

УДК 539.376

Кобзар Ю.М.<sup>1</sup>, к.ф.-м.н., с.н.с.

**Втомна довговічність гладких  
циліндричних стрижнів при  
одновісному симетричному розтягу-  
стиску**

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН  
України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова 3,  
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Ju.M.Kobzar<sup>1</sup>, к.ф.-м.н., с.н.с.

**Fatigue durability of smooth cylindrical  
rods under uniaxial symmetric stretch –  
compression**

<sup>1</sup> S.P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS  
Ukraine, 03057, Kyiv, 3 Nesterov Str.,  
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

*Запропонована модель втоми, в основу якої покладено зменшення несучої маси речовини на пів циклові стиску та збільшення її щільності на пів циклові розтягу. Середнє напруження та об'ємна деформація зв'язані лінійною залежністю Гука. В залежності від початкових фізико-механічних властивостей стрижня, контролюються його структурні зміни, які кількісно відображають зміни маси, щільності, напружень, модуля пружності, обчислення яких відбувається на кожному циклі. В залежності від прийнятої бази випробовувань стрижня умовою його крихкого руйнування на якомусь циклі прийнято момент досягнення нерівності отриманої з балансу потенційних енергій пружної та викликаної дією зовнішньої сили. Критерієм досягнення межі втоми є не виконання нерівності за межею прийнятої бази випробувань. Алгоритм моделі реалізовано в програмному середовищі комп'ютерної алгебри. Отримані розрахункові значення кривої відрізняються від кривої втоми даного жаростійкого сплаву в допустимих межах. Відмінності які присутні при малих значеннях початкових напружень можна пояснити зменшенням швидкості навантаження, а значить збільшенням впливу пластичної складової.*

*Ключові слова: симетричний розтяг-стиск, модель втоми, межа втоми, енергетичний критерій руйнування при втомі*

*The paper proposes a model of fatigue, that is based on the reduction of the carrier mass of the substance at half-cycle compression and its density increase by half-cycle stretching. High tension and volume deformation are linearly related by Hooke's law. Mass and density changes and stress changes depending on the elastic properties of the rod, its initial mass, density and volume are received analytically for each cycle. The model usage limit is a cycle in which amplitude values stress reaches the elastic limit. The proposed model algorithm is implemented in software environment with which the destruction is determined fatigue limit and fatigue. The resulting design value curve is different from the curve of fatigue of gray iron that was investigated. This is due to the fact that scattering of the applied energy on internal friction and heating is not included in the model.*

*Key words: symmetric tension-compression, fatigue model, fatigue limit, fatigue failure energy criterion.*

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Моделі багатоциклової втоми, що прогнозують число циклів до руйнування у випадку симетричного навантаження, невідомі. Більш вивчені дії асиметричних навантажень. В умовах асиметричних навантажень число циклів до руйнування і межу втоми знайдено в залежності від даних симетричного циклу та межі міцності [1]. Встановлено методи визначення еквіва-

лентних напружень, які дозволили обчислювати втомну довговічність. Подібні підходи розвинуто на випадок дії двовісного комбінованого навантаження з статичною та циклічною компонентами [2].

В даній роботі, запропонована модель багатоциклової втоми стрижня під дією м'якого симетричного навантаження в вигляді розтягу-

стиску, коли початкові амплітудні напруження менше межі пропорційності. В рамках моделі досліджується крихке руйнування матеріалів, в припущенні, що змінюється несучий об'єм зразка і не враховуються малі зміни форми. Визначаються на кожному пів циклі структурні зміни, які спричиняють зміни маси, щільності, напруження, модуля пружності. Прийнято, що втомне руйнування стержня відбулося на такому пів циклі, на якому справджується нерівність, яка характеризує процес. Нерівність отримана з умови балансу пружної енергії стержня та потенційної енергії яка виникає під дією зовнішнього навантаження. В разі досягнення межі втоми, умовна база випробувань перевищується без руйнування, розрахунки припиняються. Така модель запропонована раніше, але умова балансу енергій в ній не враховувалась [3].

Нехай на ізотропний стрижень з коефіцієнтом Пуасона  $\mu$ , межею міцності  $\sigma_g$  і початковими – модулем пружності  $E_1$ , масою  $m_1$ , щільністю  $\rho_1$ , довжиною  $l_1$ , площею перетину  $F_1$ , діє симетричне періодичне розтягуюче-стискує навантаження  $P_i$ , з амплітудним значенням  $P_a = const$ . Напруження  $\sigma_1 = P_a/F_1$  менше межі  $\sigma_{mu}$  пропорційності. Кількість циклів умовної бази випробувань -  $N_0 = 10 * 10^6$ . Циклічні напруження

$$\sigma_j(i) = \sigma_{aj}(i) \sin \omega t, \quad (1)$$

де  $\sigma_{aj}(i) = P_a / F_{aj}(i)$ ;  $F_{aj}(i)$ - амплітудне значення поперечного перетину стрижня, що виникають в стрижні з початковим об'ємом  $V_1 = m_1/\rho_1$  викликають на кожному  $i$ -тому циклі стиск в першому  $j=1$  та розтяг в другому  $j=2$  пів циклах.

Пружна енергія, що накопичується в стержні з амплітудною пружною енергією одиниці об'єму  $W_1 = \sigma_{xa1}^2 / (2E_1)$  при розтязі-стискові буде

$$U = W_1 V_1 = \frac{\sigma_{xa1}^2}{2E_1} \frac{m_1}{\rho_1}. \quad (2)$$

Повна енергія дорівнює частині зовнішньої гармонічно прикладеної сили з частотою  $\omega$  на найбільше зміщення і в такі моменти рівна найбільшому значенню потенційної енергії

$$U = \frac{P_{xa1}^2}{2m_1\omega^2}. \quad (3)$$

Ці енергії в моменти найбільших зміщень рівні між собою

$$U = \frac{P_{xa1}^2}{2m_1\omega^2} = \frac{\sigma_{xa1}^2}{2E_1} \frac{m_1}{\rho_1}. \quad (4)$$

З балансу енергій (4), знаходимо частину  $P_{xa1}$  зовнішньої гармонічно прикладеної сили  $P_a$  яка надає пружну енергію стрижню

$$P_{xa1} = \frac{\sigma_{xa1} m_1 \omega}{\sqrt{E_1 \rho_1}} = \frac{P_a}{k}. \quad (5)$$

Так як  $P_a > P_{xa1}$ , то справедливий нерівності

$$\frac{P_a^2}{m_1\omega^2} > \frac{P_{xa1}^2}{m_j(i)\omega^2} = \frac{\sigma_{xaj}(i)^2}{E_j(i)} \frac{m_j(i)}{\rho_j(i)}. \quad (6)$$

на  $i$ -тому циклі  $j$ -того пів циклу і цей цикл  $N$  є межею втоми при початковій напрузі  $\sigma_1$  та навантаженню  $P_a$ .

Критерієм крихкого руйнування прийнято виконання нерівності

$$\frac{P_a^2}{m_1\omega^2} - \frac{\sigma_{xaj}(i)^2}{E_j(i)} \frac{m_j(i)}{\rho_j(i)} < 0, \quad (7)$$

на  $i$ -тому циклі  $j$ -того пів циклу і цей цикл  $i = N_a = N_0$  є межею довготривалої міцності при початковій напрузі  $\sigma_1$  або навантаженню  $P_a$ .

Критерієм досягнення межі втоми є не виконання нерівності (7) для, тобто за межею прийнятої бази випробувань  $N_0$ . Об'ємна деформація  $\varepsilon_{vj}(i)$  та поздовжня лінійна деформація  $\varepsilon_{xj}(i)$  повзучості зв'язані співвідношенням

$$\varepsilon_{vj}(i) = (1 - 2\mu)\varepsilon_{xj}(i). \quad (8)$$

Розглянемо рекурентний процес накопичення втоми на довільному  $i$ -тому циклі. В першому пів циклі  $j=1$  при стисковій для щільності покладено

$$\rho_2(i-1) = \rho_1(i), \quad (9)$$

для маси виконується

$$m_1(i-1) = m_2(i-1). \quad (10)$$

Стан стрижня на цьому і попередньому пів циклах зв'язують рівності

$$1 = \frac{\rho_2(i-1)V_2(i-1)}{m_2(i-1)} = \frac{\rho_1(i)V_1(i)}{m_1(i)} = \frac{\rho_1(i)(V_2(i-1) - \Delta V_1(i))}{m_1(i)}. \quad (11)$$

З допомогою рівнянь (11) залежність між напруженнями  $\sigma_{xa1}(i)$  та  $\sigma_{xa2}(i-1)$  буде

$$\sigma_{xa1}(i) = \left( \frac{m_2(i-1)}{m_1(i)} \left( 1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa2}(i-1) \quad (12)$$

де  $m_1(i)$  - невідома маса. Після серії перетворень, з допомогою рівнянь (11), залежності середнього напруження  $\sigma_{cep1}(i)$  від лінійного напруження  $\sigma_{xa2}(i-1)$ , модуля пружності  $E_2(i-1)$ , об'ємного модуля  $K_2(i-1)$  та мас цього та попереднього циклу, будуть

$$\sigma_{cep1}(i) = \frac{1}{3} \left( \left( 1 - \frac{4\mu G_2(i-1)}{E_2(i-1)} \right) * \left( \frac{m_2(i-1)}{m_1(i)} \left( 1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa2}(i-1) + 2\lambda_2(i-1) \left( 1 - \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} \right) \right) \quad (13)$$

та

$$\sigma_{cep1}(i) = K_2(i-1) \left( 1 - \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} \right). \quad (14)$$

Виключив з рівнянь (13) та (14) середнє напруження отримуємо рівняння

$$E_2(i-1) \left( \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} \right)^2 - (E_2(i-1) + \sigma_{xa2}(i-1)) * \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} + 2(1-\mu)\sigma_{xa2}(i-1) = 0, \quad (15)$$

з якого знаходиться відношення мас  $m_1(i)/m_1(i-1)$ , яке дозволяє з (12) визначити амплітудне напруження  $\sigma_{xa1}(i)$ . З балансу енергії

$$U = \frac{P_{xa1}^2}{m_1(i)\omega^2} = \frac{(\sigma_{xa1}(i))^2 m_1(i)}{E_1(i) \rho_j(i)}. \quad (16)$$

враховуючи (10) визначається новий модуль пружності  $E_1(i)$ . Знайдені на цьому пів циклі маса  $m_1(i)$ , напруження  $\sigma_{xa1}(i)$ , модуль пружності  $E_1(i)$  є початковими даними для наступного циклу. Перевіряється виконання нерівності (7), в разі виконання, руйнування відбулося і обчислення припиняються.

В другому пів циклі  $j=1$  при розтягові прийнято, що маса не змінюється

$$m_1(i) = m_2(i), \quad (17)$$

а для щільності виконується рівність

$$\rho_1(i) = \rho_2(i-1). \quad (18)$$

Стан стрижня на цьому та попередньому пів циклах зв'язують рівності

$$1 = \frac{\rho_1(i)V_1(i)}{m_1(i)} = \frac{\rho_2(i)V_2(i)}{m_2(i)} = \frac{\rho_2(i)(V_1(i) - \Delta V_2(i))}{m_1(i)}. \quad (19)$$

З допомогою рівнянь (19) залежність між напруженнями  $\sigma_{xa1}(i)$  та  $\sigma_{xa2}(i-1)$  буде

$$\sigma_{xa2}(i) = \left( \frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \left( 1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa1}(i), \quad (20)$$

де  $\rho_2(i)$  - невідома щільність. Після серії перетворень, з допомогою рівнянь (19), залежності середнього напруження  $\sigma_{cep2}(i)$  від лінійного напруження  $\sigma_{xa1}(i)$ , модуля пружності  $E_1(i)$ , об'ємного модуля  $K_1(i)$  та щільності цього та попереднього циклу, будуть

$$\sigma_{cep2}(i) = \frac{1}{3} \left( \left( 1 - \frac{4\mu G_1(i)}{E_1(i)} \right) * \left( \frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \left( 1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa1}(i) + 2\lambda_1(i) \left( 1 - \frac{\rho_2(i-1)}{\rho_2(i)} \right) \right) \quad (21)$$

та

$$\sigma_{cep2}(i) = K_1(i) \left( 1 - \frac{\rho_2(i-1)}{\rho_2(i)} \right). \quad (22)$$

Виключив з рівнянь (21) та (22) середнє напруження отримуємо рівняння

$$2(1-\mu)\sigma_{xa1}(i) \left( \frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \right)^2 - (E_1(i) + \sigma_{xa1}(i)) \frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} + E_1(i) = 0. \quad (23)$$

З нього знаходиться відношення щільностей  $\rho_2(i)/\rho_2(i-1)$ , яке дозволяє з (20) визначити амплітудне напруження  $\sigma_{xa2}(i)$ . Знайдені на цьому пів циклі маса  $m_1(i)$ , напруження  $\sigma_{xa1}(i)$  є початковими даними для наступного циклу. Перевіряється виконання нерівності (7) в разі виконання, руйнування стрижня відбулося і обчислення припиняються.

Апробація моделі відбулася на прикладі розрахунку кривої втоми стрижня при різних

рівнях прикладених циклічних навантажень з частотою 30 *гц*. Стрижень має форму циліндричного прутика діаметром 7,5 мм, виготовлений з жаростійкого нікелевого сплаву ЭИ 867 [2]. Фізико-механічні характеристики матеріалу стрижня наступні:

$\sigma_B = 1200 \text{ МПа}$ ,  $\mu = 0,294$ ,  $E_1 = 2,28 \cdot 10^{11} \text{ МПа}$ ,  
 $m_1 = 0,151367625 \text{ кг}$ ,  $\rho_1 = 8570 \text{ кг/м}$ ,  $l_1 = 0,04 \text{ м}$ ,  
 $F_1 = 0,00004415625 \text{ м}^2$ . Розрахункові (лінія) та експериментальні (кружечки) криві Велера приведені на рис. 1.

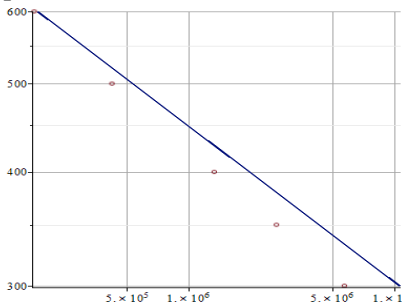


Рис. 1. Криві Велера.

Вперше запропонована модель прогнозу руйнування від втоми, при симетричному циклічному навантаженні стрижня без його лабораторного випробування. Різниця між результатами розрахунків та експериментальними даними цілком прийнятні для практики [4]. Особливостями моделі є по циклове спостереження за структурними змінами в матеріалі стержня, шляхом обчислення змін модуля пружності, маси в першому пів циклі при незмінній щільності, щільності в наступному пів циклі при незмінній масі та напружень.

#### Список використаних джерел

1. Хейвуд Р.Б. Проектирование с учетом усталости / Р.Б. Хейвуд. Под ред. И.Ф.Образцова. – Москва: Машиностроение, 1969. – 504 с.
2. Голуб В.П., Погребняк А.Д. Высоко-температурное разрушение материалов при циклическом нагружении / В.П. Голуб, А.Д. Погребняк.- Киев: Наукова думка, 1994. – 228 с.
3. Кобзарь Ю.М., К оценке усталостной долговечности гладких цилиндрических стержней при одноосном симметричном растяжении сжатии /Ю.М Кобзарь //Авиационно-космическая техника и технология.-2015.-№9(126).- С.6-14.
4. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени / В.П. Когаев. – Москва: Машиностроение, 1977 (Б-ка расчетчика).-232с.

#### References

1. HEYVUD R.B. (1969) *Proektirovanie s uchetom ustalosti*. Moskva: Mashinostroenie.
2. GOLUB V.P. & POGREBNIYAK A.D. (1994) *Vysoko-temperaturnoe razrushenie materialov pri tsiklicheskom nagruzenii*. Kiev: Naukova dumka.
3. KOBZAR Yr.M. (2015) К оценке усталостной долговечности гладких цилиндрических стержней при одноосном симметричном растяжении-сжатии. *Aviatcionno-kosmicteskaya tekhnika*. 9(126). p. 6-14.
4. KOGAEV V.P. (1977) *Rascheti na prochnost pri napryazheniyax, peremennykh vo vremeni*. Moskva: Mashinostroenie.

Надійшла до редколегії 30.09.2019