's method, and it finds applications in cryptography, combinatorics, and number theory, highlighting the profound contributions of Indian mathematics to global science. Pell numbers and their associated equations are central to number theory, particularly in solving Diophantine equations of the form $x^2 - ny^2 = \pm 1$, and are closely tied to continued fractions.*

Keywords: *method of infinite descent; chakravala method; Pell's equation; Pell numbers; Diophantine equation; Diophantine approximation; irrational numbers.*