

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
на здобуття ступеня бакалавра
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

Порівняльний аналіз моделей бойових дій та гонки озброєнь

студента 4 курсу
Дзюби Євгена Сергійовича

Науковий керівник:
доцент, кандидат фізико–математичних наук
Шатирко А.В.

Робота заслухана на засіданні кафедри моделювання складних систем та
рекомендована до захисту в, протокол № від.....2021 р.

Завідувач кафедри МСС

доцент Черній Дмитро Іванович

Київ – 2021

Зміст

РЕФЕРАТ	3
Вступ.....	5
Розділ 1.....	7
1.1 Математичні моделі військових дій	7
1.2 Модель імовірного бою.....	10
1.2.1 Оцінка морального потенціалу учасників бою	11
1.2.2 Оцінка технологічного потенціалу підрозділу, частини, з'єднання ...	13
1.2.3 Вплив громадських витрат на хід і результат війн	14
1.3 Моделі ланчестеровського типу	16
1.4 Приклади використання математичних моделей військових дій в історичних подіях	20
1.4.1 Битва при Аламо	20
1.4.2 Ютландський бій. Використавши модель Осипова-Ланчестера	23
1.4.3 Вторгнення в Ірак. Модель Осипова-Ланчестера	25
Розділ 2.....	28
2.1 Математична модель прогнозування війни Л. Річардсона	28
2.1.1 Постановка завдання.....	29
2.1.2 Рішення завдання оптимального розподілу.....	30
2.1.3 Приклади використання математичних моделей прогнозування війни Л. Річардсона.....	33
3. Розділ.....	35
3.1 Побудова математичної моделі ймовірних дій на сході України використовуючи модель Ланчестера	35
3.2 Побудова фазових портретів в Maple	41
3.3 Дослідження відхилення аргументу t та його вплив на результат в моделі Ланчестера	47
3.4 Тенденції витрати на оборону у протистоянні Росія-Україна (за моделлю гонки озброєнь Річардсона).....	50
Висновок.....	60
Перелік використаних джерел	61

РЕФЕРАТ

Обсяг роботи 63 сторінок, 44 рисунків та ілюстрацій, 6 таблиць, 26 джерел посилань. Порівняльний аналіз моделей бойових дій та гонки озброєнь.

Об'єкт дослідження. Воєнний конфлікт між двома воюючими країнами. Гонка озброєнь між Україною та Росією

Методи дослідження. Метод математичної моделі Ланчестера використовуючи систему лінійних диференціальних рівнянь, динамічної моделі Річардсона.

Мета і завдання дослідження.

Проаналізувати підхід Ланчестера до аналізу та прогнозування військових конфліктів, де для опису динаміки чисельності воюючих сторін використовуються система лінійних диференціальних рівнянь.

Подивитись на вплив часу реакції одної сторони конфлікту на результат битви. При яких значеннях вплив на результат буде мінімальним.

Дослідження тенденції зміни витрат України та Росії на оборону. До класичної моделі Річардсона пропонується додати чинник, пов'язаний із санкціями, що застосовуються до Російської Федерації міжнародною спільнотою. Для вирішення поставлених завдань було використано методи моделювання, збору інформації та прогнозування.

Наукова новизна одержаних результатів. Ніхто ще не моделював бойові дії на сході України. На сьогоднішній день багато конфліктів відбуваються з затримкою однієї зі сторін а також зі зміною моделлю війни. Ще не було проведено досліджень гонки озброєнь між Україною і Росією, з використанням параметрів санкцій.

Практичне значення одержаних результатів. Роботу можна використовувати для більш точного та гнучкого моделювання. Та подальшого використання для дослідження конфлікту України та Росії.

Інструменти розроблення. Для реалізації програми було використано Maple та таблиці.

Результат роботи. Було проаналізовано та побудовано математичні моделі можливих подій на сході України, побудовано моделі гонки озброєнь між Україною та Росією.

Наукова новизна одержаних результатів. Ніхто ще не моделював бойові дії на сході України. На сьогоднішній день багато конфліктів відбуваються с затримкою однієї зі сторін а також зі зміною моделлю війни. Ще не було проведено досліджень гонки озброєнь між Україною і Росією, с використанням параметрів санкцій.

Практичне значення одержаних результатів. Роботу можна використовувати для більш точного та гнучкого моделювання. Та подальшого використання для дослідження конфлікту України та Росії.

Вступ

У сучасному світі військові конфлікти як і раніше грають ключову роль у взаєминах між державами. І хоча епоха глобальних світових воєн вже пройшла завдяки винаходу ядерної зброї, різні менш масштабні локальні військові конфлікти і раніше відбуваються. Якщо подивитися на політичну карту нашої планети, то на ній завжди будуть присутні гарячі точки. Зокрема, на даний момент йдуть військові дії в Сирії, в Ємені, в Ісламській державі, на близькому сході, громадянські війни в центральній частині Африки і звичайно на південному сході України що робить роботу ще більш актуальною. Крім конфліктів в активній фазі існують також конфлікти в замороженому стані, наприклад, конфлікт в Придністров'ї, конфлікт між двома Кореями, Абхазький і Осетинський конфлікти. Також існують і так звані «неактивні» конфлікти.

Така подія, як військовий конфлікт має великий вплив на життя учасників. Від того, як вирішиться конфлікт буде залежати розстановка сил в регіоні, економічна ситуація на територіях учасників, характер соціальної напруженості на територіях конфлікту, а також багато іншого.

Результат конфлікту залежить від безлічі різних факторів. Деякі з них є зовнішніми по відношенню до військового протистояння і не контролюються безпосередніми учасниками конфлікту, проте можуть серйозно вплинути на результат бою. До їх числа можна віднести втручання третіх сил, характер місцевості, настрою місцевого населення, погодні умови та інші випадкові або детерміновані чинники.

Для передбачення ефектів від впливу таких факторів існують різні підходи до аналізу та прогнозування військових конфліктів.

Одним з таких способів є математичні моделі, що відображають хід і обставини протікання військового конфлікту.

У сучасному світі, де вирують глобалізація та інтернаціоналізація, дуже важливою проблемою постають питання війни та миру, а також гонка озброєнь країн, що мають претензії одна до одної. Особливо актуальною на теперішній час ця проблема є для

України, оскільки частина нашої країни є окупованою, військовий конфлікт на Сході триває, країна понесла величезні економічні та демографічні збитки, крім цього постійні провокації Росії як на Керченській протоці так і 2021 році на кордонах наших країн . У роботі розглядаються такі питання як сутність гонки озброєнь; сучасні тенденції витрат на оборону у світі; математичне моделювання проти стояння України та Росії та аналіз витрат на оборону учасників цього конфлікту за допомогою динамічної моделі Річардсона.

Розділ 1.

1.1 Математичні моделі військових дій

Здатність країни захищати свої кордони залежить від матеріальних і духовних елементів. Вони показують можливості держави і народу: військові, економічні, наукові, соціальні і морально-психологічні. Боездатність військ показує можливість і здатність військ успішно вести військові дії, виконувати поставлені бойові завдання відповідно до їх призначенням. Військові частини та підрозділи, в наявності яких менше 40% бойового складу вважаються небоєздатними.

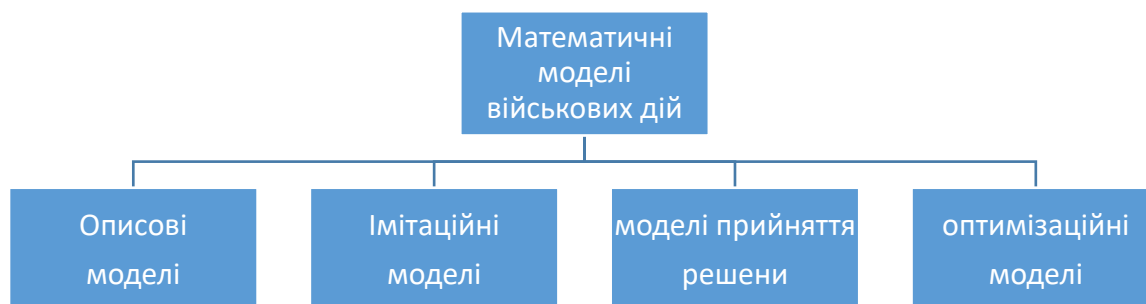
Розробляються сучасні тенденції військових дій при побудові комплексних ієрархічних моделей. При плануванні наводиться короткий навігатор по описаним у відкритих джерелах математичних моделей військових дій, включаючи описові, імітаційні, оптимізаційні та теоретико-ігрові моделі. Після цього в якості «прикладів» більш докладно розробляються два хрестоматійних класи моделей - гра полковника Блотто і ланчестеровські моделі. І врешті, решт розробляється ієрархічний підхід до моделювання.

Можна поділити на чотири загальних класи математичних моделей військових дій (підставою виділення є функції моделювання):

- описові моделі;
- імітаційні моделі;
- оптимізаційні моделі;
- моделі прийняття рішень.

Кожен клас має значне число підкласів, які розрізняються використанням математичним апаратом. Дані моделі військових дій ґрунтуються на методах теорії ймовірностей та статистичної теорії рішень (прийняття рішень в умовах «природньої» невизначеності), теорії надійності і теорії масового обслуговування, теорії експертних оцінок. До даних моделей відносять якісний аналіз відповідних динамічних систем, дослідження їх структурної стійкості. Імітаційні моделі військових дій ґрунтуються на апараті марковських ланцюгів, диференціальних рівнянь, кінцевих автоматів або

методах розподіленого штучного інтелекту (так звані мультиагентні системи - МАС).



Самі відомі та отримали широкий розвиток ланчестерівські моделі, які використовують апарат диференціальних рівнянь при описі динаміки чисельності сил учасників військових конфліктів. Важливу роль відіграють військові ігри (ділові, імітаційні), які базуються на тих чи інших математичних моделях. Зараз розробляються численні комп'ютерні системи (які включають середовища імітаційного моделювання та спеціальні мови - наприклад, Battle Management Language і т.п.) і імітаційні моделі (включаючи елементи систем підтримки прийняття рішень (СППР)) з управління військовими діями - в авіації, на флоті. Перераховані моделі використовують апарат лінійного і динамічного програмування, теорії оптимального управління, дискретної оптимізації (включаючи теорію графів і методи календарно-мережного планування і управління (КВПУ) стосовно до планування бойових дій і управління військами і частково теорії масового обслуговування і теорії управління. [8]

Дані моделі прийняття рішень можна розділити на моделі індивідуального і колективного прийняття рішень. По перше важливий акцент робиться на багатокритеріальне прийняття рішень, по-друге - на використання теорії ігор (прийняття рішень в умовах ігрової невизначеності).[3][8]

Моделі прийняття рішень.

Моделі військових дій засновуються на методах теорії ймовірностей і статистичної теорії рішень (прийняття рішень в умовах «природної» неоднозначності), теорії надійності та теорії масового обслуговування, теорії експертних оцінок. До цих моделей можна віднести і якісний аналіз відповідних динамічних систем, дослідження їх структурної стійкості.

Імітаційні моделі військових подій ґрунуються на апараті марківських ланцюгів, диференціальних рівнянь, кінцевих автоматів або методах розподіленого штучного інтелекту (так звані мультиагентні системи - МАС).

Найбільш відомими з перерахованих і тими, що отримали великий розвиток є так звані моделі Ланчестера, які ґрунуються на апараті диференціальних рівнянь для опису динаміки чисельності сил учасників воєнних конфліктів (перша модель Ланчестера описана в [2], її розвиток, наприклад - в [3]).

Оптимізаційні моделі військових дій користуються апаратом лінійного і динамічного програмування, теорією оптимального управління, дискретною оптимізацією (включаючи теорію графів і методи мережевого планування і управління (КВПУ) і частково теорією масового обслуговування та теорією управління запасами.

Моделі прийняття рішень можна розділити на моделі індивідуального та колективного прийняття рішень. У першій моделі головний акцент направлений на багатокритеріальне прийняття рішень, в других - на використання теорії ігор (прийняття рішень в умовах ігрової невизначеності).

Іншими можливими критеріями для класифікації моделей військових дій є області використання моделей воєнних дій - їх додатки до авіації, флоту, сухопутним операціями, прикордонної безпеки та ін.

1.2 Модель імовірнісного бою

Нехай є дві протиборчі одна з однією бойові групи. Бойова чисельність першої групи дорівнює x , чисельність другий - y . Позначимо параметр бойового переваги першого боку над другою як β . Припустимо, що результат бою визначається результатами зіткнень окремих бойових одиниць сторін, а самі бойові одиниці з точки зору їх бойових можливостей однорідні (тобто кожна бойова одиниця в рівній мірі користується результатами забезпечення бою, розвідки, наведення і т. д.). Тоді, враховуючи класичне визначення ймовірності, визначимо ймовірність перемоги в бою першої сторони за формулою

$$p_x(x, y) = \frac{\beta x}{\beta x + y} = \frac{q}{q + 1}, \quad q = \frac{\beta x}{y}, \quad p_x(0, 0) = \frac{\beta}{\beta + 1}, \quad (1)$$

де q є співвідношення сил сторін (перевага першої сторони).

Для оцінки параметра бойового переваги β за результатами бойових дій можна скористатися функцією правдоподібністю L :

$$L = \prod_{i=1}^m (p_i)^s (1 - p_i)^{1-s} = \prod_{i=1}^m \left(\frac{\beta x_i}{\beta x_i + y_i} \right)^s \left(\frac{y_i}{\beta x_i + y_i} \right)^{1-s}, \quad (2)$$

де m - кількість спостережень за ходом і результатами боїв (обсяг вибірки) p_i - імовірність перемоги першої сторони в i -му бою (невідома величина); s - доля боїв, в яких перемогла перша сторона; $x_i > 0$ - кількість бойових одиниць першої сторони, які брали участь в i -му бою; $y_i > 0$ - кількість бойових одиниць другої сторони, які брали участь в i -му бою. Максимізуючи логарифмічну функцію правдоподібністю, отримаємо наступне вираження для обчислення параметра β :

$$\frac{ms}{\beta} - \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{\beta x_i + y_i} = 0. \quad (3)$$

Дана модель може бути застосована не тільки для оцінки ефективності бойових дій на суші, але і в завданнях боротьби з силовими актами в морському просторі. В роботі за даними міжнародної бази інцидентів на морі обчислений параметр бойового переваги нападників, які намагаються захопити військові і цивільні судна. отримано значення $\beta \approx 5.2$.

Настільки високе значення параметра бойового переваги нападників можна пояснити наступними факторами: 1) перевагою окремої бойової одиниці нападників над членом екіпажу, обороняються в озброєнні і психологічної стійкості; 2) раптовістю дій.

Виходячи з поглядів військових теоретиків і практиків, можна виділити два найважливіших чинники, що визначають бойову ефективність з'єднань, частин і підрозділів: моральний фактор і його кількісний показник (відсотки кривавих втрат) і технологічний фактор (бойовий потенціал є сукупність постійно готових до порівняно матеріальних і духовних сил і засобів).

Оскільки бойову перевагу визначається двома перерахованими факторами, то параметри бойової переваги обчислюється за формулою

$$\beta = \alpha\rho, \rho = \lambda_x \lambda_y,$$

де $\alpha > 0$ - параметр технологічної переваги першої сторони; ρ – відношення моральних потенціалів сторін; $0 < \lambda_x < 1$ - частка втрат, витримується першою стороною, $0 < \lambda_y < 1$ - частка втрат, витримується другою стороною.

1.2.1 Оцінка морального потенціалу учасників бою

За Клаузевіц, війна є акт насильства, який має на меті змусити противника виконати нашу волю. Моральний фактор є найважливішим показником, визначаючим результат війни, битви, бою. Термін «моральна пружність» військ вперше введений Н. Н. Головіним. За Н. Головіна, «бій закінчується відмовою від нього однією з воюючих сторін, т. е. чисто психологічним актом».

У «Науці про війну» Н. Н. Головін виконав блискуче дослідження про вплив втрат на результат бою. Найважливішим фактором перемоги війська в бою є відсоток кривавих втрат (пораненими і убитими), при якому військо все ще НЕ

втрачає боєздатність (моральний дух). «... Можна встановити, що для битв другої половини XVIII і всього XIX століття межею Найбільшої моральної пружності військ, після якої вони НЕ здатні вже до перемоги, є криваві втрати в 25%. ... Моральний ефект рівного відсотка втрат для кожного з воюючих далеко не однаковий. Так розміри втрат пригнічують дух одного і викликають швидший процес морального розкладання, ніж у другого, а тоді, цей інший і стає переможцем ... ». За думку А. Берндта, «Психічні властивості народу, маси якого складають товщу армії, теж зумовлюють розміри втрат, які ця армія здатна витримувати. І тут зустрічається деякий різноманітність. Так, наприклад, більшість боїв, в яких російські билися проти рівноцінного ворога, є дуже для них кровопролітними: Цорндорф - 43%, Кунерсдорф - 43%, Аустерліц - 15%, (Прейсиш) Ейлау - 28%, Фридланд - 24%, Бородіно - 31%, Варшава - 18%, Інкерман - 24%, Перша Плевна - 28%, Друга Плевна - 28%, Третя Плевна - 17% і т. Д Навпаки, всюди, де б'ються італійці, ми завжди зустрічаємо невеликі втрати. Вони програли бій в Санта-Лючії, втративши 2%, в Кустоцце - 1.2%, в Мортара - 2.2%, в Новарро - 5%... Пояснення цьому є в особливостях театру військових дій, однак бачити в цьому останньому вичерпне пояснення не можна ».

Нехай X_i є кількість активного бойового складу в i -му бою, чол., ξ_i - втрати вбитими і пораненими в цьому бою, чол., при яких частина (підрозділ) по команді або самостійно перестає виконувати бойове завдання (відходить з обороняються позицій, припиняє наступальні дії). Тоді статистична оцінка морального потенціалу (відсоток витримує кривавих втрат) може бути обчислень за формулою середнього арифметичного :

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{x_i}, \quad (4)$$

де n є кількість боїв (обсяг статистичної вибірки). Отримана оцінка є верхньому над оцінкою морального потенціалу, так як часто неможливо визначити момент, коли втрати вже є наслідком паніки. Більш кращою оцінкою морального потенціалу є медіана варіаційного ряду (значення центрального елемента відсортованих по зростанню значень x_i / ξ_i).

1.2.2 Оцінка технологічного потенціалу підрозділу, частини, з'єднання

Технологічний фактор визначається наступними показниками (впливають з визначення бою - сукупності узгоджених за метою, місцем і часом ударів, вогню і маневру військ для знищення (розгрому) противника, відбиття його ударів і виконання інших завдань):

- досвід і мистецтво командирів, їх здатність організувати всебічне забезпечення бою і узгоджені дії підлеглих і доданих сил і засобів;
- можливості з розвідки противника, прихованої, оперативного і стійкого зв'язку і навігації;
- маневреність сил і засобів;
- вогневі і ударні можливості сил і засобів.

Параметр технологічної переваги визначимо з впровадженням середнього геометричного:

$$\alpha = \sqrt[4]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4},$$

де $\alpha_1 > 0$ - параметр переваги першої сторони в досвіді командування і всебічного забезпеченні; $\alpha_2 > 0$ - параметр її переваги в засобах розвідки, зв'язку і навігації; $\alpha_3 > 0$ - параметр переваги в маневреності; $\alpha_4 > 0$ - параметр переваги в вогневих можливостях.

Частні коефіцієнти $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ обчислюються як відношення кількісних характеристик бойових одиниць сторін з урахуванням протидії супротивника. Наприклад, дальність ефективного ураження противника слід обчислити з урахуванням наявних у нього коштів індивідуальної та колективної захисту; дальність виявлення - з урахуванням можливостей по маскуванню (задимлення) і т. д. Оскільки коефіцієнти $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ визначені через відношення величин, то в якості допустимого середнього використовується середнє Геометричне. Середнє Геометричне більш чутливо до малих значень одного з коефіцієнтів, наприклад, швидкості бойового переміщення або дальності виявлення противника в важких метео умовах, і відображає мистецтво командирів (командувач) по формуванню оптимального складу і озброєння штурмових, батальйонних, ротних груп, здатних ефективно вирішувати поставлені бойові завдання. Так, на початку 1942 р Г. К. Жуков для захоплення опорних пунктів

противника вимагав створювати ударні загони, озброєних автоматичною зброєю, мінометами. Штурмові групи, та включати до їх складу саперів і танки. Застосування штурмових груп і ударних загонів дозволяє вирівняти значення приватних коефіцієнтів, підвищуючи значення параметра технологічного переваги.

Тоді вираз можна переписати у вигляді

$$p_x(x, y) = \frac{\alpha \lambda_x x}{\alpha \lambda_x x + \lambda_y y}. \quad (5)$$

Таким чином, нами отримана найпростіша імовірнісна модель бою, що враховує чисельність сторін і їх моральні та технологічні характеристики.

1.2.3 Вплив громадських витрат на хід і результат війн

Перемога в війнах не завжди визначається співвідношенням військових потенціалів держав учасників, чому в історії з безліч підтверджень (війна США у В'єтнамі, війна СРСР в Афганістані та ін.). Для аналізу і прогнозу результату воєн необхідно враховувати відношення народів до війни.

У таблиці представлені дані по втрати ЗБРОЙНИХ сил (ЗС) США в великих війнах. Відсотки втрат (убитими і пораненими) в Кореї та В'єтнамі 2.4% від загальної чисельності ЗБРОЙНИХ сил (ЗС) США і, відповідно, 0.09% і 0.11% від чисельності населення.

Істотна відмінність між двома війнами полягає в масштабах антивоєнних виступів, дезертирства і відмови від призову. У роки війни у В'єтнамі антивоєнний рух виявився більш потужним і перевершив антивоєнні виступи в роки корейської війни по всіма показникам: загальна кількість учасників, розмах, кількість акцій протесту, форми і їх поширення.

	Вбито тис. чол.	Ранено, тис. чол.	Загальна чисельність, тис. чол.	% втрат	% втрат населення
Друга світова війна, 1939-1945 рр	407.3	671.8	14903.2	7.2	0.8
Корейська війна, 1950-1953 рр.	36.6	103.3	5764.1	2.4	0.09
В'єтнамська війна, 1964-1973 рр.	58.2	153.4	8752.0	2.4	0.11

Війна в Перській затоці	0.383	0.46	665.5	0.1	0.0003
-------------------------	-------	------	-------	-----	--------

Таблиця 1. Втрати США в ході воєн

Рік	Втрати США	Середній % підтримки	Кількість протестуючих
1965	1 000	62.50	50 000
1966	6 000	51.75	100 000
1967	16 000	48.00	400 000
1968	30 000	39.00	625 000
1969	40 000	35.50	850 000
1970	44 000	33.75	925 000
1971	45 000	29.50	1 000 000

Таблиця 2. Втрати США в роки В'єтнамської війни і протести

У таблиці представлені дані по роках у втратах ЗБРОЙНИХ сил і кількості протестів. По таблиці видно, що з ростом бойових втрат (убитими) зростала кількість протестуючих проти війни і знижувалася підтримка уряду з боку суспільства. Переломним моментом в зламі підтримки війни з боку ЗМІ вважається 27 лютого 1968 року (передача телеведучого В. Кронкайта, В якій військовий успіх армії США представив як «нічию», «Тупик», «мертву точку»).

Нехай є дві сторони, які беруть участь в конфлікті. Позначимо через $x(t)$ ($y(t)$) численності учасників першої (другої) сторони в момент часу $t > 0$; чисельність в нульовий момент часу - x_0 і y_0 відповідно. Нехай перша сторона має вирішальне переваги в силах і засобах над другою стороною і разом з тим є агресором, тоді як друга сторона вважає конфлікт справедливим, а перемогу в ньому - вкрай важливою. Позначимо через X_0 і Y_0 чисельність населення першої та другої країни в момент початку конфлікту. Укладемо, що за час конфлікту природним приростом (зменшенням) населення можна знехтувати. Позначимо через Λ_x и Λ_y витримує суспільством першої і другої країни долю втрат. Розглянемо модель з введенням резервів: сторони підтримують чисельність своїх військ на одному рівні, компенсуючи втрати. З рівнянь Осипова-Ланчестера (модель з перенесенням вогню) і умови сталості чисельності військ отримаємо

$$x_R(t) - \beta_y y(t) = 0, y_R(t) - \beta_x x(t) = 0, x_R(t) = x_0 - x(t), y_R(t) = y_0 - y(t), \quad (6)$$

де β_x и β_y - коефіцієнти бойової ефективності першої і другої сторони $x_R(t)$ и $y_R(t)$ - кількість введеного в бій резерву (рівного втрат в ході боїв).

Рішення рівнянь

$$x_R(t) = x_0 - x(t) = \beta_y \frac{y_0 - \beta_x x_0}{1 - \beta_x \beta_y}, \quad y_R(t) = y_0 - y(t) = \beta_x \frac{x_0 - \beta_y y_0}{1 - \beta_x \beta_y}. \quad (7)$$

1.3 Моделі ланчестеровського типу

Використання моделей бойових дій має давню історію. У 1916 році англійський математик Фредерік Ланчестер запропонував використати систему з двох однорідних диференціальних рівнянь для моделювання повітряного бою. За рік до нього схожу модель опублікував російський математик М. П. Осипов. В основу моделі ланчестеровського типу лежить метод динаміки середніх. Дані моделі розвивалися в бік більш розширеного врахування характеристик різних бойових одиниць і способів їх використання. Існує клас задач, які користуються апаратом диференціальних рівнянь для опису динаміки переміщення військ в просторі (на площині).

Ланчестеровські моделі використовують апарат диференціальних рівнянь для опису динаміки чисельності сил учасників військових конфліктів. Необхідно звернути увагу на присутність схожих аналогій між ланчестеровськими моделями військових дій і популяційними моделями в біології та екології. Нехай є дві воюючі сторони. Позначимо через $x(t)$ ($y(t)$) чисельність військ першої (другої) сторони в момент часу $t > 0$. Початкові умови (чисельності в нульовий момент часу) - x_0 і y_0 відповідно. Швидкість зміни чисельності військ кожної зі сторін визначається трьома факторами:

- операційними втратами (пропорційними чисельності своїх військ);
- бойовими втратами (пропорційними чисельності військ противника або твору чисельності військ обох сторін);
- введенням резервів (відводом резервів).[1]

Можемо зробити висновок, що $x(t)$ і $y(t)$ змінюються безперервно і, більш того, що вони мають похідні як функції часу. Звичайно, такі висновки є спрощення реальної ситуації, оскільки $x(t)$ і $y(t)$ - це цілі числа. Але разом з тим зрозуміло, що при досить великому численному складі кожної з протиборчих сторін збільшення чисельності на одного або двох чоловік дає з практичної точки зору нескінченно малу величину по порівнянню з уже наявними готівковим складом. Тому можна вважати, що за малі проміжки часу Чисельний склад також змінюється на малі кількості (не цілі). Цих угод, звичайно, недостатньо для того, щоб виписати конкретні формули для $x(t)$ і $y(t)$ як функцій t . Однак можна вказати ряд факторів, які дозволяють описати швидкість зміни чисельності протиборчих сторін.[2]

Розглянемо 3 моделі бою. Перша – регулярні війська проти регулярних, друга – партизанська війна і третя змішана війна.

Звичайний бій описується наступною системою диференціальних рівнянь (складові відповідають перерахованим вище факторам):

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -ax(t) - by(t) + P(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -cx(t) - dy(t) + Q(t)\end{aligned}\quad (8)$$

де a, b, c і d - позитивні константи;

$P(t)$ і $Q(t)$ – темпи введення резервів.

Аналогічно описується партизанська війна (багато сучасних воїн придбали і ррегулярні «партизанський»):

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -ax(t) - gx(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -dx(t) - hx(t)y(t) + Q(t)\end{aligned}\quad (9)$$

де g і h - позитивні константи

І третій тип, змішаний бойових дій, в яких беруть участь як регулярні частини, так і партизанські з'єднання:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) - by(t) + P(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -dx(t) - hx(t)y(t) + Q(t) \quad (10)$$

Кожне з виписаних вище диференціальних рівнянь виражає швидкість зміни чисельного складу протиборчих сторін в залежності від дії різних факторів і має вигляд.

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = -a, \quad \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = -d \quad (11)$$

Втрати в живій силі, які не пов'язані з безпосередніми бойовими діями і які визначаються членами $-ax(t)$ і $-dy(t)$, дають можливість виписати постійні відносні швидкості втрат (за відсутності бойових дій і підкріплень) за допомогою рівнянь.

Якщо в моделях Ланчестера присутні лише члени, відповідні тільки підкріпленням і втрат, не пов'язаним з бойовими діями, то це означає, що останні взагалі відсутні.

Розглядаючи диференціальну систему типу (1), припустимо, по-перше, що кожна з протиборчих сторін знаходиться в зоні дії вогневих засобів іншого боку, а по-друге, що вогонь ведеться тільки по живій силі, безпосередньо бере участь у бойових діях. При таких припущеннях Ланчестера пропонує для підрозділів регулярних військ сторони x ввести член $-by(t)$, який відображав би бойові втрати. Коефіцієнт b буде тоді вказувати на ефективність бойових дій сторони y . Таким чином, рівняння

$$\frac{1}{y} \frac{dx}{dt} = -b \quad (12)$$

показує, що постійна b - це одиниця вимірювання середньої ефективності кожної одиниці бойових сил сторони y . Подібне пояснення можна дати і члену $-cx(t)$. Зрозуміло, що зовсім непросто обчислити коефіцієнти ефективності b і c . Один із шляхів тут – розглядати ці коефіцієнти у вигляді:

$$b = r_y p_y, \quad c = r_x p_x, \quad (13)$$

де r_x і r_y - коефіцієнти військової потужності сторін у мул: відповідно, а p_x і p_y - це ймовірності того, що кожен з пострілів з боку у їх відповідно виявиться влучним.

Відзначимо далі, що члени, які відповідають за бойові втрати в диференціальної системі типу (А), є лінійними. Що ж стосується систем типу (В), то тут аналогічні члени вже є нелінійними і пояснюється це наступним. Нехай бойові сили партизан чисельністю $x(t)$ людина займають деяку територію R , залишаючись не видимими для ворога. І хоча противник тримає під вогнем територію R , він не може знати ефективності своїх дій. При цьому вельми правдоподібно, що втрати партизанських підрозділів x пропорційні, з одного боку, числу $x(t)$ на R , а з іншого - числу $y(t)$ бойових сил противника. Таким чином, член, який відповідає втратам партизанських з'єднань x , має вигляд $-gx(t)$, де коефіцієнт ефективності бойових дій сторони y , взагалі кажучи, більш важкий для оцінки, ніж коефіцієнт b в першому рівності. Однак для його визначення ми можемо використовувати коефіцієнт військової потужності g_y , а також взяти до уваги міркування Ланчестера, згідно з якими ймовірність влучного пострілу з боку y прямо пропорційна так званої територіальній ефективності одного пострілу з боку y і обернено пропорційна площі L_x території R , займаної силами x . Через A_{xy} тут позначається площа, яку займає один з партизанів. Таким чином, ймовірні формули для визначення g і h такі

$$g = r_y \frac{A_{ry}}{A_x}, \quad h = r_x \frac{A_{rx}}{A_y}. \quad (14)$$

Існує безліч різновидів завдань оптимізації розподілу сил оборони і нападу в рамках Ланчестеровських моделей, тобто Модель Ланчестера має масу варіацій і узагальнень:

- введення змінних (залежних від часу) коефіцієнтів бойової ефективності ;
- врахування особливостей бойових дій різних типів - засідок, перестрілок, облог і т.д.;
- розгляд дискретних моделей залпового вогню ;
- багаторівневі моделі, в яких на нижньому рівні методом Монте-Карло імітується взаємодія окремих бойових одиниць, на середньому рівні взаємодія

описується Марковськими моделями, а на верхньому рівні використовуються диференціальні рівняння. Такий підхід зручний для ідентифікації реальних завдань і більш адекватного врахування специфіки конкретної моделюється ситуації;

- розгляд диференціальних ігор, в яких управліннями гравців є темпи введення резервів $u(t)$ і $v(t)$, а критеріями ефективності - різниця між чисельністю військ в заданий момент часу ;

- аналіз моделей тривалих (багатостадійний) конфліктів з урахуванням введення резервів;

- моделі агрегованого опису театру військових дій, що складається з декількох областей, битви в кожній з яких описуються квадратичним законом Ланчестера (Облік і оптимізація розподілу сил і засобів в просторі і в часі;

- моделі військових конфліктів з використанням декількох видів озброєнь ;

- моделі роззброєння Річардсона;

- моделі, що враховують невизначеність у вигляді стохастичних доданків - перехід до марковським моделям, стохастичних диференціальних рівнянь, та ін.[6, 18]

1.4 Приклади використання математичних моделей військових дій в історичних подіях

1.4.1 Битва при Аламо

Спочатку розглянемо ситуацію в Аламо. Відповідно до деяких моделей, створених Томпсоном (1989), Teague (2005) та Herculilla-Heredia, близько 189 техасців були забарикадовані в Аламо, на якого напали приблизно 3000 мексиканців на відкритих полях оточуючи його. Нас цікавить опис втрат учасників бойових дій. Ми зробимо це до вимірювання або визначення змін. Визначимо $T(n)$ що було числом техасців після періоду n і $M(n)$ - кількість мексиканських солдатів після часу n . Тобто ми робимо спосіб виразити майбутнє зк $T(n + 1) = T(n) + \Delta T$ (де ΔT втрата техаських комбатантів з часом) і $M(n + 1) = M(n) + \Delta M$ (де ΔM – це втрата мексиканських солдатів бойових дій з часом). Як приклад проілюстровано битву під Аламо битви "спрямований

вогонь". Комбатанти на кожній стороні може бачити своїх суперників і може направляти вогонь по них. Техасці ховаються за барикади, що робить більш важкою мішенню, і нам потрібно, щоб наші моделі відображали цей факт.

Щодо кількості куль, випущених техаськими захисниками і наскільки точно вони стріляють по мексиканській армії. Ми можемо використовувати модель пропорційності. Кількість випущених куль, залежить від того, скільки чоловіків стріляє і як швидко кожен може стріляти. Враховуючи зброю на той час можливо було ефективніше, щоб стріляла частина учасників бойових обстрілів решта перезаряджала гвинтівки для них. Це може збільшити інтенсивність вогню. Є також питання про те, яка частина сили знаходиться під прямим вогнем.

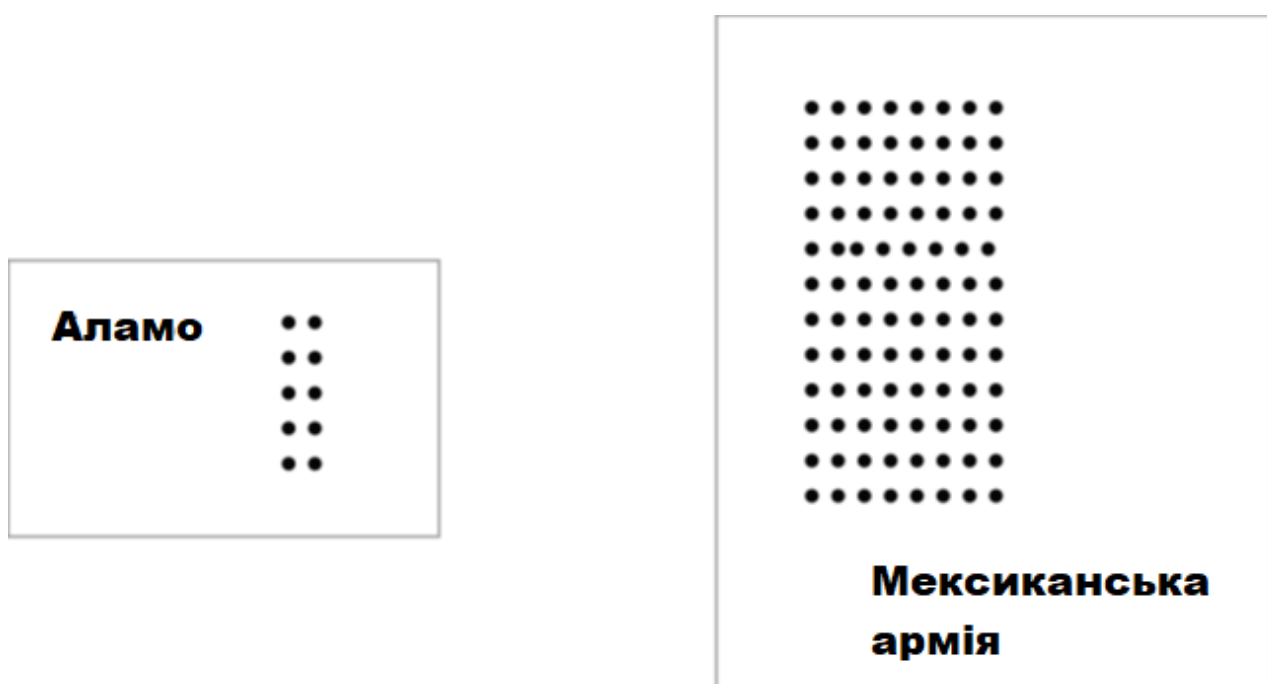


Рис.1 Сили сторін в битві при Аламо

Якщо сили противника знаходяться в прямокутному формуванні, з кількома рядами, інші позаду лише перший або два ряди бути здатним вільно стріляти по ворогу. Таким чином, $\Delta M = (\text{Техас}) \times (\% \text{стрільба}) \times (\text{кулі} / \text{Техас} / \text{хв}) \times (\text{не влучила/куля}) \times (\text{мексиканці відключені} / \text{потрапляють}) \times (\text{мексиканці поранені} / \text{потрапляють})$. Всі ці змінні можна об'єднати в єдину константу пропорційності k_1 . Деякі з цих змінних буде змінюватися залежно від відстані або часу. Наприклад, ймовірність потрапляння ймовірно збільшиться, коли мексиканська армія закриється на Аламо. Однак наша модель передбачає кожен

із цих випадків, за винятком кількості учасників бойових дій. Отже, ми можемо написати зміни як: $\Delta M = -k_1 T(n)$, де $T(n)$ – число техасців, що залишилися в битві після періоду n . Негативний знак вказує що число Мексиканських учасники бойових дій зменшуються. Тепер розглянемо ΔT . Він складається так само як кількість мексиканців, відсотків стрільби, кількість куль на мексиканця учасник бойових дій за хвилину, ймовірність удару, і кількість техасців, відключених за хіт.[17]

Відповідно до Teague (2005), ми могли б очікувати що скорострільність для мексиканської армії бути меншими, ніж техасці, оскільки вони будуть перезавантаження під час маршу замість перезавантаження стоячи на місці. Аналогічно, ймовірність хіт також буде вищим для техасців стріляючи з положення за стіною, ніж для мексиканці що стріляли під час маршу в відкритому полі. Таким чином, $\Delta M = -k_1 T(n)$ та $\Delta T = -k_2 M(n)$ але значення k_1 і k_2 будуть дуже різними. Константи k_1 і k_2 можуть називатися коефіцієнтами вбивства або коефіцієнтами бойової ефективності. Битва велася в той час як мексиканці були у відкритому полі. Ефективність константа k_2 була набагато меншою, ніж k_1 даючи вбивство техасцям. Одного разу стіни Аламо були порушені, значення коефіцієнти вбивства, k_1 та k_2 , ймовірно, значно змінилися, і битва закінчилася в дуже короткий час. Ми моделюємо цю битву так, ніби вона була до кінця. За історичними свідчення, битва під Аламо тривала один годину, як тільки почалася облога. Кожен техасець був вбитий в Аламо, і оцінки кількість вбитих мексиканців від 800 до 1500 мексиканських сил приблизно 3000 солдат. У нашій моделі ми припускаємо, що приблизно 1300 мексиканців загинули в битві. Ми обчислили коефіцієнти вбивства для нашої моделі, де ці цифри означають вбивства за хвилину кожною стороною. Шляхом моделювання експериментування з розмірами сили та довжиною бою, ми оцінили коефіцієнти вбивства були: $k_1 = 0,25$ і $k_2 = 0,00145$.

Ситуація в Аламо, як описано вище, моделюється як:

$$\begin{pmatrix} T(n+1) \\ M(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.00145 \\ -0.25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(n) \\ M(n) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} T(0) = 189 \\ M(0) = 3000 \end{pmatrix} \quad (15)$$

З нашого рівняння $\sqrt{(k_1 k_2) \cdot T_0} < k_1 \cdot M_0$ маємо $0,019039 (189) < 0,25 (3000)$. Оскільки $3.598 < 750$, ми знаємо, що мексиканська армія перемагає рішуче. Ми отримали значення для досягнення паритету, щоб ми могли побачити, чи за яких обставин тегасці могли перемогти. Багато з значення нереальні для події. За паритетом ми можемо тримати три з чотирьох параметрів як константи і варіюють четвертий параметр. Тоді видно, чи нове значення здійсненне або неможливо. Тегасці повинні покращити свою здатність вбивати нападаючих Мексиканці на 146,13%. На думку Томпсона (1989), тегаси вже мали гвинтівки з дальністю на 200 метрів більше, тому, можливо, цього не буде бути можливим покращити їх коефіцієнт вбивства більш ніж на 146%. Тегасці вже були всередині Аламо, тим самим знижуючи рівень вбивства Мексиканців, які перевищують 68%, також такого не може бути. Збільшення кількості чоловіків понад 21% буде достатньо, щоб отримати нічию. Однак коли стіни Аламо прорвані мексиканською армією нам потрібно було б перерахувати результати за допомогою різних моделей.[21]

1.4.2 Ютландський бій. Використавши модель Осипова-Ланчестера

Ютландська бій - являється найбільшою морською битвою Першої світової війни, в якій зустрілись німецький і британський флоти. Битва відбувалась в Північному морі недалеко данського півострова Ютландія, в протоці Скагеррак.

Співробітники з Йоркського університету провели математичний аналіз Ютландської битви – самої великої військово-морської битви в історії

європейських народів. Результати кількісного моделювання показали, що дії британського командувача адмірала Джелліко були нерішучими, але саме це не дало розгромити німецький флот в відкритому морі, в кінці кінців саме обережність британського адмірала врятувала флот від ризику поділу і розгрому по частинах.

Дослідники в даній роботі використовували декілька математичних моделей. Разом з адаптацією для аналізу головного морського бою Першої світової необхідні розрахунки модифікували, використавши в них закон Осипова-Ланчестера. Який стверджує, в разі протистояння двох однакових за якістю супротивників їх втрати збільшуються з плином часу. Та сторона, яка має більшу чисельність, завдає противнику більшої шкоди в одиницю виміру. При додатковому зниженні чисельності більш слабкої сторони ця ситуація ускладнюється і закінчується її розгромом.

Розробники нової роботи обчислили в своєму моделюванні той факт, що закон Осипова-Ланчестера в Ютландському бою формально був на боці англійців. Їх флот в півтора разу був більший німецького за чисельністю кораблів (151 проти 99) і водотоннажністю, і в результаті цього - і за кількістю гармат. Але німецький флот був більше броньований, кораблі були краще спроектовані і не так уразливі в плані детонації боєзапасу. Через це було знищено декілька великих британських кораблів і ні одного німецького: у тих артилерійські погреби на відміну від британських були розташовані більш захищено. Крім того, дослідники врахували краще вміння стріляти німців. Хоча вони вистрілили в півтора рази менше снарядів, кількість попадань по головному калібру у них було однаковим з англійцями, багато кораблів з них взагалі не змогли ні одного разу потрапити в супротивника.

Виходячи з підсумків моделювання можливих варіантів Ютландського битви автори вважають, що рішення адмірала Джелліко, який керував британцями, були в більш розумні. Він уникав зіткнення з німцями до тих пір, поки не зміг обрушити на них вогонь всього британського флоту одночасно. В результаті цього куди більш численні англійські кораблі так і не змогли нанести

серйозного збитку німцям, витративши більшу частину світлого часу доби на маневри. Але, як показують розрахунки, якби Джелліко розпочав бій невеликою кількістю своїх сил, то він ризикував би тим, що німецький флот міг розділити його флот і розгромити по частинах.

Ютландський бій проходив 31 травня 1916 року, сто років назад. У його ході британці мали убитими і полоненими 6,2 тисяч осіб, а німці - лише 2,5 тисячі. Втрати німецького флоту за водотоннажністю були вдвічі меншими англійських, але й вони припадали на найстаріші німецькі кораблі. З 1916 року в англійському флоті прийнято оцінювати дії Джелліко в тій битві як нерішучі. У зв'язку з цим розбити головні сили німців не вдалося і блокада німецького узбережжя так і не була встановлена. Через це німецькі підводні човни могли залишати свої бази і в 1917 році поставили Британію на грань морської блокади, від якої її врятувало лише вступ США у війну на море.[11][9]

1.4.3 Вторгнення в Ірак. Модель Осипова-Ланчестера

На початку 2000-х рр. Ірак відчував негативні наслідки санкцій, а Сирія, з провалом мирного процесу, потребувала нових ресурсів для функціонування свого режиму. Такі ситуація в країнах довела Асада і Саддама до необхідності побудови двосторонніх відносин. Початок роботи не працюючих трубопроводів допомогло Іраку експортувати нафту в Сирію, зрівнявши величезний вплив санкцій на економіку країни. Сирія, користувалась іракською нафтою зі знижкою, продаючи свою за міжнародними цінами і заробляючи на цьому дохід для країни. Сирійські бізнесмени також стали торгувати на іракському ринку, що призвело до невдоволення США, які намагаються ізолювати Ірак.

Вторгнення відбулося 20 березня 2003 року і відбувалося більше одного місяця, в тому числі 21 днів основних бойових операцій, коли об'єднані сили військ зі Сполучених Штатів, Сполученого Королівства, Австралії та Польщі вторглися до Іраку. Цей початковий етап війни можна сказати, закінчився в травні 2003 року, коли президент США Джордж Буш оголосив «Кінець основних бойових дій», після чого коаліційна адміністрація (CPA) була створена в якості першого з декількох послідовних перехідних урядів, які призведуть до

перших іракських парламентських виборів в січні 2005 року. Військові частини США залишалися в Іраку до виведення в 2011 році.

На початку 2003 року дослідниками, на чолі з автором, була зроблена спроба оцінити результат запланованих військових сил англо-американських проти Іраку. До теперішнього часу англо-американський контингент в зоні Перської затоки нараховував близько 250 тисяч чоловік, при цьому близько 100 тисяч були поза передньої лінії, займаючись технічним обслуговуванням. Військові частини Іраку налічували приблизно 400 тисяч людей регулярної армії та приблизно 500-800 тисяч нерегулярної.

Тому, в якості початкових умов були взяті відповідно 150 і 900 тисяч. Динаміка розвитку зіткнення простежувалася в разі переваги технічного оснащення англо-американських військ в 10, 50 і 100 разів.

При першому варіанті розвитку подій в ході бойових дій альянс буде переможений. Після закінчення 21 дня сумарні втрати англо-американських військових сил будуть більші ніж їхню початкову чисельність, і при цьому втрати іракської армії будуть становити 160 тисяч людей. При 50-кратній технічній перевазі альянсу армія Іраку отримає повну поразку за 80 умовних днів, але при цьому альянс втратить приблизно третину своєї армії. При 100-кратному перевазі доля Іраку буде вирішена за 65 умовних днів, і агресор при цьому втратить 28 тисяч осіб. При 36-кратному перевазі сил альянсу обидві сторони знищать один одного повністю.

В дійсності зменшення армії до нуля неможливо, тому що набагато раніше вона перестане існувати як одна система. За оцінками різних експертів, найменша кількість військ коливається від 50 до 25% від початкової. Тому частіше перемагає не та країна, що перша повністю знищить противника, а та, яка перша принесе противнику «неприпустимий збиток». На відміну від чисельності військ, ця величина змінна і залежить від багатьох складових, але в першу чергу від того, яку «ціну» готовий заплатити країна для досягнення своїх цілей в конфлікті.

Під час переговорів між СРСР і США про зменшення озброєнь, вперше було застосовано термін «неприйнятний збиток», як база стабільності при

ядерному паритеті. І можливість кожної з держав завдати «неприйнятної збитку» визначала мінімально можлива кількість ядерних зарядів, тобто за поняттям неприйнятної збитку криється та найменша чисельність економічного і військового потенціалу, при якій відбувається неможливим продовження конфлікту. У реальних бойових діях «неприпустимий збиток», звичайно ж, буде менше «неприйнятної», тому що в останньому прикладі порушується сама ідея існування країни як такої і, зрозуміло, її мешканці підуть на більш тяжкі втрати, ніж в разі коли відбувається захист якихось корпоративних інтересів в різних куточках земної кулі.

Тому для країни-агресора та для країни-жертви рівень неприпустимої шкоди можуть істотно відрізнятися. Наприклад, по досвіду агресії США в Сомалі, навіть незважаючи на те, що втрати сомалійських військових частин набагато перевищували втрати американської армії. Ще однією умовою закінчення військових дій може бути нанесення неприпустимої шкоди в інфраструктурі. Так, Сербія, зберігши боєздатну армію, яка зазнала не занадто невеликих втрат, оголосила себе переможеною, тому що НАТО повністю зруйнувати сербську інфраструктуру. Таким чином, умовою припинення конфлікту буде нанесення неприпустимої шкоди в інфраструктурі.

Розділ 2.

2.1 Математична модель прогнозування війни Л. Річардсона

Праця Річардсона була невідомою протягом цілого ряду десятиліть. Її друге народження настало тоді, коли в кінці 50-х років її знайшла і стала рекламувати група американських соціологів. До початку 70-х років модель була випробувана вже сотні раз на самих різних варіантах гонки озброєнь. І модель працювала, хоча, звичайно не ідеально, так як не в стані була охопити весь складний комплекс причин гонки озброєнь. Однак, у випадках короткотермінових прогнозів модель Річардсона в цілому ефективна.

Льюїс Річардсон служив на фронті Першої світової війни санітаром. Він був вражений розмірами побачених там руйнувань та насилля. Володіючи значним багажем математичних знань, він вирішив застосувати їх до вивчення феномена війни. Річардсон зробив припущення, що сучасним йому війнам (в тому числі і Першій світовій) передують гонка озброєнь, тому він звернувся до розгляду цього явища, щоб зрозуміти, як і яка гонка озброєнь призводить до виникнення війни. Після довгого аналізу гонок озброєнь Річардсон описав хід цього процесу наступним чином.

Держава X відчуває загрозу зі сторони держави Y. І чим більшою кількістю озброєння буде володіти Y, тим більше озброєнь захоче мати X у відповідь на загрозу. Але водночас в держави X є певні витрати; тобто актуальні соціальні задачі, які державі X потрібно вирішити і через які вона не може перевести всю свою економіку на рейки військового виробництва. Отже, чим більшою кількістю озброєння володіє X, тим менше додаткових озброєнь воно може придбати. Існують також минулі образи, що впливають на загальний рівень озброєння. (Та ж логіка діє і по відношенню до держави Y).

Таким чином, мають місце 3 припущення:

- 1) Кожна країна змінює швидкість росту (зменшення/ збільшення) озброєння пропорційна рівню витрат іншої сторони.
- 2) Чим більший рівень витрат на оборону, тим менша швидкість їх росту (від'ємний обернений зв'язок)
- 3) Держава нарощує озброєння, керуючись своїми державними претензіями і ворожістю до інших країн, навіть якщо країни не загрожують її існуванню.

2.1.1 Постановка завдання

У своїх роботах Л. Річардсон приходиться до системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ay - mx + r, \\ \frac{dy}{dt} = bx - ny + s, \end{cases} \quad (16)$$

Де $x(t)$ і $y(t)$ - витрати на озброєння однієї й іншої країни відповідно. Позитивні константи a і b регулюють реакцію однієї країни на озброєність країни-опонента, члени ay і bx обумовлюють цілісність моделі, пов'язують між собою два рівняння. Константи m і n задають обмеження зростання озброєнь: чим більше в країні військових витрат, тим сильніше невдоволення населення; члени mx і ny не дають країнам нарощувати озброєння нескінченно. Параметри r і s характеризують «державний домагання», «Агресивність» або «експансіонізмом» кожної з країн, що стимулюють або скорочують військові витрати. Параметри r і s задаються дослідником, інші параметри є розв'язком системи (16) і являють собою матрицю $\begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix}$ яка і характеризує структуру моделі.[23, 25]

2.1.2 Рішення завдання оптимального розподілу

Існує достатня велика кількість математичних методів дослідження такої матриці, особливе місце серед яких займає аналіз власних значень і власних векторів. Таким чином, динамічна стабільність системи (стійкість системи в часі) визначається не конкретним показником, а характером зв'язку між траєкторії руху елементів системи в часі. Розв'язком системи є функції $x(t)$ і $y(t)$, що визначаються для даних початкових умов озброєнь x_0, y_0 (Початковий стан гонки)

Одним з найважливіших властивостей, які «розумно» вимагати від гонки озброєнь, є стабільність. Формалізуємо цю вимогу в такий спосіб. Рівень витрат на озброєння повинен бути постійним і НЕ залежить від часу:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0, \quad (17)$$

тобто бажано, щоб система перебувала в стані рівноваги .

Умови рівноваги для системи записуються в наступному вигляді:

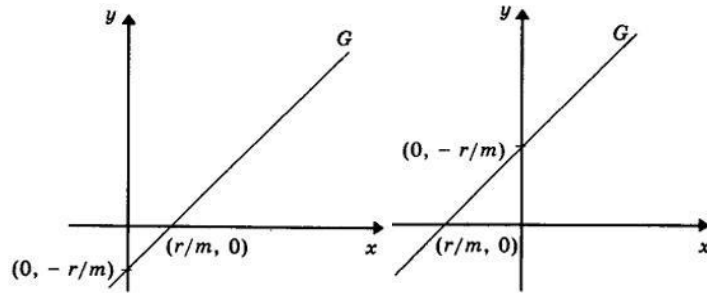
$$\begin{cases} ay - mx + r = 0, \\ bx - ny + s = 0, \end{cases} \quad (18)$$

З цього визначимо:

$$y = \frac{m}{a}x - \frac{r}{a},$$

$$y = \frac{b}{n}x + \frac{s}{n},$$
(19)

і розглянемо геометричну інтерпретацію лінійного рівняння на фазовій площині (x, y) .



a – при $r > 0$, b – при $r < 0$

Рис. 2. Геометрична інтерпретація рівняння

Для всіх точок прямої G маємо dx/dt . Перше рівняння системи задає горизонтальну компоненту швидкості руху точки в фазовій площині, а друге рівняння - вертикальну. Якщо в деякій точці фазової площини $dx/dt > 0$ зростає і рішення системи рухається від цієї точки вправо, а якщо $dx/dt < 0$, то ліво. Аналогічно, якщо $dy/dt > 0$, то точка рухається вгору (вниз). Пряма G ділить площину (x, y) на дві півплощини. Для всіх точок одній півплощині $dx/dt > 0$, а інший на півплощині $dx/dt < 0$ є перше рівняння системи як би змушує точки притягатися по горизонталі до прямої G . Аналогічне твердження вірне для другого рівняння цієї системи і прямої Z (вертикальне тяжіння). Прямі G і Z ділять перший квадрант на чотири області I, II, III, IV.

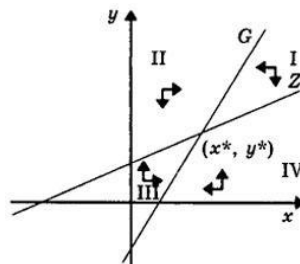


Рис. 3. Точка рівноваги в першому квадраті

Розглянемо поведінку моделі Річардсона при t . Можливі три варіанти:

1. Нескінченна гонка озброєнь: $x \rightarrow \infty$ і $y \rightarrow \infty$.
2. Взаємне роззброєння: $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.
3. Рівновага озброєнь: $x \rightarrow x^*$, $y \rightarrow y^*$, Де $x^*, y^* > 0$. Точка рівноваги (x^*, y^*) знаходиться на перетині прямих G і Z .

Легко показати, що якщо $r > 0$ і $s > 0$, то точка перетину G і Z лежить в першому або третьому квадранті. Стрілки на малюнках показують горизонтальну і вертикальну складові руху точки, що знаходиться в той чи іншій області фазової площини.

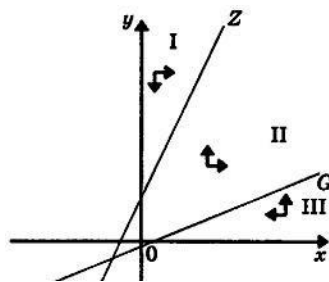


Рис. 4. Точка рівноваги в третьому квадранті

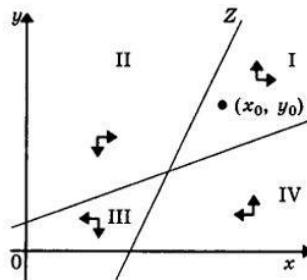


Рис. 5. Поведінка системи при $r < 0$ або $(i) s < 0$

горизонтальну і вертикальну складові руху точки, що знаходиться в той чи іншій області фазової площини.

Сильні і слабкі сторони моделі Річардсона

Сильні сторони	Слабкі сторони
----------------	----------------

Враховується взаємо орієнтованість витрат на озброєння кожної зі сторін	Не береться до уваги різний рівень технологічного розвитку і розвиток технологій загалом
Робиться акцент на зв'язку між рівнем витрат на озброєння і темпами росту, тобто враховується відносна вичерпність ресурсів	Залишаються поза увагою потенціали сил (політичні, духовні, інтелектуальні) протиборчих сторін і можливість долучення союзників.
Ефективність моделі для короткострокових прогнозів	Тиск суспільної думки, підтримка/несхвалення у ЗМІ упущені в даній моделі
Модель спрацьовує: в кінці 70-тих років ХХ століття М. Уоллес звернув увагу на те, що з 28 серйозних міжнародних конфліктів, що супроводжувалися нестабільною гонкою озброєнь в період з 1816 по 1965 рік, 23 конфлікти (тобто 82%) закінчились війною. А з 71 конфлікту, що супроводжувалися стабільною гонкою, тільки 3 перейшли у війну.	Складність отримання даних для констант, що використовуються в моделі. Існує можливість використання викривленої інформації.

2.1.3 Приклади використання математичних моделей прогнозування війни Л. Річардсона

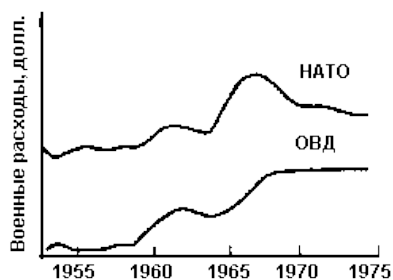
В кінці 70-х років Майкл Уоллес виявив, що нестабільність гонки озброєнь тісно корелює з війною. Використовуючи дещо складніше, проте, засноване на Річардсоной моделі визначення гонки озброєнь, Уоллес виявив, що з 28 серйозних міжнародних конфліктів, що супроводжувалися гонкою озброєнь в

період з 1816 по 1965 р, цілих 23 завершилися війною. А з 71 конфлікту, не залучаються гонки озброєнь, тільки три перейшли у війну.

В 1976 р. У. Ледд Холліст, спираючись на модель Річардсона і дані Міжнародного Інституту Мирних Досліджень в Стокгольмі (SIPRI) про воєнні витрати, побачив чотири випадки гонки озброєнь. Це гонки між СРСР і США, між Індією та Пакистаном, між Іраном та Іраком, а також між Ізраїлем та Єгиптом в період з 1948 по 1973 р. З чотирьох випадків стабільною була лише гонка СРСР - США, яка, не перейшла у війну, як і передбачувала модель. Гонки Індія - Пакистан і Ізраїль - Єгипет, будучи по суті нестабільними, закінчилися війною, як і передбачувала модель; а ось між Іраном та Іраком велась нестабільна гонка озброєнь, але війни не було. Ця нестиковка вирішилась в 1980 р., через чотири роки після публікації статті Холліста, коли затяжний конфлікт між Іраном та Іраком перейшов у війну.

Таким чином, математична модель Річардсона передбачає виникнення війни між державами, коли їй передувала нестабільна гонка озброєнь (виходячи з аналізу цієї гонки).

Однією з найважливіших характеристик моделі Річардсона є стабільність. У найпростіших формі стабільність визначається тим, якими - Прискореними або уповільненим - темпами розвивається гонка озброєнь. На мал.6 показані два приклади гонки озброєнь: стабільною гонки озброєнь між країнами НАТО і ОВД і нестабільної між Іраном і Іраком; на обох схемах розміри військових витрат Наведено згідно з даними Щорічників Міжнародного інституту мирних досліджень в Стокгольмі (SIPRI). У разі нестабільної гонки озброєнь, проблема запобігання війни була, звичайно, тим головним стимулом, Який з самого початку підштовхнув Річардсона до його розробок. Виявилось, що його модель вміє дуже добре передбачати війну, оскільки майже всім сучасним війнам передує нестабільна гонка озброєнь. Річардсон стверджував це в своїй основоположним роботі, а Згодом це було підтверджено іншими, більш систематично дослідженнями.



(а) стабільна гонка озброєнь



(б) нестабільна гонка озброєнь

Рис.6 Приклади гонки озброєнь

3. Розділ

3.1 Побудова математичної моделі ймовірних дій на сході України використовуючи модель Ланчестера

Практичне завдання буде виконуватися за допомогою розрахунків в таблиці. Створено таблицю з водними даними та графіком. Працювати будемо модель Ланчестера, та варіації

Модель Ланчестера вивчає дві воюючі сторони, які можна позначити через $x(t)$ і $y(t)$, що представляють собою функцію, яка описує чисельність військ першої (другої) сторони в момент часу $t > 0$. Швидкість зміни чисельності військ кожної зі сторін визначається трьома факторами :

- операційними втратами (пропорційними чисельності своїх військ);
- бойовими втратами (пропорційними чисельності військ противника);
- введенням резервів .

Математичний опис моделі «звичайної битви» виглядає наступним чином

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -ax(t) - by(t) + P(t), \\ \dot{y}(t) &= -cx(t) - dy(t) + Q(t). \end{aligned} \quad (20)$$

де a, b, c і d - позитивні константи; $P(t)$ і $Q(t)$ - темпи введення резервів.

Спочатку саме «звичайної битви» і будемо розглядати. Вхідні данні для моделі, $x(t)$ і $y(t)$ - чисельність військ першої (другої) армії; t - час; a і c - позитивна константа втрати; b і d - бойова ефективність; $u(t)$ і $v(t)$ - темпи введення резервів. Розглянемо реалізацію даної моделі в електронних таблицях.

Попередньо заповнюємо електронну таблицю вихідних даних і вносимо розрахункові формули.

$$=-\$F\$1*C2-\$F\$2*B2+\$F\$3+B2$$

$$=-\$F\$4*B2-\$F\$5*C2+\$F\$6+C2$$

=-\$F\$1*C2-\$F\$2*B2+\$F\$3+B2						
A	B	C	D	E	F	G
	КР	СН		a	0,3	Ефективність армії КР
0	2000	2000		c	0,001	Темпи небойових втрат
1	1498	2000		P	100	Ввід резервів
2	996,502	1349		b	0,5	Ефективність армії СН
3	690,805498	949,4		d	0,001	Темпи небойових втрат
4	505,2946925	703,047851		Q	100	Ввід резервів

Рис.7

Промоделювати бойові дії на часовому проміжку $t = 1, \dots, 20$ для наступних значень параметрів:

a	0,2	Ефективність армії КР
c	0,1	Темпи небойових втрат
P	100	Ввід резервів
b	0,2	Ефективність армії СН
d	0,1	Темпи небойових втрат
Q	300	Ввід резервів

Початкові $x(t)$ і $y(t)$ по 2000, Темпи небойових втрат та Ввід резервів однакові, різні лише ефективність армій.

Далі маркіруємо дані зі стовпців А, В, С і будуємо діаграму. Маркіруючи дані зі стовпців В, С і будуємо фазову траєкторію.

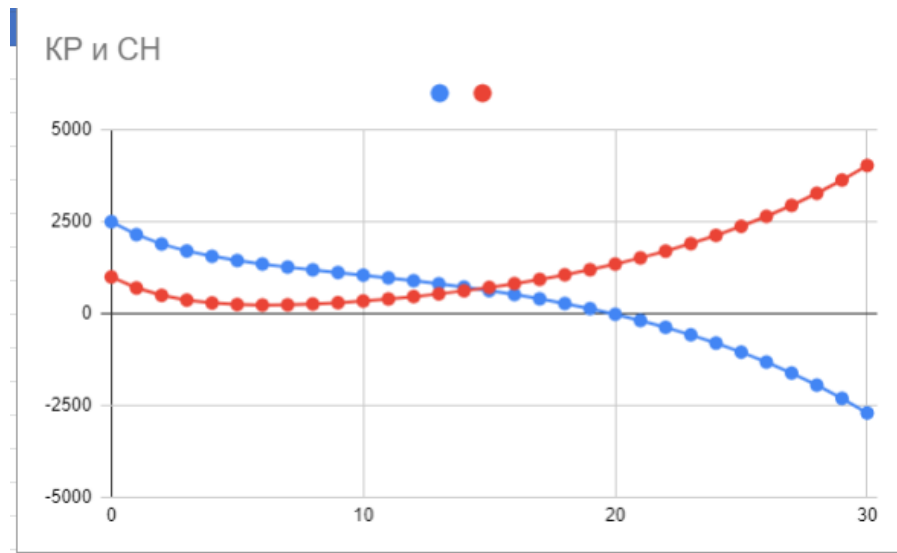


Рис.21

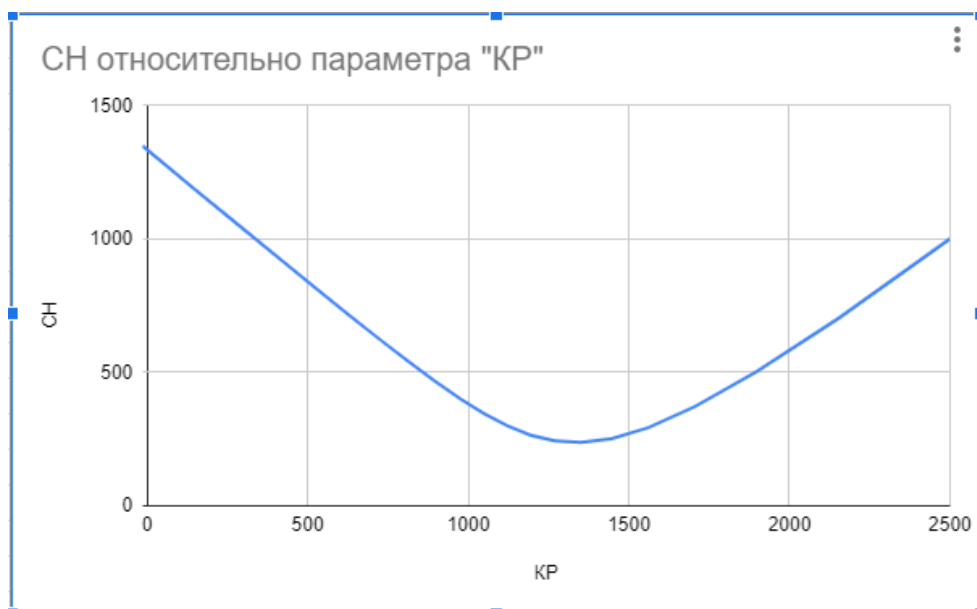


Рис.22

Як можна побачити Армія «червоних» не дивлячись на критичне становище при $t = 6$ (її чисельність в цей момент приймає найменше значення і становить всього 18% від чисельності «синіх») перемагає армія «червоних» в кінцевому підсумку здобуває перемогу на 20-му кроці.[10]

Задача 2

Спробуймо змоделювати реальну воєнну модель. Візьмемо воєнний конфлікт на сході України, за основу будемо брати дані з відкритих даних.

Чисельність армії ДНР приблизна 30000, враховуючи підкріплення приблизно 2000 за одиницю часу. Чисельність сил України які брали участь в пік моменту складала 60000-65000, візьмемо 62500. Підкріплення поки не будемо враховувати але воєнну ефективність буде більша в 2 рази ніж у боєвиків, небойові втрати при цьому рівні

Таблиця даних вийшла такою:

a	0,1	Ефективність армії КР
c	0,001	Темпи небойових втрат
P	0	Ввід резервів
b	0,2	Ефективність армії СН
d	0,001	Темпи небойових втрат
Q	2000	Ввід резервів

Результат ми отримали такий:

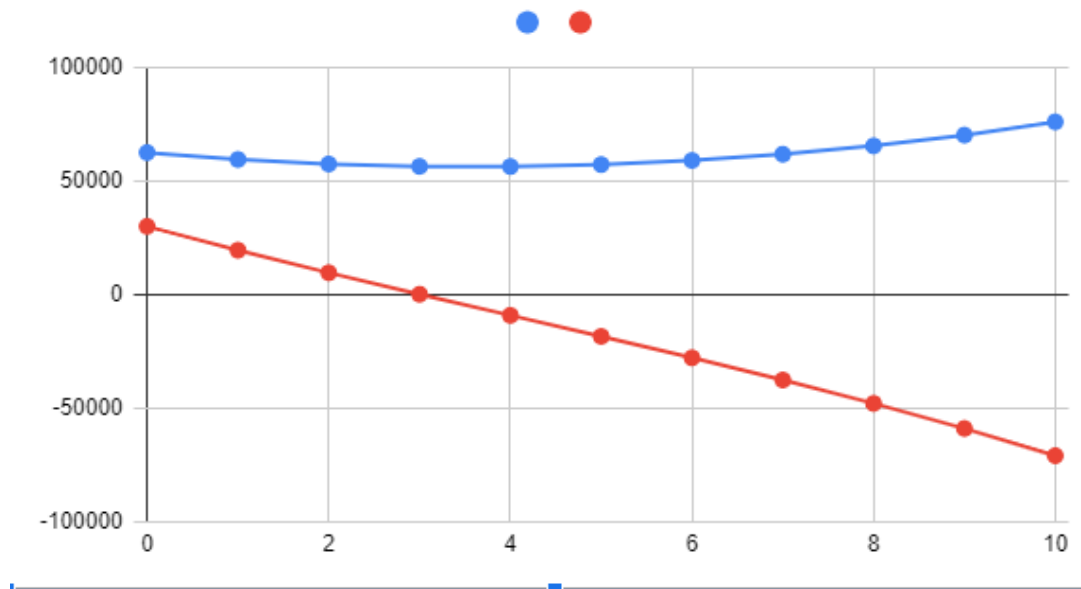


Рис. 23

КР відносно СН

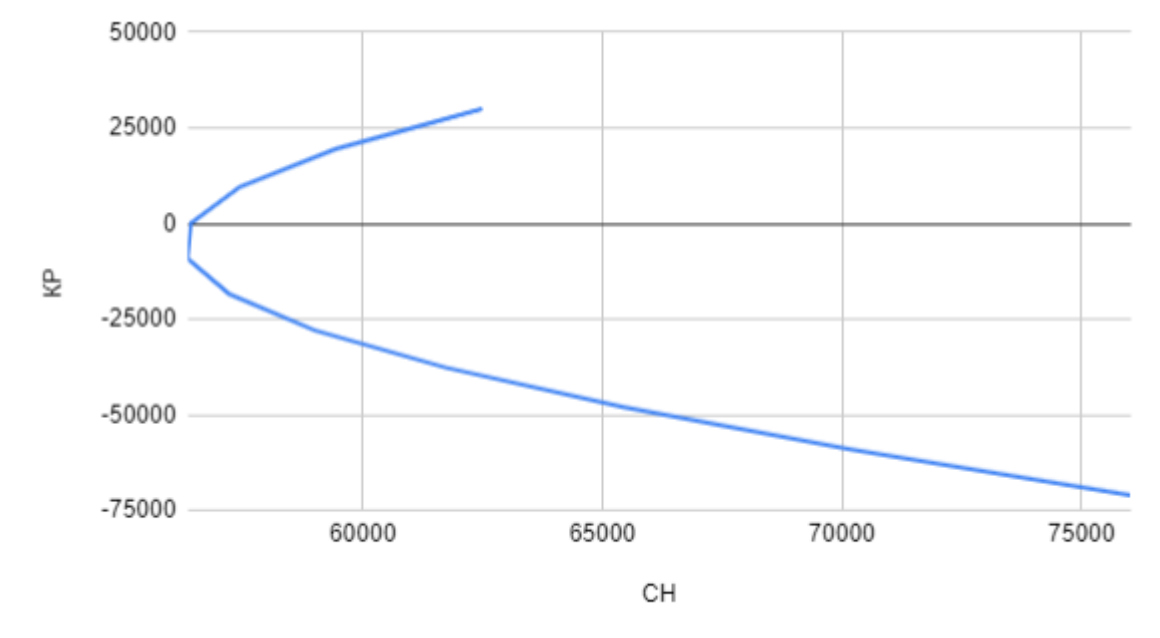


Рис. 24

Як видно перемога армії України вже на 3 кроці, це найкращий варіант подій для ЗСУ. Якщо враховувати допомогу Росії, то чисельність збільшується на 15тисяч і бойова ефективність 0.05.

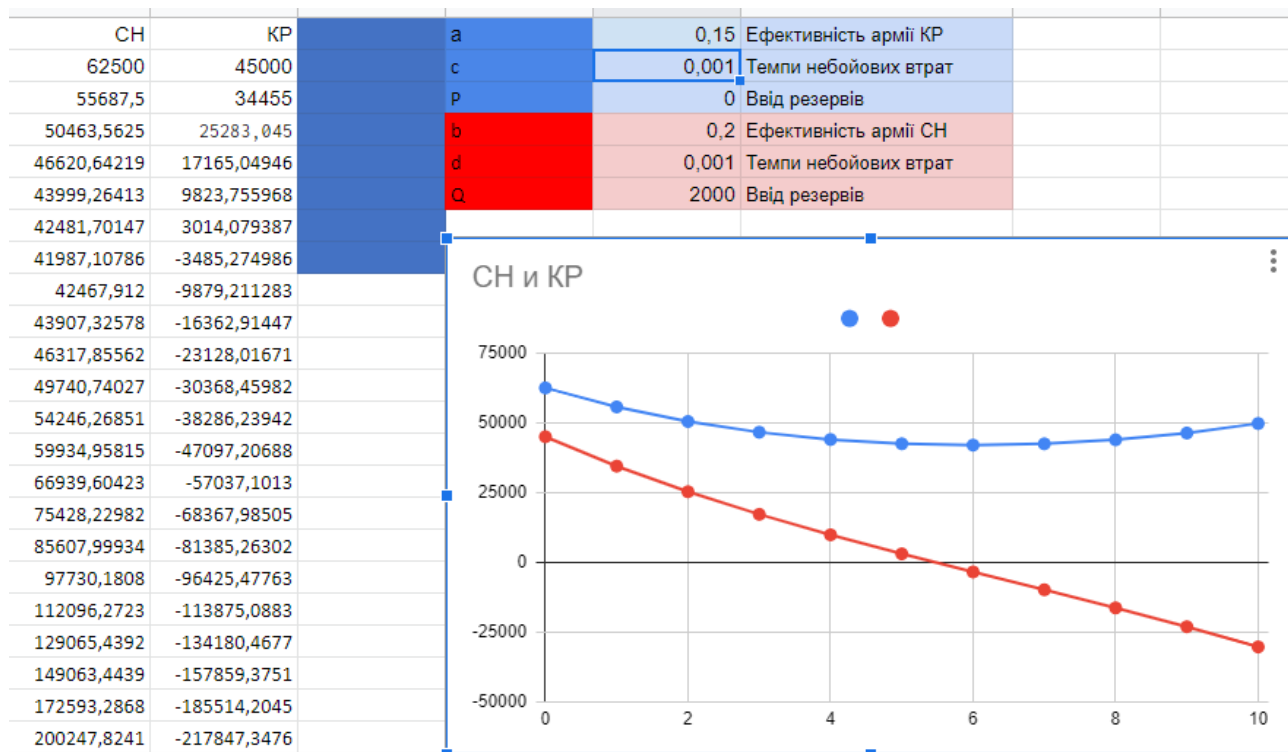


Рис.25

Тоді ЗСУ перемагає на сьомому кроці з втратами близько 20000. Є ще третій варіант коли в один момент Росія вводить свої війська чисельність 50000 але з затримкою в 2 кроки. Ефективність буде однаковою.

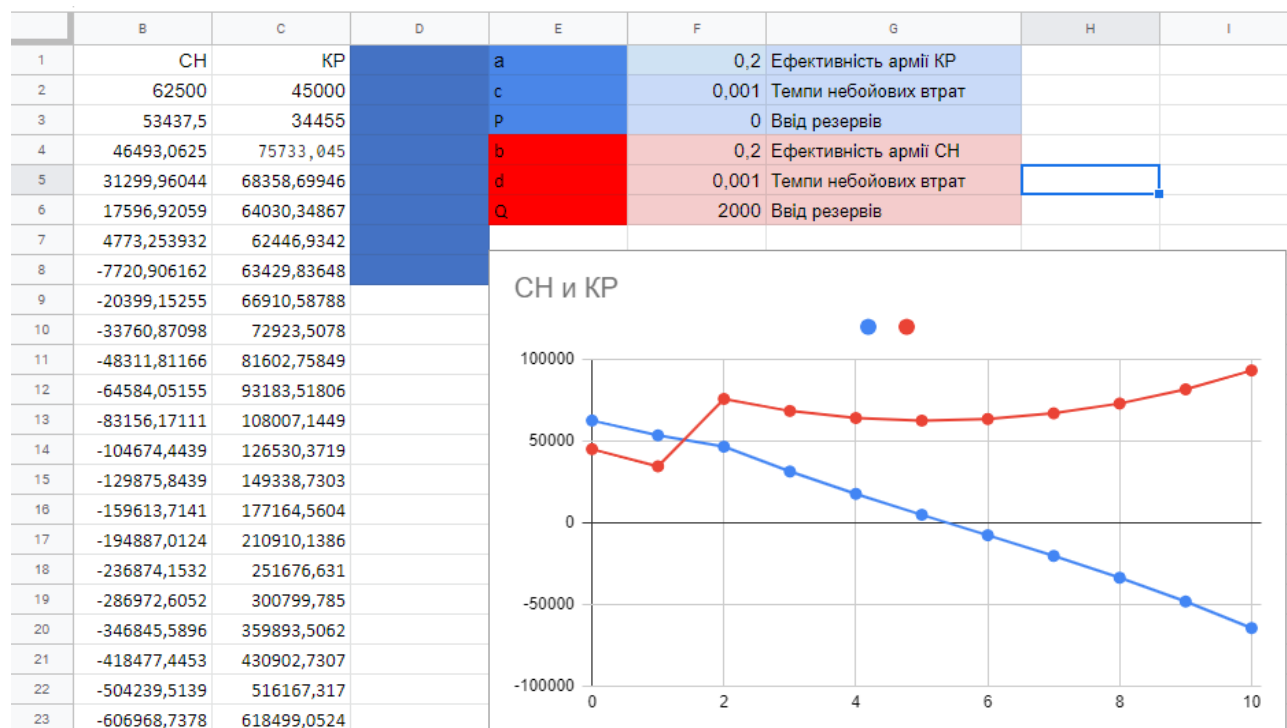


Рис.26

Вже на 8 кроці ЗСУ зазнає поразку. Якщо враховувати мобілізацію військ, підкріплення +10000.

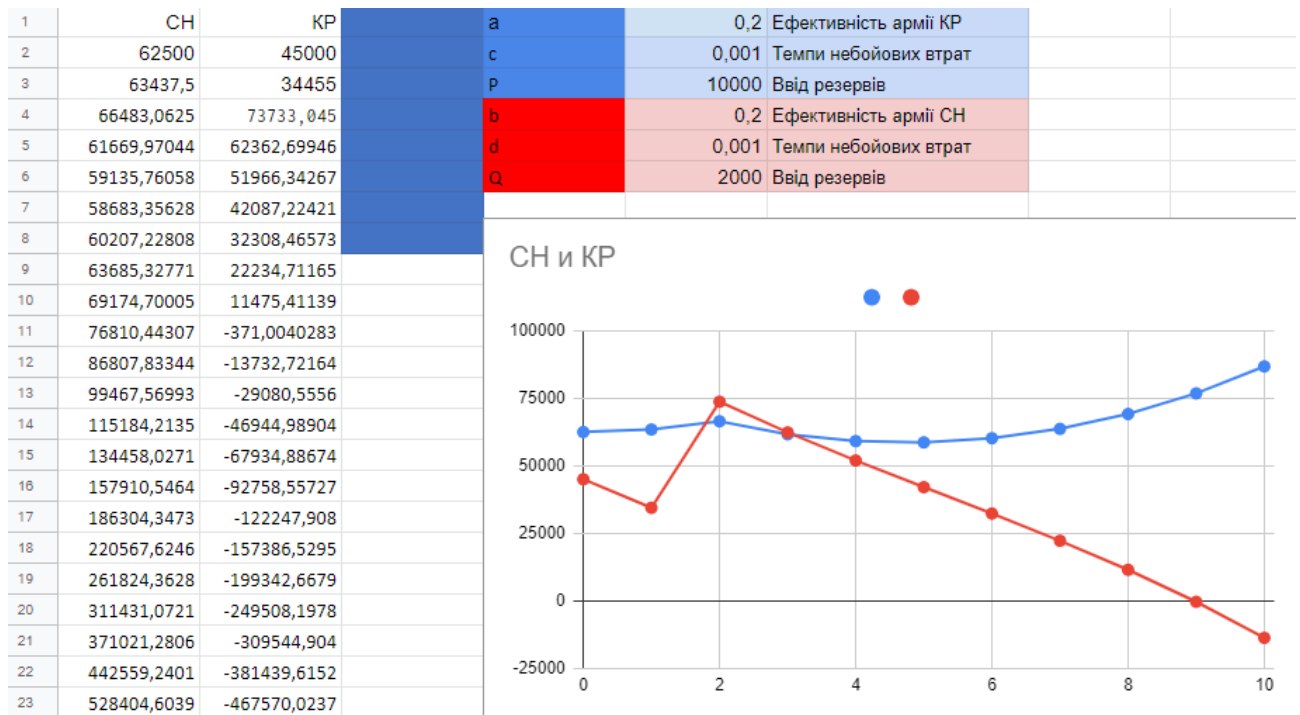


Рис.27

Данні на зображені, і на 10 кроці всі війська противника знищені. При врахуванні більшої кількості критеріїв, таких як кількість артилерії, авіація, танки, БТР, мотивованість, резервна база, і так далі можна прорахувати більш точно. Военні експерти кажуть приблизно такі ж данні, без підтримки Росії, Україна може перемогти за декілька днів.

3.2 Побудова фазових портретів в Maple

Для побудови фазових портретів будемо використовувати Maple та пакет DEtools. Спочатку загрузимо цей пакет і перезапустимо систему.

```
restart; with(DEtools)
```

Спочатко розглянемо найпростіший випадок відсутності операційних втрат і резервів, коли вихідні формули наводяться до представлених нижче.

$$\dot{x}(t) = -by(t), \quad \dot{y}(t) = -cx(t)$$

Тобто c і d ; $u(t)$ і $v(t)$ відсутні і не враховуються.

Задамо систему

```
sys := diff(x(t), t) = -y(t),
```

```
diff(y(t), t) = -x(t)
```

За допомогою phaseportrait задамо фазовий портрет[7]

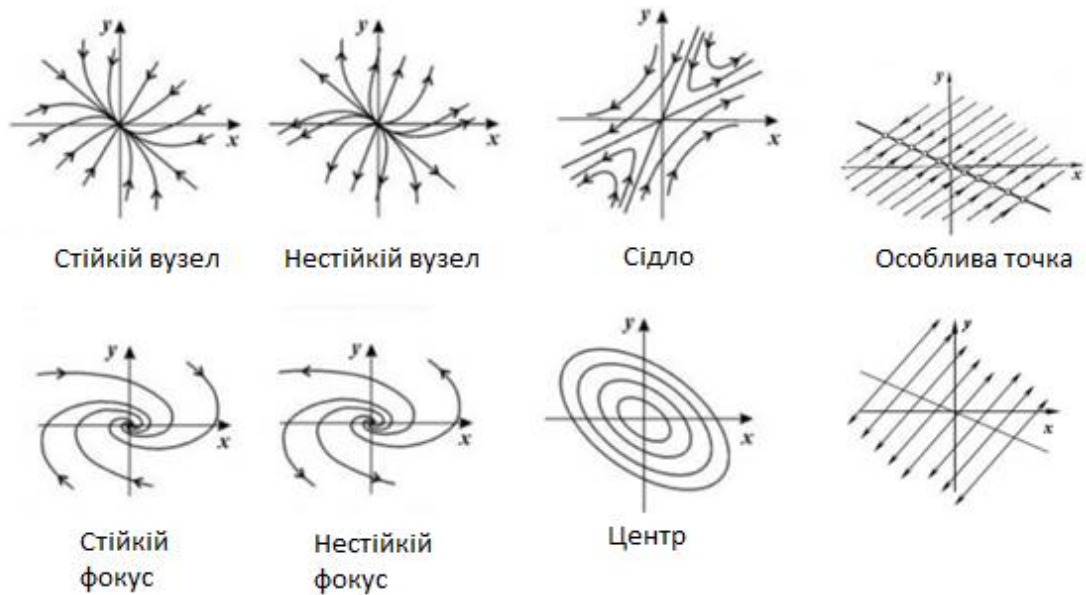


Рис. 28

В нас буде стійкий вузел як на малюнку. Задаємо програмний код, що включає розміри, колір, лінії портрету(сили сторін).

```
phaseportrait([sys], [x(t), y(t)], t = -100 .. 100, [[0, 1000, 800], [0, 100, 80], [0, 800, 1000], [0, 800, 800]], x = 0 .. 2000, y = 1 .. 2000, stepsize = .1, colour = blue, linecolor = black)
```

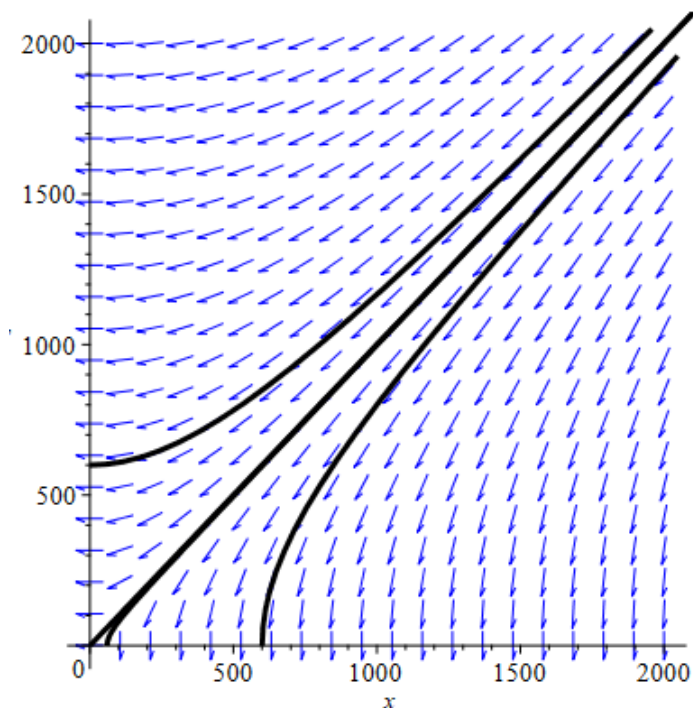


Рис.29

Можно змінювати константу що стоїть перед виразом що збільшую бойову ефективність обох сторін, так зробимо одну зі сторін в 3 рази сильнішою. Тоді фазовий портрет буде виглядати так:

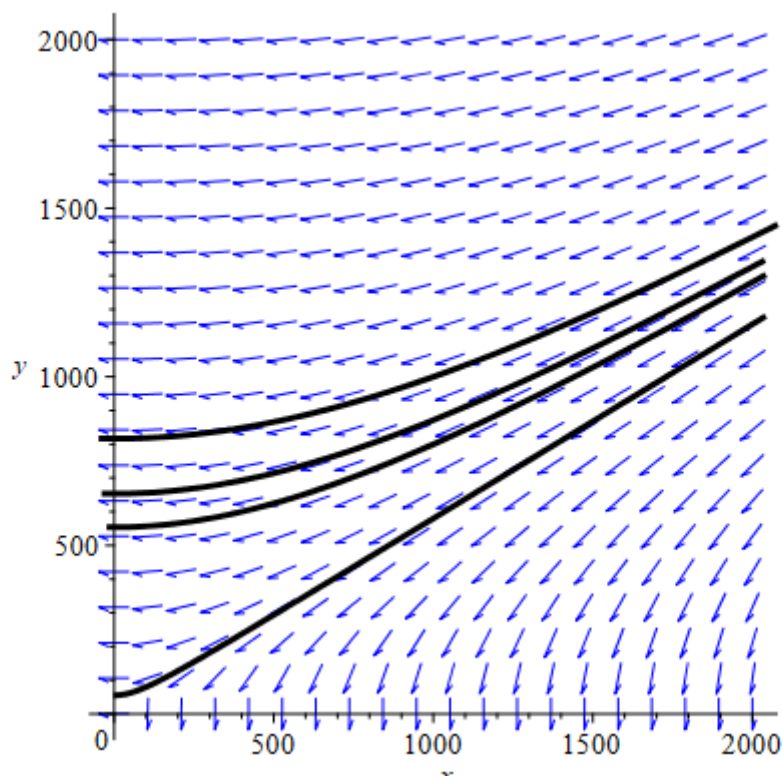


Рис.30

Є можливість відслідкувати при яких силах яка сторона перемагає. Тепер запишемо стандартний вид системи.

```

sys :=
diff(x(t), t) = -0.6·y(t) - 0.03·x(t) + 10,
diff(y(t), t) = -0.2·x(t) - 0.01·y(t) + 1

```

$$sys := \frac{d}{dt} x(t) = -0.6y(t) - 0.03x(t) + 10, \frac{d}{dt} y(t) = -0.2x(t) - 0.01y(t) + 1$$

```

phaseportrait([sys], [x(t), y(t)], t=-100..100, [[0, 1000, 800], [0, 100, 80], [0, 1000, 1000], [0, 800, 800]], x = 0
..2000, y = 1..2000, stepsize = .1, colour = blue, linecolor = black);

```

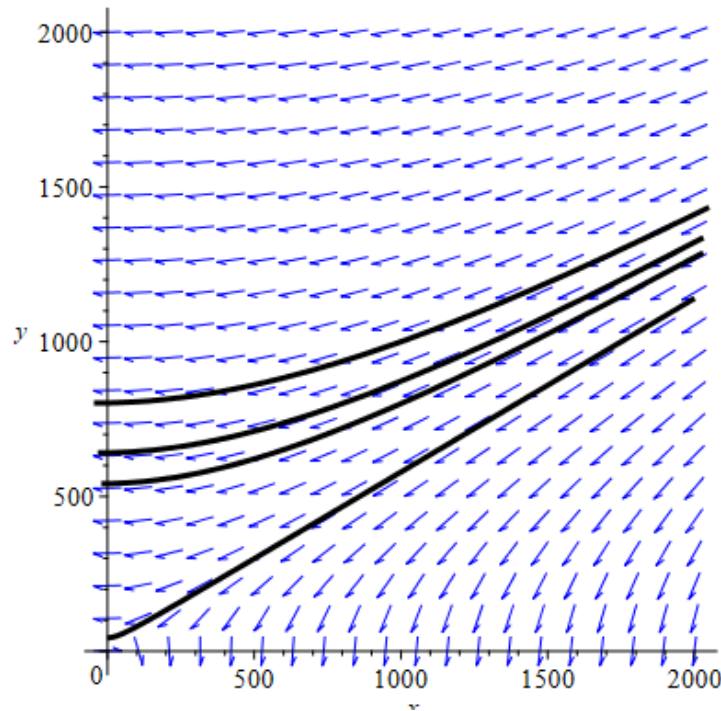


Рис. 31.

Так міняючи коефіцієнти і початкову кількість солдат можна будувати фазові портети і прораховувати перемоги однієї чи іншої сторони.

Розглянемо тепер модель партизанської війни та змішаної. Моделі відрізняються урахуванням бойових втрат: в битві кожна сторона в одиницю часу знищує число противників, пропорційне свої чисельності. Коефіцієнти b і c , звані коефіцієнтами бойової ефективності, можуть вимірюватися як число пострілів, вироблене одними в одиницю часу, помножене на ймовірність ураження одним пострілом одного супротивника.

Партизанський тип:

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - gx(t)y(t) + P(t)$$

$$\dot{y}(t) = -dx(t) - hx(t)y(t) + Q(t)$$

Що ж стосується систем цього типу, то тут члени вже є нелінійними і пояснюється це наступним. Нехай бойові сили партизан чисельністю $x(t)$ люди займають деяку територію, залишаючись невидимими для противника. І хоча противник тримає під вогнем територію, він не може знати ефективності своїх дій. При цьому вельми правдоподібно, що втрати партизанських підрозділів x пропорціональні, з Одного боку, числу $x(t)$, а з іншого - числу $y(t)$ бойових сил противника. Таким чином, член, який відповідає втратам партизанських з'єднань x , має вигляд $-gt(t)y(t)$ де коефіцієнт ефекності бойових дій сторони y , взагалі кажучи, більш важкий для оцінки, ніж коефіцієнт в першій рівності.

```
sys :=
diff(x(t), t) = -0.6 * y(t) - 0.003 * x(t) * y(t) + 10,
diff(y(t), t) = -0.2 * x(t) - 0.001 * y(t) * x(t) + 1
```

$$sys := \frac{d}{dt} x(t) = -0.6y(t) - 0.003x(t)y(t) + 10, \frac{d}{dt} y(t) = -0.2x(t) - 0.001x(t)y(t) + 1$$

```
phaseportrait([sys], [x(t), y(t)], t=-100..100, [[0, 1000, 800], [0, 100, 80], [0, 1000, 1000], [0, 800, 800]], x=0
..2000, y=1..2000, stepsize=.1, colour=blue, linecolor=black);
```

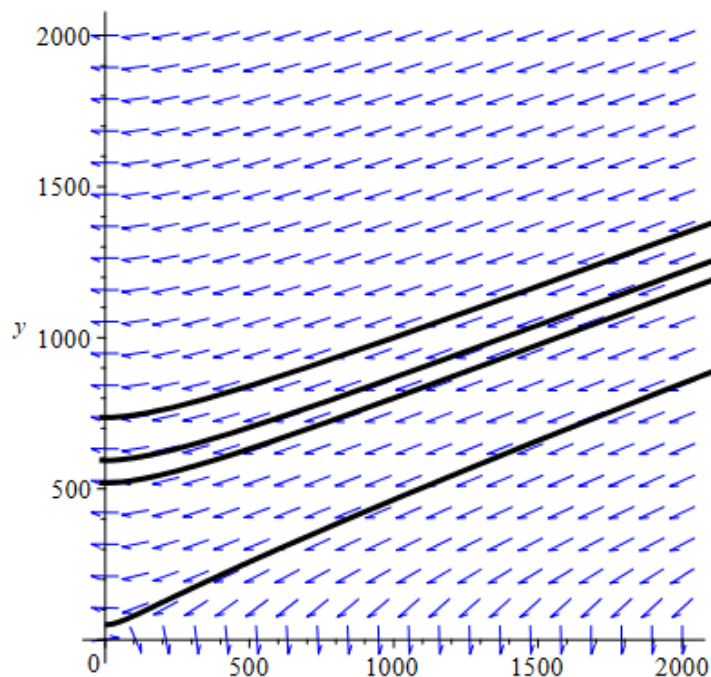


Рис.32

І розглянемо третій тип змішаний, коли регулярні війська воюють проти партизанів. Головна відмінність в тому, що нерегулярні з'єднання в порівнянні з

армійськими менш уразливі, так як діють приховано, часто залишаючись невидимими для суперника, які будуть змушений діяти не вибірково, а на площі, які вони займають партизанами. Тому вважається, що темп втрат партизан, які проводять свої операції в різних місцях на деякій відомій території, пропорційний не тільки чисельності армійських з'єднань, але і чисельності самих партизанів. Визначається членом виду:

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - gx(t)y(t) + P(t)$$

$$\dot{y}(t) = -dx(t) - dy(t) + Q(t)$$

Виконуємо програму

```
sys :=
diff(x(t), t) = -0.6*y(t) - 0.003*x(t)y(t) + 5,
diff(y(t), t) = -0.2*x(t) - 0.8*y(t) + 1
```

$$sys := \frac{d}{dt} x(t) = -0.6y(t) - 0.003x(t)y(t) + 5, \frac{d}{dt} y(t) = -0.2x(t) - 0.8y(t) + 1$$

```
{
```

```
phaseportrait([sys], [x(t), y(t)], t=-100..100, [[0, 1000, 800], [0, 100, 80], [0, 1000, 1000], [0, 800, 800]], x = 0
..2000, y = 1..2000, stepsize = .1, colour = blue, linecolor = black);
```

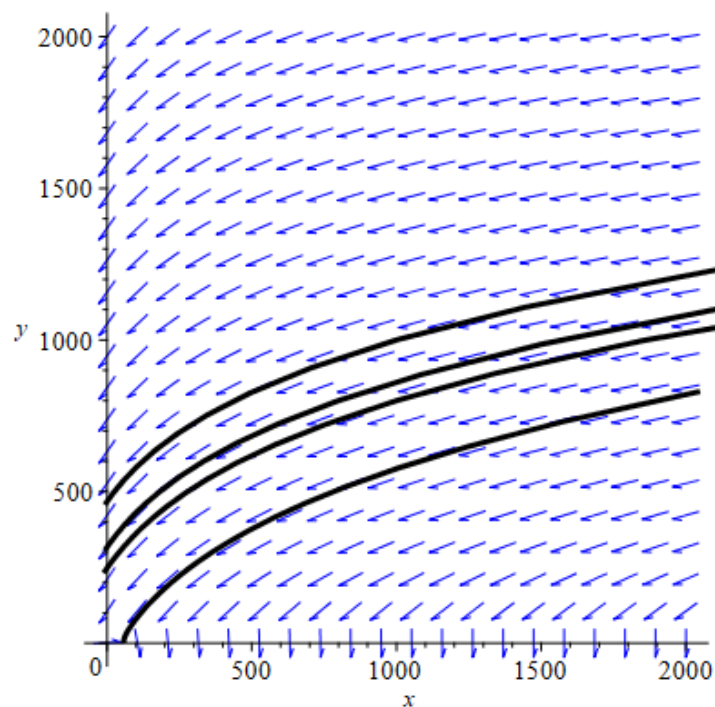


Рис.33

3.3 Дослідження відхилення аргументу t та його вплив на результат в моделі Ланчестера

Для дослідження будемо використовувати побудову графіків по точкам в таблицях. T показує в якій момент часу яка кількість воєних бере участь в конфлікті. Може виникати ситуація коли не одночасно дві сторони починають воювати. Яскравим прикладом є Друга світова війна, коли Німеччина напала на ССРСР і мала перевагу в часі, також це напад Японією на Перл Харбор, коли перші години не було ніяких втрат в однієї сторони а втрати іншої були. Модель Ланчестера вивчає дві воюючі сторони (t) і $y(t)$ де t рахується з одного й того самого моменту. Ми розглянемо для однієї з сторін затримку $t+n$, де $n=1,2,\dots$ в залежності від постановки задачі.

Для прикладу розглянемо задачу коли всі параметри однакові крім початкових, в однієї сторони в 1.5 рази більша початкова чисельність. Графік буде виглядати так.

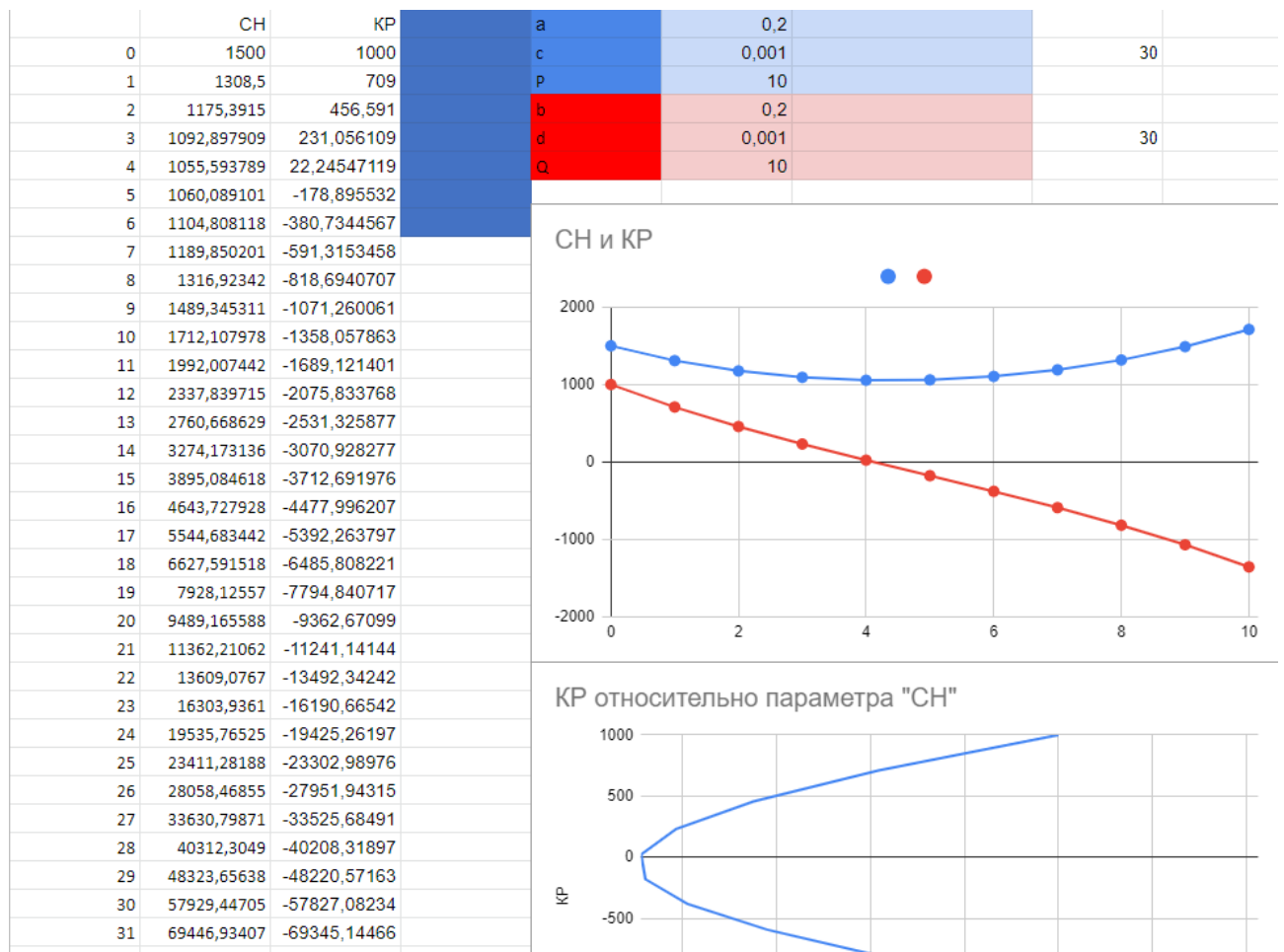


Рис.34

При ситуації коли дві сторони одночасно починають дії то на 5 кроці вже одна сторона перемагає. Можна знайти при якому $t+n$ команда «КР» отримає перемогу іншими словами на скільки неочікуваний напад повинен бути.

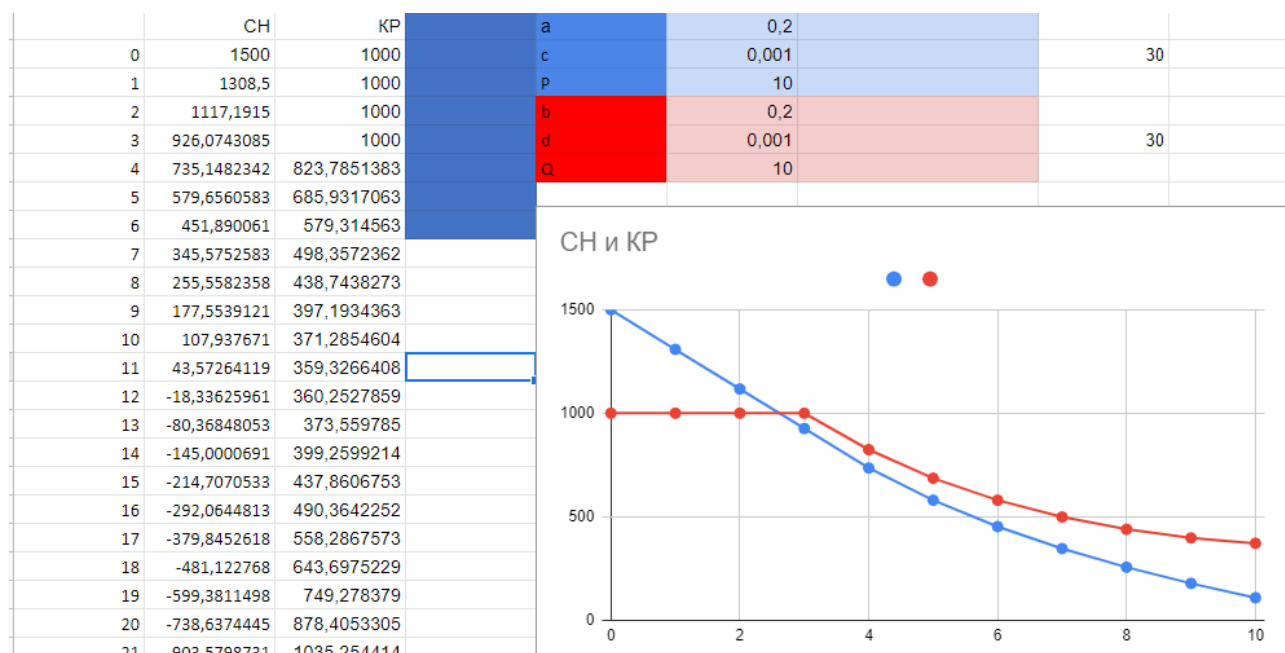


Рис.35

При $n=3$ команда «КР» переймає має меншу перевагу в чисельності. Також потрібно подивитись при яких параметрах a, b, c, d ефект неочікуваності буде найбільш ефективний а в яких немає сенсу. Розглянемо випадки коли коефіцієнти збільшуємо і інший зменшуємо, але залишаємо однаковими для обох сторін.

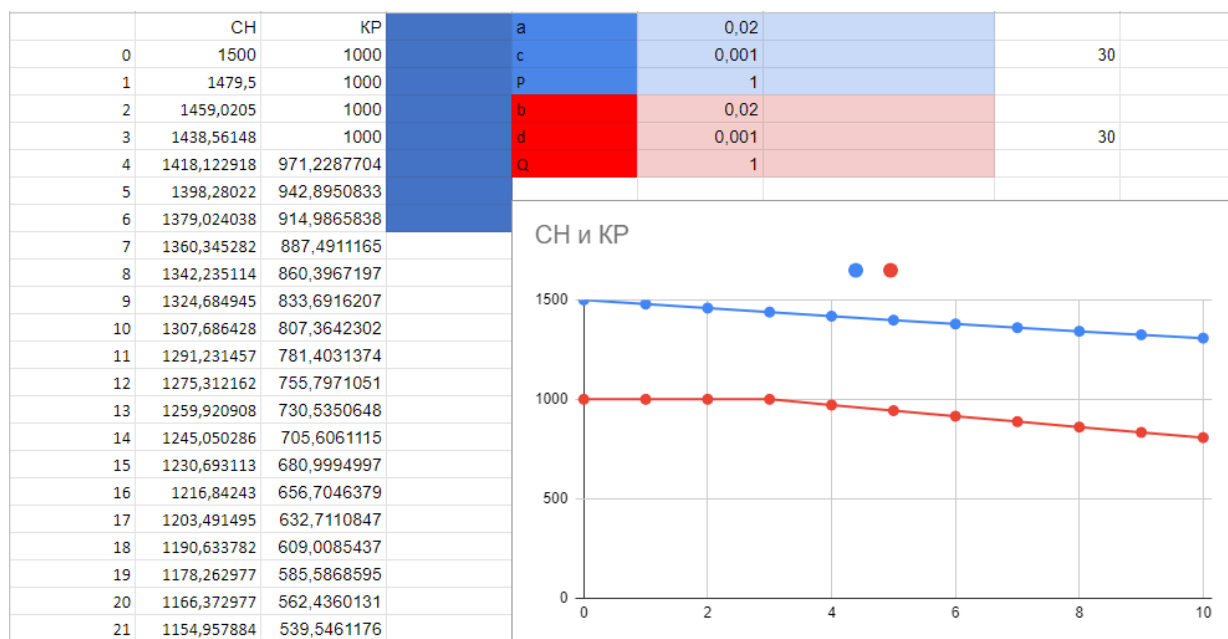


Рис.36

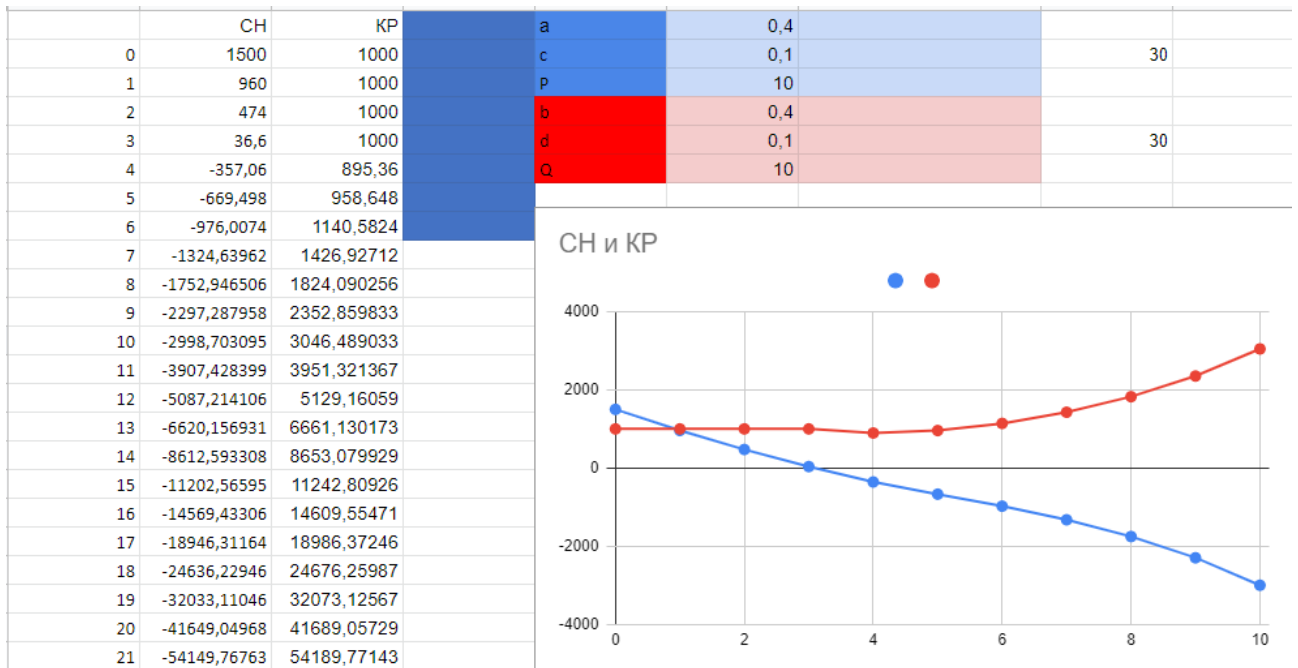


Рис.37

Отримаємо два графіка, по яким можна зрозуміти, чим більша бойова ефективність тим більший ефективний є напад з неочікуваності і навпаки коли бойова ефективність обох сторін є невелика то й користь буде невелика, при значенні в сотих (0.001) то майже повністю втрачається. Цей метод можна використовувати, наприклад, для дослідження нападу на невідготовлені війська і чи є сенс зараз нападати чи краще збільшити бойову ефективність і не враховуючи t розраховувати втрати і перемогу, й дивитись який варіант краще. Також має місце модифікація методу, коли в різні моменти t працюють різні параметри, так одна сторона може покращувати свою ефективність з врахуванням підтримки союзників, а також різні етапи вводу підкрплення, наприклад етапи мобілізації і народна підтримка. Тоді можна водити додаткові параметри $a_n, b_n, c_n, d_n, n = 1, 2 \dots$ де n залежить від етапів війни. Також можна змінити при якомусь t тип воєних дій наприклад на партизанську війну. Все це дозволить більш ефективно розраховувати ситуацію, що може статися, а також розраховувати стратегію на період війни.

3.4 Тенденцій витрати на оборону у протистоянні Росія-Україна (за моделлю гонки озброєнь Річардсона)

У сучасному світі, де вирують глобалізація та інтернаціоналізація, дуже важливою проблемою постають питання війни та миру, а також гонки озброєнь країн, що мають претензії одна до одної. Особливо актуальною на теперішній час ця проблема є для України, оскільки частина нашої країни є окупованою, військовий конфлікт на Сході триває, країна понесла величезні економічні та демографічні збитки. Необхідно проводити дослідження витрат на оборону для прийняття певних політичних рішень.

Моделювання має певні переваги, що дозволяє краще зрозуміти ситуацію та зробити певні висновки. По-перше, модель допомагає формалізувати події, що відбуваються в суспільстві. По-друге, модель дозволяє експліцитно описати фактори та механізми, що пояснюють неформальні прогнози. По-третє, моделі дозволяють оперувати з сутностями більш високого рівня складності, ніж тими що породжує наша інтуїція або словесні описи. Взагалі математика є корисною в якості засобу логічного висновку та систематичного оперування поняттями.

Розглянемо тенденції витрат на оборону у світі. У 2020 році за даними Стокгольмського інституту досліджень війни та миру (SIPRI) світові військові витрати склали майже два трильйони доларів

Найбільше витратили на оборону США, Китай, Саудівська Аравія, Росія та Індія. На ці країни припадає 60% усіх військових витрат. На рис. 1 наведено зміни у світових військових витратах за 1988-2017 роки. Незважаючи на невеликий спад у 2013-2014 рр., військові витрати все ж мають тенденцію до зростання. США залишаються країною-лідером за витратами на оборону і у 2020 році вони склали \$610 млрд. Уже більш ніж 2 десятиліття ми можемо спостерігати за зростанням витрат Китаю, які у 2020 році склали \$228 млрд. У загальному обсязі витрат Китай має частку в 13%. Індія, у свою чергу, витратила \$63,9 млрд. За даними SIPRI, у 2019 році країни світу витратили на оборону \$1686 млрд. Перші місця посідали США, Китай, Росія, Саудівська Аравія та Індія.



Рис. 38. Світові військові витрати

Розглянувши дані сайтів Державної служби статистики України [16] та Федеральної служби статистики Російської Федерації [17], ми проаналізували витрати України та Росії на оборону за 2014-2018 рр. (табл. 1).

Таблиця 3



Витрати України та Росії 2014-2020 рр. (млрд дол.)

Роки	витрати на оборону			
	України(х)	абсолютне відхилення	Росії(у)	абсолютне відхилення
2014	5,5	-	84,5	-
2015	3,06	-2,44	67,0	-17,5
2016	2,329	-0,731	48,4	-18,6
2017	2,451	0,122	66,3	17,9
2018	2,937	0,486	45,69	-20,61
2019	3,657	0,72	44,53	-1,16
2020	4,821	1,164	43,19	-1,34

Таблиця 4

Список країн за військовими витратами за 2020 рік за даними SIPRI Fact Sheet

Місце в 2020	Країна	Витрати, млрд \$	Зміни від минулого року (%)	Зміни за 2011 ÷ 2020 (%)	Доля від ВВП країни (%)
1	США	778,0	4,4	-10	3,7
2	Китай	252,0	1,9	76	1,7
3	Індія	72,9	2,1	34	2,9

4	 Росія	61,7	2,5	26	4,3
34	 Україна	5,9	11	198	4,1

У 2015 та 2016 роках витрати на оборону України падали, проте це відбулося через зростання курсу долара. У національній валюті України — гривні витрати з кожним роком зростали. Так, наприклад, у 2014 році Україна витратила 45,5 млрд грн та при курсі на той час у 8,27 грн за долар отримуюмо \$5,5 млрд. А у 2015 році країна збільшила витрати до 49,9 млрд грн, проте через збільшення курсу долара до 16,28 грн за долар, то одержуємо \$3,06 млрд. Росія ж насправді зменшувала свої військові витрати лише у 2016 році. Але якщо розглядати в доларовій валюті можна побачити реальні витрати на оборону.

Політологи дійшли висновку, що для аналізу більшості міжнародних конфліктів за останні 200 років можна використовувати модель гонки озброєнь Річардсона. Виявилося, що з 30 конфліктів, що супроводжувалися гонкою озброєнь, 25 завершилися війною. А за відсутності гонки озброєнь тільки 3 із 70 конфліктів призвели до війни. Гонка озброєнь може також завершитися й мирно, якщо одна з держав постраждає від економічного краху.

Розглянемо теоретичну частину моделі гонки озброєнь Річардсона. Модель Річардсона розглядає конфліктну ситуацію, в яку можуть потрапити (а в нашій ситуації вже потрапили) країни. Для зручності одна країна позначається X (Україна), а інша — Y (Росія). Тобто витрати країни X позначаються $x=x(t)$, а країни Y — $y=y(t)$. Модель складається з трьох припущень.

Припущення 1. Країна X озброюється побоюючись потенційної загрози війни з боку країни Y , яка, у свою чергу, знаючи про зростання витрат на озброєння країни X , також збільшує свої витрати на озброєння. Кожна країна зміню швидкість нарощення (або скорочення) озброєнь пропорційно рівню витрат іншої країни. Тобто модель можна подати у вигляді системи:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha y \\ \frac{dy}{dt} = \beta x \end{cases} \quad (20)$$

де α і β – додатні постійні (коефіцієнти).

Однак за такої ситуації рівень озброєння нічим не лімітується. Тому праві частини цих рівнянь необхідно коригувати.

Припущення 2. Чим більший поточний рівень витрат країни на оборону, тим менша швидкість його зростання. Це дозволяє внести певні зміни у попередню схему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha y - \gamma x \\ \frac{dy}{dt} = \beta x - \delta y \end{cases} \quad (21)$$

де γ і δ – додатні постійні.

Припущення 3. Кожна країна нарощує озброєння, керуючись своїми державними інтересами й ворожістю до сусідньої країни, навіть якщо ця країна не загрожує існуванню даної. Тобто у кожної зі сторін є певні претензії одна до одної, через які і склалася конфліктна ситуація. Ці претензії позначимо через a і b (a і b – додатні постійні). Грунтуючись на всіх трьох припущеннях, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha y - \gamma x + a \\ \frac{dy}{dt} = \beta x - \delta y + b \end{cases} \quad (22)$$

Ось ми і отримали модель гонки озброєнь. Проте, на нашу думку, у ситуації конфлікту між Україною та Росією необхідно додати ще одне припущення.

Припущення 4. На міжнародній арені дії Росії засуджують та застосовують проти неї санкції, що скорочує її матеріальні ресурси. Необхідно внести такі додатні постійні як d і c . Тобто отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha y - \gamma x + a - d \\ \frac{dy}{dt} = \beta x - \delta y + b - c \end{cases} \quad (23)$$

Для того, щоб розглянути практичну частину моделі, потрібно зазначити ще деякі дані, необхідні для розрахунків. Модель побудована таким чином, що зростання витрат на оборону прямо пропорційне відповідним витратам країни-суперника і обмежуються кількістю наявних ресурсів. Тому, оскільки рівні ВВП, з якого виділяються кошти на оборону, і безпосередньо витрати на оборону обох країн кардинально відрізняються, важко порівнювати Україну та Росію. За таких умов неможливо визначити кількісний прогноз, можна лише прослідкувати тенденцію змін витрат на оборону України та Російської Федерації.

Розглянувши теоретичну частину, можна пере ходити до практичної. Для початку необхідно підрахувати коефіцієнти, що застосовуються в моделі. Україна подала позов до Європейського суду і вимагає від Росії \$42,32 млрд. через втрат від анексії Криму. А також науковці підраховали вартість відновлення Донбасу через військові дії на його території і за оцінками експертів

вони склали \$0,05 млрд. Тобто претензії України до Росії складають \$42,37 млрд. Для моделі гонки озброєнь коефіцієнт $a=42,37$.

Росія ж була проти інтеграції України до Європейського Союзу і зазначила, що через такі дії загальний товарооборот Росії та України знизиться на \$4 млрд. Тобто у нашій моделі буде використано коефіцієнт $b=4$.

Щодо санкцій, то Росія понесла величезні втрати від обмежень США та Європейського Союзу. Помічник президента РФ Сергій Глаз'єв заявив, що у фінансовій галузі Росія втратила від санкцій станом на 2016 рік \$250 млрд. Натомість Міністерство економічного розвитку і торгівлі України вважає, що ці втрати склали \$25 млрд. Євросоюз, у свою чергу, говорить про суму в \$100 млрд. Оскільки точної суми втрат Росії від анексії немає, тому для підрахунків моделі гонки озброєнь візьмемо середнє арифметичне, тобто \$125 млрд. Коефіцієнт, що пов'язаний із санкціями світової спільноти проти Росії, становить $c=125$. Оскільки проти України США та Європа санкцій не застосовують, то $d=0$. Для спрощення занесемо усі наші коефіцієнти до таблиці. X та Y – це витрати України та Росії відповідно у 2018 році. Щоб підрахувати коефіцієнти α і β , було створено таблиці витрат України та Росії на оборону, для чого було використано дані сайтів Державної служби статистики України та Федеральної служби статистики Російської Федерації. Україна є молодою державою та має менш міцну економіку, ніж країни-світові лідери. Складно порівнювати витрати Росії, яка є однією з лідерів на міжнародній арені з витрат на оборону, та Україну. Проте через фактичну ситуацію на території України, важливо розглянути питання аналізу тенденцій змін витрат досліджуваних країн на забезпечення безпеки та оборони.

Таблиця 5

Валовий внутрішній продукт України 2015-2020 рр.

	ВВП у фактичних цінах (млрд грн)	абсолютне відхилення	курс долара	ВВП у фактичних цінах (млрд дол)	абсолютне відхилення
2015	1404,669	-	7,9898	175,81	-
2016	1465,198	60,529	7,993	183,31	7,5
2017	1586,915	121,717	8,2714	191,86	8,55
2018	1988,544	401,629	16,2836	122,12	-69,74
2019	2385,367	396,823	25,5089	93,51	-28,61
2020	2982,920	597,553	28,1473	105,98	12,47

Таблиця 6

Валовий внутрішній продукт РФ 2015-2020 рр.

	ВВП у фактичних цінах (млрд руб)	абсолютне відхилення	курс долара	ВВП у фактичних цінах (млрд дол)	абсолютне відхилення
2015	68163,9	-	31,8729	2138,62	-
2016	73133,9	4970	30,4215	2404,02	265,4
2017	79199,7	6065,8	32,6587	2425,07	21,05
2018	83387,2	4187,5	56,2376	1482,77	-942,3
2019	86148,6	2761,4	72,9299	1181,25	-301,52
2020	92037,2	5888,6	59,8961	1536,61	355,36

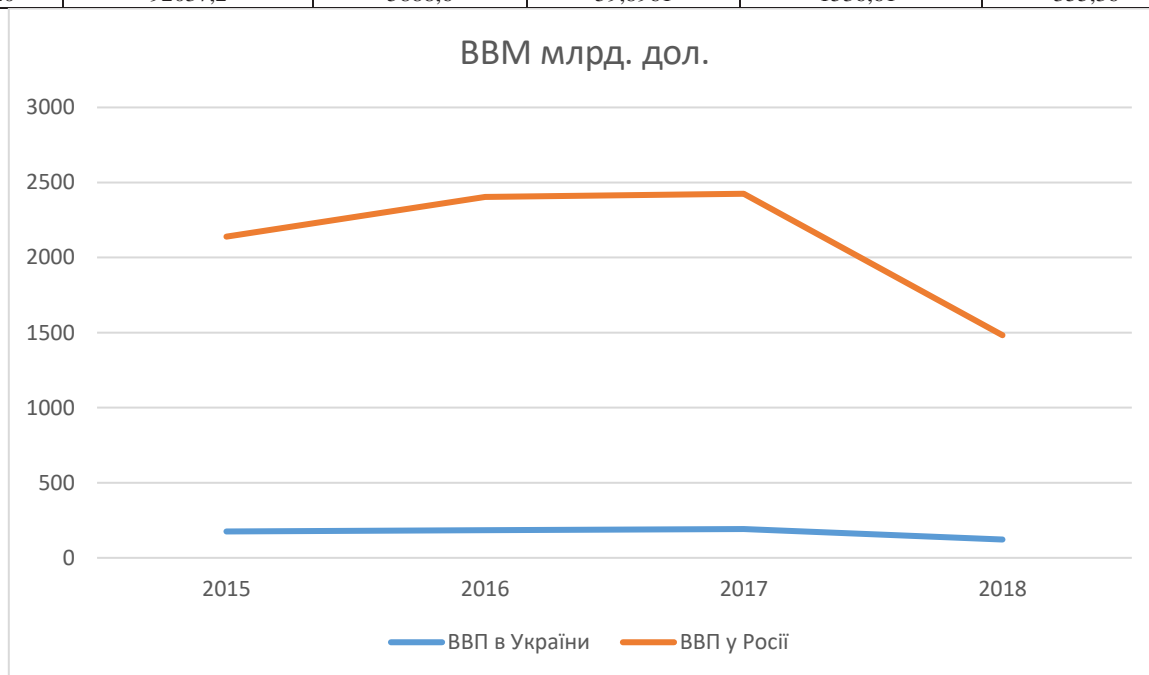


Рис 39. ВВП у фактичних цінах України і Росії



Рис. 40. Витрати на оборону України і Росії

Для того, щоб підрахувати α знайдемо dx/dt , якими визначаємо як середнє арифметичне абсолютних відхилень витрат на оборону України, за формулою:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sum \Delta X}{n} \quad (23)$$

де ΔX – відхилення витрат на озброєння, а n – кількість відхилень.

Таблиця 6 Коефіцієнти моделі гонки озброєнь

	Україна	Росія	
X	2,937	45,69	У
α	0,014	3,3	β
γ	0,44	0,42	δ
a	42,38	4,00	b
c	0,00	125,00	d

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2,44 - 0,731 + 0,122 + 0,486}{4} = -0,64 \quad (24)$$

А далі із системи першого припущення виводимо α :

$$\alpha = \left| \frac{\frac{dx}{dt}}{Y} \right| = \left| \frac{-0,64}{45,69} \right| = 0,014 \quad (25)$$

Аналогічно рахуємо β тільки по У і отримуємо значення $\beta=3,3$.

Коефіцієнт γ виводимо із рівняння другого припущення:

$$\gamma = \frac{\frac{dx}{dt} - \alpha * Y}{X} = \frac{-0,64 - 0,014 * 45,69}{2,937} = 0,44 \quad (27)$$

Аналогічно підраховуємо δ і отримуємо результат $\delta=0,42$. Тепер витрати на оборону мають ліміт і модель є більш правдивою. Розглянувши перше

припущення, отримуємо результати зазначені на рисунку. За цього припущення країни не мають обмеження на нарощення військових витрат, тому витрати Росії мають потенційно висхідний характер, а України порівняно з Росією не зміню своїх витрат. Далі розглянемо припущення 2. Результати підрахунку за другим припущенням відображені на графіку. Тепер вже результати для Росії не є такими позитивними. Дослідимо також вплив претензій на прогноз витрат на оборону, тобто перейдемо до третього припущення. Результати цих дій відображені на графіку.

Бачимо, що врахування претензій призводить до зменшення військових витрат Росії. Ще одним важливим фактором є санкції, то ж розглянемо їх вплив на витрати. Як ми можемо побачити на графіку санкції ще більш згубно впливають на Російські військові витрати. Тобто, якщо збільшувати санкції проти Росії, її витрати на оборону матимуть тенденцію до зменшення. У досліджуваній моделі ми розглядаємо санкції як сталі величини. Проте дії обох держав можуть призвести до збільшення цих претензій. Наприклад, ситуація 25 листопада 2018 року в Керченській протоці, де взяли в полон 23 українських моряка, може призвести до посилення санкцій міжнародної спільноти щодо Росії.



Припущення 2

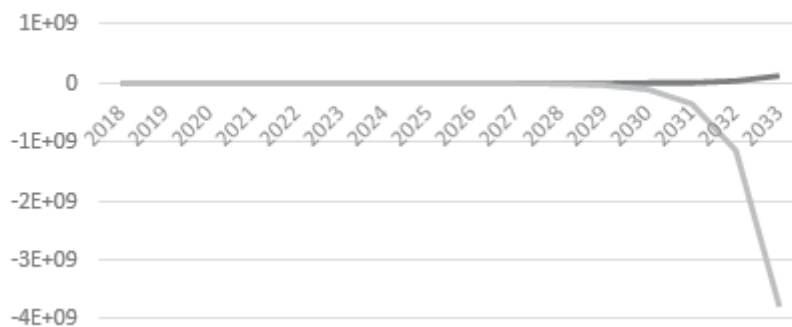


Рис. 42

Припущення 3



Рис. 43

Припущення 4



Рис. 44

Висновок

В науковій роботі було розглянуті загальні математичні моделі військових дій, з різною оцінкою та впливом різних факторів. Розглянуті детально моделі Ланчеста. Також в роботі наведено приклади використання моделі Ланчестера та приклад побудови власної математичної моделі бойових дій в Битві при Аламо.

Також розібрано модель прогнозування війни Річардсона, з реальними прикладами використання що дало нам змогу повністю оцінити реальність конфлікту Росії та України.

Результати дослідження показали, що політична ситуація у світі на теперішній час ускладнена агресивними діями деяких країн, зокрема Російською Федерацією. Особливо це відчуває Україна, де є окупованою значна частина території, країна понесла величезні економічні та демографічні збитки. Було побудовано можливу модель, якщо відновляться військові дії на сході України, було розібрано декілька варіантів з врахуванням втрат. Вибрано найкращий варіант для України та ЛДНР. Далі за допомогою Maple було побудовані різні фазові портрети, та розглянуто, як можна їх використовувати. В кінці було покращено моделі і враховували час реагування військ, а також етапи війни з використанням попередніх розробок

Виходячи з дій РФ, Україна змушена збільшувати витрати на оборону. Проте вона обмежена кількістю власних ресурсів. Модель гонки озброєнь використана для визначення саме тенденцій зміни витрат на оборону України та Росії, а не чіткого кількісного прогнозу на майбутнє, оскільки модель побудована таким чином, що зростання витрат на оборону прямо пропорційне відповідним витратам країни-суперника, а рівні ВВП та безпосередньо військових витрат України та Росії відрізняються у рази. Результати моделювання показали: якщо Україна продовжуватиме вимагати повернення коштів за нанесення збитків у регіонах Донбасу та Криму і при цьому буде підтримана з боку світової спільноти санкціями проти Російської Федерації, то Росія знизить швидкість нарощення військових витрат через зменшення ресурсів.

Перелік використаних джерел

1. Lanchester F. Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm. London: Constable and Co, 1916
2. . Чуев В.Ю. Вероятностная модель боя многочисленных группировок // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2011. – № 53
3. Гатіна В.Д. Модели Ланчестера в профильном курсе «Информатика и ИКТ» // Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании. – 2016. – № 1 (39)
4. Taylor J., Brown G. Canonical Methods in the Solution of Variable. Coefficient Lanchester-Type Equations of. Modern Warfare // Operations Research. 1977. Vol. 24 (1):45. Pp
5. http://edu.mmcs.sfedu.ru/pluginfile.php/29385/mod_resource/content/7/Лекция%208.pdf
6. <http://www.limm.mgimo.ru/LIMM/inform/excel03.pdf>
7. Дифференциальные уравнения в приложениях. Амелькин В.В. 1987
8. Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г. Методы решения математических задач в Maple: Учебное пособие – Белгород: Изд. Белаудит, 2001
9. <https://www.globalfirepower.com>
10. MacKay N.J. When Lanchester met Richardson, the outcome was stalemate: a parable for mathematical models of insurgency // Journal of the Operational Research Society. – 2015. – V. 66, № 2
11. Шумов В. В. Анализ социально-информационного влияния на примере войн США в Корее, Вьетнаме и Ираке // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014
12. Skarpedas S. Contest success functions // Economic Theory. — 1996. — No. 7
13. Геселева Н.В. Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці
14. Державна служба статистики України. Київ: Держстат, 1998-2018. URL: <http://www.ukrstat.gov.ua>.

15. Наслідки санкцій. росія втратила сотні мільйонів доларів за Трампа. ТСН, 2018. URL: <https://tsn.ua/svit/naslidki-sankciy-rosiya-vtratile->
16. Власов М.П. Моделирование экономических процессов. Ростов на Дону : Феникс, 2005
17. Walter W. Hill Several sequential augmentations of richardson's arms race model
18. Fox, William P. Discrete combat models: investigating the solutions to discrete forms of Lanchester's combat models 2010,
19. Новиков Д. А. Иерархические модели военных действий
20. В. В. Шумов, а, В. О. Корепанов, Математические модели боевых и военных действий
21. В.М. Можаровський, С.В. Годзь Математична модель визначення величини можливих втрат бойового потенціалу своїх військ за добами операції тривалістю діб. 2018,
22. В. Ю. Чуев, И. В. Дубоград, Модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок, Мат. моделир. и числ. методы, 2016, выпуск 9, 89–104
23. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина Применение математических средств примоделировании военных конфликтов
24. М. А. Мосора Аналіз гонки озброєнь між США та КНР за допомогою моделі Річардсона 2018
25. Буянов Б.Б., Лубков Н.В., Поляк Г.Л. Математическая модель длительного вооруженного конфликта // Проблемы управления. 2007. №5. С. 48-51.
26. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях/ В. В. Амелькин. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987. – 160 с.
27. Caldwell, B. Aggregated Combat Models / J .Hartman., S. Parry, A. Washburn, 2000. URL: <http://www.nps.Navy.Mil/Orfacpag/>