

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ГУСАК ВІТАЛІЙ ОЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 532.5

ДИСЕРТАЦІЯ

**ШЛЯХИ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИХ
МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗКУ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКАНОНІЧНИХ ОБЛАСТЕЙ**

Спеціальність 113 – Прикладна математика

Галузь знань – Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня *доктора філософії*

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
_____ *В. О. Гусак*

Науковий керівник: *Маціпура Володимир Тимофійович,*
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2024

АНОТАЦІЯ

Гусак В.О. Шляхи підвищення ефективності чисельно-аналітичних методів розв'язку граничних задач для неканонічних областей. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 «Прикладна математика» (11 – Математика та статистика). – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2024.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню шляхів підвищення ефективності чисельно-аналітичних методів розв'язку граничних задач для неканонічних областей. Граничні задачі для неканонічних областей (зі складною геометрією) є важливими для розуміння та моделювання різноманітних фізичних та технічних явищ. Вони широко використовуються в різних галузях науки і техніки: фізика (акустика, механіка рідин, теплопровідність), інженерія (розробка та вдосконалення конструкцій, теплообмінних систем, літальних апаратів), електротехніка (розробка та вдосконалення електронних пристроїв та систем, моделювання теплових та електромагнітних полів). Використання нових технологій, зростання їх складності, а також потреба в розробці оптимальних конструкцій зумовлюють необхідність покращення чисельно-аналітичних методів розв'язку граничних задач.

В даній роботі досліджено можливість використання поточкового спряження хвильових полів в методі часткових областей, який є нетрадиційним для методу часткових областей, на прикладі розв'язання наступних граничних задач:

- випромінювання плоского поршня в клинуватому хвилеводі;
- дифракція звуку на шумозахисному бар'єрі;
- розсіювання хвилі на скінченних клиноподібних об'єктах.

Метод часткових областей застосовується при дослідженні задач про випромінювання і розсіювання хвиль різної природи. Він отримав широке застосування в задачах акустики і електродинаміки, в яких досліджуються хвильові поля в складних, неканонічних областях [1]. Ідея методу полягає в розділенні

складної області існування хвильового поля на прості області, прості в тому сенсі, що в кожній з них можна побудувати загальний розв'язок рівняння Гельмгольца. Такі розв'язки описують звукові поля в часткових областях при довільних граничних умовах на їх границях. Далі виникає потреба спряження полів в часткових областях на границях цих областей і, при необхідності, виконання граничних умов на граничних поверхнях та поверхнях випромінювачів. Реалізація граничних умов призводить до функціональних рівнянь з невідомими коефіцієнтами, які є амплітудними коефіцієнтами мод у відповідних часткових областях.

Для визначення шуканих амплітудних коефіцієнтів мод слід перейти від функціональних рівнянь до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка надалі розв'язується методом редукції. Варіант переходу до лінійної системи алгебраїчних рівнянь, який можна назвати класичним, спирається на побудовані загальні розв'язки рівняння Гельмгольца в часткових областях. Загальний розв'язок передбачає наявність у ньому повної та ортогональної системи функцій, завдяки якій можна записати у вигляді ряду Фур'є будь-яку (розумну з фізичної точки зору) функцію. Використовуючи ортогональність цього набору функцій, можна отримати систему алгебраїчних рівнянь. Про цю процедуру говорять як про наближення функцій у розумінні мінімальності середньоквадратичного відхилення. Такий підхід добре досліджено та апробовано. Де можуть виникнути труднощі у його реалізації? Вони можуть виникнути в ситуації, коли для запису хвильових полів у часткових областях доводиться використовувати декілька (причому, найчастіше, різних) систем координат. Як результат, при переході до системи алгебраїчних рівнянь можуть виникати складні інтеграли. Часто їх аналітичне обчислення неможливе, та й чисельне обчислення може бути пов'язане з певними труднощами.

Інший варіант переходу до системи алгебраїчних рівнянь полягає в прирівнюванні функцій (полів у суміжних часткових областях) в скінченному наборі точок (назвемо їх вузловими точками) на межі цих областей. Кількість вузлових точок на границі визначає порядок системи рівнянь і тим самим кількість шуканих амплітудних коефіцієнтів мод у часткових областях. Такий підхід не містить обчислювальних проблем.

Отже, в дисертації було отримано такі нові наукові результати:

- Досліджено можливість використання поточкового спряження хвильових полів в методі часткових областей на прикладі розв'язання наступних граничних задач:
 - випромінювання плоского поршня в клинуватому хвилеводі;
 - дифракція звуку на шумозахисному бар'єрі;
 - розсіювання хвилі на скінченних клиноподібних об'єктах.

Для контролю можливості використання поточкового спряження хвильових полів при розв'язанні граничних задач використовувався також варіант середньоквадратичного наближення.

- В задачі про випромінювання плоского поршня в нескінченному клинуватому хвилеводі показано, що при однаковій кількості мод в часткових областях для двох варіантів спряження полів, варіант середньоквадратичного наближення є більш точним, але для певної величини хвильової відстані між вузловими точками можна отримати цілком прийнятну точність розрахунку і для варіанту поточкового спряження полів.
- В задачі про випромінювання плоского поршня в скінченному клинуватому хвилеводі досліджено можливість використання комбінацій двох варіантів спряження полів. Показано, що всі комбінації працюють приблизно однаково. Варіант в якому використовується тільки середньоквадратичне наближення найточніший. Використання поточкового спряження полів в цілому спрощує розрахунок задачі. Вибір необхідної комбінації розрахунку залежить від того, яка задача розглядається. Якщо для запису хвильових полів в часткових областях доводиться використовувати кілька систем координат, то при використанні середньоквадратичного наближення можуть виникати труднощі при обчисленні, в той час як при використанні поточкового спряження полів обчислювальних проблем не виникає.
- В задачі про розсіювання звуку на класичному шумозахисному бар'єрі показано, що використання середньоквадратичного наближення та поточкового спряження полів на границях часткових областей дають хороший

збіг розрахункових значень полів для двох варіантів спряження полів. В задачі про розсіювання звуку на бар'єрі з резонатором виникла необхідність введення трьох полярних систем координат. Зрозуміло, що використання середньоквадратичного наближення було б пов'язане зі складнощами при побудові розрахункового алгоритму. В той час як поточкове спряження полів дозволяє відносно легко побудувати обчислювальний алгоритм. При цьому збільшення кількості вузлових точок дозволяє впевнено підвищувати точність спряження звукових полів. Показано, що для частот вище резонансної частоти є смуга частот, в якій спостерігається провал у частотній характеристиці інтегрального критерію бар'єру, що свідчить про перевагу бар'єру з резонатором над класичним бар'єром, при цьому зі зростанням резонансної частоти ця смуга частот збільшується. На більш високих частотах відмінність ефективності між традиційним бар'єром і бар'єром з резонатором згладжується. Тому бар'єр з резонатором особливо ефективний за наявності відносно вузькосмугового джерела шуму, коли проблемні частоти відносно невисокі. Показано, що на частотах нижче резонансних спостерігаються ситуації, за яких ефективність бар'єру з резонатором гірша, ніж у класичного бар'єру.

- В задачі розсіювання хвилі на скінченних клиноподібних об'єктах показано високий ступінь збігу результатів розрахунків для двох варіантів спряження полів. Проведено розрахунок повного, зворотного та двопозиційного перерізу розсіювання. Показано, що зворотний переріз розсіювання істотно залежить від радіусу заокруглення кромки та нормальної провідності поверхні заокруглення. При цьому покриття заокругленої частини клину поглинаючим матеріалом істотно зменшує відбиваючу здатність об'єкта при відповідних кутах падіння хвилі.
- Отримані результати вказують на успішне застосування поточкового спряження хвильових полів в методі часткових областей на прикладі розв'язання різних типів граничних задач, що свідчить про його універсальність та широкий спектр застосування.

Ключові слова: граничні задачі, неканонічні області, чисельно-аналітичні методи, метод часткових областей, середньоквадратичне наближення, поточкове спряження полів, клин, шумозахисний бар'єр, дифракція звуку, розсіювання хвилі, стелс технологія.

ABSTRACT

Husak V.O. Ways to improve the efficiency of numerical-analytical methods for solving boundary value problems for non-canonical domains. – Qualification scientific work with the manuscript copyright.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 113 “Applied Mathematics” (11 – Mathematics and Statistics). Taras Shevchenko National University of Kyiv. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2024.

The thesis is devoted to the study of ways to improve the efficiency of numerical-analytical methods for solving boundary value problems for non-canonical domains. Boundary value problems for non-canonical domains (with complex geometry) are important for understanding and modeling various physical and technical phenomena. They are widely used in various fields of science and technology: physics (acoustics, fluid mechanics, thermal conductivity), engineering (development and improvement of structures, heat exchange systems, aircraft), electrical engineering (development and improvement of electronic devices and systems, modeling of thermal and electromagnetic fields). The use of new technologies, the growth of their complexity, as well as the need to develop optimal designs necessitate the improvement of numerical and analytical methods for solving boundary value problems.

In this work, the possibility of using the conjugation by points of wave fields in the method of partial domains is investigated using the example of solving the following boundary value problems:

- radiation of a flat piston in a wedge-shaped waveguide;
- sound diffraction on a noise barrier;
- wave scattering on finite wedge-shaped objects.

The method of partial domains is effectively used in the study of problems of radiation and scattering of waves of various nature. It was widely used in acoustics problems in which sound fields in complex, non-canonical domains are studied [1]. The idea of the method is to divide the complex domain of existence of the wave field into simple domains, simple in the sense that a general solution of the Helmholtz equation can

be constructed in each of them. Such solutions describe sound fields in partial domains under arbitrary boundary conditions at their boundaries. Next, there is a need to conjugate the fields in the partial domains at the boundaries of these domains and, if necessary, to fulfill the boundary conditions on the boundary surfaces and the surfaces of the radiators. The implementation of the boundary conditions leads to functional equations with unknown coefficients, which are the amplitude coefficients of the modes in the corresponding partial domains.

To determine the desired amplitude coefficients of the modes, one should go from functional equations to an infinite system of linear algebraic equations, which is further solved by the reduction method. The variant of the transition to a linear system of algebraic equations, which can be called classical, is based on constructed general solutions of the Helmholtz equation in partial domains. The general solution assumes the presence in it of a complete and orthogonal system of functions, thanks to which any (reasonable from a physical point of view) function can be written in the form of a Fourier series. Using the orthogonality of this set of functions, a system of algebraic equations can be obtained. This procedure is referred to as approximation of functions in the sense of minimum mean-square deviation. This approach is well researched and tested. Where can difficulties arise in its implementation? They can arise in a situation when several (and, most often, different) coordinate systems have to be used to write down wave fields in partial domains. As a result, complex integrals may arise when switching to a system of algebraic equations. Often, their analytical calculation is impossible, and numerical calculation can be associated with certain difficulties.

Another variant of transition to a system of algebraic equations consists in equating functions (fields in adjacent partial domains) in a finite set of points (let's call them nodal points) on the boundary of these domains. The number of nodal points on the boundary determines the order of the system of equations and thus the number of sought amplitude coefficients of the modes in the partial domains. This approach does not involve computational problems.

In general, the following new scientific results were obtained in the thesis:

- The possibility of using the conjugation by points of wave fields in the method of partial domains was investigated using the example of solving the following boundary value problems:
 - radiation of a flat piston in a wedge-shaped waveguide;
 - sound diffraction on a noise barrier;
 - wave scattering on finite wedge-shaped objects.

To control the possibility of using the conjugation by points of wave fields in solving boundary value problems, the root-mean-square approximation variant was also used.

- In the problem of the radiation of a flat piston in an infinite wedge-shaped waveguide, it is shown that with the same number of modes in partial regions for two variants of field conjugation, the mean-square approximation variant is more accurate, but for a certain value of the wave distance between nodal points, it is possible to obtain quite acceptable calculation accuracy and for variant of pointwise conjugation of fields.
- In the problem of the radiation of a flat piston in a finite wedge-shaped waveguide, the possibility of using combinations of two variants of conjugation of fields was investigated. All combinations are shown to perform about the same. The option in which only the root-mean-square approximation is used is the most accurate. The use of conjugation by points of fields in general simplifies the calculation of the problem. The choice of the necessary calculation combination depends on the problem under consideration. If several coordinate systems have to be used to write down wave fields in partial domains, difficulties may arise in the calculation when using the root-mean-square approximation, while computational problems do not arise when using the conjugation by points of fields.
- In the problem of sound scattering on a classical noise barrier, it is shown that the use of the root-mean-square approximation and conjugation by points of the fields at the boundaries of the partial domains gives a good coincidence of the calculated values of the fields for the two conjugation variants. In the problem of sound scattering on a barrier with a resonator, it became necessary to introduce three polar

coordinate systems. It is clear that the use of the root-mean-square approximation would be associated with difficulties in the construction of the calculation algorithm. While conjugation by point of fields makes it relatively easy to build a computational algorithm. At the same time, increasing the number of nodal points makes it possible to reliably increase the accuracy of conjugation of sound fields. It is shown that for frequencies above the resonance frequency there is a frequency band in which a dip in the frequency characteristic of the integral criterion of the barrier is observed, which indicates the advantage of a barrier with a resonator over a classical barrier, while this frequency band increases with an increase in the resonance frequency. At higher frequencies, the difference in efficiency between a classic barrier and a barrier with a resonator is smoothed out. Therefore, a barrier with a resonator is especially effective in the presence of a relatively narrow-band noise source, when the problem frequencies are relatively low. It is shown that at frequencies below resonance, situations are observed in which the efficiency of a barrier with a resonator is worse than that of a classical barrier.

- In the problem of wave scattering on finite wedge-shaped objects, a high degree of coincidence of calculation results for two variants of conjugation of fields is shown. The calculation of the full, backscattering and two-position scattering cross-sections was carried out. It is shown that the backscattering cross-section depends significantly on the edge rounding radius and the normal conductivity of the rounding surface. At the same time, covering the rounded part of the wedge with an absorbing material significantly reduces the reflecting capacity of the object at the corresponding angles of incidence of the wave.
- The obtained results indicate the successful application of the conjugation by points of wave fields in the method of partial domains on the example of solving various types of boundary value problems, which indicates its universality and a wide range of applications.

Key words: boundary value problems, non-canonical domains, numerical-analytical methods, partial domains method, root-mean-square approximation, conjugation by points, wedge, noise barrier, sound diffraction, wave scattering, stealth technology.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Грінченко В. Т., Гусак В. О., Маципура В. Т. Використання двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2021. №2 (136). с. 5–16.
2. Гусак В. О. Випромінювання плоского поршня у клинுவатому хвилеводі. *Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки*. 2021. №3. с. 34–37.
3. Grinchenko V. T., Vovk I. V., Husak V. O., Matsypura V. T. Properties of a noise barrier with controlled diffraction at the edge. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics (Bulgaria)*. 2023. Vol. 53, No. 2. p. 152–165.
4. Grinchenko V. T., Vovk I. V., Husak V. O., Matsypura V. T. Wave Scattering on Finite Wedge-Shaped Objects. *Advances in Mechanics. Advanced Structured Materials. Springer, Cham*. 2023. Vol. 191. p. 155–170.
5. Борисейко О. В., Гусак В. О., Маципура В. Т. Використання комбінацій двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей. *Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки*. 2023. №2. с. 88–91.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

6. Гусак В. О. Випромінювання плоского поршня у клинுவатому хвилеводі. *Сучасні проблеми механіки: тези доп. VI міжнар. наук. конф., м. Київ, КНУ ім. Тараса Шевченка, 30–31 серпня 2021 р. Київ, 2021. с. 21.*
7. Борисейко О. В., Гусак В. О., Маципура В. Т. Використання комбінацій двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей. *Сучасні проблеми механіки: тези доп. VII міжнар. наук. конф., м. Київ, КНУ ім. Тараса Шевченка, 28–29 серпня 2023 р. Київ, 2023. с. 8.*
8. Грінченко В. Т., Вовк І. В., Гусак В. О., Маципура В. Т. Властивості шумозахисного бар'єру з керованою дифракцією на кромці. *Сучасні проблеми*

механіки: тези доп. VII міжнар. наук. конф., м. Київ, КНУ ім. Тараса Шевченка, 28–29 серпня 2023 р. Київ, 2023. с. 20.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	15
ВСТУП.....	18
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИХ МЕТОДІВ РОЗВ’ЯЗКУ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКАНОНІЧНИХ ОБЛАСТЕЙ	25
1.1 Огляд літературних джерел	25
1.2 Вибір напрямку дослідження	38
РОЗДІЛ 2. ВИПРОМІНЮВАННЯ ПЛОСКОГО ПОРШНЯ В КЛИНУВАТОМУ ХВИЛЕВОДІ	40
2.1 Випромінювання плоского поршня в нескінченному клинуватому хвилеводі	41
2.1.1 Математична модель задачі.....	41
2.1.2 Розв’язок задачі та аналіз чисельних розрахунків	43
2.2 Випромінювання двох плоских поршнів в нескінченному клинуватому хвилеводі	50
2.2.1 Математична модель задачі.....	50
2.2.2 Розв’язок задачі та аналіз чисельних розрахунків	51
2.3 Випромінювання плоского поршня в скінченному клинуватому хвилеводі.....	58
2.3.1 Математична модель задачі.....	58
2.3.2 Розв’язок задачі та аналіз чисельних розрахунків	61
2.4 Висновки до розділу	64
РОЗДІЛ 3. ДИФРАКЦІЯ ЗВУКУ НА ШУМОЗАХИСНОМУ БАР’ЄРІ	66
3.1 Класичний бар’єр	66
3.1.1 Математична модель задачі.....	66
3.1.2 Аналітичний розв’язок.....	68
3.1.3 Аналіз чисельних розрахунків.....	71

3.2 Бар'єр з резонатором.....	74
3.2.1 Математична модель задачі.....	74
3.2.2 Аналітичний розв'язок.....	75
3.2.3 Аналіз чисельних розрахунків.....	77
3.3 Висновки до розділу	82
РОЗДІЛ 4. РОЗСІЮВАННЯ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ НА СКІНЧЕННИХ	
КЛИНОПОДІБНИХ ОБ'ЄКТАХ	84
4.1 Постановка та побудова аналітичного розв'язку задачі розсіювання	84
плоскої хвилі на скінченних клиноподібних об'єктах	84
4.1.1 Гострий клин	84
4.1.2 Заокруглений клин	87
4.2 Перерізи розсіювання	91
4.3 Побудова чисельного алгоритму та перевірка виконання граничних умов	94
4.3.1 Гострий клин	94
4.3.2 Заокруглений клин	98
4.4 Аналіз чисельних розрахунків.....	100
4.5 Висновки до розділу	104
ВИСНОВКИ	105
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	108
ДОДАТОК. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ...	114

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Латинські символи

a	радіус заокруглення клину;
$A_n, B_n, C_n,$ D_n, E_n, F_n	амплітудні коефіцієнти мод;
c	швидкість звуку;
G	інтегральний просторовий критерій оцінки шумозахисних властивостей класичного бар'єру;
G_b	інтегральний енергетичний критерій бар'єру з резонатором;
H	висота бар'єру;
$H_\beta^{(1)}(kr)$	функція Ханкеля першого роду порядку β ;
I_s	інтенсивність розсіяної хвилі;
$J_{\beta_n}(kr)$	функція Бесселя порядку β_n ;
k	хвильове число;
L	довжина поршня;
$M(\theta_0)$	міделевий переріз (мідель);
N_i	кількість вузлових точок;
p	поле тиску;
p_s	поле тиску лінійного джерела звуку;
$ p $	модуль тиску;
P_i^{sk}	середній потік потужності з поверхні поршня при використанні середньоквадратичного наближення;
P_i^t	середній потік потужності з поверхні поршня при використанні поточкового спряження полів;
P_d^{sk}	середній потік потужності в дальній зоні при використанні середньоквадратичного наближення;

P_d^t	середній потік потужності в дальній зоні при використанні поточкового спряження полів;
r	координата полярної системи координат;
r_s	відстань від бар'єру до джерела звуку;
R	радіус дуги, яка розділяє дві області існування хвильового поля;
V	коефіцієнт відбиття;
W_D	потужність звукового поля, проникаючого в зону геометричної тіні класичного бар'єру за рахунок дифракції;
W_{Db}	потужність звукового поля, проникаючого в зону геометричної тіні бар'єру з резонатором за рахунок дифракції;
W_0	повна потужність, що випромінюється джерелом звуку;
x	координата декартової системи координат;
y	координата декартової системи координат;
\bar{Y}	нормована провідність.

Грецькі символи

δP	інтегральні критерії;
Δh	відстань між вузловими точками;
ΔL	просторовий розподіл різниці рівнів звукових тисків;
θ	координата полярної системи координат;
λ	довжина хвилі;
v	амплітуда коливальної швидкості на поверхні поршня;
v_n^*	нормальна швидкість на деякій поверхні S ;
$ v_r $	модуль радіальної швидкості;
$\sigma(\theta, \theta_0)$	позиційний переріз розсіювання;

$\sigma_L(\theta_0)$	переріз зворотного розсіювання;
$\sigma_S(\theta_0)$	повний переріз розсіювання;
ρ	густина середовища;
ϕ	розхил клину;
ψ	кут розкриття геометричної тіні;
ω	частота коливань поршня.

Нарядкові позначення

sk	середньоквадратичне наближення;
t	поточкове спряження полів;
+	парна складова;
–	непарна складова.

Підрядкові позначення

d	дальня зона;
i	поверхня поршня;
n	нормальна складова;
r	радіальна складова;
rez	резонатор.

Скорочення

МСЕ	метод скінченних елементів;
ГТД	геометрична теорія дифракції;
ФТД	фізична теорія дифракції.

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Актуальність дослідження граничних задач для неканонічних областей визначається широким спектром застосувань у різних галузях науки та техніки, включаючи математику, фізику, інженерію та інші. Неканонічні області представляють собою області простору зі складною геометрією, що відрізняється від класичних геометричних форм. Проблеми, пов'язані з розв'язанням граничних задач в таких областях, стають важливими при розробці нових математичних методів та чисельних алгоритмів. Зростаюча потреба в розв'язанні складних хвильових задач вимагає вдосконалених чисельно-аналітичних методів. Це стає особливо актуальним у випадках, коли традиційні методи, спрямовані на роботу з канонічними областями, виявляються неефективними або непридатними для вирішення відповідних граничних задач. Застосування отриманих результатів може бути виявлено в різних галузях, таких як акустична чи авіаційна інженерія, де потрібно розв'язувати граничні задачі в складних областях. Дослідження має потенціал для застосування в сучасних технологіях, що вимагають точних та ефективних методів обчислень для розробки нових пристроїв та технологій.

До задач акустичної інженерії належать задачі шумозахисту, в яких досліджується поширення звуку через перешкоди, такі як бар'єри або стіни, що є важливим для дизайну шумозахисних систем у будівництві, транспорті, промисловості та інших. Нині приділяється багато уваги науковим програмам, направленим на вивчення шумового забруднення міст і розробку заходів по його зниженню [2-4]. Особлива увага приділяється методу зменшення шуму за допомогою бар'єрів (акустичних екранів), які розташовуються між джерелами шуму та зоною, яку необхідно захистити. Такими зонами можуть бути житлові будинки, тротуари біля транспортних магістралей, робочі місця на виробництві. Причина популярності бар'єрів очевидна і пов'язана з їхньою відносно дешевою ціною та простотою використання. Ефект шумозахисту описаних бар'єрів зводиться до ефекту акустичного екранування, тобто, створення навколо об'єкту, який треба

захистити, зони звукової тіні. Переважну більшість публікацій, присвячених оцінкам розсіяних бар'єрами звукових полів, виконано з використанням наближених підходів, зокрема методів променевої акустики, Келлера та інших асимптотичних методів [5, 6]. Зазначені методи дозволяють отримувати хороші оцінки полів за бар'єром (в області його акустичної тіні) для випадків, коли висота бар'єру істотно перевищує довжину звукової хвилі, що падає на нього.

Можна виділити цілу серію статей, в яких досліджуються шумозахисні властивості бар'єрів з вбудованими в них конструкціями у вигляді резонаторів [7-12]. Ці дослідження проведені на основі чисельних методів. У більшості практичних випадків лівова частка звукової енергії транспортного та виробничого шуму лежить в області відносно низьких частот. Максимум енергії шуму припадає на область 50...200 Гц [13], що відповідає довжині хвилі 1.5...6 м. Реальна висота шумозахисних бар'єрів, які встановлюють біля транспортних магістралей, коливається від 3 до 6 м. При вивченні розсіювання звуку на тілах, які можна порівняти з довжиною звукової хвилі, необхідно використовувати строгі методи при постановці та розв'язанні відповідних задач дифракції [1]. В іншому випадку результати оцінок розсіяного поля можуть виявитися далекими від істини.

До задач авіаційної інженерії належать задачі стелс-технологій, або технологій, спрямованих на зниження помітності об'єктів. Вони включають в себе використання різних аспектів механіки для досягнення бажаного ефекту непомітності чи зменшення помітності об'єкту. Задачі про розсіювання хвиль на тілах різної конфігурації мають важливе теоретичне і прикладне значення, оскільки результати їх розв'язання можуть служити основою для побудови локаційних систем виявлення об'єктів і їх класифікації.

Важливою задачею при проектуванні літальних та надводних апаратів є зменшення їх радіолокаційної помітності. У випадку коли об'єкт (наприклад, літак) має складну форму, а його розміри становлять кілька довжин хвиль і більше, то для його однопозиційного (зворотного) або двопозиційного перерізу розсіювання характерні значні флуктуації значень при невеликій зміні кутів падіння

електромагнітної хвилі. Така складна картина виникає за рахунок явищ дифракції та подальшої інтерференції електромагнітної хвилі, відбитої від різних частин літака.

Задача стелс-технології полягає в максимально можливому зменшенні позиційного перерізу розсіювання різних об'єктів. Звичайно, багато прийомів і методів стелс-технологій є закритими відомостями, але основні принципи зниження радіолокаційної помітності вивчені та описані в літературі [14-19]. Стелс-технологія містить такі основні напрями: теорію дифракції на складних тілах, розробку і дослідження радіопоглинаючих матеріалів, технологію нанесення покриттів і, нарешті, радіофізичний експеримент, який використовується для контролю в кожному з перерахованих напрямів [14].

Нині стелс-технологія починається з математичного моделювання розсіювання електромагнітної хвилі на об'єкті, радіолокаційна помітність якого повинна бути знижена. Цей крок принциповий для попередньої оцінки досяжного результату і дозволяє оптимізувати форму і електрофізичні характеристики об'єкту. Математичні і розрахункові моделі базуються на розв'язанні граничних задач дифракції електромагнітних хвиль на тілах складної форми, які мають у своєму складі спеціальні матеріали і покриття. Можливості сучасної обчислювальної техніки дозволяють створювати програмне забезпечення для моделювання розсіювання електромагнітної хвилі навіть у таких складних об'єктах, як літаки і кораблі.

На світовому ринку пропонується декілька пакетів програм, які придатні для такого моделювання. Всі вони в розробці використовують "фасеткові" моделі об'єктів і метод фізичної теорії дифракції [20, 21]. Застосування асимптотичних і гібридних алгоритмів передбачає наявність чіткого уявлення про фізичні явища, які призводять до формування розсіяного поля в кожному конкретному випадку: дзеркальних відображеннях, дифракції на кромках та інших. При розрахунку позиційного перерізу розсіювання великих (в довжинах хвиль) складних тіл суттєво, що на відносно високих частотах можна виділити окремі фрагменти конструкції об'єктів, які при даному ракурсі вносять основний вклад в формування розсіяного поля. Це дає можливість проводити розрахунки для таких центрів розсіювання

незалежно один від одного, при необхідності враховуючи їх взаємний вплив на наступних етапах. Тому велика увага приділяється розробці і вдосконаленню відповідних електродинамічних моделей.

Класичною моделлю такого типу вважається клин. У цій моделі нескінченні границі враховуються з використанням результатів фізичної теорії дифракції, а поля в скінченній області простору поблизу ребра визначаються шляхом чисельного розв'язку рівнянь електромагнітного поля. Вивчення розсіювання хвиль на скінченних клиноподібних тілах викликає інтерес, оскільки форма таких тіл близька до форм деяких частин авіаційних, надводних і космічних об'єктів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в межах індивідуального плану аспіранта кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка, затвердженого вченою радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а також в межах державної бюджетної науково-дослідної теми № 22БП038-02 “Експрес діагностика міцності та витривалості новітніх бронематеріалів. Розробка макету стенду та математичних моделей динамічної поведінки новітніх бронематеріалів” (номер державної реєстрації 0122U001696, 2021–2022 рр.) Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є розробка та аналіз чисельно-аналітичних методів для розв'язання граничних задач, які виникають у неканонічних областях. Дослідження спрямоване на вивчення особливостей хвильових процесів в цих областях та розробку ефективних методів їх розв'язання.

Наукова новизна отриманих результатів. Наукова новизна роботи полягає в розширенні та вдосконаленні існуючих методів розв'язку граничних задач для неканонічних областей, а саме, використанню нетрадиційного підходу у вигляді поточкового спряження хвильових полів на границях часткових областей. Це відкриває можливість дослідження задач розсіювання і поширення хвиль в складних неканонічних областях, де використання традиційного підходу, наприклад, наближення в середньоквадратичному, наштовхується на певні складнощі.

Особистий внесок здобувача. Здобувач повністю провів огляд сучасного стану чисельно-аналітичних методів роз'язку граничних задач для неканонічних областей та виконав всі етапи побудови чисельних алгоритмів поставлених задач. Здобувач брав активну участь у побудові математичних моделей, постановці граничних задач, обговоренні отриманих результатів та підготовці наукових публікацій та доповідей на наукових конференціях. Результати дисертаційного дослідження отримані здобувачем відображено у 2 наукових працях без співавторів [22, 23]; у 6 наукових працях, опублікованих разом з д-р фіз.-мат. наук В. Т. Маципуною [24-29]; у 4 наукових працях, опублікованих разом з д-р фіз.-мат. наук В. Т. Грінченком [24-26, 29]; у 3 наукових працях, опублікованих разом з та д-р фіз.-мат. наук І. В. Вовком [25, 26, 29]; у 2 наукових працях, опублікованій разом з канд. фіз.-мат. наук О. В. Борисейком [27, 28], де співавторам належить участь у обговоренні постановки задачі та отриманих результатів.

Апробація матеріалів дисертації. Результати дисертаційної роботи були представлені на таких наукових конференціях:

- *Сучасні проблеми механіки: VI Міжнародна наукова конференція*, м. Київ, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 30–31 серпня 2021 р.
- *Сучасні проблеми механіки: VII Міжнародна наукова конференція*, м. Київ, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 28–29 серпня 2023 р.

Публікації. За результатами дисертаційного дослідження опубліковано 8 наукових праць. З них 3 статті – у наукових виданнях, включених до переліку наукових видань України [22, 24, 27]; 2 статті – у періодичних наукових виданнях інших держав, проіндексованих у базі даних Scopus [25, 26]; 3 тези доповідей на наукових конференціях [23, 28, 29].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох основних розділів, висновків, списку використаних джерел з 54 найменувань та додатку. Робота включає 27 рисунків, загальний обсяг – 115 сторінок.

У **Вступі** надано обґрунтування вибору теми дисертації, висвітлено зв'язок теми з сучасними дослідженнями, зазначено мету і завдання дослідження, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

В **Розділі 1** проведено огляд результатів досліджень чисельно-аналітичних методів розв'язку граничних задач для неканонічних областей і вибрано напрямок дослідження в дисертаційній роботі.

В **Розділі 2** досліджується можливість використання поточкового спряження хвильових полів в методі часткових областей при розв'язанні задач про випромінювання плоского поршня в нескінченному клинуватому хвилеводі та в скінченному клинуватому хвилеводі. Для переходу від рівнянь з невідомими коефіцієнтами до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь використовуються два підходи. Перший підхід – середньоквадратичне наближення, який вважається традиційним та випробуваним. Другий підхід – поточкове спряження полів, який є нетрадиційним підходом до спряження хвильових полів. Аналіз результатів розрахунків проводиться для обох підходів.

В **Розділі 3** досліджується можливість використання поточкового спряження звукових полів в методі часткових областей при розв'язанні задач дифракції звуку на класичному бар'єрі та на бар'єрі з резонатором, який розташований на краю бар'єру. При розв'язанні використовуються два підходи - середньоквадратичне наближення та поточкове спряження полів. Аналіз результатів розрахунків проводиться для обох підходів.

В **Розділі 4** досліджується можливість використання поточкового спряження хвильових полів в методі часткових областей при розв'язанні задачі розсіювання хвилі на моделях скінченних клиноподібних об'єктів за наявності у них поверхонь значних хвильових розмірів. Розглядаються дві моделі скінченного клину: гострого та заокругленого. При розв'язанні використовуються два підходи - середньоквадратичне наближення та поточкове спряження полів. Аналіз результатів розрахунків проводиться для обох підходів.

У **Висновках** викладено основні результати дослідження.

В **Додатку** наведено список наукових публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗКУ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКАНОНІЧНИХ ОБЛАСТЕЙ

В даному розділі проводиться огляд сучасного стану чисельно-аналітичних методів розв'язку граничних задач для неканонічних областей. В підрозділі 1.1 проводиться огляд літературних джерел, які містять результати досліджень чисельно-аналітичних методів розв'язку граничних задач для неканонічних областей інших дослідників. В підрозділі 1.2 описується вибір напряму дослідження.

1.1 Огляд літературних джерел

Зрозуміло, що аналітичні методи можуть мати справу лише з невеликою множиною задач. Аналітичні методи мають вирішальне значення з багатьох причин. Але ми не можемо сподіватися використовувати їх для розв'язання складних задач, які демонструють неоднорідність або геометричну складність. Чисельні методи дозволяють розв'язувати складні задачі, для яких немає аналітичних розв'язків або вони є надто складними, а також дозволяють моделювати складні геометричні структури та неоднорідності, що часто важко або навіть неможливо зробити аналітичними методами. Деякі задачі можуть бути розв'язанні чисельно швидше, ніж аналітичними методами. Чисельні методи можуть бути ефективнішими з точки зору обчислювальних ресурсів. Незважаючи на ці переваги, чисельні методи також можуть мати свої обмеження, такі як потреба у великій кількості обчислювальних ресурсів, можливість накопичення чисельних помилок та необхідність перевірки результатів на фізичну обґрунтованість. У багатьох випадках комбінація обох методів може бути найефективнішою для розв'язання конкретної задачі. Чисельно-аналітичні методи, в порівнянні з просто чисельними методами, використовують деякі аналітичні розв'язки для побудови загального алгоритму методу.

Використання аналітичних розв'язків дозволяє отримати формулювання задачі у вигляді співвідношень, які мають меншу розмірність порівнюючи з початковим формулюванням. Здебільшого вихідна гранична задача зводиться до деякої системи співвідношень, яка формулюється на границі області.

Метод часткових областей застосовується при дослідженні задач про випромінювання і розсіювання хвиль різної природи. Згідно з цим методом вся складна область існування хвильового поля розбивається на прості області, в кожній з яких вдається побудувати загальний розв'язок рівняння Гельмгольца. Після цього виникає необхідність спряження цих розв'язків на границях часткових областей і, при необхідності, задоволення граничних умов на певних граничних поверхнях та поверхнях випромінювачів. В роботі [30] методом часткових областей розв'язано задачу про розсіювання звуку на шумозахисному бар'єрі.

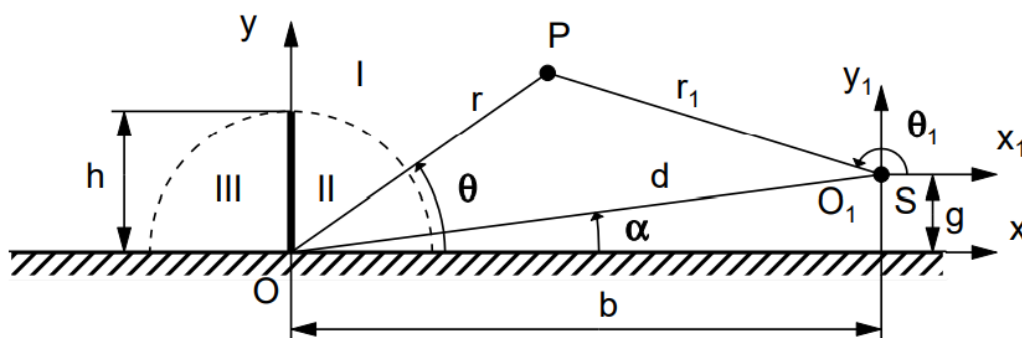


Рис. 1.1. Геометрія шумозахисного бар'єру

Розроблено ефективний алгоритм для чисельного аналізу звукового поля в освітленій, перехідній та тінювій зонах. Проведені розрахунки звукового поля в дальній зоні та поблизу бар'єру в широкому діапазоні частот, а також при різних варіантах розміщення джерела відносно бар'єру. Наведені два приклади оцінки ефективності бар'єрів для цікавих з практичної точки зору випадків.

Традиційний шлях підвищення ефективності бар'єрів за рахунок нарощування їх висоти в багатьох випадках стає неприйнятним як з економічної, так і з естетичної точок зору. У зв'язку з цим останнім часом розпочався інтенсивний пошук методів

підвищення ефективності властивості шумозахисту бар'єрів, які не супроводжувалися б збільшенням їхньої висоти. В роботі [31] запропоновано одну з можливих конструктивних схем бар'єру підвищеної ефективності та теоретичний метод для оцінки його акустичних характеристик.

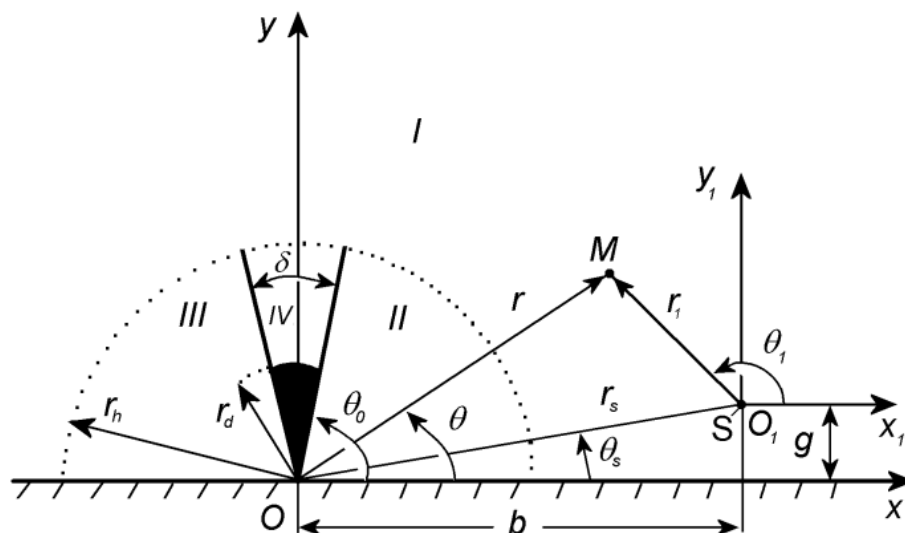


Рис. 1.2. Геометрія шумозахисного бар'єру

За допомогою метода часткових областей проведено ефективне чисельно-аналітичне моделювання звукового поля, розсіяного бар'єром. Результати обчислень відображено в наочній графічній формі. Показано й обґрунтовано перевагу такого типу бар'єра у порівнянні з традиційним (у вигляді простої стінки).

При проектуванні реальних бар'єрів найчастіше виявляються корисними узагальнені оцінки їх властивості шумозахисту, які б дозволили вибрати ту чи іншу конструкцію, не вдаючись до докладного аналізу структури акустичних полів. В роботі [32] запропоновано інтегральний критерій, який дозволяє оцінювати властивості шумозахисту акустичних бар'єрів:

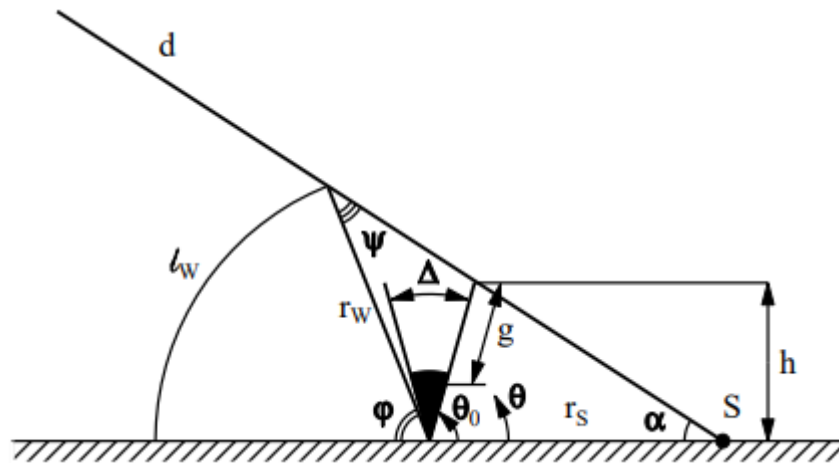


Рис. 1.3. Геометрія V-подібного шумозахисного бар'єру

Проведено порівняльний аналіз ефективності шумозахисту за допомогою класичного і V-подібного бар'єрів. Показана доцільність практичного застосування V-подібних бар'єрів.

Нині поряд з класичними бар'єрами широко застосовуються Г-подібні бар'єри. В роботі [33] методом часткових областей розв'язано задачу про розсіювання звуку на шумозахисному Г-подібному бар'єрі:

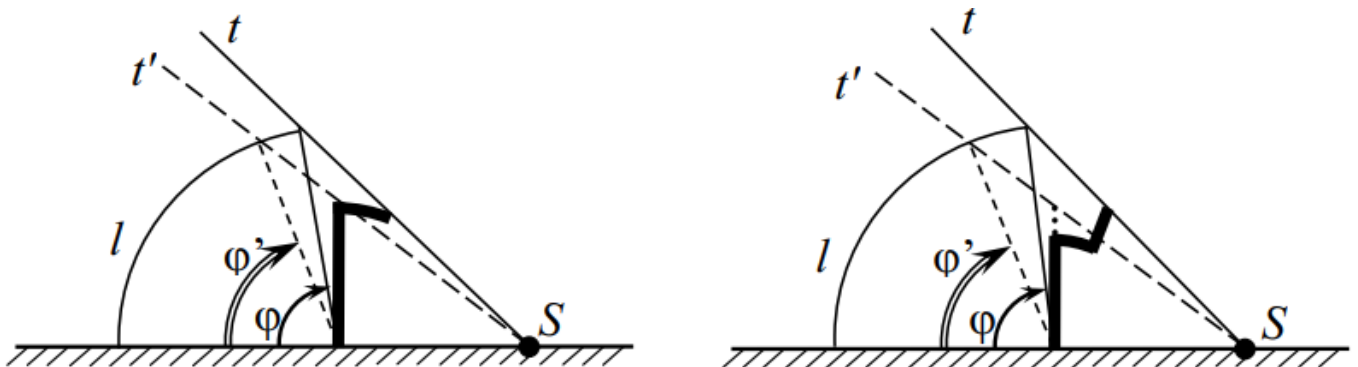


Рис. 1.4. Геометрія Г-подібних шумозахисних бар'єрів

Розроблено алгоритм для обчислення звукового поля в освітленій, перехідній і тінювій зонах. Порівняльний аналіз ефективності шумозахисту виявив перевагу Г-

подібного бар'єру у порівнянні з класичним (у вигляді простої стінки). Розроблені практичні рекомендації щодо застосування розглянутих типів бар'єрів.

В роботі [34] описано вдосконалений спосіб застосування методу часткових областей до випадків, коли суміжні області перетинаються. Показано, що на кожній з меж області перетинання можна задати одну з умов: рівність функцій з обох сторін межі, або рівність нормальних похідних функцій. Особливість застосування такого підходу полягає у тому, що значення хвильового числа задачі не повинно співпадати з власним хвильовим числом області перетинання часткових областей. Але при проведенні чисельних розрахунках, вказане обмеження не являє собою перешкоду до застосування даного підходу.

В статті [35] розглянуто застосування методу часткових областей при дослідженні звукового поля в акустичному рупорі, який застосовується в приладі для об'єктивної експрес-діагностики слуху людини.

В статті [36] розглянуто акустичну антену, відбивач якої виконаний у вигляді акустично жорсткого екрану, а джерелом звуку є циліндричний п'єзокерамічний перетворювач з радіальною поляризацією. Висота випромінювача вважається нескінченно великою, тому розподіл швидкостей рівномірний. Внутрішній об'єм перетворювача заповнений вакуумом або газом. Задача випромінювання звуку такою антеною розв'язана з використанням методів зв'язаних полів і часткових областей. Всі фізичні поля антени представлені у вигляді розкладу в ряди Фур'є, коефіцієнти яких визначаються в результаті розв'язку диференціальних рівнянь, що описують електропружні коливання п'єзокерамічного перетворювача і хвильові процеси в акустичних середовищах, що контактують з ним. Розв'язок задачі випромінювання звуку зведено до розв'язку методом редукції нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Аналіз звукових полів, які виникають при випромінюванні і розсіюванні звуку, зустрічається в різноманітних застосуваннях акустики. Однією з найбільш широких областей, в якій використовуються розрахунки звукових полів, є суднобудівна акустика. При вивченні акустичних характеристик конструкцій суден і

акустичних пристроїв доводиться обчислювати параметри звукових полів, які пов'язані з випромінюванням звуку складними конструкціями, дифракцією звуку на корпусі судна, визначенням акустичних характеристик пружних пластин і оболонки. В монографіях [37, 38] викладені основні питання, пов'язані з випромінюванням та розсіюванням звукових хвиль в гідроакустиці. Розглянуті методи розрахунку звукових полів для гідроакустичних випромінювачів складної форми і методи визначення характеристик звукових полів, розсіяних перешкодами. Розглянуті методи пов'язані із застосуванням інтегральних рівнянь для розв'язання задач випромінювання та дифракції хвиль тілами складної форми. Велике практичне та теоретичне значення має розв'язок задачі про дифракцію хвиль на ребрі клину. Не дивлячись на те, що ця задача належить до числа класичних, потік наукових статей в цій області не зменшується. У вказаних роботах розглянуто задачі дифракції і випромінювання звуку в клинуватій області. Розглянуто падіння на клин циліндричної, плоскої та сферичної хвиль. Вивчаються властивості звукопоглинаючих екранів і розглянуто клин з імпедансними гранями. Наведені в монографіях матеріали є основою аналізу акустичних характеристик різних конструкцій. Книги розраховані на широке коло людей, які займаються розрахунками звукових полів у гідроакустиці, суднобудуванні та архітектурній акустиці.

В роботі [39] запропонований метод розв'язку задачі дифракції звуку на поверхні довільної форми, який поєднує розділення змінних в рівнянні Гельмгольца з розв'язком інтегрального рівняння для внутрішньої області. Розглянуті граничні умови Діріхле та Неймана (акустично м'яка та жорстка поверхня відповідно), а також випадок перешкоди у вигляді деякого об'єму рідини, яка відрізняється густиною та стисливістю від аналогічних параметрів навколишнього середовища. Надалі метод був поширений на пружні тіла. У низці робіт цей метод називають методом Т-матриць. Розсіяне звукове поле визначається набором циліндричних хвиль, які розходяться, причому коефіцієнти виражаються матричним добутком стовпця коефіцієнтів для розкладу падаючої на тіло хвилі та матриці переходу (Т-матриці). Сама Т-матриця знаходиться у вигляді матричного добутку. Т-матриця не

залежить ні від напрямку падіння звуку, ні від положення точки спостереження, а визначається лише формою тіла та граничними умовами. Метод Т-матриць забезпечує існування та єдиність розв'язку при будь-яких хвильових розмірах тіла. Він дозволяє отримувати розв'язок при тих частотах, при яких застосування методів, пов'язаних з інтегральними рівняннями, неможливе через виникнення резонансних явищ.

Викладений вище метод Т-матриць заснований на з'єднанні рівняння для внутрішньої області з розкладом поля в ряд по деякій системі хвильових функцій. На цій же ідеї заснований метод нульового поля, детально досліджений в роботі [40]. Назва методу пов'язана з тим, що в його основу покладено співвідношення, згідно якого поле обертається в нуль, якщо точка спостереження переходить у внутрішню область. Метод Т-матриць та метод нульового поля схожі. Метод Т-матриць іноді називають методом нульового поля. Різниця між ними полягає в тому, що в методі Т-матриць обчислюють відразу зовнішнє поле, а в методі нульового поля – спочатку визначають коефіцієнти розкладу для поля на поверхні.

В роботі [41] запропоновано метод отримання аналітичного розв'язку зовнішньої стаціонарної двовимірної граничної задачі для рівняння Гельмгольца в областях досить довільної форми з граничними умовами першого та другого роду. Розв'язок побудовано у вигляді суми інтегралів по відрізкам контурів у площині комплексної змінної. Проведена методика отримання асимптотики розв'язку у вигляді простих аналітичних виразів. Підсумкові вирази дуже зручні і нагадують роботи Зоммерфельда. Як приклад застосування розробленої методики отримано аналітичний вираз розв'язку задачі розсіювання плоскої хвилі на напівплощині, що має скінченну товщину.

Розв'язок граничних задач, для тіл довільної форми, методом інтегральних рівнянь, як і іншими чисельними методами, дуже громіздкий. Однак, якщо обмежитися тілами обертання, що широко використовуються в різних областях техніки, то, як впливає з роботи [42], найбільш вдалим є поєднання методів інтегральних рівнянь та власних функцій. Головну роль при цьому відіграє кутова координата. По цій координаті шукані поля розкладаються в ряд Фур'є та поля

окремих гармонік в силу ортогональності виявляються незалежними. Це дозволяє для кожної кутової гармоніки побудувати порівняно просте інтегральне рівняння, яке розв'язується чисельно. В такому вигляді метод інтегральних рівнянь зручний для дослідження задач випромінювання та розсіювання.

В монографії [43] викладені методи і результати теорії аналітичного продовження класичних розв'язків граничних дифракційних і статистичних задач математичної фізики, а також критерії застосування найбільш поширених представлень розв'язків подібних граничних задач, що використовуються, зокрема, в чисельних наближених методах. Справа в тому, що існування шуканих розв'язків пов'язане з розташуванням та характером особливостей аналітичного продовження розв'язків в область, де в класичній постановці воно не розглядається (область, яка обмежена поверхнею розсіюючого тіла, або зовнішня необмежена область для внутрішніх задач). Дослідження цих особливостей є головною темою книги. Об'єктом дослідження є математичні моделі розсіювання електромагнітних хвиль на ідеально провідних обмежених тілах (або необмежених поверхнях) в однорідному просторі або аналогічні математичні моделі розсіювання акустичних хвиль, тобто задачі радіо- або гідролокації, розрахунку антенних пристроїв.

Для побудови розв'язку граничних задач випромінювання і розсіювання можна користуватися концепцією квазірозв'язку. Суть цієї концепції полягає в побудові якоїсь аналітичної конструкції, яка точно відповідає всім умовам граничної задачі, за винятком граничних умов на поверхні випромінюючого або розсіюючого тіла. Параметри обраної конструкції визначаються з задоволення граничним умовам в деякій нормі. Це досягається за допомогою використання обчислювального алгоритму. Таким чином, гранична задача випромінювання або розсіювання у всьому просторі зводиться до розв'язання задачі апроксимації на поверхні локального розсіювача чи випромінювача. Фундаментальну роль при обґрунтуванні концепції квазірозв'язку відіграє той факт, що, апроксимуючи граничну умову в деякій нормі, ми забезпечуємо близькість наближеного розв'язку до точного у всій області існування хвильового поля. Одним із найбільш ефективних засобів побудови квазірозв'язку граничної задачі служить метод точкових джерел. Суть його полягає

у використанні скінченної лінійної комбінації полів елементарних джерел – монополів, диполів і мультиполів. Таке представлення розв’язку задовольняє рівнянню Гельмгольца і умові випромінювання на нескінченності, а невідомі амплітуди визначаються з умови близькості граничних значень полів у деякій нормі. Таким чином, побудова розв’язку в межах методу точкових джерел зводиться до задачі апроксимації граничних умов полями точкових джерел на поверхні локального розсіювача або випромінювача. Основи такого підходу були закладені і опубліковані в роботах [44] та [45].

В монографії [46] описані строгі методи розв’язання задач дифракції хвиль на конічних, біконічних та клиноподібних розсіювачах. Розглядаються скалярні та векторні дифракційні задачі для розсіювальних структур в однорідних та кусково-однорідних середовищах. Розв’язки деяких з них публікуються вперше. Наведені задачі виникають у зв’язку з дослідженням взаємодії хвиль різної фізичної природи зі структурами, які містять у собі різні типи геометричних особливостей та змінну кривизну поверхні. Запропоновані методи аналізу орієнтовані на вивчення процесів розсіювання у широкому частотному діапазоні і можуть використовуватись у дефектоскопії, фізиці міліметрових та субміліметрових хвиль, електроніці.

Важливу роль у теорії дифракції відіграють дослідження розсіювання електромагнітних (акустичних, пружних) хвиль фрагментами ідеально провідних (жорстких, м’яких) конічних, клиноподібних та циліндричних поверхонь. Такі задачі є моделями для вивчення багатьох фізичних явищ, пов’язаних з формуванням хвильових полів у структурах зі сингулярностями та змінною кривиною. За використання сучасних числових методів розв’язування таких задач залишаються відкритими питання про коректність розв’язків, їх знаходження у необхідному класі послідовностей, обґрунтованість редукції нескінченних систем лінійних алгебричних рівнянь. Гостра потреба у правильних відповідях на них постає під час аналізу екстремальних ситуацій, де імовірність виявити нові фізичні ефекти висока, наприклад, під час аналізу полів у резонансному частотному діапазоні, за переходу до надвисоких частот, визначення поля в ближній зоні, зокрема, в околі сингулярних точок поверхні. Очевидним є і те, що для верифікації найуживаніших більш

загальних наближених підходів, коли не завжди вдається визначити межі застосовності, необхідні методи, які б надійно працювали у широкому діапазоні зміни геометричних розмірів і частотного параметра. В роботі [47] наведено огляд праць з розвитку методів аналітичної регуляризації для розв'язання мішаних крайових задач теорії дифракції. Розглянуто задачі дифракції електромагнітних та акустичних хвиль на фрагментах конічних, клиноподібних і циліндричних ідеальних поверхонь, а також пружних хвиль на міжфазних тріщинах. Для розв'язання цих задач розвинуто метод часткового обернення оператора та метод Вінера–Хопфа.

Одним із важливих напрямів у сучасній радіофізиці є дослідження хвильових процесів у відкритих, нерегулярних та періодичних структурах, окремими випадками яких є плоскі кутові сектори, незамкнуті конуси та біконуси, конічні та біконічні ґратки. Задачі даного класу постійно висувуються практикою у зв'язку з потребами антенної техніки, мікроелектроніки, радіолокації, освоєнням міліметрових та субміліметрових діапазонів довжин хвиль тощо. Такі структури використовуються при створенні радіофізичної та радіотехнічної апаратури, де вони відіграють роль елементів антен та відбивачів, ліній передачі, захисних систем, приладів та пристроїв вимірювальної техніки. Наявність у цих структур вершин і ребер дозволяє використовувати їх як моделі зондів або самих об'єктів контролю. В монографії [48] описані методи розв'язку задач дифракції електромагнітних хвиль на незамкнених конічних структурах, розроблені на основі теоретичних досліджень, математичного моделювання та аналізу формування електромагнітних полів об'єктами з характерними кутовими параметрами та геометричними сингулярностями (вершинами, ребрами). Запропоновано математичний апарат для розв'язання нестационарної задачі дифракції електромагнітних хвиль на складній конічній поверхні з повздовжніми щілинами без апріорних обмежень на геометричні розміри структури. В результаті апробації моделей отримана достовірна інформація про особливості, закономірності та фізичну природу ефектів, що з'являються при дифракції електромагнітних хвиль на складних незамкнених конічних поверхнях.

Асимптотичні методи грають важливу роль у розв'язанні граничних задач, особливо там, де аналітичні розв'язки складні або недоступні. Однак ступінь

застосування цих методів може залежати від конкретної фізичної задачі, її складності та обсягу даних. В роботі [49] викладена геометрична теорія дифракції (ГТД) – ефективний метод аналізу і розрахунку поширення, випромінювання, розсіювання хвильових полів. Ця теорія використала та узагальнила наочну та звичну систему образів та понять геометричної оптики. Вона має широку область застосування: антенна техніка, лазерна техніка, а також проблеми поширення та розсіювання хвиль в неоднорідних середовищах та на тілах складної форми. Методи ГТД узагальнюють відомі методи фізичної оптики (апертурний метод, наближення Кірхгофа). Вони забезпечують точність, порівняну і (для малих довжин хвиль) переважаючу точність, яка досягається чисельними методами (наприклад, методом інтегральних рівнянь). Розв’язки, отримані в ГТД, мають вигляд явних, хоч і масивних формул. Розрахунок полів по цим формулам займає суттєво менше часу, чим розрахунок іншими методами. Це дозволяє використовувати ГТД для розв’язання обернених задач. ГТД можна розглядати так само, як асимптотичну (при $k \rightarrow \infty$) теорію розв’язків рівняння Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$, тобто як розділ математики. Форма, в якій відшукується розв’язок в ГТД, – це асимптотичний розклад розв’язку при $k \rightarrow \infty$. Алгоритми ГТД дозволяють знайти головний, а іноді і декілька наступних членів цього розкладу. ГТД можна розглядати як розділ фізики, який вивчає двовимірні та тривимірні хвильові процеси та який оперує власною системою образів (променевих, каустичних, напівтіньових полів і т.д.). ГТД вивчає процеси взаємного збудження цих полів при взаємодії з розсіюючими тілами і закони їх подальшого поширення у вільному просторі. В книзі викладається ГТД в формулюванні, яке дано в початкових роботах Келлера. Розглядаються різні типи хвильових полів, з яких складається повний розв’язок, променеві поля, каустичні, напівтіньові та крайові хвилі. Обговорюється співвідношення між ГТД і наближенням Кірхгофа, а також показано, як застосовувати побудовану систему образів до розв’язання конкретних задач, тобто як збирати з деталей готові вироби.

Фізична теорія дифракції (ФТД) досліджує розсіювання хвиль на тілах складної форми, лінійні розміри яких великі в порівнянні з довжиною хвилі. Початок цієї теорії було покладено в ранніх роботах Уфимцева. Результати цих

публікацій були потім підсумовані в монографії [50]. В роботі [51] вперше представлено повне та детальне викладення сучасної ФТД, заснованої на теорії елементарних крайових хвиль. В ній вивчається дифракція акустичних і електромагнітних хвиль на ідеально відбиваючих тілах. ФТД має різноманітні застосування. Зокрема, ФТД була з успіхом використана при проектуванні американських літаків Stealth-Fighter F-117 і Stealth-Bomber B-2, невидимих для радарів. В рамках ФТД розсіяне тілом поле розглядається як випромінювання, яке створюється джерелами, які збуджуються падаючою хвилею на поверхні тіла. У випадку електромагнітних хвиль і металевих тіл такими джерелами є поверхневі електричні заряди і струми. У випадку акустичних хвиль це акустичний тиск на жорстких тілах або нормальна швидкість частинки середовища на м'яких тілах. Перевага такого підходу (в порівнянні з теоріями, які засновані на геометрії променів) полягає в тому, що він дозволяє обчислити розсіяне поле всюди, включно з такими областями, як окіл границь тіні, фокусів і каустик, де дифракційне поле не має променевої структури. Центральною та оригінальною ідеєю ФТД є розділ поверхневих джерел на так звані рівномірну і нерівномірну компоненти. В цій книзі рівномірна компонента в заданій точці на освітленій стороні тіла приймається такою ж, як на нескінченній площині, дотичній до поверхні тіла в цій точці. Така площина також вважається ідеально відбиваючою. У випадку падаючої хвилі з променевою структурою рівномірна компонента визначається згідно з геометричною оптикою (геометричною акустиком) для електромагнітних (акустичних) хвиль. Величина поля, обчисленого шляхом інтегрування рівномірної компоненти, є високочастотною апроксимацією реального розсіяного поля. В акустичних задачах дифракції таку апроксимацію зазвичай називають наближенням Кірхгофа. В електродинамічних задачах дифракції вона відома як наближення фізичної оптики (ФО). ФТД є природнім узагальненням ФО і враховує вклад в розсіяне поле, створюваний нерівномірною компонентою, яка має дифракційну природу і обумовлена будь-яким відхиленням реальної розсіюючої поверхні від нескінченної площини. В книзі запропоновано нову фізичну інтерпретацію класичного наближення ФО. Значна частина книги присвячена теорії елементарних крайових

хвиль (ЕКХ) і її застосуванню. ЕКХ – це хвиля, яка випромінюється поверхневими джерелами, які збуджуються в околі нескінченно малого елемента ребра. Побудовані високочастотні асимптотики для ЕКХ, які дозволяють досліджувати дифракцію на тілах з плавно викривленими ребрами в масштабі довжини хвилі. ЕКХ можна також інтерпретувати як елементарні крайові промені, які розходяться від кожної освітленої точки на ребрі. Поле в наближенні ФО також можна інтерпретувати як лінійну суперпозицію іншого типу елементарних променів. Тому ФТД можна розглядати як променеву теорію на рівні елементарних променів. Загальна теорія елементарних хвиль застосовується в цій книзі до розв'язання низки дифракційних задач. Теорія, розвинута в книзі, може бути корисною при розв'язанні різноманітних практичних задач. Серед них можна відмітити проектування мікрохвильових антен, розпізнавання радіолокаційних цілей, поширення хвиль в міських умовах і т.д. В комбінації з чисельними методами вона може бути використана при побудові ефективних гібридних схем для дослідження складних дифракційних задач.

При розробці малопомітних систем озброєння, таких як бойові літаки або ракети, врахування їх перерізів розсіювання має першочергове значення. Стратегічним чи тактичним літкам у бойових діях загрожують літаки-перехоплювачі, ракети класу "земля-повітря" та зенітна артилерія. Навіть ракети не захищені від цієї загрози. Одним із заходів, що використовуються для зниження або усунення цієї загрози, є мінімізація перерізу радіолокаційного та лазерного розсіювання. Можливості сучасних радарів з обробки та відстеження великої кількості цілей в умовах ворожого поля бою та сильних перешкод значно покращилися за останні роки. Крім радарів, для виявлення, відстеження та ідентифікації цілей використовується безліч інших типів датчиків. Хоча перерізи розсіювання всіх датчиків викликають занепокоєння, коли йдеться про дальнє раннє попередження, переріз розсіювання радара залишається головним фактором. Це завжди було актуально для літаків і, в деякій мірі, кораблів, але навіть для інших потенційних цілей радіолокації, таких як наземні транспортні засоби, танки і навіть особовий склад, радіолокаційний переріз розсіювання став важливим фактором при

їх розробці та експлуатації. В роботі [52] розглядаються фізичні та інженерні аспекти цього підходу до розробки систем озброєння. Важливою особливістю цієї книги є те, що вона включає інформацію про зниження як радіолокаційного, так і лазерного поперечного перерізу розсіювання. В роботі наведено опис радарів та радіолокаційних перерізів розсіювання. Розглянуто основні теореми, концепції та методи зниження радіолокаційного та лазерного перерізів розсіювання. Детально розглянуто наближення фізичної оптики та поверхневий імпеданс. Розглянуто чисельні методи в частотній області. Докладно розглянуто метод моментів, він використовується як можливість проілюструвати загальний підхід до розв'язання інтегральних рівнянь. Додано коротке обговорення методу скінченних елементів. Обговорюються розв'язки диференціальних та інтегральних форм рівнянь Максвелла у часовій області, насамперед метод скінченних різниць. Представлено мікрохвильову оптику з акцентом на геометричну оптику та геометричну теорію дифракції. Обговорюються методи зменшення форми, дизайн та вибір матеріалів. До книги входять деякі основні відомості про електромагнітну поведінку метаматеріалів і про те, як вони проектуються та конструюються для забезпечення широкого діапазону проникності.

1.2 Вибір напрямку дослідження

Розробка ефективних чисельно-аналітичних методів розв'язку граничних задач для неканонічних областей та дослідження особливостей хвильових процесів в задачах випромінювання та розсіювання звуку є напрямом дослідження дисертаційної роботи. Вибір зазначеного напрямку дослідження зумовлений тим, що потреба в розв'язанні складних хвильових задач вимагає вдосконалених чисельно-аналітичних методів. Тому актуальною проблемою залишається підвищення ефективності чисельно-аналітичних методів розв'язку граничних задач. Дана дисертація є спробою зробити певний внесок у вирішення цієї проблеми. Мета роботи досягається завдяки використанню нетрадиційного підходу до спряження

хвильових полів, поточкового спряження, в методі часткових областей на прикладі розв'язання наступних граничних задач випромінювання та розсіювання звуку:

- випромінювання плоского поршня в клинуватому хвилеводі нескінченної та скінченної довжини;
- дифракція звуку на шумозахисному бар'єрі;
- розсіювання хвилі на скінченних клиноподібних об'єктах.

Метод часткових областей дозволяє побудувати ефективні чисельно-аналітичні розв'язки подібних задач для широкого діапазону зміни параметрів об'єктів. Для контролю можливості використання поточкового спряження полів, у розглянутих задачах використовується також класичний підхід середньоквадратичного наближення полів на границях часткових областей. Отримані результати вказують на успішне застосування поточкового спряження хвильових полів в методі часткових областей на прикладі розв'язання різних типів граничних задач. Це свідчить про універсальність поточкового спряження хвильових полів та широкий спектр застосування, що робить його ефективним інструментом для розв'язання граничних задач для неканонічних областей.

РОЗДІЛ 2

ВИПРОМІНЮВАННЯ ПЛОСКОГО ПОРШНЯ В КЛИНУВАТОМУ ХВИЛЕВОДІ

В даному розділі досліджується можливість використання поточкового спряження хвильових полів в методі часткових областей на прикладі розв'язання задач про випромінювання плоского поршня в клинуватому хвилеводі.

В підрозділі 2.1 розглядається задача про випромінювання плоского поршня в нескінченному клинуватому хвилеводі.

В підрозділі 2.1.1 будується математична модель задачі.

В підрозділі 2.1.2 будується розв'язок задачі та проводиться аналіз чисельних розрахунків. Для переходу від рівнянь з невідомими коефіцієнтами до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь використовуються два підходи - середньоквадратичне наближення та поточкове спряження полів.

В підрозділі 2.2 розглядається задача про випромінювання двох плоских поршнів в нескінченному клинуватому хвилеводі.

В підрозділі 2.2.1 будується математична модель задачі.

В підрозділі 2.2.2 будується розв'язок задачі та проводиться аналіз чисельних розрахунків.

В підрозділі 2.3 розглядається задача про випромінювання плоского поршня в скінченному клинуватому хвилеводі.

В підрозділі 2.3.1 будується математична модель задачі.

В підрозділі 2.3.2 будується розв'язок задачі та проводиться аналіз чисельних розрахунків. Для переходу від рівнянь з невідомими коефіцієнтами до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь використовуються комбінації двох підходів - середньоквадратичного наближення та поточкового спряження полів, що робить метод більш гнучким.

2.1 Випромінювання плоского поршня в нескінченному клинуватому хвилеводі

2.1.1 Математична модель задачі

Розглядається задача про випромінювання поршня в нескінченному клинуватому хвилеводі (рис. 2.1). Задача плоска, тобто відсутня залежність хвильового поля від однієї з просторових координат (на рис. 2.1 це координата z декартової системи координат xOy). Поверхні хвилеводу вважаємо ідеально жорсткими, тобто, дорівнює нулю нормальна складова коливальної швидкості на цих поверхнях.

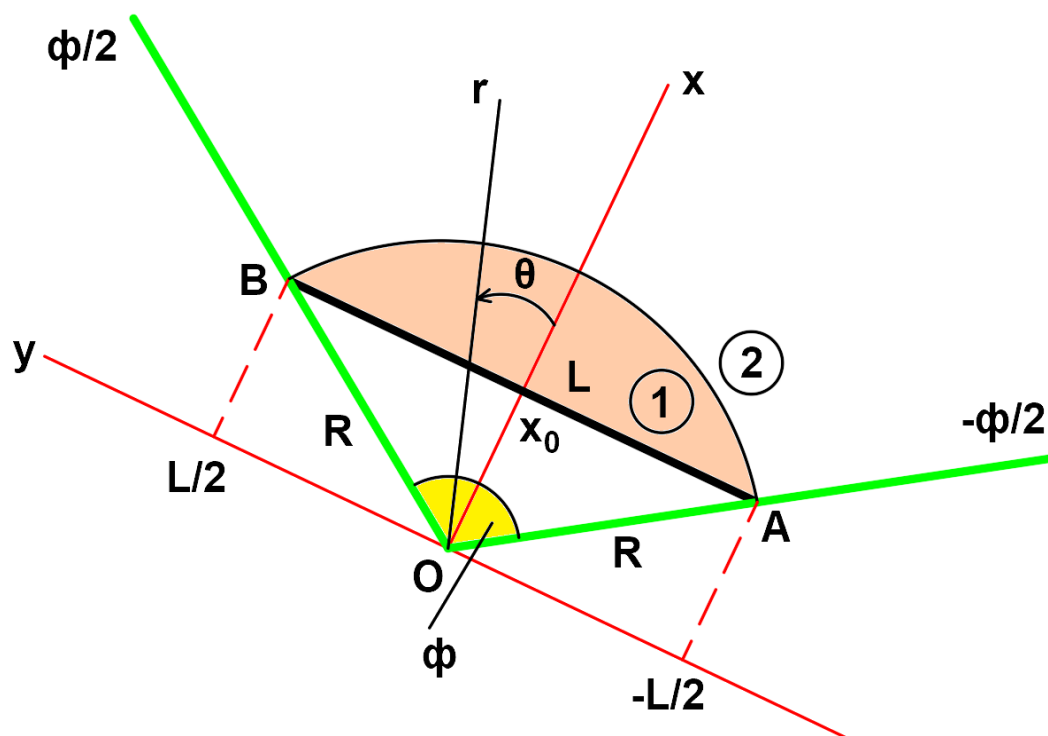


Рис. 2.1. Геометрія задачі про випромінювання плоского поршня в нескінченному клинуватому хвилеводі

Згідно рис. 2.1, R – радіус дуги, L – довжина поршня AB , ϕ – розхил клину. Для опису полів в часткових областях слід використовувати дві системи координат: декартову (координати xOy) і полярну (координати $rO\theta$). Зв'язок між декартовими

і полярними координатами визначається формулами: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$;
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan \theta = y / x$.

Поршень здійснює гармонічні коливання з частотою ω . На поверхні поршня задається амплітуда коливальної швидкості $v(x = x_0, y)$. Нехай розподіл швидкості на поверхні поршня є симетричним відносно середини поршня. Областю існування поля є внутрішня область клина при координаті $x \geq x_0$. Будемо вважати, що в трикутній області OAB хвильове поле відсутнє. Згідно методу часткових областей виділимо дві часткові області, границі яких утворюють частини координатних поверхонь використовуваних систем координат.

Перша часткова область обмежена поверхнею поршня і дугою радіуса R , $-\phi / 2 \leq \theta \leq \phi / 2$, тобто, утворена частинами поверхонь декартової і полярної систем координат відповідно. Друга часткова область задається полярними координатами $r \geq R$, $-\phi / 2 \leq \theta \leq \phi / 2$.

Комплексну амплітуду тиску в області 1 запишемо у вигляді суми полів плоско-паралельного і клинуватого хвилеводів (часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо):

$$p_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n y) \exp(i\gamma_n (x - x_0)) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\beta_n \theta) \frac{J_{\beta_n}(kr)}{J'_{\beta_n}(kR)}, \quad (2.1)$$

де $\alpha_n = \frac{2(n-1)\pi}{L}$, $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$, $\beta_n = \frac{2(n-1)\pi}{\phi}$, $n = 1, 2, \dots$; $J_{\beta_n}(kr)$ – функція Бесселя, штрих при функції Бесселя означає похідну по повному аргументу, $k = 2\pi / \lambda$ – хвильове число, λ – довжина хвилі.

Поле тиску в області 2 представимо у вигляді суперпозиції біжучих циліндричних хвиль:

$$p_2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\beta_n \theta) \frac{H_{\beta_n}^{(1)}(kr)}{H_{\beta_n}^{(1)'}(kR)}, \quad (2.2)$$

де $H_{\beta_n}^{(1)}(kr)$ – функція Ханкеля.

Для визначення трьох наборів невідомих коефіцієнтів $A_n, B_n, C_n, n = 1, 2, \dots$ слід розписати три граничні умови:

$$1) \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} = v(x_0, y), \quad x = x_0, \quad y = \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right], \quad (2.3)$$

$$2) \quad p_1 = p_2, \quad r = R, \quad \theta = \left[-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2} \right], \quad (2.4)$$

$$3) \quad \frac{\partial p_1}{\partial r} = \frac{\partial p_2}{\partial r}, \quad r = R, \quad \theta = \left[-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2} \right]. \quad (2.5)$$

2.1.2 Розв'язок задачі та аналіз чисельних розрахунків

Підставивши вирази (2.1) і (2.2) в умови (2.3)–(2.5), приходимо до трьох рівнянь, в які входять нескінченні ряди. Функції, які входять в ці рівняння, залежать від просторових координат, їх межі зміни вказані в умовах (2.3)–(2.5).

$$1) \quad i \sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma_n \cos(\alpha_n y) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\partial}{\partial x} \left[\cos\left(\beta_n \arctg \frac{y}{x}\right) \frac{J_{\beta_n}\left(k\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{J'_{\beta_n}(kR)} \right]_{x=x_0} = iv(x_0, y), \quad (2.6)$$

$$2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\cos(\alpha_n R \sin \theta) \exp(i\gamma_n (R \cos \theta - x_0)) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\beta_n \theta) \frac{J_{\beta_n}(kR)}{J'_{\beta_n}(kR)} - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\beta_n \theta) \frac{H_{\beta_n}^{(1)}(kR)}{H_{\beta_n}^{(1)'}(kR)} = 0, \quad (2.7)$$

$$3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\partial}{\partial r} \left[\cos(\alpha_n r \sin \theta) \exp(i\gamma_n (r \cos \theta - x_0)) \right]_{r=R} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\beta_n \theta) - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\beta_n \theta) = 0. \quad (2.8)$$

Перехід від рівнянь (2.6)–(2.8) до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь можна провести двома шляхами:

- перший – застосовуючи середньоквадратичне наближення при виконанні граничних умов,
- другий – поточкове спряження полів на границі.

Розв’язок нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь будемо проводити методом редукції, контролюючи при цьому в ході обчислень якість виконання граничних умов. Для цього обмежимо нескінченні ряди у виразах (2.6)–(2.8), задаючи кількість коефіцієнтів A_n, B_n, C_n відповідно N_1, N_2, N_3 . Оскільки амплітудні коефіцієнти B_n і C_n пов’язані з власними функціями одного і того ж клинуватого хвилеводу, то логічно покласти їх кількості однаковими, тобто $N_3 = N_2$.

Середньоквадратичне наближення

При такому підході, помножимо скалярно вираз (2.6) на функції $\cos(\alpha_m y)$, $m = 1, 2, \dots, N_1$, а вирази (2.7) і (2.8) – на функції $\cos(\beta_m \theta)$, $m = 1, 2, \dots, N_2$:

$$i \sum_{n=1}^{N_1} A_n \gamma_n \cos(\alpha_n y) \cos(\alpha_m y) + \sum_{n=1}^{N_2} B_n \frac{\partial}{\partial x} \left[\cos\left(\beta_n \arctg \frac{y}{x}\right) \frac{J_{\beta_n}\left(k\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{J'_{\beta_n}(kR)} \right]_{x=x_0} \cdot \quad (2.9)$$

$$\cdot \cos(\alpha_m y) = i\psi(x_0, y) \cos(\alpha_m y), \quad m = 1, 2, \dots, N_1,$$

$$\sum_{n=1}^{N_1} A_n \left[\cos(\alpha_n R \sin \theta) \exp(i\gamma_n (R \cos \theta - x_0)) \right] \cos(\beta_m \theta) + \sum_{n=1}^{N_2} B_n \cos(\beta_n \theta) \cdot \quad (2.10)$$

$$\cdot \cos(\beta_m \theta) \frac{J_{\beta_n}(kR)}{J'_{\beta_n}(kR)} - \sum_{n=1}^{N_2} C_n \cos(\beta_n \theta) \cos(\beta_m \theta) \frac{H_{\beta_n}^{(1)}(kR)}{H_{\beta_n}^{(1)'}(kR)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N_2,$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_1} A_n \frac{\partial}{\partial r} \left[\cos(\alpha_n r \sin \theta) \exp(i\gamma_n (r \cos \theta - x_0)) \right]_{r=R} \cos(\beta_m \theta) + \\ & + \sum_{n=1}^{N_2} B_n \cos(\beta_n \theta) \cos(\beta_m \theta) - \sum_{n=1}^{N_2} C_n \cos(\beta_n \theta) \cos(\beta_m \theta) = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$m = 1, 2, \dots, N_2.$

Використаємо властивість ортогональності функцій $\cos(\alpha_m y)$, $m = 1, 2, \dots, N_1$ на відрізьку $y = [-L/2, L/2]$, і властивість ортогональності функцій $\cos(\beta_m \theta)$, $m = 1, 2, \dots, N_2$ на відрізьку $\theta = [-\phi/2, \phi/2]$. В результаті приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{n=1}^{N_1} A_n i\gamma_n L \delta_{mn} + \sum_{n=1}^{N_2} B_n G_{mn}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_2} C_n \cdot 0 = iV_m, \quad m = 1, 2, \dots, N_1, \quad (2.12)$$

$$\sum_{n=1}^{N_1} A_n G_{mn}^{(2)} + \sum_{n=1}^{N_2} B_n \frac{J_{\beta_n}(kR)}{J'_{\beta_n}(kR)} \phi \delta_{mn} - \sum_{n=1}^{N_2} C_n \frac{H_{\beta_n}^{(1)}(kR)}{H_{\beta_n}^{(1)'}(kR)} \phi \delta_{mn} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N_2, \quad (2.13)$$

$$\sum_{n=1}^{N_1} A_n G_{mn}^{(3)} + \sum_{n=1}^{N_2} B_n \phi \delta_{mn} - \sum_{n=1}^{N_2} C_n \phi \delta_{mn} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N_2, \quad (2.14)$$

де $G_{mn}^{(1)} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\cos\left(\beta_n \arctg \frac{y}{x}\right) \frac{J_{\beta_n}\left(k\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{J'_{\beta_n}(kR)} \right]_{x=x_0} \cos(\alpha_m y) dy,$

$$G_{mn}^{(2)} = \int_{-\phi/2}^{\phi/2} \cos(\alpha_n R \sin \theta) \exp(i\gamma_n (R \cos \theta - x_0)) \cos(\beta_m \theta) d\theta,$$

$$G_{mn}^{(3)} = \int_{-\phi/2}^{\phi/2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\cos(\alpha_n r \sin \theta) \exp(i\gamma_n (r \cos \theta - x_0)) \right]_{r=R} \cos(\beta_m \theta) d\theta,$$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n = 1, \\ 0.5, & m = n > 1, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad V_m = \int_{-L/2}^{L/2} v(x_0, y) \cos(\alpha_m y) dy.$$

Поточкове спряження полів на границі

Позначимо координати точок спряження (вузлових точок) на поверхні поршня ($x_m = x_0, y_m$), а на границі розділу часткових областей 1 і 2 – ($r_m = R, \theta_m$). Вибравши координати вузлових точок ($x_m = x_0, y_m$) і ($r_m = R, \theta_m$), запишемо вирази (2.3)–(2.5) у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$i \sum_{n=1}^{N_1} A_n \gamma_n \cos(\alpha_n y_m) + \sum_{n=1}^{N_2} B_n \frac{\partial}{\partial x} \left[\cos\left(\beta_n \arctg \frac{y_m}{x}\right) \frac{J_{\beta_n}\left(k\sqrt{x^2 + y_m^2}\right)}{J'_{\beta_n}(kR)} \right]_{x=x_0} = i v(x_0, y_m),$$

$$m = 1, 2, \dots, N_1; \quad (2.15)$$

$$\sum_{n=1}^{N_1} A_n \left[\cos(\alpha_n R \sin \theta_m) \exp(i\gamma_n (R \cos \theta_m - x_0)) \right] + \sum_{n=1}^{N_2} B_n \cos(\beta_n \theta_m) \frac{J_{\beta_n}(kR)}{J'_{\beta_n}(kR)} -$$

$$- \sum_{n=1}^{N_2} C_n \cos(\beta_n \theta_m) \frac{H_{\beta_n}^{(1)}(kR)}{H_{\beta_n}^{(1)'}(kR)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N_2; \quad (2.16)$$

$$\sum_{n=1}^{N_1} A_n \frac{\partial}{\partial r} \left[\cos(\alpha_n r \sin \theta_m) \exp(i\gamma_n (r \cos \theta_m - x_0)) \right]_{r=R} + \sum_{n=1}^{N_2} B_n \cos(\beta_n \theta_m) -$$

$$- \sum_{n=1}^{N_2} C_n \cos(\beta_n \theta_m) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N_2. \quad (2.17)$$

Відправною точкою в розрахунках є нормування, до довжини хвилі λ , відношення відстані між вузловими точками Δh вздовж поверхні поршня і на криволінійній границі часткових областей 1 і 2, тобто величина $\Delta h / \lambda$. Виходячи з величини $\Delta h / \lambda$, визначається кількість вузлових точок вздовж поверхні поршня N_1 і на криволінійній границі N_2 :

$$N_1 = \left[\frac{L / \lambda}{\Delta h / \lambda} \right], \quad N_2 = \left[\frac{\phi \cdot R / \lambda}{\Delta h / \lambda} \right]. \quad (2.18)$$

Величини N_1 і N_2 визначають, відповідно, кількість мод плоскопаралельного хвилеводу (з характерним розміром L) і клинуватого хвилеводу (з розхилом ϕ) для двох варіантів розв'язку задачі. Зрозуміло, що величини N_1 і N_2 задають порядок системи лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої дозволяє знайти шукані амплітудні коефіцієнти мод A_n, B_n, C_n .

В якості контрольних величин використовуємо такі інтегральні критерії:

$$\delta P^{sk} = \frac{P_i^{sk} - P_d^{sk}}{P_i^{sk}}, \quad \delta P^t = \frac{P_i^t - P_d^t}{P_i^t}, \quad \delta P = \frac{P_i^{sk} - P_i^t}{P_i^{sk}}. \quad (2.19)$$

де P_i^{sk} і P_i^t – середній потік потужності (або, коротше, потужність) з поверхні поршня при використанні середньоквадратичного наближення і при поточковому спряженні хвильових полів; P_d^{sk} і P_d^t – потужність в дальній зоні області 2 при використанні середньоквадратичного наближення і при поточковому спряженні хвильових полів.

Формула для середнього потоку потужності має вигляд [53]:

$$P = 0.5 \int_{(S)} \operatorname{Re}(p v_n^*) dS, \quad \text{де } p \text{ і } v_n^* \text{ – тиск і нормальна швидкість на деякій поверхні } S,$$

зірочка – знак комплексного спряження.

Виберемо параметри задачі: $R/\lambda = 1,2$, $\phi = 150^\circ$, тоді $L/\lambda = 2,3$. Розподіл швидкості по поверхні поршня рівномірний, тобто $v(x_0, y) = 1$. Результати розрахунків представлені в табл. 2.1.

Табл. 2.1. Інтегральні критерії

$\frac{\Delta h}{\lambda}$	N_1	N_2	Середньоквадр. наближення δP^{sk}	Поточкове спряження δP^t	δP
0,6	4	6	$2,3 \cdot 10^{-3}$	-0,12	-0,09
0,5	5	7	$1,25 \cdot 10^{-3}$	-0,075	-0,06
0,45	6	7	$1,2 \cdot 10^{-3}$	-0,07	-0,056
0,4	6	8	$7,4 \cdot 10^{-4}$	-0,047	-0,041
0,35	7	9	$5 \cdot 10^{-4}$	-0,034	-0,031
0,3	8	11	$3 \cdot 10^{-4}$	-0,021	-0,02
0,25	10	13	$1,6 \cdot 10^{-4}$	-0,014	-0,014
0,2	12	16	$9 \cdot 10^{-5}$	-0,009	-0,009
0,15	16	21	$4,5 \cdot 10^{-5}$	-0,005	-0,005
0,1	24	32	$3 \cdot 10^{-5}$	-0,002	-0,002

Доповненням до таблиці служать графіки на рис. 2.2, на якому показані (зліва направо) графіки модулів тиску $|p|$ і швидкості $|v_r|$ вздовж границі розділу часткових областей 1 і 2 і модуль тиску $|p_i|$ на поверхні поршня. Верхній ряд відповідає хвильовій відстані між вузловими точками $\Delta h / \lambda = 0,5$, а нижній ряд – $\Delta h / \lambda = 0,2$; лінії – середньоквадратичне наближення, точки – поточкове спряження полів.

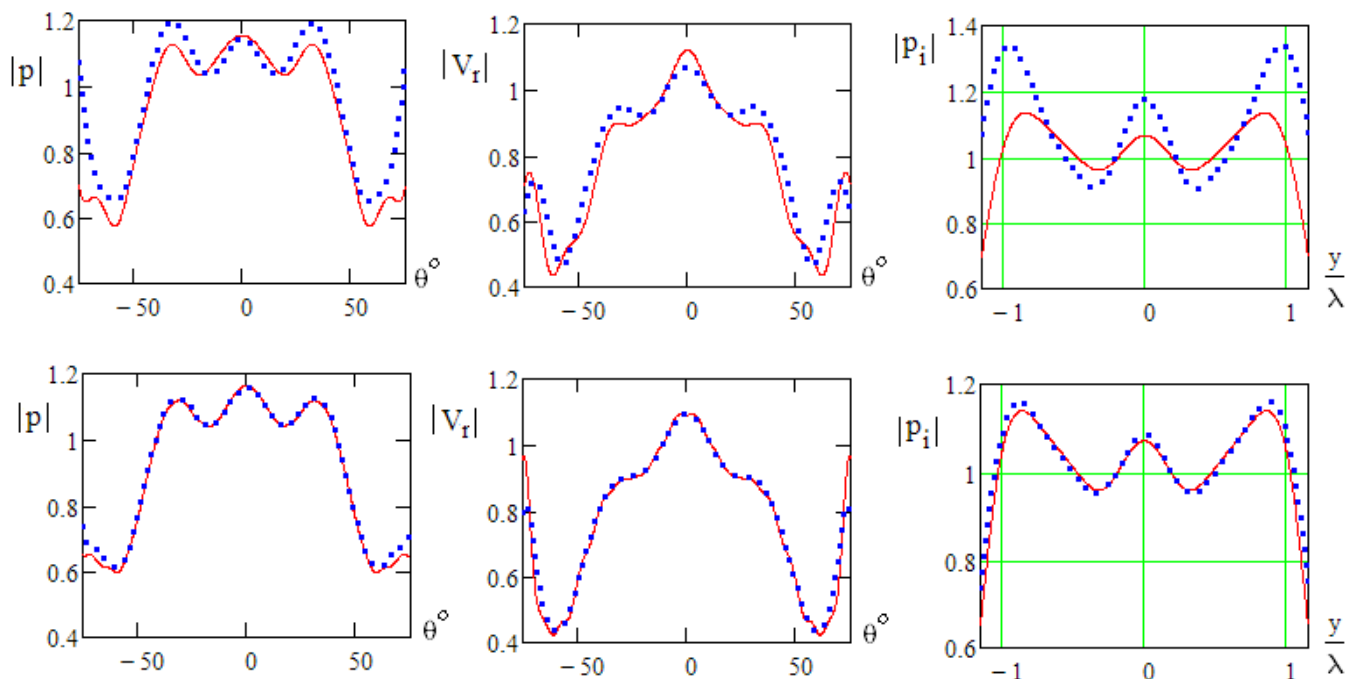


Рис. 2.2. Графіки модулів тиску $|p|$ і швидкості $|v_r|$ вздовж границі розділу часткових областей 1 і 2 та модуль тиску $|p_i|$ на поверхні поршня.

Верхній ряд відповідає хвильовій відстані між вузловими точками $\Delta h / \lambda = 0,5$, а нижній ряд – $\Delta h / \lambda = 0,2$; лінії – середньоквадратичне наближення, точки – поточкове спряження полів

Дані табл. 2.1 і графіки на рис. 2.2 показують, що, як і слід було очікувати, середньоквадратичне наближення показує кращі результати при всіх значеннях величини $\Delta h / \lambda$. Однак при величині $\Delta h / \lambda < 0,2$ отримуємо цілком прийнятну точність розрахунку і для методу поточкового спряження полів. Звісно, іншим фактором, який впливає на вибір величини $\Delta h / \lambda$, є хвильові розміри розглянутої моделі.

2.2 Випромінювання двох плоских поршнів в нескінченному клиноватому хвилеводі

2.2.1 Математична модель задачі

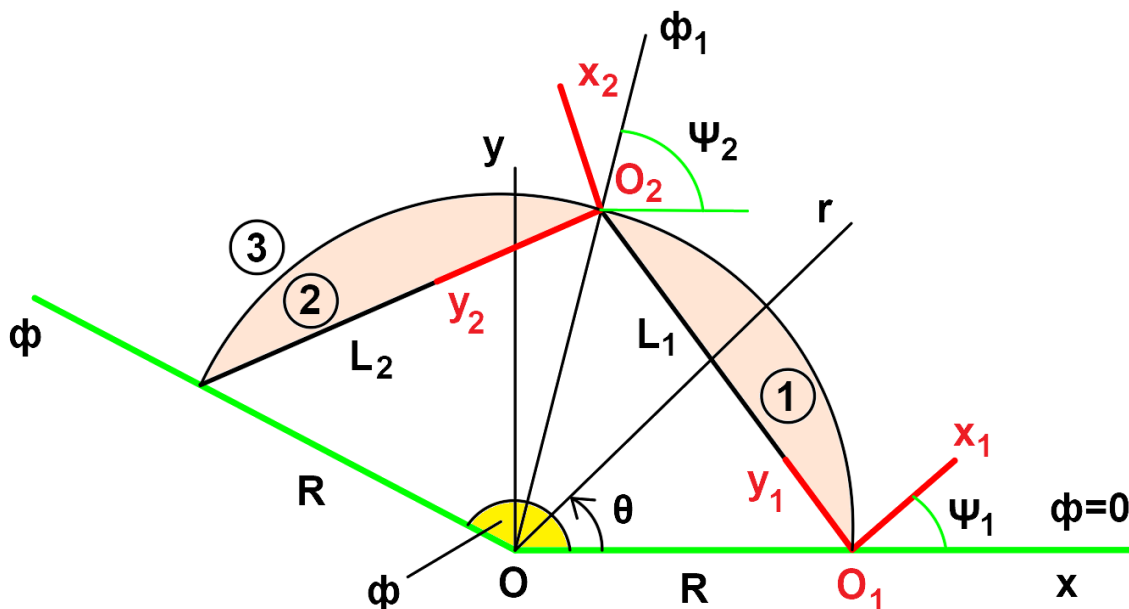


Рис. 2.3. Геометрія задачі про випромінювання двох плоских поршнів в нескінченному клиноватому хвилеводі

На рис. 2.3 показана геометрія задачі про випромінювання двох плоских поршнів в нескінченному клиноватому хвилеводі. Будемо вважати, що довжина поршнів може бути різною, тому симетрія задачі відносно деякої осі відсутня. Крім декартової xOy і полярної $rO\theta$ систем координат, введемо ще дві декартові системи координат $x_1O_1y_1$ і $x_2O_2y_2$. Положення всіх чотирьох систем координат показані на рис. 2.3.

Згідно рис. 2.3 вся область існування хвильового поля ділиться на три часткові області. Запишемо поля тиску в цих областях:

$$p_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n^{(1)} y_1) \exp(i\gamma_n^{(1)} x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\beta_n^{(1)} \theta) \frac{J_{\beta_n^{(1)}}(kr)}{J'_{\beta_n^{(1)}}(kR)}, \quad (2.20)$$

де $\alpha_n^{(1)} = \frac{(n-1)\pi}{L_1}$, $\gamma_n^{(1)} = \sqrt{k^2 - (\alpha_n^{(1)})^2}$, $\beta_n^{(1)} = \frac{(n-1)\pi}{\phi_1}$, $n = 1, 2, \dots$;

$$p_2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\alpha_n^{(2)} y_2) \exp(i\gamma_n^{(2)} x_2) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\beta_n^{(2)} (\theta - \phi_1)) \frac{J_{\beta_n^{(2)}}(kr)}{J'_{\beta_n^{(2)}}(kR)}, \quad (2.21)$$

де $\alpha_n^{(2)} = \frac{(n-1)\pi}{L_2}$, $\gamma_n^{(2)} = \sqrt{k^2 - (\alpha_n^{(2)})^2}$, $\beta_n^{(2)} = \frac{(n-1)\pi}{\phi - \phi_1}$, $n = 1, 2, \dots$;

$$p_3 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(\beta_n^{(3)} \theta) \frac{H_{\beta_n^{(3)}}^{(1)}(kr)}{H_{\beta_n^{(3)}}^{(1)'}(kR)}, \quad (2.22)$$

де $\beta_n^{(3)} = \frac{(n-1)\pi}{\phi}$, $n = 1, 2, \dots$

Для визначення п'яти наборів невідомих коефіцієнтів A_n, B_n, C_n, D_n, E_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ слід розписати п'ять граничних умов:

$$1) \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = v_1(y_1), \quad x_1 = 0, \quad y_1 = [0, L_1], \quad (2.23)$$

$$2) \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} = v_2(y_2), \quad x_2 = 0, \quad y_2 = [0, L_2], \quad (2.24)$$

$$3) p_1 = p_3, \quad r = R, \quad \theta = [0, \phi_1], \quad (2.25)$$

$$4) p_2 = p_3, \quad r = R, \quad \theta = [\phi_1, \phi], \quad (2.26)$$

$$5) \frac{\partial p_3}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial r}, & r = R, \quad \theta = [0, \phi_1], \\ \frac{\partial p_2}{\partial r}, & r = R, \quad \theta = [\phi_1, \phi]. \end{cases} \quad (2.27)$$

2.2.2 Розв'язок задачі та аналіз чисельних розрахунків

Щоб розписати граничні умови (2.23)–(2.27) слід використати формули, які пов'язують координати точки спостереження в різних системах координат (рис. 2.3):

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = y / x. \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} x &= x_j \cos \psi_j - y_j \sin \psi_j + a_j, & x_j &= (x - a_j) \cos \psi_j + (y - b_j) \sin \psi_j, \\ y &= x_j \sin \psi_j + y_j \cos \psi_j + b_j; & y_j &= -(x - a_j) \sin \psi_j + (y - b_j) \cos \psi_j. \end{aligned} \quad (2.29)$$

В цих формулах індекс $j=1,2$, що відповідає декартовим системам координат $x_1 O_1 y_1$ і $x_2 O_2 y_2$; ψ_j – кут повороту системи координат $x_j O_j y_j$ відносно системи $x O y$; a_j, b_j – координати початку O_j системи координат $x_j O_j y_j$ в системі декартових координат $x O y$. Згідно рис. 2.3 координати точки O_1 – $a_1 = R, b_1 = 0$; координати точки O_2 – $a_2 = R \cos \phi_1, b_2 = R \sin \phi_1$. Кути повороту систем координат $x_j O_j y_j, j=1,2$ відносно системи $x O y$ визначаються по формулам:

$$\psi_1 = \frac{\phi_1}{2}, \quad \psi_2 = \frac{\phi_1 + \phi}{2}. \quad (2.30)$$

Наявність формул (2.28), (2.29) дозволяє провести необхідне перетворення при підстановці виразів (2.20)–(2.22) в умови (2.23)–(2.27). Отримаємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} &1) i \sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma_n^{(1)} \cos \left(\alpha_n^{(1)} \left((R-x) \sin \frac{\phi_1}{2} + y \cos \frac{\phi_1}{2} \right) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\partial}{\partial x_1} [\cos(\beta_n^{(1)}) \cdot \\ &\cdot \arctan \frac{x_1 \sin \frac{\phi_1}{2} + y_1 \cos \frac{\phi_1}{2}}{x_1 \cos \frac{\phi_1}{2} - y_1 \sin \frac{\phi_1}{2} + R}] \frac{J_{\beta_n^{(1)}} \left(k \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2R \left(x_1 \cos \frac{\phi_1}{2} - y_1 \sin \frac{\phi_1}{2} \right) + R^2} \right)}{J'_{\beta_n^{(1)}}(kR)} \Big|_{x_1=0} = \\ &= i \nu_1 \left((R-x) \sin \frac{\phi_1}{2} + y \cos \frac{\phi_1}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned}
& 2) i \sum_{n=1}^{\infty} C_n \gamma_n^{(2)} \cos \left(\alpha_n^{(2)} \left((R \cos \phi_1 - x) \sin \frac{\phi_1 + \phi}{2} + (y - R \sin \phi_1) \cos \frac{\phi_1 + \phi}{2} \right) \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\cos(\beta_n^{(2)}) \cdot \arctan \frac{x_2 \sin \frac{\phi_1 + \phi}{2} + y_2 \cos \frac{\phi_1 + \phi}{2} + R \sin \phi_1}{x_2 \cos \frac{\phi_1 + \phi}{2} - y_2 \sin \frac{\phi_1 + \phi}{2} + R \cos \phi_1} - \phi_1 \right] \cdot \\
& \cdot \frac{J_{\beta_n^{(2)}} \left(k \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + 2R \left(x_2 \cos \frac{\phi - \phi_1}{2} - y_2 \sin \frac{\phi - \phi_1}{2} \right) + R^2} \right)}{J'_{\beta_n^{(2)}}(kR)} \Big|_{x_2=0} = \\
& = i v_2 \left((R \cos \phi_1 - x) \sin \frac{\phi_1 + \phi}{2} + (y - R \sin \phi_1) \cos \frac{\phi_1 + \phi}{2} \right),
\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
& 3) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left(\alpha_n^{(1)} \left((R - x) \sin \frac{\phi_1}{2} + y \cos \frac{\phi_1}{2} \right) \right) \exp \left(i \gamma_n^{(1)} \left((x - R) \cos \frac{\phi_1}{2} + y \sin \frac{\phi_1}{2} \right) \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\beta_n^{(1)} \theta) \frac{J_{\beta_n^{(1)}}(kR)}{J'_{\beta_n^{(1)}}(kR)} - \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(\beta_n^{(3)} \theta) \frac{H_{\beta_n^{(3)}}^{(1)}(kR)}{H_{\beta_n^{(3)}}^{(1)'}(kR)} = 0,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
& 4) \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left(\alpha_n^{(2)} \left((R \cos \phi_1 - x) \sin \frac{\phi_1 + \phi}{2} + (y - R \sin \phi_1) \cos \frac{\phi_1 + \phi}{2} \right) \right) \cdot \\
& \cdot \exp \left(i \gamma_n^{(2)} \left((x - R \cos \phi_1) \cos \frac{\phi_1 + \phi}{2} + (y - R \sin \phi_1) \sin \frac{\phi_1 + \phi}{2} \right) \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\beta_n^{(2)} (\theta - \phi_1)) \frac{J_{\beta_n^{(2)}}(kR)}{J'_{\beta_n^{(2)}}(kR)} - \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(\beta_n^{(3)} \theta) \frac{H_{\beta_n^{(3)}}^{(1)}(kR)}{H_{\beta_n^{(3)}}^{(1)'}(kR)} = 0,
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(\beta_n^{(3)} \theta) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\partial}{\partial r} \left[\cos \left(\alpha_n^{(1)} \left((R - r \cos \theta) \sin \frac{\phi_1}{2} + r \sin \theta \cos \frac{\phi_1}{2} \right) \right) \right] \cdot \\ \cdot \exp \left(i \gamma_n^{(1)} \left((r \cos \theta - R) \cos \frac{\phi_1}{2} + r \sin \theta \sin \frac{\phi_1}{2} \right) \right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\beta_n^{(1)} \theta) \Big|_{r=R}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\partial}{\partial r} \left[\cos(\alpha_n^{(2)} ((R \cos \phi_1 - r \cos \theta) \sin \frac{\phi_1 + \phi}{2} + \right. \\ \left. + (r \sin \theta - R \sin \phi_1) \cos \frac{\phi_1 + \phi}{2}) \right] \cdot \exp(i \gamma_n^{(2)} ((r \cos \theta - R \cos \phi_1) \cdot \\ \cdot \cos \frac{\phi_1 + \phi}{2} + (r \sin \theta - R \sin \phi_1) \sin \frac{\phi_1 + \phi}{2})) + \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\beta_n^{(2)} (\theta - \phi_1)) \Big|_{r=R}. \right. \end{array} \right. \quad (2.35)$$

При виконанні граничних умов (2.23)–(2.27) використовуємо поточкове спряження полів. Виходячи з величини $\Delta h / \lambda$, визначається кількість вузлових точок вздовж поверхні поршнів N_1, N_2 і на дузі кола радіусом $R - N_3, N_4$:

$$N_1 = \left[\frac{L_1}{\Delta h} \right], \quad N_2 = \left[\frac{L_2}{\Delta h} \right], \quad N_3 = \left[\frac{\phi_1 \cdot R}{\Delta h} \right], \quad N_4 = \left[\frac{(\phi - \phi_1) \cdot R}{\Delta h} \right]. \quad (2.36)$$

Величини N_1 і N_2 визначають, відповідно, кількість мод плоскопаралельного хвилеводу з характерним розміром L_1 і L_2 , а величини N_3 і N_4 визначають кількість мод клинуватого хвилеводу з розхилом ϕ_1 і $\phi - \phi_1$. Кількість мод в області 3 задамо у вигляді суми величин $N_3 + N_4$.

Задамо наступні параметри моделі: $R / \lambda = 0,8$, $\phi = 150^\circ$, $\phi_1 = 90^\circ$, тоді $L_1 / \lambda = 1,13$, $L_2 / \lambda = 0,8$, $\psi_1 = 45^\circ$, $\psi_2 = 120^\circ$. Розподіл швидкості по поверхні обох поршнів рівномірний, тобто $v_1(y_1) = 1$ і $v_2(y_2) = 1$. Виберемо хвильову відстань між

вузловими точками $\Delta h / \lambda = 0,1$. При даних параметрах моделі отримуємо, що $N_1 = 12$, $N_2 = 9$, $N_3 = 13$, $N_4 = 9$, $N_5 = N_3 + N_4 = 22$.

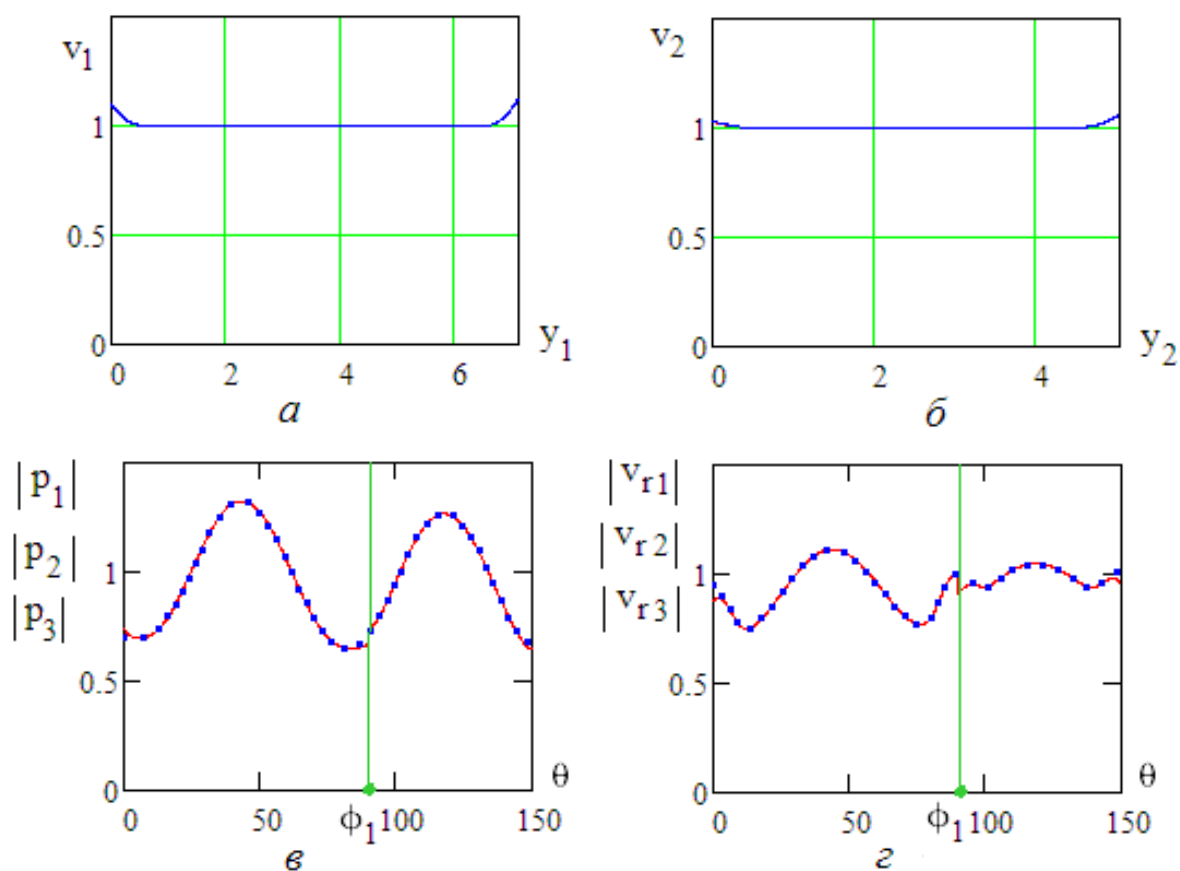


Рис. 2.4. Графічна ілюстрація виконання граничних умов:

a , $б$ – амплітуда швидкості на поверхні першого і другого поршнів;
 модулі тиску (ϑ) і модулі радіальної швидкості (ε) вздовж
 дуги кола радіусом R : лінія – зі сторони областей 1 і 2,
 точки – зі сторони області 3

На рис. 2.4 представлена графічна ілюстрація виконання граничних умов: a , $б$ – амплітуда швидкості на поверхні першого і другого поршнів; модулі тиску (ϑ) і модулі радіальної швидкості (ε) вздовж дуги кола радіусом R : лінія – зі сторони областей 1 і 2, точки – зі сторони області 3.

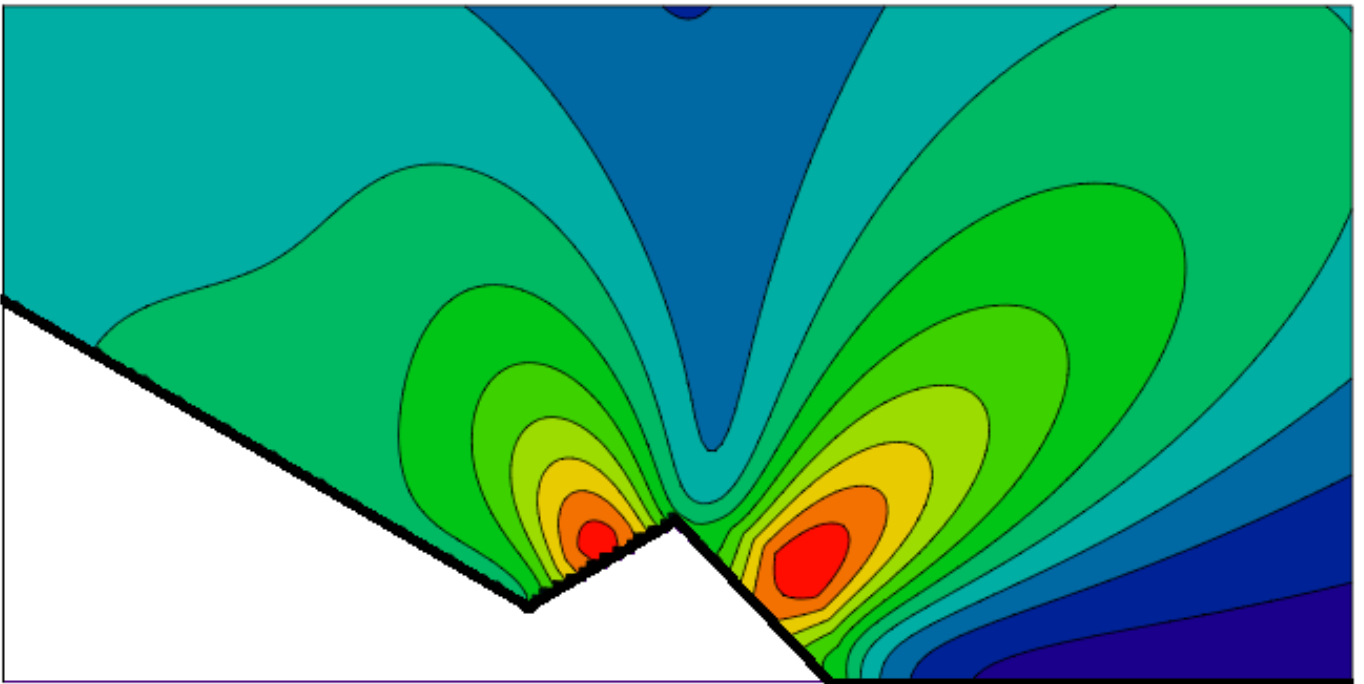


Рис. 2.5. Поле модуля тиску в околі двох випромінювачів
у клинуватому хвилеводі:

$$R / \lambda = 0,8, \phi = 150^\circ, \phi_1 = 90^\circ, L_1 / \lambda = 1,13, L_2 / \lambda = 0,8$$

На рис. 2.5 показано поле модуля тиску в околі двох випромінювачів у клинуватому хвилеводі. Якщо покласти $\phi = 180^\circ$, то виникає можливість визначити поле випромінювання чотирьох поршнів розташованих у вигляді квадрату у вільному просторі. Приклад показаний на рис. 2.6.

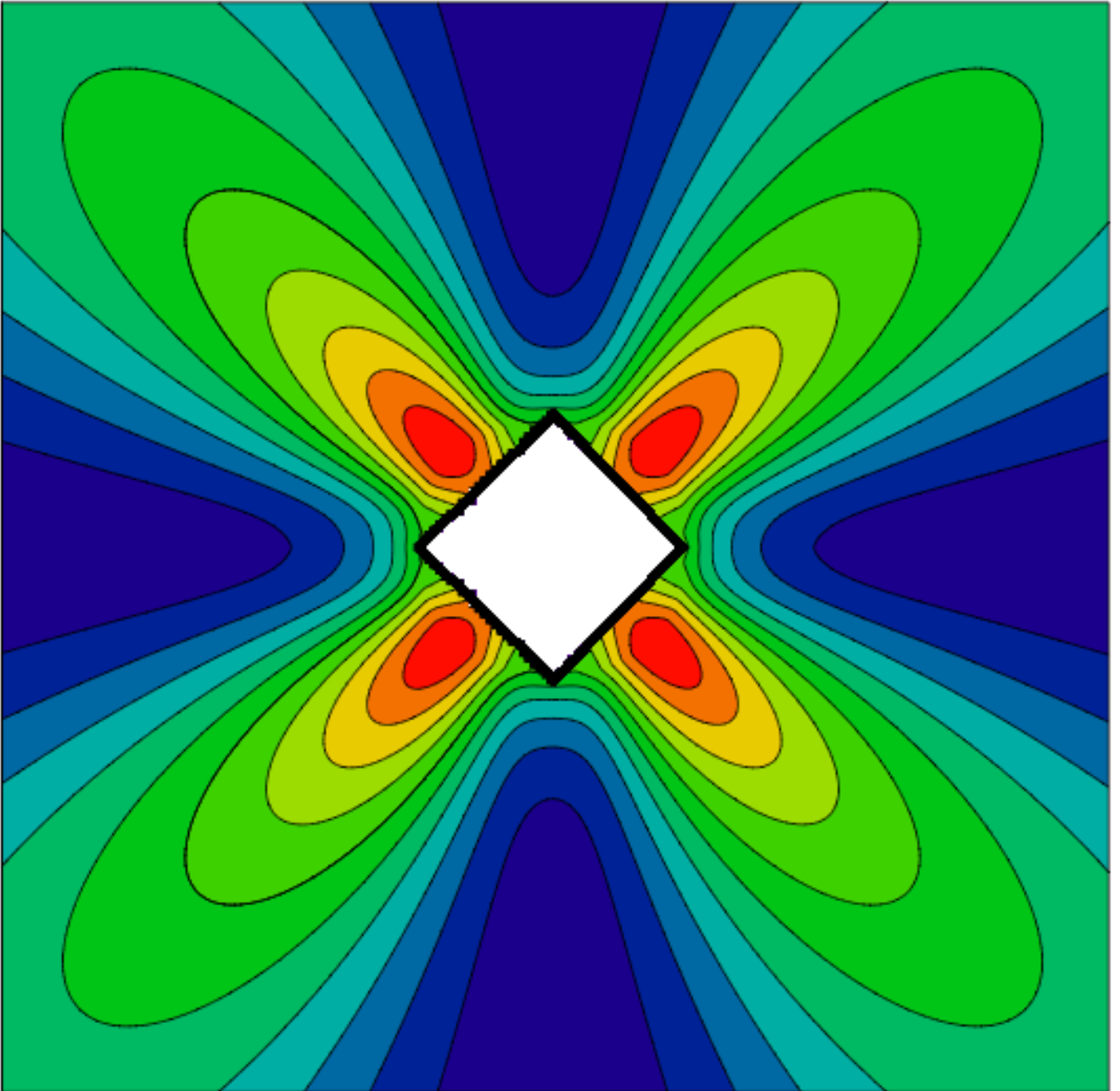


Рис. 2.6. Поле модуля тиску в околі чотирьох поршнів, розташованих у формі квадрату, у вільному просторі:

$$R / \lambda = 0,8, \phi = 180^\circ, \phi_1 = 90^\circ,$$

$$L_1 / \lambda = 1,13, L_2 / \lambda = 1,13$$

2.3 Випромінювання плоского поршня в скінченному клинуватому хвилеводі

2.3.1 Математична модель задачі

Розглядається плоска задача про випромінювання плоского поршня в скінченному клинуватому хвилеводі (рис. 2.7). Поршень здійснює гармонічні коливання з частотою ω . Для опису хвильових полів використовуємо дві системи координат: декартову x, y і полярну r, θ з загальним центром в точці O . Поверхні хвилеводу ідеально жорсткі, тобто нулю дорівнює нормальна складова коливальної швидкості на цих поверхнях. Будемо вважати, що в трикутній області OAB хвильове поле відсутнє.

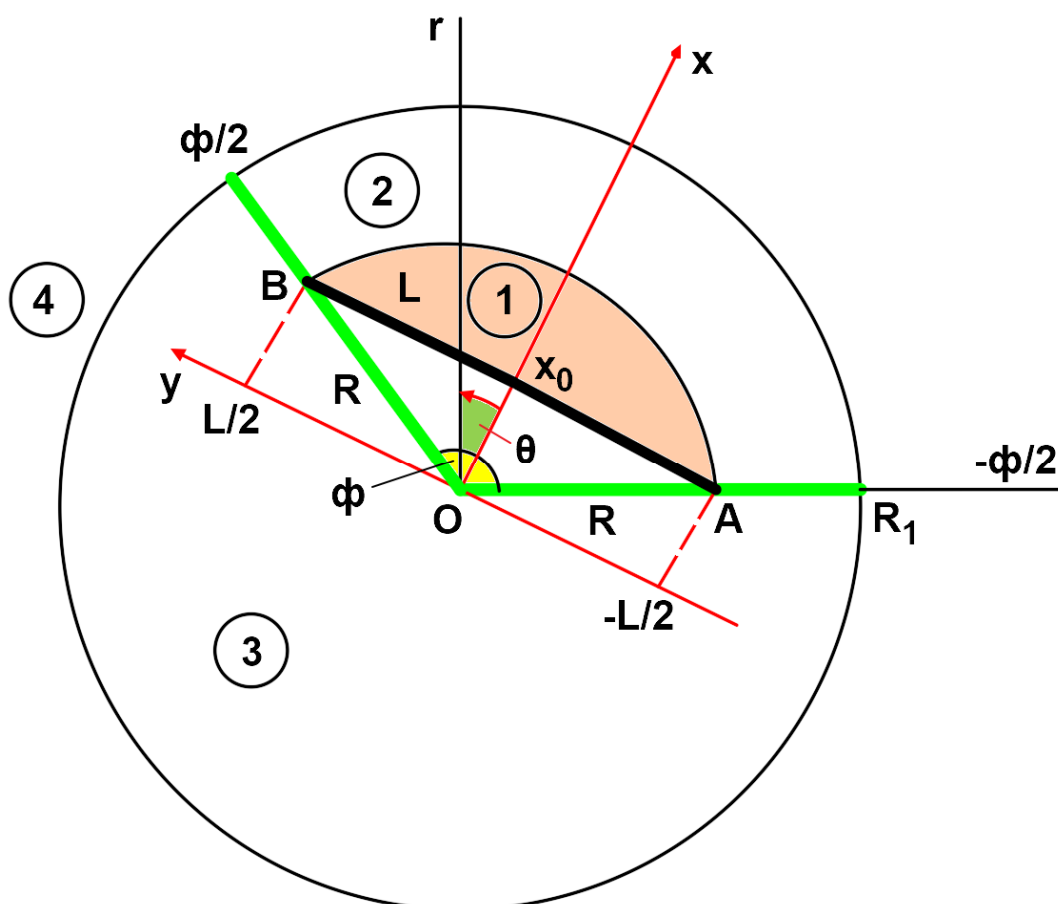


Рис. 2.7. Геометрія задачі про випромінювання поршня в скінченному клинуватому хвилеводі

Згідно методу часткових областей виділимо чотири часткові області. Перша часткова область обмежена поверхнею поршня і дугою кола радіуса R , $-\phi/2 \leq \theta \leq \phi/2$, тобто утворена частинами поверхонь декартової і полярної систем координат відповідно. Друга часткова область задається полярними координатами $R \leq r \leq R_1$, $-\phi/2 \leq \theta \leq \phi/2$. Третя часткова область задається полярними координатами $0 \leq r \leq R_1$, $\phi/2 \leq \theta \leq \pi \cup -\pi \leq \theta \leq -\phi/2$. Четверта часткова область задається полярними координатами $r \geq R_1$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Поле тиску в області 1 запишемо у вигляді суми мод плоскопаралельного хвилеводу і суми мод обмеженої області клинуватого хвилеводу (часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо):

$$p_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n y) \exp(i\gamma_n (x - x_0)) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\beta_n \theta) \frac{J_{\beta_n}(kr)}{J'_{\beta_n}(kR)}, \quad (2.37)$$

де $\alpha_n = \frac{2(n-1)\pi}{L}$, $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$, $\beta_n = \frac{2(n-1)\pi}{\phi}$, $n = 1, 2, \dots$; $k = \omega / c$ – хвильове число.

Поле тиску в області 2 представимо у вигляді двох наборів мод клинуватого хвилеводу:

$$p_2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\beta_n \theta) \frac{J_{\beta_n}(kr)}{J'_{\beta_n}(kR_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\beta_n \theta) \frac{Y_{\beta_n}(kr)}{Y'_{\beta_n}(kR)}. \quad (2.38)$$

Поле тиску в області 3 представимо у вигляді суми мод клинуватого хвилеводу:

$$p_3 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos\left(\eta_n \left(\theta \mp \frac{\phi}{2}\right)\right) \frac{J_{\eta_n}(kr)}{J'_{\eta_n}(kR_1)}, \quad (2.39)$$

де $\eta_n = \frac{2(n-1)\pi}{2\pi - \phi}$, знак "-" при $\theta \geq 0$, знак "+" при $\theta \leq 0$.

Поле тиску в області 4 представимо у вигляді суперпозиції біжучих циліндричних хвиль:

$$p_4 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos((n-1)\theta) \frac{H_{n-1}^{(1)}(kr)}{H_{n-1}^{(1)'}(kR_1)}. \quad (2.40)$$

Для визначення шести наборів невідомих коефіцієнтів $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n$, $n = 1, 2, \dots$ необхідно розписати шість граничних умов:

$$\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} = v(x_0, y), \quad x = x_0, \quad y = \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right], \quad (2.41)$$

$$p_1 = p_2, \quad r = R, \quad \theta = \left[-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2} \right], \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = \frac{\partial p_2}{\partial r}, \quad r = R, \quad \theta = \left[-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2} \right], \quad (2.43)$$

$$p_2 = p_4, \quad r = R_1, \quad \theta = \left[-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2} \right], \quad (2.44)$$

$$p_3 = p_4, \quad r = R_1, \quad \theta = \left[-\pi, -\frac{\phi}{2} \right], \left[\frac{\phi}{2}, \pi \right], \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial p_4}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial p_2}{\partial r}, & r = R_1, \quad \theta = \left[-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2} \right], \\ \frac{\partial p_3}{\partial r}, & r = R_1, \quad \theta = \left[-\pi, -\frac{\phi}{2} \right], \left[\frac{\phi}{2}, \pi \right]. \end{cases} \quad (2.46)$$

2.3.2 Розв'язок задачі та аналіз чисельних розрахунків

При виконанні граничних умов (2.41)–(2.46) будемо використовувати комбінацію двох підходів: поточкового спряження полів та середньоквадратичного наближення з метою отримання найкращого варіанту розрахунку.

Досліджуються наступні комбінації двох підходів спряження полів:

- 1) середньоквадратичне наближення – всі умови;
- 2) поточкове спряження полів: умови (5)–(7), середньоквадратичне наближення: умови (8)–(10);
- 3) поточкове спряження полів: умови (5)–(9), середньоквадратичне наближення: умова – (10);
- 4) поточкове спряження полів – всі умови.

В якості контрольних величин використовуємо такі енергетичні критерії:

$$\begin{aligned} \delta P^{(1)} &= \left| \frac{P_i^{(1)} - P_d^{(1)}}{P_d^{(1)}} \right|, & \delta P^{(2)} &= \left| \frac{P_i^{(2)} - P_d^{(2)}}{P_d^{(1)}} \right|, & \delta P^{(3)} &= \left| \frac{P_i^{(3)} - P_d^{(3)}}{P_d^{(1)}} \right|, & \delta P^{(4)} &= \left| \frac{P_i^{(4)} - P_d^{(4)}}{P_d^{(1)}} \right|, \\ \delta P^{(1,2)} &= \left| \frac{P_d^{(1)} - P_d^{(2)}}{P_d^{(1)}} \right|, & \delta P^{(1,3)} &= \left| \frac{P_d^{(1)} - P_d^{(3)}}{P_d^{(1)}} \right|, & \delta P^{(1,4)} &= \left| \frac{P_d^{(1)} - P_d^{(4)}}{P_d^{(1)}} \right|, \end{aligned} \quad (2.47)$$

де $P_i^{(1)}, P_i^{(2)}, P_i^{(3)}, P_i^{(4)}$ – потік потужності з поверхні поршня при використанні варіанту розрахунку 1, 2, 3, 4 відповідно; $P_d^{(1)}, P_d^{(2)}, P_d^{(3)}, P_d^{(4)}$ – потік потужності в дальній зоні області 4 при використанні варіанту розрахунку 1, 2, 3, 4 відповідно. Величини $\delta P^{(j)}$, $j=1,2,3,4$, по суті, визначають точність виконання закону збереження енергії для конкретного (одного з чотирьох) варіантів розрахунку, а величини $\delta P^{(1,2)}, \delta P^{(1,3)}, \delta P^{(1,4)}$ дають порівняльну оцінку потужності в дальньому полі при використанні варіантів розрахунку 2, 3, 4 по відношенню варіанту 1 (середньоквадратичне наближення).

Для обчислення потоку потужності використовуємо наступну формулу:

$$P = \frac{1}{2} \int_{(S)} \operatorname{Re}(p v_n^*) dS, \quad (2.48)$$

де p і v_n^* – тиск і нормальна швидкість на деякій поверхні S , зірочка – знак комплексного спряження.

Виберемо такі параметри задачі: $\phi = 150^\circ$, $R/\lambda = 1,2$, $R_1/\lambda = 1,4$, тоді $L/\lambda = 2,3$. Розподіл швидкості по поверхні поршня рівномірний, тобто $v(x_0, y) = 1$. Результати розрахунків представлені в табл. 2.2; $\Delta h/\lambda$ – відношення відстані між вузловими точками Δh до довжини хвилі λ .

Табл. 2.2. Енергетичні критерії

$\Delta h/\lambda$	0,3	0,2	0,1
$\delta P^{(1)}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$	$4,3 \cdot 10^{-5}$
$\delta P^{(2)}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$
$\delta P^{(3)}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$8,7 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$
$\delta P^{(4)}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	$3,5 \cdot 10^{-2}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$
$\delta P^{(1,2)}$	$5,8 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$8,9 \cdot 10^{-3}$
$\delta P^{(1,3)}$	$4,4 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$
$\delta P^{(1,4)}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$8,5 \cdot 10^{-3}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$

Як видно з табл. 2.2, для всіх чотирьох варіантів розрахунку величини $\delta P^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, 4$ зменшуються при зменшенні хвильової відстані між вузловими точками $\Delta h/\lambda$, що визначає відповідне збільшення кількості мод в часткових областях (кількість мод дорівнює кількості вузлових точок). Як і передбачалося, варіант використання середньоквадратичного наближення (варіант 1) є найкращим, інші варіанти розрахунку працюють приблизно однаково. Хоча, мабуть слід відзначити варіант 3, де в середньоквадратичному наближенні реалізується умова спряження по

швидкості на границі області 4 з областями 2 і 3. Ця границя, як складна границя трьох областей має кутові точки $\theta = \pm\phi/2$, але використання однієї (полярної) системи координат дозволяє, завдяки властивість ортогональності відповідного набору функцій, достатньо просто провести процедуру алгебраїзації функціонального рівняння. Будемо орієнтуватися на величину $\Delta h / \lambda \approx 0,1$. Як бачимо із останньої колонки таблиці, варіант 3 все ж таки кращий ніж варіанти 2 і 4.

Побудований розв'язок дозволяє продемонструвати екрануючу властивість скінченного клину. Для цього розглянемо поршень достатньо малих хвильових розмірів. Нехай параметри задачі такі: $\phi = 150^\circ$, $R / \lambda = 0,1$, тоді $L / \lambda = 0,193$, величина $\Delta h / \lambda = 0,02$. На рис. 2.8 показані три варіанти розрахунку характеристики направленості: поршень у вільному просторі (крива 1); часткова область 2 відсутня, тобто $R_1 = R$ (крива 2); $R_1 / \lambda = 0,3$ (крива 3). Як бачимо, у вільному просторі (крива 1) поршень практично ненаправлений. Крива 2 відповідає ситуації, коли друга сторона поршня охоплена екраном (область OAB на рис. 1), що, природно, зменшує потік енергії з тильної сторони поршня. Екрануючу властивість скінченного клину наочно ілюструє крива 3. При цьому слід відмітити, що хвильовий розмір екрану достатньо малий, а саме $R_1 - R = 0,2\lambda$.

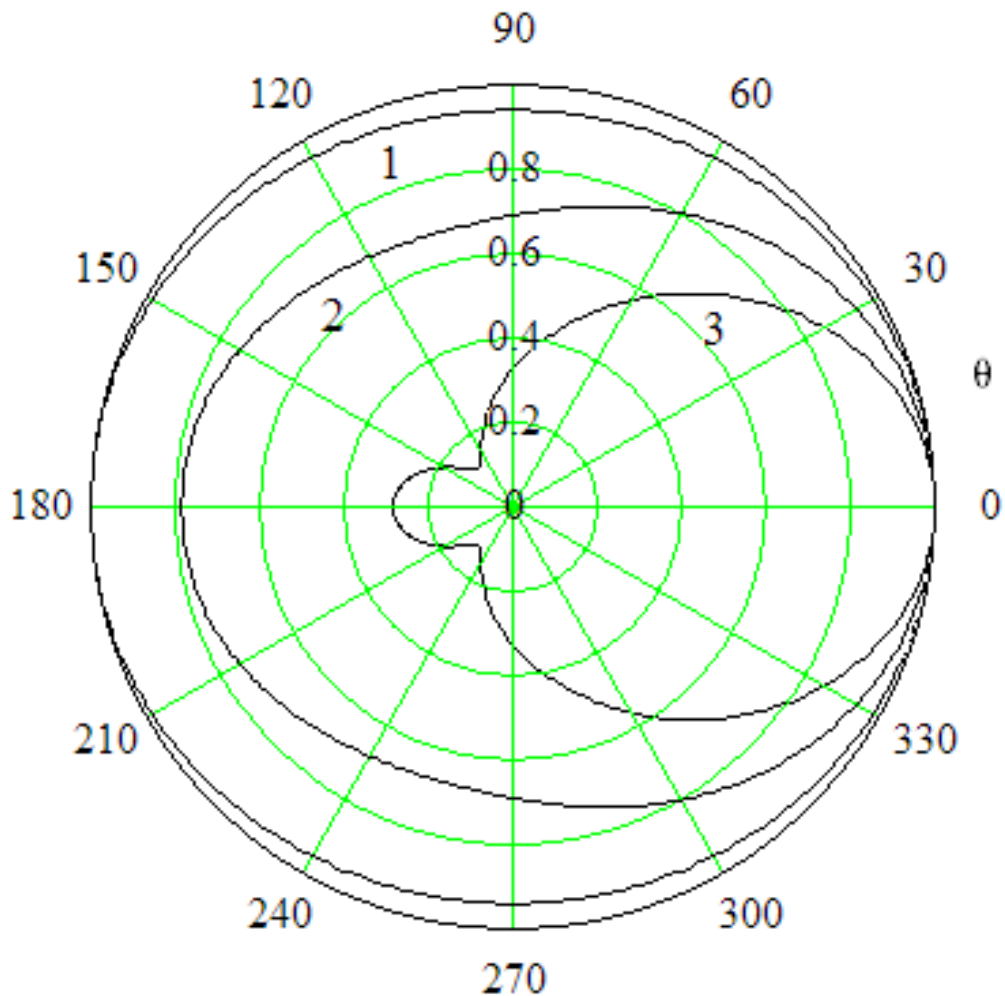


Рис. 2.8. Діаграми спрямованості поршня при

$$\phi = 150^\circ, R / \lambda = 0,1, L / \lambda = 0,193 :$$

1 – поршень у вільному просторі,

2 – $R_1 = R$ (область 2 відсутня),

3 – $R_1 / \lambda = 0,3$

2.4 Висновки до розділу

В даному розділі на базі методу часткових областей отримано розв'язок задачі про випромінювання одного та двох плоских поршнів в нескінченному клинуватому хвилеводі. Даний підхід дозволяє, подібним чином, побудувати розв'язок і для випадку кількості поршнів більше двох. При спряженні хвильових полів на

границях часткових областей використано два варіанти: перший – спряження полів в сенсі середньоквадратичного наближення, другий – поточкове спряження хвильових полів.

Показано, що при однаковій кількості мод в часткових областях для двох варіантів спряження полів, варіант середньоквадратичного наближення є більш точним. Показано, що при величині хвильової відстані між вузловими точками $\Delta h / \lambda < 0,2$ отримаємо цілком прийнятну точність розрахунку і для методу поточкового спряження полів. Звісно, іншим фактором, який впливає на вибір величини $\Delta h / \lambda$, є хвильові розміри розглянутої моделі.

Також в даному розділі, на основі методу часткових областей, розглянуто задачу про випромінювання поршня в скінченному клинуватому хвилеводі. При спряженні хвильових полів на границях часткових областей використано комбінацію двох підходів: поточкового спряження полів та середньоквадратичного наближення.

Використання різних комбінацій розрахунку цілком коректно. Всі комбінації працюють приблизно однаково. Варіант в якому використовується тільки середньоквадратичне наближення найточніший. Використання поточкового спряження полів в цілому спрощує розрахунок задачі. Вибір необхідної комбінації розрахунку залежить від того, яка задача розглядається. Якщо для запису хвильових полів в часткових областях доводиться використовувати кілька систем координат, то при використанні середньоквадратичного наближення можуть виникати труднощі при обчисленні, в той час як при використанні поточкового спряження полів обчислювальних проблем не виникає.

Побудовані діаграми спрямованості поршня, котрі ілюструють екрануючу властивість скінченного клину. На прикладі даної задачі ми перевірили можливість використання комбінованого варіанту розрахунку і розуміємо, що можлива ситуація коли саме комбінований варіант може призвести до кращого розв'язку задачі з точки зору виконання закону збереження енергії чи умов зшивання полів.

РОЗДІЛ 3

ДИФРАКЦІЯ ЗВУКУ НА ШУМОЗАХИСНОМУ БАР'ЄРІ

В даному розділі досліджується можливість використання поточкового спряження звукових полів в методі часткових областей при розв'язанні граничної задачі дифракції звуку на класичному бар'єрі та на бар'єрі з резонатором, який розташований на краю бар'єру.

В підрозділі 3.1 розглядається задача дифракції звуку на класичному бар'єрі.

В підрозділі 3.1.1 розглядається математична модель задачі.

В підрозділі 3.1.2 будується аналітичний розв'язок.

В підрозділі 3.1.3 проводиться аналіз чисельних розрахунків.

В підрозділі 3.2 розглядається задача дифракції звуку на бар'єрі з резонатором, який розташований на краю бар'єру.

В підрозділі 3.2.1 розглядається математична модель задачі.

В підрозділі 3.2.2 будується аналітичний розв'язок.

В підрозділі 3.2.3 проводиться аналіз чисельних розрахунків.

3.1 Класичний бар'єр

3.1.1 Математична модель задачі

Розглянемо модель так званого класичного бар'єру. Переконаємося в тому, що при розв'язанні задачі методом часткових областей можливе використання двох підходів до спряження полів на границях часткових областей, а саме:

- середньоквадратичне наближення полів,
- поточкове спряження полів.

Класичні бар'єри є суцільною вертикальною стінкою з жорсткого матеріалу, висота якої істотно перевищує її товщину. Бар'єри встановлюються на узбіччях транспортних магістралей у вигляді безперервної стіни, довжина якої незрівнянно більша її висоти. Вважатимемо, що транспортний потік щільний і досить

інтенсивний (понад дві тисячі транспортних одиниць на годину). В цьому випадку інтенсивність шуму, що генерується потоком, практично не залежить від величини вкладу окремої транспортної одиниці.

Виходячи з вищевикладеного, розглянемо наступну математичну модель класичного бар'єру, який розташований вздовж транспортної магістралі (рис. 3.1). Вважатимемо, що на нескінченній акустично жорсткій поверхні, яка моделює поверхню землі, в точці O встановлено нескінченний (вздовж напрямку перпендикулярного площині малюнка) акустично жорсткий тонкий бар'єр висотою H . Праворуч паралельно бар'єру в точці O_1 знаходиться лінійне гармонічне з частотою ω джерело звуку у вигляді нескінченно довгої пульсуючої нитки, яке моделює шум, створюваний транспортним потоком. Точка O_1 розташована на акустично жорсткій поверхні на відстані $OO_1 = r_s$ від точки O . Буквою M позначено точку спостереження. Весь півпростір заповнений ідеальним акустичним середовищем з густиною ρ та швидкістю звуку c , які відповідають параметрам повітряного середовища.

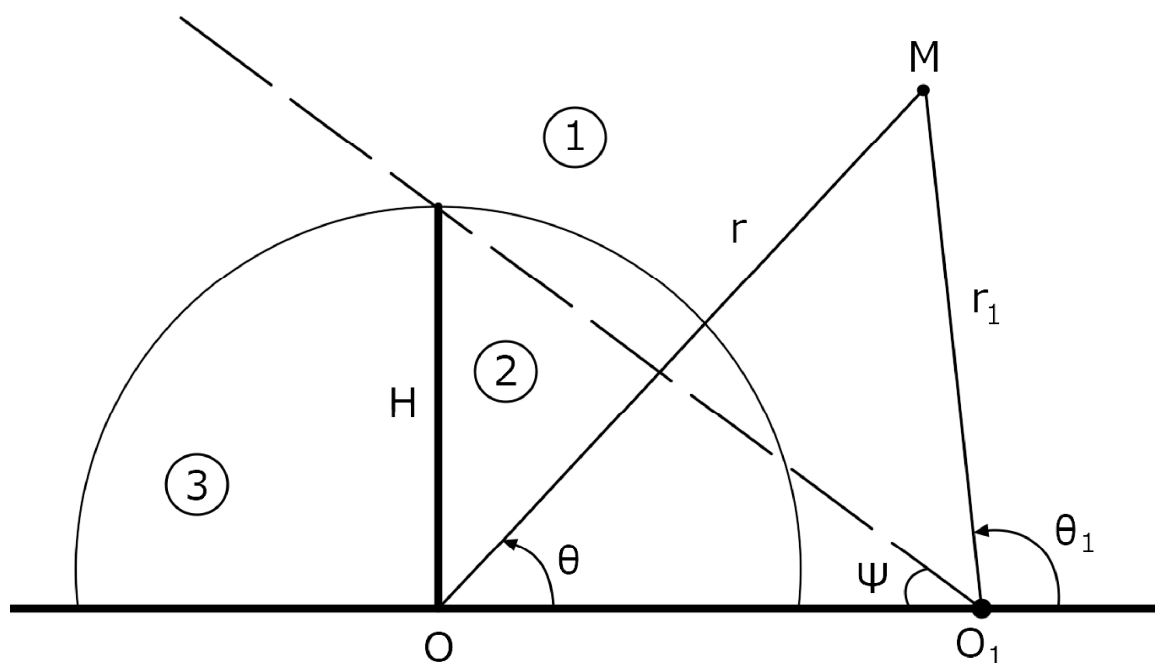


Рис. 3.1. Геометрія моделі класичного бар'єру

Описана модель з точки зору математики еквівалентна плоскій задачі, в якій параметри звукового поля не залежать від одної з координат (в нашому випадку від координати перпендикулярної до площини рисунку). Прийняті акустичні властивості поверхонь землі і бар'єру означають, що нормальна складова коливальної швидкості звукового поля на них рівна нулю.

3.1.2 Аналітичний розв'язок

Для побудови розв'язку поставленої задачі введемо полярну систему координат (r, θ) з центром в точці O (рис. 3.1). Весь простір існування звукового поля розділимо на три області:

- область 1 представляє собою зовнішність півкола радіусом H , тобто $r \geq H$, $0 \leq \theta \leq \pi$;
- область 2 займає правий сектор півкола радіусом H : $r \leq H$, $0 \leq \theta \leq \pi / 2$;
- область 3 визначається лівим сектором півкола: $r \leq H$, $\pi / 2 \leq \theta \leq \pi$.

Описане виділення часткових областей безпосередньо пов'язане зі способом побудови граничної задачі. Саме для таких областей можна побудувати загальний розв'язок рівняння Гельмгольца. При цьому розв'язок вихідної граничної задачі зводиться до виконання умов спряження на границях часткових областей. Часовий множник $\exp(-i\omega t)$ всюди не пишемо.

Помістимо в точку розміщення джерела центр O_1 другої полярної системи координат (r_1, θ_1) , рис. 3.1. Нехай, для визначеності, джерело розташоване в області 1, тобто $r_s > H$. Поле тиску лінійного джерела представимо у вигляді $p_s(r_1, \theta_1) \equiv p_s(r_1) = H_0^{(1)}(kr_1)$, де $H_0^{(1)}(kr_1)$ – функція Ханкеля першого роду нульового порядку, $k = \omega / c$ – хвильове число, $\omega = 2\pi f$, f – частота.

Поле тиску в області 1 має вигляд:

$$p_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)'}(kH)} \cos(n\theta) + p_s(r_1, \theta_1), \quad (3.1)$$

штрих у функції Ханкеля означає похідну по аргументу.

Поле тиску в області 2 представимо у вигляді суперпозиції стоячих хвиль:

$$p_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)} \frac{J_{2n}(kr)}{J_{2n}'(kH)} \cos(2n\theta). \quad (3.2)$$

Аналогічно, для області 3 поле тиску має вигляд:

$$p_3 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(3)} \frac{J_{2n}(kr)}{J_{2n}'(kH)} \cos\left(2n\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right). \quad (3.3)$$

В формулах (3.1)–(3.3) прийняті стандартні позначення для функцій Бесселя і Ханкеля.

Умови спряження полів на границі часткових областей 1 і 2, 3 мають вигляд:

$$1) p_1 = p_2, \quad r = H, \quad \theta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad (3.4)$$

$$2) p_1 = p_3, \quad r = H, \quad \theta = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \quad (3.5)$$

$$3) \frac{\partial p_1}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial p_2}{\partial r}, & r = H, \quad \theta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \frac{\partial p_3}{\partial r}, & r = H, \quad \theta = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \end{cases} \quad (3.6)$$

Підставляючи вирази для полів в часткових областях (3.1)–(3.3) в умови спряження полів (3.4)–(3.6), отримаємо нескінченну систему рівнянь, яка містить функції кутової координати θ .

Перехід від отриманих рівнянь до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь можна провести двома шляхами:

- перший – застосовуючи середньоквадратичне наближення при виконанні граничних умов,
- другий – використовуючи поточкове спряження полів на границі.

Розв’язок нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь будемо проводити методом редукції, контролюючи при цьому в ході обчислень якість виконання граничних умов. Для цього обмежимо нескінченні ряди у виразах (3.1)–(3.3), задаючи кількість коефіцієнтів $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $A_n^{(3)}$ відповідно N_1 , N_2 , N_3 . Вважатимемо, що $N_2 = N_3 = N_1 / 2$.

Середньоквадратичне наближення

При такому підході, множимо скалярно вираз (3.4) на функції $\cos(2m\theta)$, $m = 0, 1, 2, \dots, N_2$, вираз (3.5) – на функції $\cos(2m(\theta - \pi/2))$, $m = 0, 1, 2, \dots, N_3$, а вираз (3.6) на функції $\cos(m\theta)$, $m = 0, 1, 2, \dots, N_1$. При цьому використаємо властивість ортогональності даних наборів тригонометричних функцій на відрізках, вказаних в умовах спряження полів (3.4)–(3.6).

В результаті приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду, порядок якої визначається кількістю врахованих коефіцієнтів $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $A_n^{(3)}$, а саме $N_1 + N_2 + N_3$ (процедура отримання системи лінійних алгебраїчних рівнянь аналогічна процедурі, що проводилася в задачах розділу 2, тому, внаслідок громіздкості, вона не виписана).

Поточкове спряження полів на границі

Позначимо координати точок спряження (вузлових точок) на границі розділу часткових областей 1 і 2, 3 – $(r_m = H, \theta_m)$, $m = 0, 1, 2, \dots, N_1$. Обравши кутові

координати вузлових точок $0 < \theta_m < \pi$, $m = 0, 1, 2, \dots, N_1$ записуємо вирази (3.4) – (3.6) у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $N_1 + N_2 + N_3$.

3.1.3 Аналіз чисельних розрахунків

Побудовані в рамках методу часткових областей аналітичні представлення звукового поля завжди точно задовольняють хвильовому рівнянню при будь-якій кількості утримуваних в рядах доданків. Тому в основу оцінок точності розв'язку задачі слід покласти оцінку точності виконання умов спряження на границях часткових областей. Очевидно, що для підвищення точності оцінки звукових полів, розсіяних бар'єром, необхідно збільшувати кількість утримуваних невідомих комплексних коефіцієнтів при розв'язанні алгебраїчної системи рівнянь методом редукції.

Зауважимо, що ефективність алгоритмів розв'язку нескінченних систем алгебраїчних рівнянь можна забезпечити за рахунок врахування відомих сингулярностей в околі кутових точок (в нашому випадку це верхній край бар'єру). Це дає можливість отримати кількісні оцінки характеристик звукових полів в областях, які близькі до кутових точок. Якщо основний інтерес представляють характеристики поля в точках, віддалених від кутових, то достатню точність результатів можна забезпечити за допомогою методу простої редукції, утримуючи в системі певну кількість рівнянь. Були проведені чисельні експерименти, що дозволяють оцінити ступінь виконання умов спряження звукових полів для вибраного діапазону значень частоти. Така процедура стандартна при використанні методу часткових областей і не раз нами випробувана.

Зосередимо свою увагу на співставленні двох, зазначених вище, підходів при виконанні умов спряження полів на границях часткових областей. В якості інтегральних характеристик акустичних властивостей шумозахисних бар'єрів доцільно використовувати енергетичні характеристики звукового поля, такі, як повна потужність, що випромінюється джерелом W_0 (звичайно у присутності бар'єру) і потужність звукового поля W_D , проникаючого в зону геометричної тіні

бар'єру за рахунок дифракції. На рис. 3.1 схематично зображено бар'єр з усіма параметрами, необхідними для знаходження кута розкриття геометричної тіні ψ .

Враховуючи сказане, в якості інтегрального просторового критерію оцінки шумозахисних властивостей бар'єру виберемо величину $G = \frac{W_D}{W_0}$, яка є енергетичним коефіцієнтом проходження звуку в зону тіні бар'єру.

Обчислення середньої за період потужності джерела на одиницю його довжини можна виконати шляхом інтегрування по дузі півкола радіусу r у дальній зоні випромінюючої системи джерело-бар'єр: $W_0 = \int_0^\pi I(r, \theta) r d\theta$,

$$W_D = \int_{\pi-\psi}^\pi I(r, \theta) r d\theta, \text{ де інтенсивність } I = |p|^2 / (2\rho c).$$

Відправною точкою у розрахунках при поточковому спряженні полів є нормована до довжини хвилі $\lambda = c / f$ відстань між вузловими точками Δh вздовж границі розділу часткових областей 1 і 2, 3, тобто величина $\Delta h / \lambda$. Виходячи з величини $\Delta h / \lambda$, визначається кількість вузлових точок $N_1 = [L / \Delta h]$, $L = \pi H$; $N_2 = N_3 = N_1 / 2$.

Тепер слід співставити розрахунки, виконані при використанні поточкового спряження полів, і при середньоквадратичному наближенні. Для цього, при використанні середньоквадратичного наближення, кількість мод в області 1 покладемо рівним N_1 , кількість мод в області 2 покладемо – N_2 , а в області 3 – N_3 . В цьому випадку порядок систем рівнянь для двох варіантів спряження полів буде однаковий, а саме $N_1 + N_2 + N_3$.

Нехай параметри моделі класичного бар'єру такі: висота бар'єру $H = 4$ м, відстань до джерела звуку $r_s = 6$ м, зона геометричної тіні визначається діапазоном зміни кута $\theta = [\pi - \psi, \pi]$, за даних умов задачі $\psi \approx 34^\circ$.

Як показують розрахунки, хвильову відстань між вузловими точками слід вибирати згідно з нерівністю $\Delta h / \lambda \leq 0,15$. Нехай $\Delta h / \lambda = 0,05$. Тоді кількість N_1

вузлових точок на границі розділу часткових областей 1 і 2, 3 (півколо радіусу H), при зміні частоти f від 30 Гц до 280 Гц, змінюється за лінійним законом від величини $N_1 = 24$ до $N_1 = 208$. Відповідно при середньоквадратичному наближенні змінюється і кількість мод в області 1.

На рис. 3.2 показано частотну залежність енергетичного коефіцієнта проходження звуку в зону тіні бар'єру $G(f)$. Аналізуючи графіки на рис. 3.2 відзначимо хороший збіг розрахункових даних для двох випадків спряження полів на границі часткових областей у всьому діапазоні частот. Як і слід було очікувати, ефективність класичного бар'єру знижується в області низьких частот, залишаючись практично постійною на частотах вище 300 Гц.

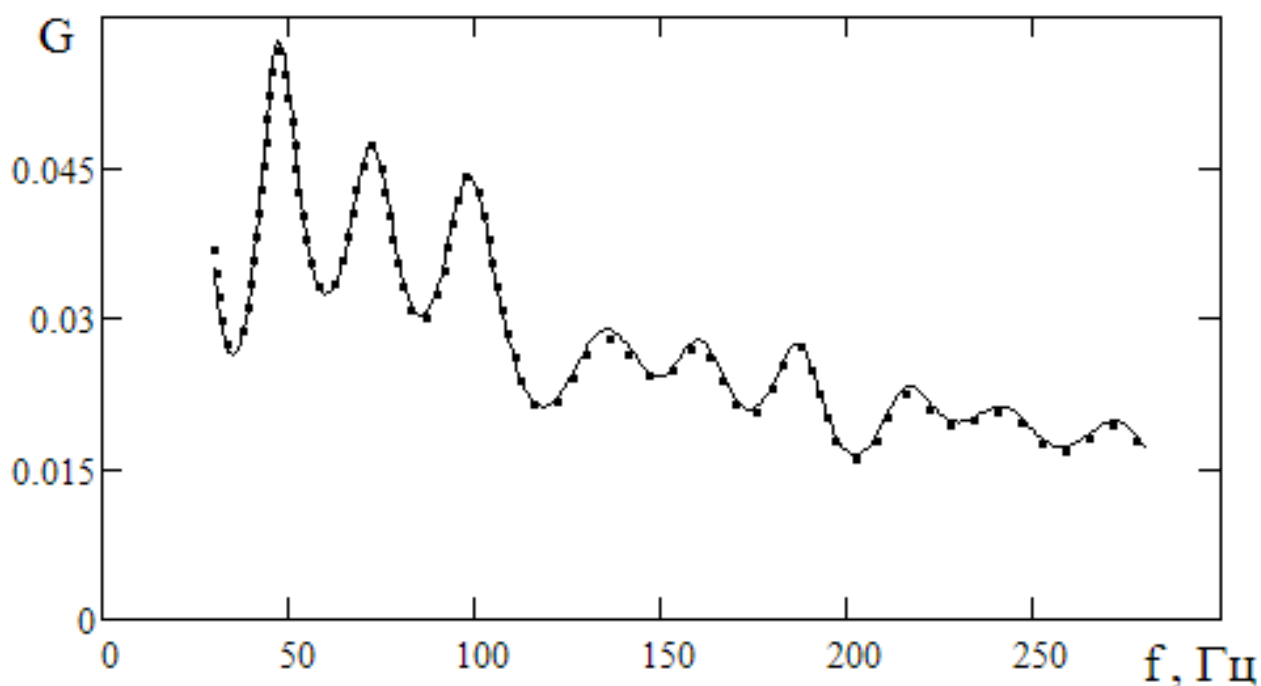


Рис. 3.2. Класичний бар'єр. Частотна залежність енергетичного коефіцієнту проходження звуку в зону тіні бар'єру $G(f)$,

$$H = 4 \text{ м}, r_s = 6 \text{ м}, \psi \approx 34^\circ, \Delta h / \lambda = 0,05, N_1 = 24 \dots 208:$$

лінія – поточкове спряження, точки – середньоквадратичне наближення

Розрахунок полів на границі розділу часткових областей 1 і 2, 3 показав, що, в діапазоні параметрів моделі, що цікавлять нас, спостерігається добре (з графічною

точністю) спряження полів в обох варіантах розрахунку. При цьому має місце збіг розрахункових значень полів для поточкового спряження полів і при середньоквадратичному наближенні. Звичайно, має місце особливість у поведінці швидкості в околі кутової точки (верхній край бар'єру), що є цілком передбачуваним результатом.

3.2 Бар'єр з резонатором

3.2.1 Математична модель задачі

Звукове поле в області геометричної тіні для класичного бар'єру (рис. 3.1) визначається променями, розсіяними на краю бар'єру. Саме ці промені є головною причиною появи звукового поля в зоні тіні за бар'єром. Таким чином, якби вдалося послабити інтенсивність променів, розсіяних на кромці бар'єру, можна було б зменшити звукове поле в зоні тіні за бар'єром і тим самим підвищити його ефективність, не вдаючись до збільшення висоти бар'єру.

Для реалізації цієї ідеї розташуємо біля кромки бар'єру резонатор у вигляді сектора з жорсткими стінками (рис. 3.3). За рахунок інтерференції хвиль всередині резонатору вздовж його осі утворюється стояча хвиля. Якщо параметри резонатору підбрані належним чином, то біля дна резонатору встановлюється область максимального звукового тиску, а біля його вхідного отвору встановлюється область мінімального тиску. Відповідно повинен знизитися рівень звуку, який "затікає" за бар'єр.

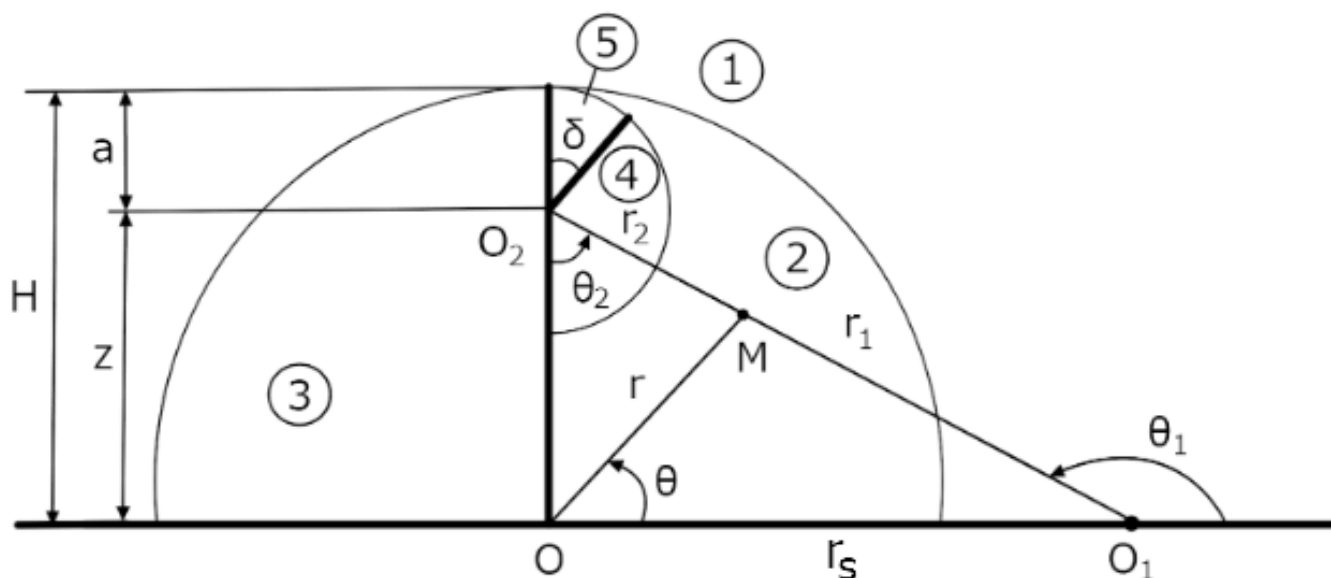


Рис. 3.3. Геометрія моделі бар'єру з резонатором (область 5)

Геометрію моделі бар'єру з резонатором показано на рис. 3.3. Резонатор є круговим сектором з кутом розкриття δ та сторонами довжиною a (область 5). Вважаємо, що всі поверхні бар'єру ідеально жорсткі. Для побудови розв'язку поставленої задачі, крім двох полярних систем координат (r, θ) і (r_1, θ_1) , введемо третю полярну систему координат (r_2, θ_2) з центром у точці O_2 (рис. 3.3). Весь простір існування звукового поля розіб'ємо на п'ять областей:

- область 1 – зовнішність півкола радіусом H , тобто $r \geq H$, $0 \leq \theta \leq \pi$;
- область 2 – правий сектор півкола радіусом H : $r \leq H$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ за виключенням півкола радіусом a : $r_2 \leq a$, $0 \leq \theta_2 \leq \pi$;
- область 3 – лівий сектор півкола: $r \leq H$, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$;
- область 4 – сектор: $r_2 \leq a$, $0 \leq \theta_2 \leq \pi - \delta$;
- область 5 – сектор: $r_2 \leq a$, $\pi - \delta \leq \theta_2 \leq \pi$.

3.2.2 Аналітичний розв'язок

Поля в часткових областях (рис. 3.3) запишемо у вигляді:

$$p_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)'}(kH)} \cos(n\theta) + p_s(r_1, \theta_1), \quad (3.7)$$

$$p_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)} \frac{J_{2n}(kr)}{J_{2n}'(kH)} \cos(2n\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(22)} \frac{H_n^{(1)}(kr_2)}{H_n^{(1)'}(ka)} \cos(n\theta_2), \quad (3.8)$$

$$p_3 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(3)} \frac{J_{2n}(kr)}{J_{2n}'(kH)} \cos\left(2n\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right), \quad (3.9)$$

$$p_4 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(4)} \frac{J_{\alpha_n}(kr_2)}{J_{\alpha_n}'(ka)} \cos(\alpha_n \theta_2), \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{\pi - \delta}, \quad (3.10)$$

$$p_5 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(5)} \frac{J_{\beta_n}(kr_2)}{J_{\beta_n}'(ka)} \cos(\beta_n (\theta_2 - (\pi - \delta))), \quad \beta_n = \frac{n\pi}{\delta}. \quad (3.11)$$

Запишемо умови спряження полів:

$$1) p_1 = p_2, r = H, \theta = [0, \pi / 2], \quad (3.12)$$

$$2) p_1 = p_3, r = H, \theta = [\pi / 2, \pi], \quad (3.13)$$

$$3) \frac{\partial p_1}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial p_2}{\partial r}, & r = H, \theta = [0, \pi / 2], \\ \frac{\partial p_3}{\partial r}, & r = H, \theta = [\pi / 2, \pi], \end{cases} \quad (3.14)$$

$$4) \frac{\partial p_2}{\partial r_2} = \begin{cases} \frac{\partial p_4}{\partial r_2}, & r_2 = a, \theta_2 = [0, \pi - \delta], \\ \frac{\partial p_5}{\partial r_2}, & r_2 = a, \theta_2 = [\pi - \delta, \pi], \end{cases} \quad (3.15)$$

$$5) p_2 = p_4, r_2 = a, \theta_2 = [0, \pi - \delta], \quad (3.16)$$

$$6) p_2 = p_5, r_2 = a, \theta_2 = [\pi - \delta, \pi]. \quad (3.17)$$

Підставивши вирази (3.7)–(3.11) в умови (3.12)–(3.17) отримаємо нескінченну систему рівнянь, яка містить кутові функції на певних інтервалах зміни кутових координат θ , θ_1 і θ_2 . Перехід до скінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду виконаємо на основі поточкового спряження полів на границях розділу часткових областей. Враховуючи досить складне розбиття області існування поля на часткові області та наявність трьох полярних систем координат (рис. 3.3), можна стверджувати, що використання поточкового спряження полів у порівнянні з середньоквадратичним наближенням суттєво спростить обсяг аналітичної та обчислювальної роботи.

Параметри резонатору визначаємо з таких міркувань:

- величину a знаходимо з умови першого резонансу для часткової області 5 за умов жорстких стінок області 5 та рівності нулю тиску на дузі $r_2 = a$, $\theta_2 = [\pi - \delta, \pi]$.

Відповідно до зазначених граничних умов шукана величина є коренем рівняння

$$J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda}a\right) = 0. \text{ Звідси } 2\pi a / \lambda = 0,7655\pi \text{ і } a = 0,38275\lambda;$$

- оптимальна величина ширини розкриття резонатору приблизно дорівнює 0.2λ , тобто $a\delta = 0.2\lambda$. Підставивши у це співвідношення вираз $a = 0,38275\lambda$, знаходимо значення кута $\delta = 30^\circ$.

3.2.3 Аналіз чисельних розрахунків

Спочатку наведемо типові графіки, які ілюструють якість виконання умов спряження полів. Як приклад, на рис. 3.4 показані поля на границі розділу часткових областей. Параметри моделі: $H = 4$ м, $r_s = 6$ м, $\psi \approx 34^\circ$, $\Delta h / \lambda = 0,05$, резонансна частота резонатору $f_{rez} = 100$ Гц, геометричні параметри резонатору такі: $a = 1,3$ м, $\delta = 30^\circ$. З огляду на невелике значення величини a кількість вузлових точок на границі розділу часткових областей 2 та 4, 5 збільшувалася у чотири-шість разів. Згідно з обраними параметрами, кількість вузлових точок була така: на границі

часткових областей 1 та 2, 3 – 76, на границі області 4 – 82, на границі області 5 – 16. Як бачимо, при відносно невеликій кількості вузлових точок, а значить і кількості мод, що враховуються в часткових областях, отримали хороший збіг полів на границях часткових областей.

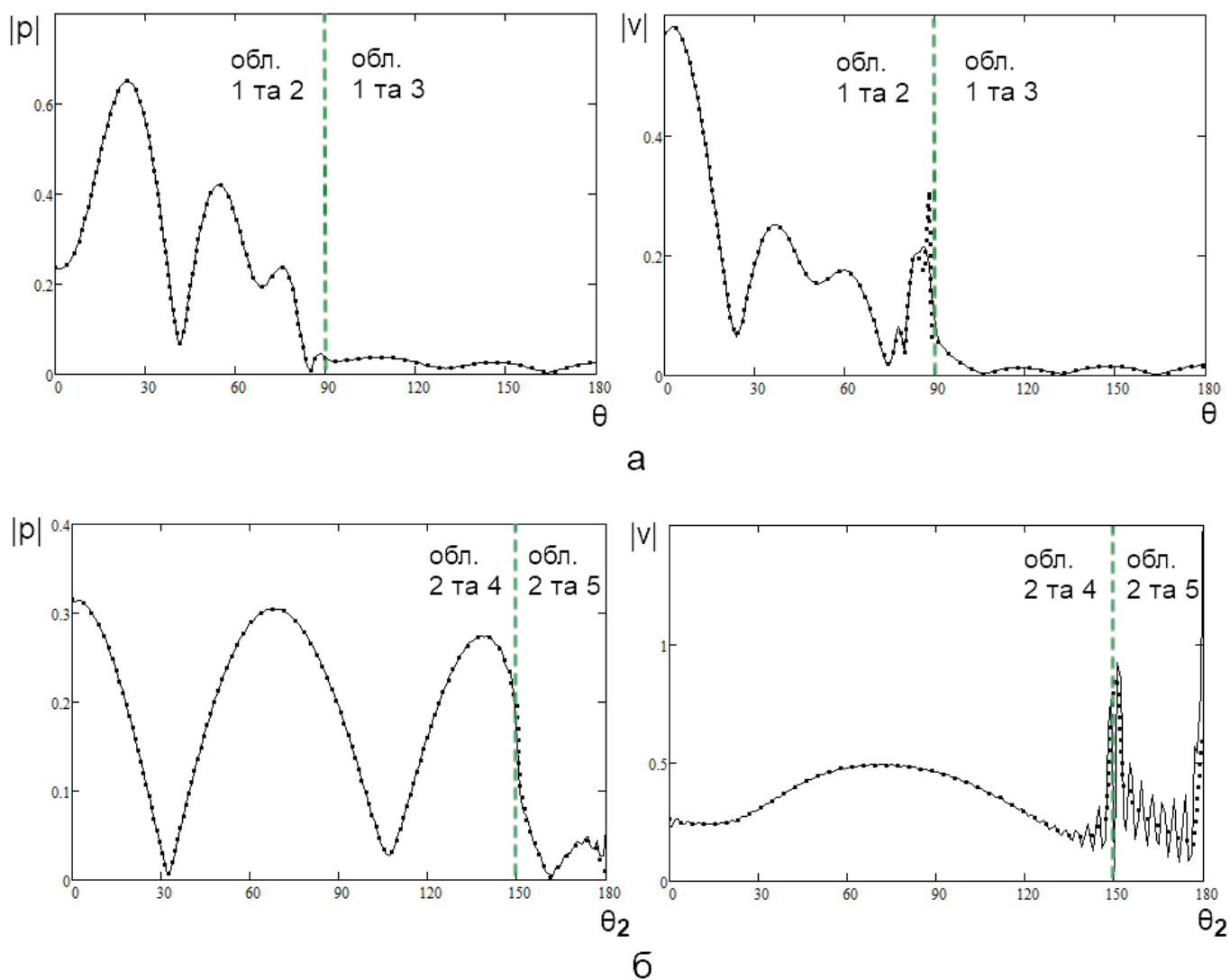


Рис. 3.4. Бар'єр з резонатором, модулі тиску $|p|$ та нормальної коливальної швидкості $|v|$ на границях часткових областей,

$$H = 4 \text{ м}, r_s = 6 \text{ м}, f = f_{rez} = 100 \text{ Гц}; \Delta h / \lambda = 0,05:$$

а – на границі розділу часткових областей 1 та 2, 3,
лінії – поле з боку області 1, точки – поле з боку областей 2 та 3;

б – на границі розділу часткових областей 2 та 4, 5,
лінії – поле з боку області 2, точки – поле з боку областей 4 та 5

В якості інтегрального енергетичного критерію бар'єру з резонатором приймемо відношення потужностей звукового поля, що проникають в зону геометричної тіні бар'єру з резонатором W_{Db} та класичного бар'єру W_D : $G_b = \frac{W_{Db}}{W_D}$.

На рис. 3.5 показані частотні залежності інтегрального критерію бар'єру $G_b(f)$. У розрахунковому діапазоні частот від 30 Гц до 280 Гц кількість вузлових точок на границі розділу часткових областей 1 і 2, 3 змінювалася за лінійним законом від 12 до 112. Число вузлових точок на границі області 5 змінювалося за лінійним законом від 4 до 36. Параметром кривих є частота резонансу резонатору: крива 1 – $f_{rez} = 75$ Гц, 2 – $f_{rez} = 100$ Гц, 3 – $f_{rez} = 125$ Гц. Відповідно змінюється геометричний розмір резонатору, а саме величина $a = 1,7, 1,3, 1,0$ м.

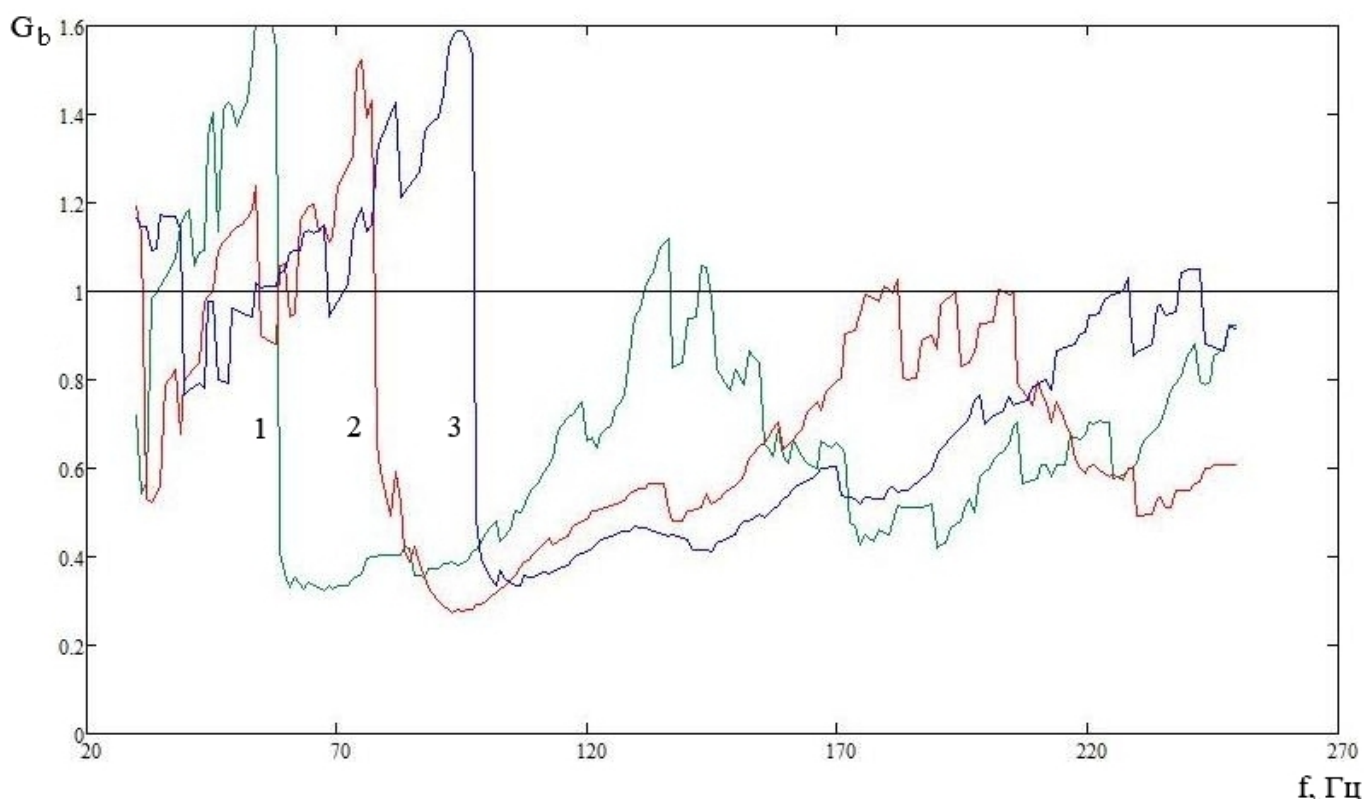


Рис. 3.5. Частотні залежності інтегрального критерію бар'єру $G_b(f)$,

$H = 4$ м, $r_s = 6$ м, $\psi \approx 34^\circ$: 1 – $f_{rez} = 75$ Гц, 2 – $f_{rez} = 100$ Гц, 3 – $f_{rez} = 125$ Гц

Для всіх трьох варіантів розрахунку можна виділити загальні риси в поведінці частотних характеристик:

- величина інтегрального критерію бар'єру $G_b(f)$ поблизу резонансної частоти приблизно однакова для трьох варіантів резонатору та становить 0,3;
- для частот вище резонансної частоти є смуга частот, в якій спостерігається провал у частотній характеристиці $G_b(f)$, що свідчить про перевагу бар'єру з резонатором; при цьому зі зростанням резонансної частоти ця смуга частот збільшується;
- на частотах вище вказаних смуг маємо величину $G_b(f) < 1$, хоча поступово ефективності бар'єру з резонатором та класичного бар'єру зближуються;
- на частотах нижче резонансних спостерігаються ситуації, за яких ефективність бар'єру з резонатором гірша, ніж у класичного бар'єру. Тому вибір резонансної частоти резонатору слід робити таким чином, щоб область підйому в частотній характеристиці відповідала частотам шуму з малою потужністю.

Приклад структури поля в околі бар'єру представлений на рис. 3.6 (верхній рисунок – бар'єр з резонатором, нижній рисунок – класичний бар'єр) та рис. 3.7 (збільшений фрагмент структури поля в околі бар'єру з резонатором). На рисунках показано прилеглий до бар'єру фрагмент просторового розподілу різниці рівнів звукових тисків у децибелах $\Delta L = 20 \lg \frac{p}{p_0}$, тут p – тиск у точці спостереження за наявності бар'єру, p_0 – тиск у точці спостереження за відсутності бар'єру. Координати відкладені в метрах.

Наочно видно, як у вихідного перерізу резонатору формується область зниженого тиску, яка сприяє зниженню рівня шуму проникаючого в тіньову зону бар'єру.

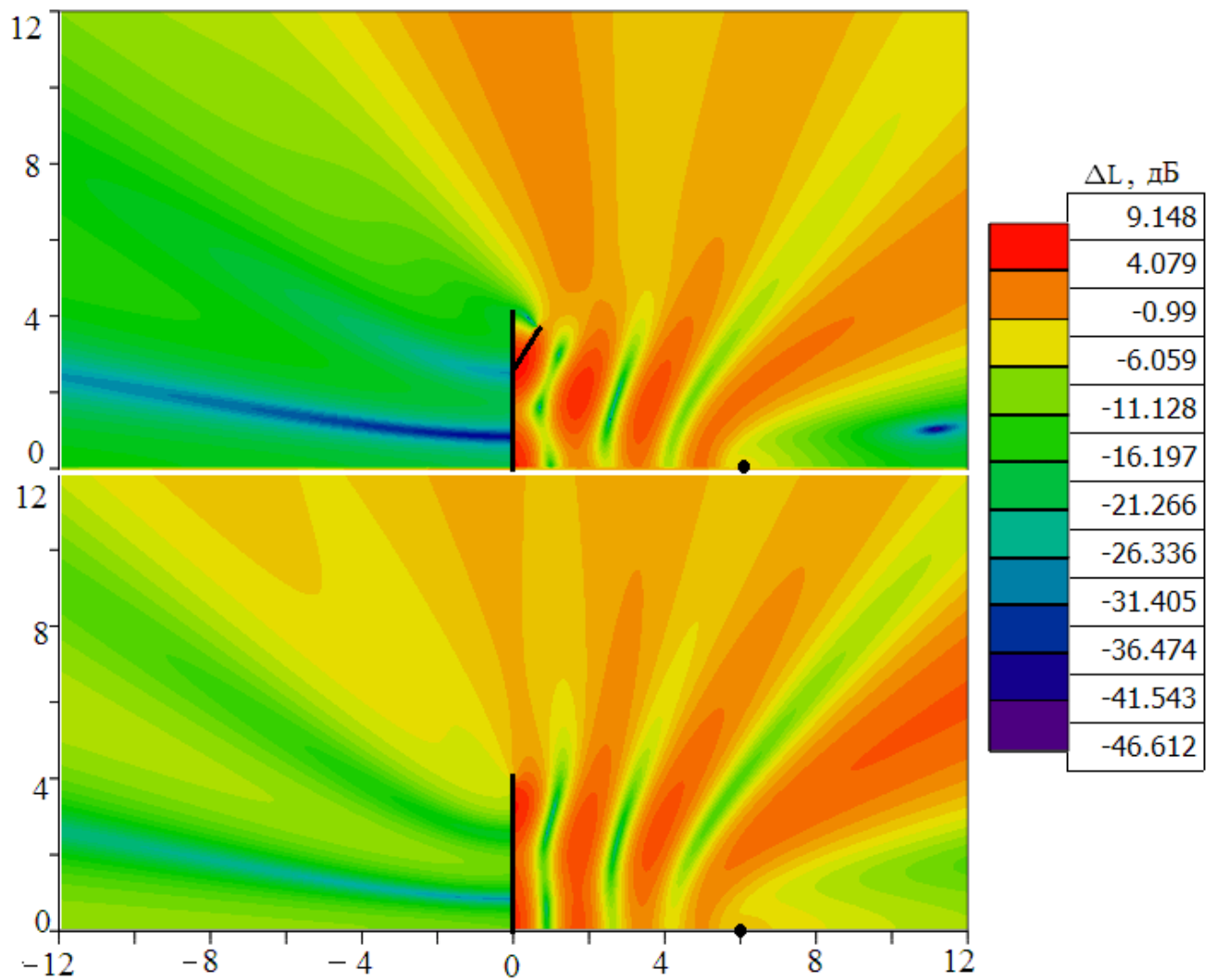


Рис. 3.6. Розподіл величини ΔL в околі бар'єру
(координати відкладені в метрах, чорна точка – джерело),

$$H = 4 \text{ м}, r_s = 6 \text{ м}, f = f_{rez} = 100 \text{ Гц:}$$

вгорі – бар'єр з резонатором,

знизу – класичний бар'єр

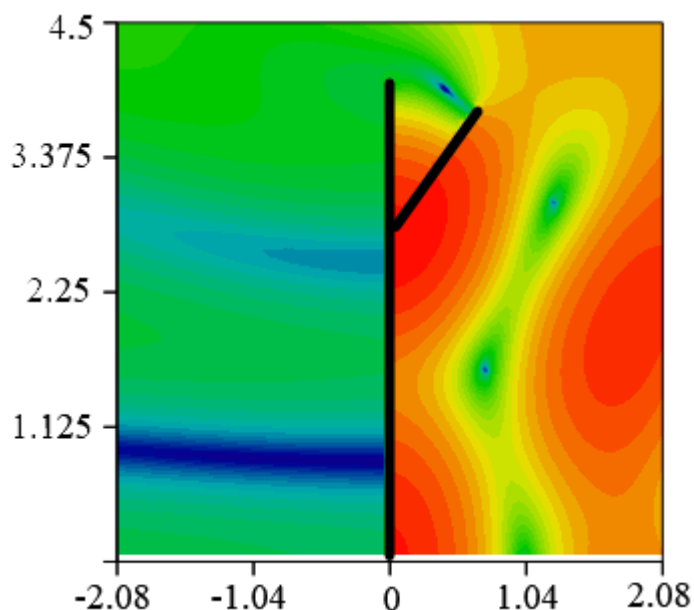


Рис. 3.7. Збільшений фрагмент розподілу величини ΔL
в околі бар'єру з резонатором
(координати відкладені в метрах),
 $H = 4$ м, $r_s = 6$ м, $f = f_{rez} = 100$ Гц

3.3 Висновки до розділу

На основі методу часткових областей отримано розв'язок задачі про розсіювання звуку на шумозахисному бар'єрі. Використовуючи поточкове спряження полів на границях часткових областей, розроблено ефективний алгоритм для проведення чисельного аналізу звукового поля в околі бар'єру в діапазоні частот цікавому для практики.

Показано, що використання середньоквадратичного наближення та поточкового спряження полів на границях часткових областей в задачі про розсіювання звуку на класичному бар'єрі дають хороший збіг розрахункових значень полів для двох варіантів спряження полів.

В задачі про розсіювання звуку на бар'єрі з резонатором виникла необхідність введення трьох полярних систем координат. Зрозуміло, що використання середньоквадратичного наближення було б пов'язане зі складнощами при побудові

розрахункового алгоритму. В той час як поточкове спряження полів дозволяє відносно легко побудувати обчислювальний алгоритм. При цьому збільшення кількості вузлових точок дозволяє впевнено підвищувати точність спряження звукових полів.

Показано, що для частот вище резонансної частоти є смуга частот, в якій спостерігається провал у частотній характеристиці інтегрального критерію бар'єру, що свідчить про перевагу бар'єру з резонатором; при цьому зі зростанням резонансної частоти ця смуга частот збільшується. На більш високих частотах відмінність ефективності між традиційним бар'єром і бар'єром з резонатором згладжується. Тому бар'єр з резонатором особливо ефективний за наявності відносно вузькосмугового джерела шуму, коли проблемні частоти відносно невисокі.

Показано, що на частотах нижче резонансних спостерігаються ситуації, за яких ефективність бар'єру з резонатором гірша, ніж у класичного бар'єру. Тому вибір резонансної частоти резонатору слід робити таким чином, щоб область підйому в частотній характеристиці відповідала частотам шуму з малою потужністю.

РОЗДІЛ 4

РОЗСІЮВАННЯ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ НА СКІНЧЕННИХ КЛИНОПОДІБНИХ ОБ'ЄКТАХ

В даному розділі досліджується можливість використання поточкового спряження хвильових полів в методі часткових областей при розв'язанні задачі розсіювання плоскої хвилі на скінченних клиноподібних об'єктах за наявності у них поверхонь значних хвильових розмірів. Розглядаються дві моделі скінченного клину: гострого та заокругленого.

В підрозділі 4.1 ставиться задача та будується аналітичний розв'язок задачі про розсіювання хвилі на двох моделях клину: гострому та заокругленому.

В підрозділі 4.2 визначаються вирази для перерізів розсіювання досліджуваних об'єктів.

В підрозділі 4.3 будується чисельний алгоритм та перевіряється виконання граничних умов для двох моделей клину: гострого та заокругленого.

В підрозділі 4.4 проводиться аналіз чисельних розрахунків.

4.1 Постановка та побудова аналітичного розв'язку задачі розсіювання плоскої хвилі на скінченних клиноподібних об'єктах

Виділимо для аналізу дві моделі скінченного клину: гострого та заокругленого.

4.1.1 Гострий клин

Розглянемо плоску задачу розсіювання плоскої хвилі на клиноподібному об'єкті (рис. 4.1), тобто вважаємо, що об'єкт має нескінченну протяжність вздовж осі, перпендикулярної до площини рисунку. Щоб описати геометрію об'єкту та побудувати розв'язок задачі, введемо полярну систему координат $r\theta$ з центром в

кутовій точці клину. Об'єкт є скінченим клином із зовнішнім кутом 2ϕ , сторони якого замкнуті дугою кола радіусу R . Поверхні об'єкту вважаємо акустично жорсткими. Клиноподібний об'єкт знаходиться в ідеальному середовищі з густиною ρ та зі швидкістю звуку c . Напрямок падаючої плоскої хвилі задається кутом θ_0 .

Відповідно до ідеї методу часткових областей, весь простір існування звукового поля ділиться на дві області:

1 – зовнішність кола радіусу R , тобто $r \geq R$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$;

2 – сектор кола радіусом R , а саме: $0 \leq r \leq R$, $-\phi \leq \theta \leq \phi$.

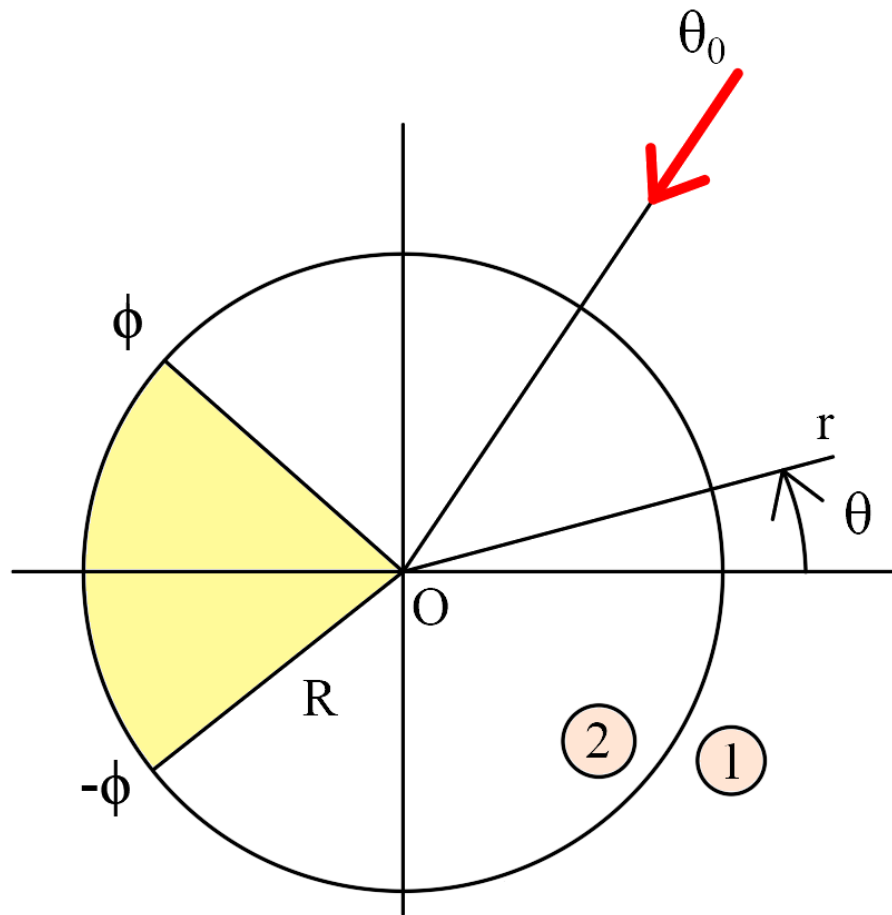


Рис. 4.1. Геометрія моделі скінченного гострого клину

Поле падаючої хвилі $p_0 = \exp(-ikr \cos(\theta - \theta_0))$ розділимо на парну та непарну складові:

$$p_0 = p_0^+ + p_0^-, \quad (4.1)$$

$$p_0^+ = \frac{1}{2} \left[\exp(-ikr \cos(\theta - \theta_0)) + \exp(-ikr \cos(\theta + \theta_0)) \right],$$

$$p_0^- = \frac{1}{2} \left[\exp(-ikr \cos(\theta - \theta_0)) - \exp(-ikr \cos(\theta + \theta_0)) \right].$$

Тоді розв'язок задачі шукається як сума розв'язків парної та непарної задач. Розбиття задачі на парну та непарну дозволить розглядати діапазон зміни кута $0 \leq \theta \leq \pi$. Це дає можливість зменшити вдвічі розміри матриці системи рівнянь.

Поле тиску в частковій області 1 запишемо у вигляді:

$$p_1 = p_1^+ + p_1^-, \quad (4.2)$$

$$p_1^+ = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\theta) \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)'}(kR)} + p_0^+, \quad p_1^- = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\theta) \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)'}(kR)} + p_0^-.$$

Поле тиску в частковій області 2:

$$p_2 = p_2^+ + p_2^-, \quad (4.3)$$

$$p_2^+ = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\alpha_n \theta) \frac{J_{\alpha_n}(kr)}{J'_{\alpha_n}(kR)}, \quad p_2^- = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\beta_n \theta) \frac{J_{\beta_n}(kr)}{J'_{\beta_n}(kR)},$$

$$\text{де } \alpha_n = \frac{n\pi}{\phi}, \quad \beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2\phi}.$$

Умови спряження полів на границі часткових областей мають вигляд:

$$1) \frac{\partial p_1^\pm}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial p_2^\pm}{\partial r}, & r = R, \theta = [0, \phi], \\ 0, & r = R, \theta = [\phi, \pi]. \end{cases} \quad (4.4)$$

$$2) p_1^\pm = p_2^\pm, \quad r = R, \theta = [0, \phi]. \quad (4.5)$$

При розв'язанні парної задачі визначаються набори коефіцієнтів A_n, C_n , а при розв'язанні непарної задачі визначаються набори коефіцієнтів B_n, D_n .

4.1.2 Заокруглений клин

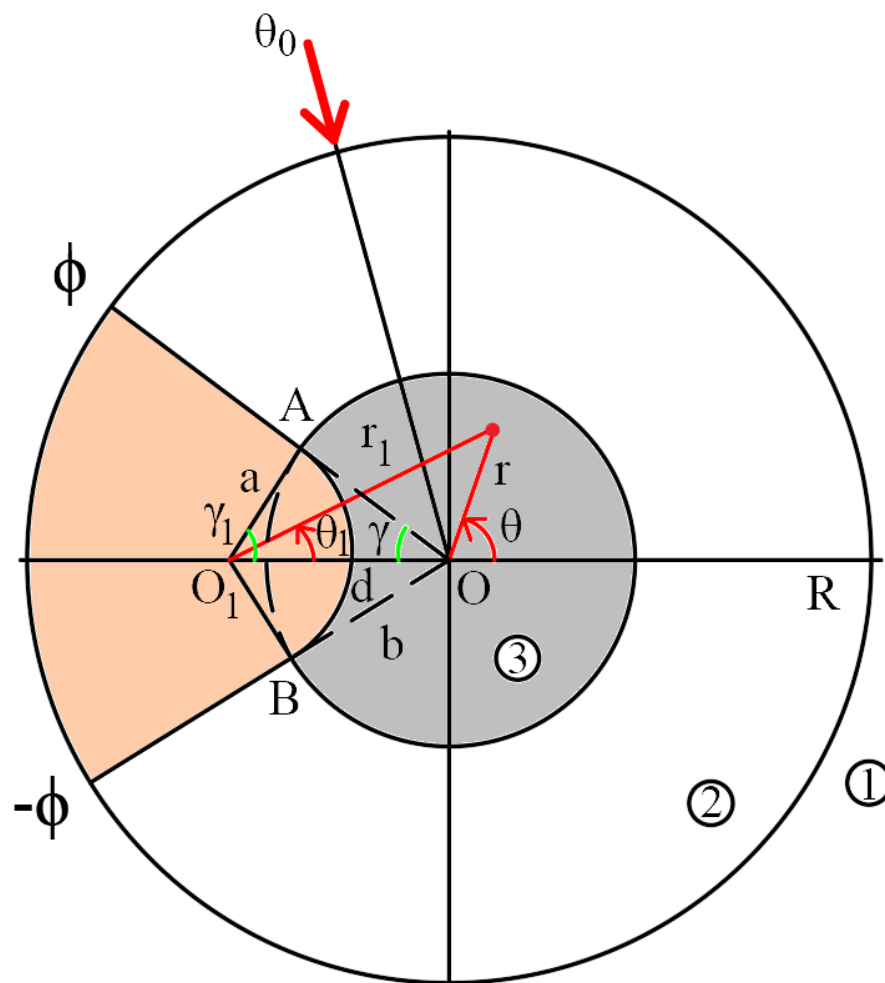


Рис. 4.2. Геометрія моделі скінченного заокругленого клину

Побудуємо плоску модель клиноподібного об'єкту, у якого гостре ребро клину (рис. 4.1) заокруглено циліндричною поверхнею. На рис. 4.2 представлена геометрія такого клину та всі необхідні позначення, які знадобляться при розв'язанні задачі дифракції.

Для побудови розв'язку задачі введемо дві полярні системи координат: $rO\theta$ і $r_1O_1\theta_1$. Радіус заокруглення клину $a = O_1A = O_1B$ задається. Зовнішній кут заокругленого клину 2ϕ визначається як кут відповідного клину без заокруглення (див. рис. 4.1). З прямокутного трикутника O_1AO визначаємо наступні геометричні параметри моделі:

$$\gamma = \pi - \phi, \quad \gamma_1 = \pi / 2 - \gamma, \quad b = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma} a, \quad d = OO_1 = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (4.6)$$

Відповідно до методу часткових областей, весь простір існування звукового поля ділиться на три області:

$$1 - r \geq R, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi;$$

$$2 - b \leq r \leq R, \quad -\phi \leq \theta \leq \phi;$$

3 – внутрішність кола радіусом b за виключенням зони перетину з колом радіусу a з центром в точці O_1 .

Поверхня об'єкту, за виключенням заокругленої частини ($r_1 = a, -\gamma_1 \leq \theta_1 \leq \gamma_1$), – акустично жорстка. Поверхня заокруглення характеризується нормальною провідністю $Y = \frac{1}{\rho c} \frac{1-V}{1+V}$, яка визначається через коефіцієнт відбиття за тиском V ,

який задається. Відносна нормальна провідність $\bar{Y} = \rho c Y = \frac{1-V}{1+V}$.

Як і раніше, поле падаючої хвилі $p_0 = \exp(-ikr \cos(\theta - \theta_0))$ розділяємо на парну та непарну складові – формули (4.1). Поле тиску в частковій області 1 визначається формулами (4.2).

Поле тиску в частковій області 2:

$$p_2 = p_2^+ + p_2^-, \quad (4.7)$$

$$p_2^+ = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\alpha_n \theta) \frac{J_{\alpha_n}(kr)}{J'_{\alpha_n}(kR)} + \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(\alpha_n \theta) \frac{N_{\alpha_n}(kr)}{N'_{\alpha_n}(kb)},$$

$$p_2^- = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^s \sin(\beta_n \theta) \frac{J_{\beta_n}(kr)}{J'_{\beta_n}(kR)} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^s \sin(\beta_n \theta) \frac{N_{\beta_n}(kr)}{N'_{\beta_n}(kb)},$$

$$\text{де } \alpha_n = \frac{n\pi}{\phi}, \quad \beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2\phi}.$$

Поле тиску в частковій області 3:

$$p_3 = p_3^+ + p_3^-, \quad p_3^{\pm} = p_3^{(1)\pm} + p_3^{(2)\pm}, \quad (4.8)$$

$$p_3^{(1)+} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos(n\theta) \frac{J_n(kr)}{J'_n(kb)}, \quad p_3^{(2)+} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(\eta_n \theta_1) \frac{H_{\eta_n}^{(1)}(kr_1)}{H_{\eta_n}^{(1)'}(ka)},$$

$$p_3^{(1)-} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^s \sin(n\theta) \frac{J_n(kr)}{J'_n(kb)}, \quad p_3^{(2)-} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^s \sin(\mu_n \theta_1) \frac{H_{\mu_n}^{(1)}(kr_1)}{H_{\mu_n}^{(1)'}(ka)},$$

$$\text{де } \eta_n = \frac{n\pi}{\gamma_1}, \quad \mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2\gamma_1}.$$

Основні результати, досягнуті на основі методу часткових областей, відносяться до тих випадків, коли часткові області не перетинаються [1]. В роботі [54] описаний підхід, який може бути основою для розгляду спеціального класу задач, що допускають побудову загального розв'язку в рамках методу часткових областей за відсутності фізично визначених граничних умов на всій координатній поверхні, до якої прив'язується повна система функцій. Відповідно до цього підходу, фізичні границі доповнюються "нефізичними" ділянками. Тут слід наголосити, що на "нефізичних" ділянках границі граничні умови можуть бути

продовжені довільними функціями. При цьому кількісні характеристики хвильового поля не повинні залежати від вигляду цих функцій. Але оскільки при практичному використанні підходу йдеться про розв'язання нескінченних систем, до яких застосовується процедура редукції, раціональний вибір умов на "нефізичних" границях може суттєво покращити якість виконання закону збереження енергії.

З врахуванням вищесказаного граничні умови запишемо у вигляді:

$$1) \frac{\partial p_1^\pm}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial p_2^\pm}{\partial r}, & r = R, \theta = [0, \phi], \\ 0, & r = R, \theta = [\phi, \pi]. \end{cases} \quad (4.9)$$

$$2) p_1^\pm = p_2^\pm, \quad r = R, \theta = [0, \phi]. \quad (4.10)$$

$$3) p_2^\pm = p_3^\pm, \quad r = b, \theta = [0, \phi]. \quad (4.11)$$

$$4) \begin{cases} \frac{\partial p_3^\pm}{\partial r} = \frac{\partial p_2^\pm}{\partial r}, & r = b, \theta = [0, \phi], \\ \frac{\partial p_3^{(1)\pm}}{\partial r} = g(\theta), & r = b, \theta = [\phi, \pi]. \end{cases} \quad (4.12)$$

$$5) \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_3^\pm}{\partial r_1} = -Yp_3^\pm, \quad r_1 = a, \theta_1 = [0, \gamma_1]. \quad (4.13)$$

Оскільки набори функцій $\cos(n\theta)$ і $\sin(n\theta)$ володіють властивістю ортогональності на відрізку $[0, \pi]$, то у виразі (4.12) гранична умова для поля $p_3^{(1)\pm}$ продовжується на нефізичну ділянку $r = b, \theta = [\phi, \pi]$ у вигляді функції $g(\theta)$. Покладемо у розрахунках $g(\theta) = 0$.

Знак мінус в умові (4.13) обумовлений тим, що напрямок зовнішньої нормалі (він збігається з напрямком радіальної координати r_1) протилежний напрямку поширення хвилі.

Підставляючи відповідні вирази полів в граничні умови (4.9)-(4.13), отримуємо функціональну систему рівнянь, котра перетворюється в нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь завдяки або середньоквадратичному наближенню, або поточковому спряженню полів на границях часткових областей. При цьому використовується властивість повноти і ортогональності відповідного набору функцій косинусів і синусів на інтервалах, вказаних в умовах (4.9)-(4.13). Так, у випадку парної задачі, для рівняння 1 це функції $\cos(n\theta)$, для рівнянь 2 і 3 це функції $\cos(\alpha_n\theta)$, для рівняння 4 – $\cos(n\theta)$, для рівняння 5 – $\cos(\eta_n\theta_1)$. Далі нескінченна система розв'язується методом редукції.

Під час розв'язання парної задачі визначаються набори коефіцієнтів A_n, C_n, D_n, E_n, F_n , а при розв'язанні непарної задачі визначаються набори коефіцієнтів $B_n, C_n^s, D_n^s, E_n^s, F_n^s$. При переході від нескінченних рядів у формулах (4.2, 4.7, 4.8) до скінченних рядів, залишаємо число коефіцієнтів A_n, B_n рівним N_1 , коефіцієнтів $C_n, C_n^s, D_n, D_n^s - N_2$, $E_n, E_n^s - N_3$, $F_n, F_n^s - N_4$.

4.2 Перерізи розсіювання

В задачах розсіювання хвиль об'єктами найважливішими характеристиками є перерізи розсіювання. Це енергетичні характеристики, що визначаються у дальньому полі розсіювання об'єкту. Нагадаємо визначення цих характеристик з урахуванням того, що розглядаються плоскі задачі:

- повний переріз розсіювання $\sigma_s(\theta_0)$ дорівнює відношенню розсіяної об'єктом потужності P_s до інтенсивності плоскої гармонічної хвилі I_0 , яка набігає на об'єкт. Повний переріз розсіювання $\sigma_s(\theta_0)$ є функцією кута падіння плоскої хвилі θ_0 .

$$\sigma_s(\theta_0) = \frac{P_s}{I_0} = \frac{1}{I_0} \int_{-\pi}^{\pi} I_s(\theta) r d\theta, \quad (4.14)$$

де I_S – інтенсивність розсіяної хвилі;

- позиційний переріз розсіювання $\sigma(\theta, \theta_0)$ дорівнює відношенню потужності ненаправленого джерела з інтенсивністю, що дорівнює інтенсивності розсіяної хвилі в заданому напрямку θ , до інтенсивності плоскої гармонічної хвилі, що набігає на об'єкт під кутом θ_0 .

$$\sigma(\theta, \theta_0) = \frac{4\pi r^2 I_S(\theta)}{I_0}. \quad (4.15)$$

- якщо у формулі (4.15) покласти кут $\theta = \theta_0$, то отримаємо переріз зворотного розсіювання:

$$\sigma_L(\theta_0) = \sigma(\theta = \theta_0, \theta_0). \quad (4.16)$$

З формули (4.2) випливає вираз для поля розсіювання:

$$p_S = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\theta) \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)'}(kR)} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\theta) \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)'}(kR)}. \quad (4.17)$$

В дальньому полі ($kr \gg 1$) асимптотика функції Ханкеля така:

$$H_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left(ikr - in\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}\right). \quad (4.17)$$

можна записати у вигляді:

$$p_S = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left(ikr - i\frac{\pi}{4}\right) L(\theta), \quad (4.18)$$

$$\text{де } L(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{H_n^{(1)'}(kR)} \cos(n\theta) \exp\left(-in\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{H_n^{(1)'}(kR)} \sin(n\theta) \exp\left(-in\frac{\pi}{2}\right). \quad (4.19)$$

Тоді формула для інтенсивності поля розсіювання у дальній зоні

$$I_s = \frac{|p_s|^2}{2\rho c} = \frac{2I_0}{\pi k r} L(\theta)L^*(\theta), \quad (4.20)$$

де інтенсивність набігаючої плоскої хвилі $I_0 = \frac{|p_0|^2}{2\rho c} = \frac{1}{2\rho c}$.

Підставивши (4.20) в формули (4.14)–(4.16), отримаємо наступні вирази для перерізів розсіювання:

$$\sigma_s(\theta_0) = \frac{2}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} L(\theta)L^*(\theta)d\theta, \quad (4.21)$$

$$\sigma(\theta, \theta_0) = \frac{4}{k} L(\theta)L^*(\theta), \quad (4.22)$$

$$\sigma_L(\theta_0) = \frac{4}{k} L(\theta_0)L^*(\theta_0). \quad (4.23)$$

Одиниця вимірювання всіх трьох перерізів розсіювання – метр.

Щоб зробити формули (4.21)–(4.23) безрозмірними ці вирази ділять на характерний розмір об'єкту, наприклад, на мідель об'єкту. Міделевий переріз (мідель) $M(\theta_0)$ це площа поперечного перерізу зони геометричної тіні об'єкту. Мідель залежить від кута падіння хвилі θ_0 на досліджуваний об'єкт. Повний переріз розсіювання не може перевищувати подвоєне значення міделю, тобто $\sigma_s(\theta_0) \leq 2M(\theta_0)$.

4.3 Побудова чисельного алгоритму та перевірка виконання граничних умов

4.3.1 Гострий клин

Спочатку розглянемо гострий клин (рис. 4.1). Підставляючи вирази для полів у часткових областях (4.1)–(4.3) в умови спряження полів (4.4), (4.5), приходимо до таких рівнянь (розпишемо лише парну задачу):

$$k \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\theta) + \left. \frac{\partial p_0^+(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=R} = \begin{cases} k \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\alpha_n \theta), & \theta = [0, \phi], \\ 0, & \theta = [\phi, \pi]. \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{H_n^{(1)}(kR)}{H_n^{(1)'}(kR)} \cos(n\theta) + p_0^+(r=R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{J_{\alpha_n}(kR)}{J'_{\alpha_n}(kR)} \cos(\alpha_n \theta), \quad \theta = [0, \phi]. \quad (4.25)$$

Функції, що входять до рівнянь (4.24), (4.25), залежать від просторової координати θ із зазначеними границями її зміни.

Далі йде перехід від системи (4.24), (4.25) до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду [1]. Варто зазначити, що побудовані в рамках методу часткових областей аналітичні представлення звукового поля завжди точно задовольняють хвильовому рівнянню за будь-якої кількості складових, що утримуються в рядах. Тому в основу оцінок точності розв'язання задачі слід покласти оцінку точності виконання умов спряження на границях часткових областей. Очевидно, що для підвищення точності оцінки звукових полів, необхідно збільшувати кількість невідомих комплексних коефіцієнтів, що утримуються, при розв'язанні алгебраїчної системи рівнянь методом редукції. Особливо це важливо для високочастотної області спектру шуму.

Зауважимо, що ефективність алгоритмів розв'язання нескінченних систем алгебраїчних рівнянь можна забезпечити за рахунок врахування відомих сингулярностей в околах кутових точок (у нашому випадку це ребро клину). Це дає можливість отримати кількісні оцінки характеристики звукових полів в областях, які близькі до кутових точок. Якщо ж основний інтерес представляють характеристики

поля в точках, віддалених від кутових, то достатню точність результатів можна забезпечити за допомогою методу простої редукції, утримуючи в системі певну кількість рівнянь. Чисельний експеримент дозволяє оцінити рівень виконання умов спряження звукових полів для вибраних параметрів моделі. Така процедура є стандартною при використанні методу часткових областей і не раз нами випробувана [1].

Перехід від рівнянь (4.24), (4.25) до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь можна виконати, використовуючи поточкове спряження полів на границі розділу часткових областей (назвемо ці точки вузловими точками) [24].

Отже, обмежимо нескінченні ряди у виразах (4.24), (4.25), задаючи кількість коефіцієнтів A_n , C_n відповідно N_1 , N_2 . Відправною точкою у розрахунках при поточковому спряженні полів є нормування до довжини хвилі $\lambda = c / f$ відстані між вузловими точками Δ вздовж границі розділу часткових областей 1 та 2, тобто величина Δ / λ . Виходячи з величини Δ / λ , визначається кількість вузлових точок

$$N_1 = \left[\frac{\pi R}{\Delta} \right], \quad N_2 = \left[\frac{\phi}{\pi} N_1 \right].$$

Позначимо координати вузлових точок на границі розділу часткових областей 1 та 2 – $(r_m = R, \theta_m)$, $m = 0, 1, 2, \dots, N_1$. Вибравши кутові координати вузлових точок $0 < \theta_m < \pi$, $m = 0, 1, 2, \dots, N_1$ запишемо рівняння (4.24), (4.25) у вигляді скінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $N_1 + N_2$:

$$k \sum_{n=0}^{N_1} A_n \cos(n\theta) + \frac{\partial p_0^+(r, \theta_m)}{\partial r} \Big|_{r=R} = \begin{cases} k \sum_{n=0}^{N_2} C_n \cos(\alpha_n \theta_m), & \theta_m = [0, \phi], \\ 0, & \theta_m = [\phi, \pi], \quad m = 0, 1, \dots, N_1. \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\sum_{n=0}^{N_1} A_n \frac{H_n^{(1)}(kR)}{H_n^{(1)'}(kR)} \cos(n\theta_m) + p_0^+(r = R, \theta_m) = \sum_{n=0}^{N_2} C_n \frac{J_{\alpha_n}(kR)}{J'_{\alpha_n}(kR)} \cos(\alpha_n \theta_m), \quad (4.27)$$

$$\theta_m = [0, \phi], \quad m = 0, 1, \dots, N_2.$$

Для контролю можливості використання поточкового спряження полів, у розглянутих задачах розсіювання, проведемо алгебраїзацію системи (4.24), (4.25), використовуючи класичний підхід середньоквадратичного наближення полів на границі часткових областей [1, 24]. При цьому виділення парної та непарної задач проводити не будемо.

Щоб встановити співвідношення між розрахунками, які виконані при використанні поточкового спряження полів і при середньоквадратичному наближенні, слід, при використанні середньоквадратичного наближення, кількість мод в області 1 покласти рівним $2N_1$, а кількість мод в області – $2N_2$ (збільшення числа мод вдвічі обумовлено відсутністю поділу задачі на парну та непарну). У цьому випадку порядок системи лінійних алгебраїчних рівнянь дорівнює $2(N_1 + N_2)$. При такому підході, множимо скалярно вираз (4.24) на функції $\cos(m\theta)$, $m = 0, 1, 2, \dots, 2N_1$, вираз (4.25) – на функції $\cos(\alpha_n \theta)$, $m = 0, 1, 2, \dots, 2N_2$. При цьому використовуємо властивість ортогональності даних наборів тригонометричних функцій на відрізках, зазначених в умовах спряження полів (4.24), (4.25). В результаті приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду [1], порядок якої визначається кількістю врахованих коефіцієнтів A_n , C_n , а саме $2(N_1 + N_2)$. Матриця коефіцієнтів системи рівнянь складається з інтегралів від добутку відповідних тригонометричних функцій, які обчислюються аналітично. Явний вигляд системи лінійних алгебраїчних рівнянь, внаслідок очевидної її структури, виписувати не будемо.

Оскільки для нас цікава модель гострого клину з наявністю поверхонь великих хвильових розмірів, то виберемо такі параметри моделі: $R / \lambda = 10, 2$, $\phi = 165^\circ$.

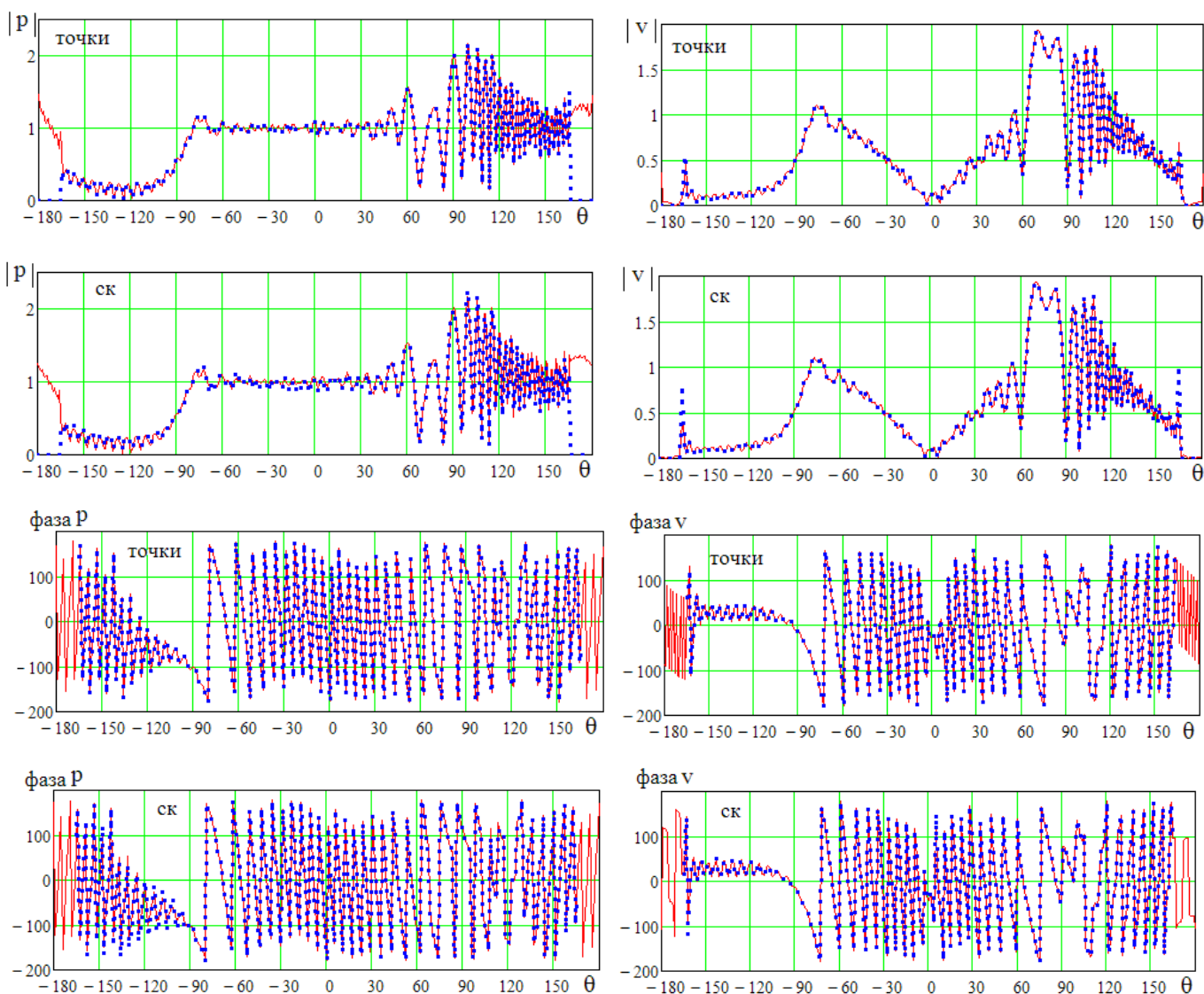


Рис. 4.3. Ілюстрація умов спряження полів тиску p та нормальної швидкості v

по модулю та фазі на границі часткових областей 1 і 2 ($r = R, -\phi \leq \theta \leq \phi$) і

граничної умови на жорсткій поверхні $r = R, -\pi \leq \theta \leq -\phi \cup \phi \leq \theta \leq \pi$,

$R / \lambda = 10,2$, $\phi = 165^\circ$, кут падіння плоскої хвилі $\theta_0 = 90^\circ$:

позначено "точки" – поточкове спряження, $\Delta / \lambda = 0,2$, $N_1 = 160$, $N_2 = 147$,

позначено "ск" – середньоквадратичне наближення, $N_1 = 320$, $N_2 = 294$;

лінії – поле в області 1, точки – поле в області 2

Рис. 4.3 ілюструє якість виконання умов спряження полів на границі часткових областей 1 та 2 ($r = R, -\phi \leq \theta \leq \phi$) та граничної умови на жорсткій

поверхні клиноподібного об'єкту ($r = R$, $-\pi \leq \theta \leq -\phi \cup \phi \leq \theta \leq \pi$). Кут падіння плоскої хвилі $\theta_0 = 90^\circ$. Як бачимо, має місце гарне виконання граничних умов та хороший збіг розв'язків, отриманих при поточковому спряженні полів та при використанні середньоквадратичного наближення полів.

4.3.2 Заокруглений клин

Тепер подивимося, як виконуються граничні умови в задачі для заокругленого клину (рис. 4.4–4.6). Усі наступні розрахунки проводилися з використанням поточкового спряження полів з виділенням парної та непарної задач. Параметри моделі $R/\lambda = 10,2$, $\phi = 165^\circ$ залишаємо як у гострого клину. Поверхня заокруглення клину (рис. 4.2) визначається координатами $r_1 = a$, $-\gamma_1 \leq \theta_1 \leq \gamma_1$; при куті $\phi = 165^\circ$ величина кута $\gamma_1 = 75^\circ$. Виберемо радіус заокруглення клину $a/\lambda = 0,8$. Нехай поверхня заокруглення характеризується коефіцієнтом відбиття $V = 0,1$, тоді її нормована провідність $\bar{Y} = 0,818$.

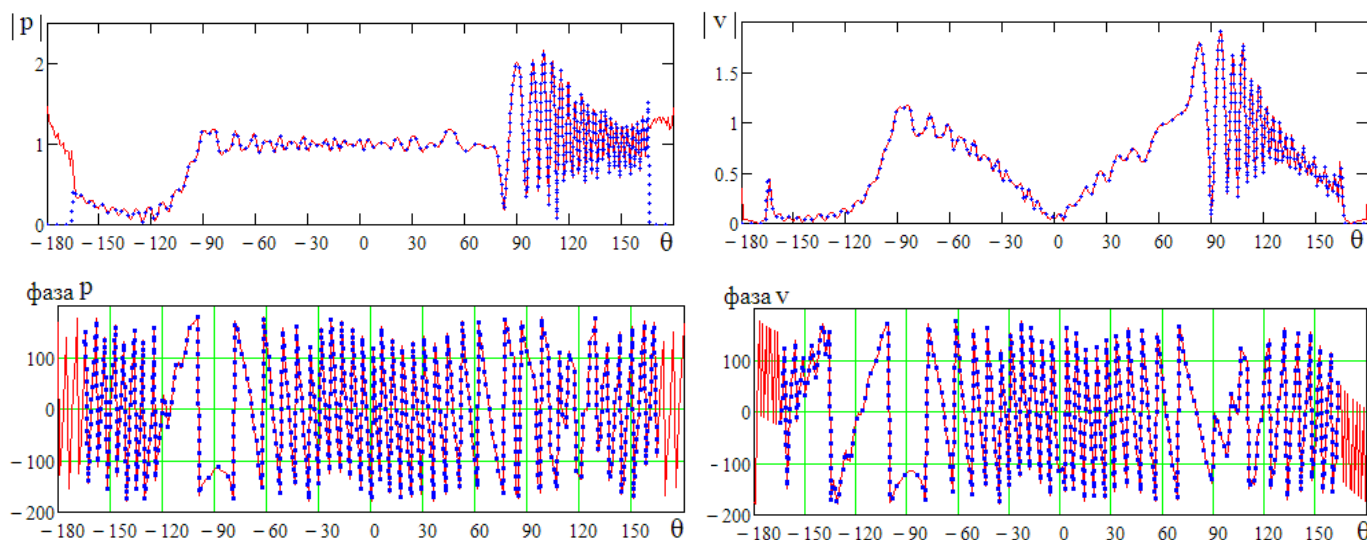


Рис. 4.4. Ілюстрація умов спряження полів тиску p та нормальної швидкості v по модулю та фазі на границі часткових областей 1 і 2 ($r = R$, $-\phi \leq \theta \leq \phi$) та

граничної умови на жорсткій поверхні $r = R$, $-\pi \leq \theta \leq -\phi \cup \phi \leq \theta \leq \pi$, $R/\lambda = 10,2$,

$$\phi = 165^\circ, \gamma_1 = 75^\circ, a/\lambda = 0,8, V = 0,1, \theta_0 = 90^\circ, \Delta/\lambda = 0,2,$$

$$N_1 = 160, N_2 = 147, N_3 = 94, N_4 = 22:$$

лінії – поле в області 1, точки – поле в області 2

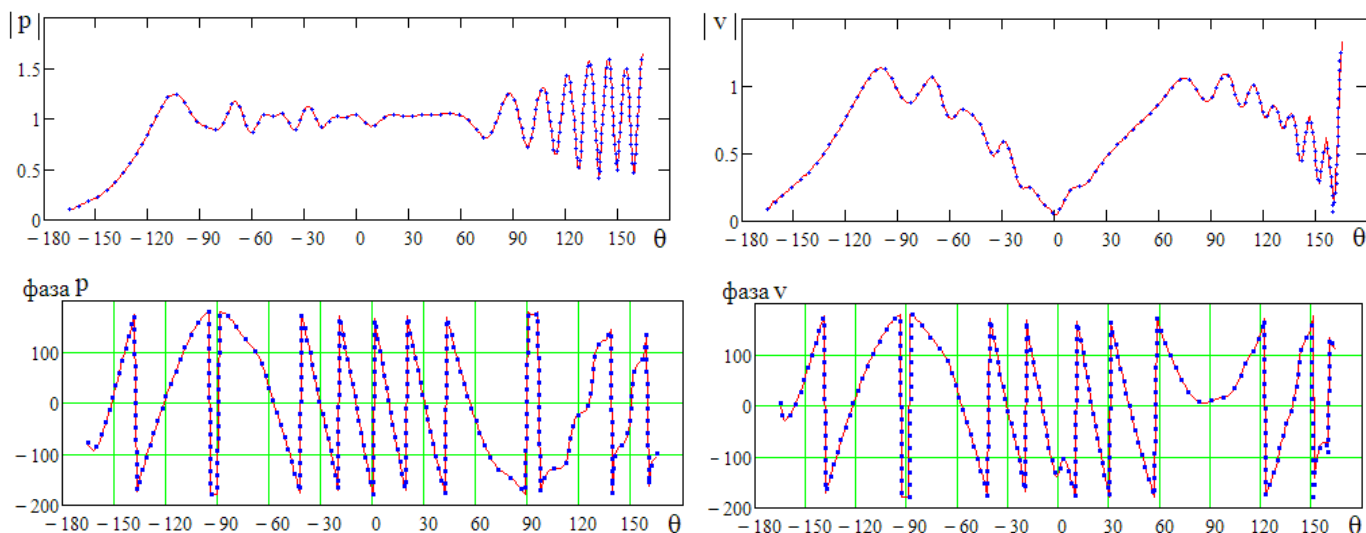


Рис. 4.5. Ілюстрація умов спряження полів тиску p та нормальної швидкості v по модулю та фазі на границі часткових областей 2 та 3 ($r = b$, $-\phi \leq \theta \leq \phi$), $\phi = 165^\circ$:

лінії – поле в області 2, точки – поле в області 3

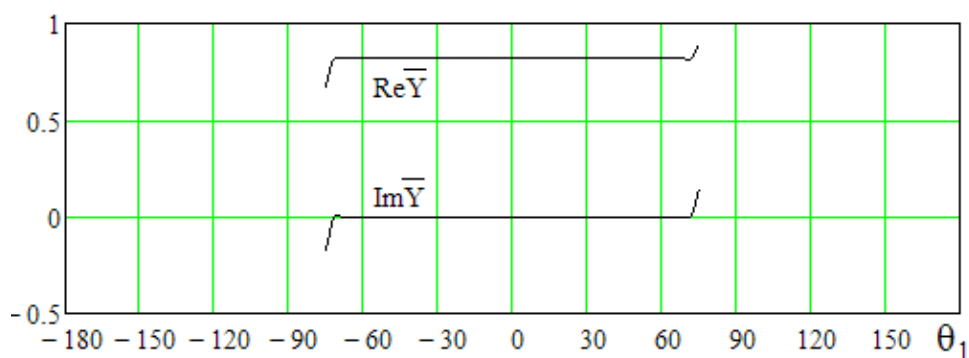


Рис. 4.6. Дійсна $\text{Re} \bar{Y}$ та уявна $\text{Im} \bar{Y}$ частини нормованої провідності $\bar{Y} = \rho c Y$ заокругленої поверхні клину ($r_1 = b$, $-\gamma_1 \leq \theta_1 \leq \gamma_1$), $\gamma_1 = 75^\circ$, $V = 0,1$, $\bar{Y} = 0,818$

Всі графіки на рис. 4.4–4.6 ілюструють гарну якість виконання граничних умов на границях часткових областей (1 і 2, 2 і 3), граничної умови на жорсткій поверхні клиноподібного об'єкту ($r = R$, $-\pi \leq \theta \leq -\phi \cup \phi \leq \theta \leq \pi$) та граничної умови на заокругленій поверхні клину.

4.4 Аналіз чисельних розрахунків

На рис. 4.7 показані графіки повного перерізу розсіювання $\sigma_s(\theta_0)$ (крива 1) і зворотного перерізу розсіювання $\sigma_L(\theta_0)$ (крива 2) для трьох варіантів моделі клиноподібного об'єкту. Перерізи розсіювання нормовані до величини R . Як бачимо, величина σ_s (крива 1) у широкому діапазоні зміни кута θ_0 практично дорівнює двом для гострого клину і близько двох для заокругленого клину. Це обумовлено великим розміром $R/\lambda = 10,2$.

Для зворотного перерізу розсіювання σ_L (крива 2) є два спалахи, зумовлені нормальним падінням хвилі на плоску поверхню об'єкту значного хвильового розміру ($R/\lambda = 10,2$). Порівнюючи рис. 4.7 а рис. 4.7 б, можна відзначити, що заокруглення клину жорсткою поверхнею суттєво збільшує переріз зворотного розсіювання в діапазоні кутів $-60^\circ \leq \theta_0 \leq 60^\circ$. В той же час покриття заокругленої частини клину поглинаючим матеріалом з коефіцієнтом поглинання $V = 0,1$ повертає ситуацію близьку до гострого клину (рис. 4.7 в).

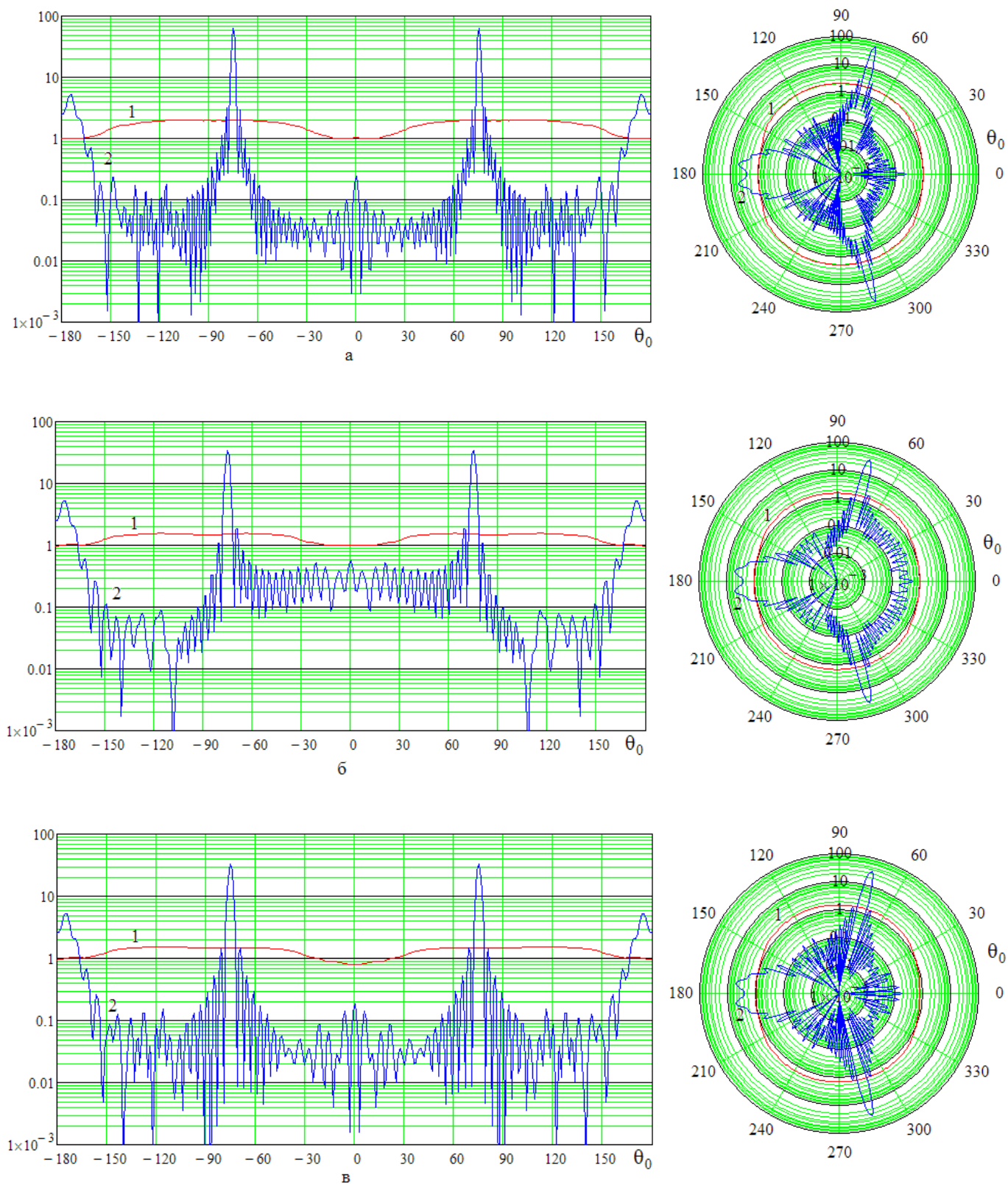


Рис. 4.7. Нормовані до величини R повний переріз розсіювання σ_s (крива 1) і зворотний переріз розсіювання σ_L (крива 2) об'єкту в залежності від кута падіння плоскої хвилі θ_0 , $R/\lambda = 10,2$, $\phi = 165^\circ$:

а – гострий клин,

б – заокруглений клин, $a / \lambda = 0,8$, $V = 1$,

в – заокруглений клин, $a / \lambda = 0,8$, $V = 0,1$

На рис. 4.8 показані графіки, нормованого до величини R , двопозиційного перерізу розсіювання $\sigma(\theta, \theta_0)$ об'єкту від кута θ , який визначає напрямок розсіяної хвилі. Кут падіння плоскої хвилі $\theta_0 = 0$. На графіках можна виділити дві зони кутів: освітлену зону в діапазоні кутів приблизно $-100^\circ < \theta < 100^\circ$ та тіньову зону $-180^\circ < \theta < -100^\circ$, $100^\circ < \theta < 180^\circ$. Як бачимо, освітлені зони для гострого клину (рис. 4.8 а) та заокругленого з поглинаючою поверхнею заокруглення (рис. 4.8 в) близькі за рівнями перерізу розсіювання. Цей результат відповідає графікам зворотного перерізу розсіювання на рис. 4.7 а та рис. 4.7 в. Жорстка заокруглююча поверхня клину (рис. 4.8 б) помітно збільшує переріз розсіювання в діапазоні кутів $-100^\circ < \theta < 100^\circ$. Що стосується зони тіні, то для всіх трьох варіантів спостерігаються значні за рівнем тіньові пелюстки, які обумовлені великим хвильовим розміром $R / \lambda = 10,2$ клиноподібного об'єкту.

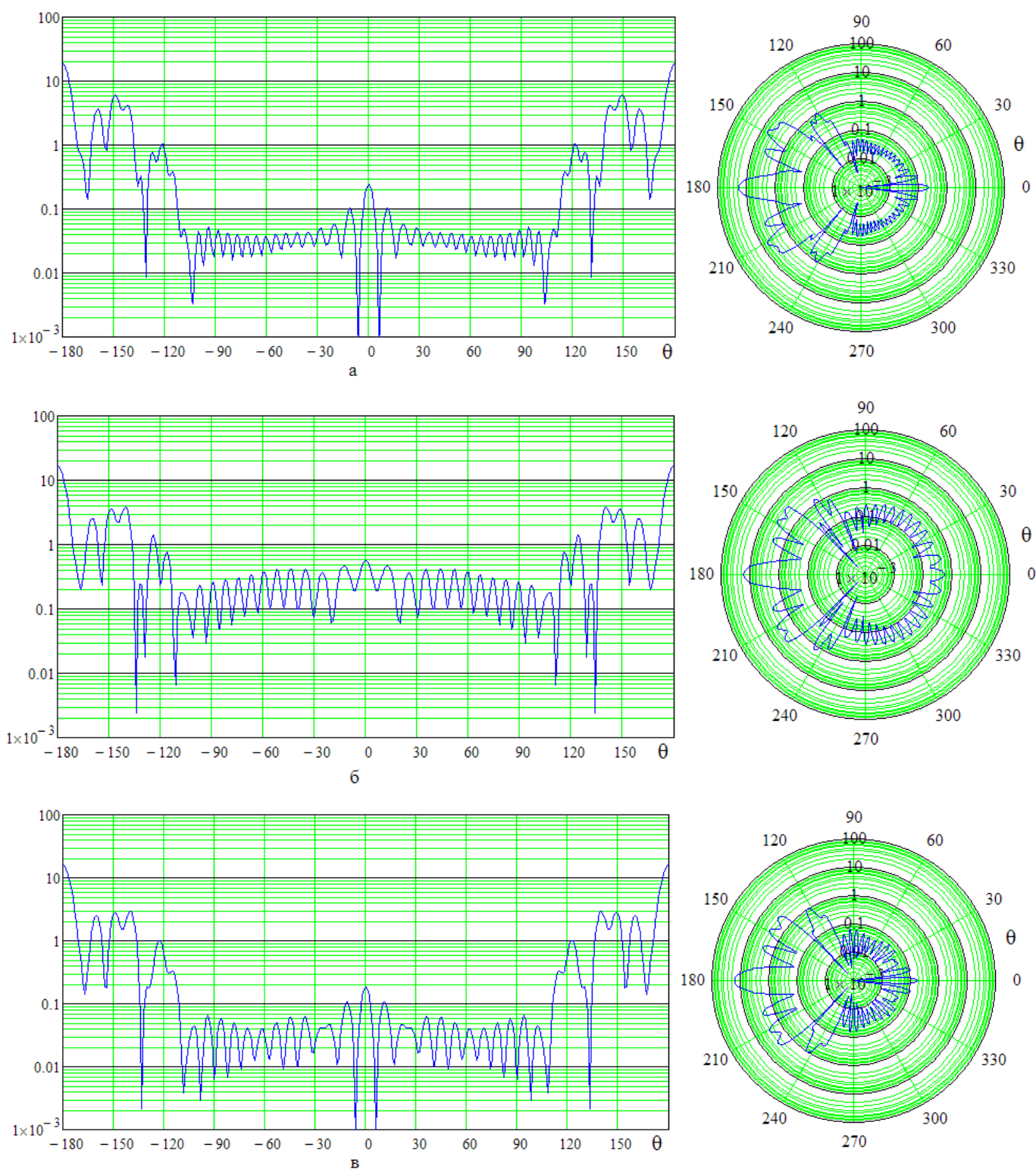


Рис. 4.8. Нормований до величини R двопозиційний переріз розсіювання $\sigma(\theta, \theta_0)$

об'єкту від кута θ , який визначає напрямок розсіяної хвилі;

кут падіння хвилі $\theta_0 = 0$; $R / \lambda = 10,2$, $\phi = 165^\circ$:

а – гострий клин,

б – заокруглений клин, $a / \lambda = 0,8$, $V = 1$,

в – заокруглений клин, $a / \lambda = 0,8$, $V = 0,1$

4.5 Висновки до розділу

На основі методу часткових областей побудований розв'язок задачі розсіювання плоскої хвилі на скінченних клиноподібних об'єктах (гострий та заокруглений клин) за наявності поверхонь великого хвильового розміру. Отримані розв'язки задачі розсіювання хвиль на скінченних клиноподібних тілах становлять інтерес, оскільки форма таких тіл близька до форм окремих частин авіаційних, надводних та космічних об'єктів.

Достовірність розв'язку обумовлена контролем якості умов спряження полів на границях часткових областей та граничних умов на відповідних поверхнях моделі. При цьому для гострого клину розраховані два варіанти спряження полів: середньоквадратичне наближення та поточкове спряження полів. Показано високий ступінь збігу результатів розрахунків у двох варіантах.

Проведені розрахунки повного, зворотного та двопозиційного перерізів розсіювання. Показано, що величина повного перерізу розсіювання в широкому діапазоні зміни кута падіння плоскої хвилі практично дорівнює двом для гострого клину та близько двох для заокругленого клину. Це обумовлено наявністю поверхонь великого хвильового розміру у клиноподібних об'єктах.

Показано, що зворотний переріз розсіювання істотно залежить від радіусу заокруглення кромки та нормальної провідності поверхні заокруглення. При цьому покриття заокругленої частини клину поглинаючим матеріалом істотно зменшує відбиваючу здатність об'єкту при відповідних кутах падіння хвилі.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню шляхів підвищення ефективності чисельно-аналітичних методів розв'язку граничних задач для неканонічних областей. В роботі отримано такі наукові результати:

1. Проведено огляд результатів досліджень чисельно-аналітичних методів розв'язку граничних задач для неканонічних областей інших дослідників.
2. На основі методу часткових областей отримано розв'язок задачі про випромінювання одного та двох плоских поршнів в нескінченному клинуватому хвилеводі. Даний підхід дозволяє, подібним чином, побудувати розв'язок і для випадку кількості поршнів більше двох. При спряженні хвильових полів на границях часткових областей використано два варіанти: перший – спряження полів в сенсі середньоквадратичного наближення, другий – поточкове спряження хвильових полів. Показано, що при однаковій кількості мод в часткових областях для двох варіантів спряження полів, варіант середньоквадратичного наближення є більш точним. Показано, що при величині хвильової відстані між вузловими точками $\Delta h / \lambda < 0.2$ можна отримати цілком прийнятну точність розрахунку і для варіанту поточкового спряження полів. Звісно, іншим фактором, який впливає на вибір величини $\Delta h / \lambda$, є хвильові розміри розглянутої моделі.
3. На основі методу часткових областей розглянуто задачу про випромінювання поршня в скінченному клинуватому хвилеводі. При спряженні хвильових полів на границях часткових областей використано комбінацію двох підходів: поточкового спряження полів та середньоквадратичного наближення. Використання різних комбінацій розрахунку цілком коректно, всі комбінації працюють приблизно однаково. Варіант в якому використовується тільки середньоквадратичне наближення найточніший. Використання поточкового спряження полів в цілому спрощує розрахунок задачі. Вибір необхідної комбінації розрахунку залежить від того, яка задача розглядається. Якщо для запису хвильових полів в часткових областях доводиться використовувати

кілька систем координат, то при використанні середньоквадратичного наближення можуть виникати труднощі при обчисленні, в той час як при використанні поточкового спряження полів обчислювальних проблем не виникає. Побудовано діаграми спрямованості поршня, котрі ілюструють екрануючу властивість скінченного клину. На прикладі даної задачі перевірено використання комбінованого варіанту розрахунку, можлива ситуація коли саме комбінований варіант може призвести до кращого розв'язку задачі з точки зору виконання закону збереження енергії чи умов зшивання полів.

4. На основі методу часткових областей отримано розв'язок задачі про розсіювання звуку на шумозахисному бар'єрі. Використовуючи поточкове спряження полів на границях часткових областей, розроблено ефективний алгоритм для проведення чисельного аналізу звукового поля в околі бар'єру в діапазоні частот цікавому для практики. В задачі про розсіювання звуку на класичному шумозахисному бар'єрі показано, що використання середньоквадратичного наближення та поточкового спряження полів на границях часткових областей дають хороший збіг розрахункових значень полів для двох варіантів спряження полів. В задачі про розсіювання звуку на бар'єрі з резонатором виникла необхідність введення трьох полярних систем координат. Зрозуміло, що використання середньоквадратичного наближення було б пов'язане зі складнощами при побудові розрахункового алгоритму. В той час як поточкове спряження полів дозволяє відносно легко побудувати обчислювальний алгоритм. При цьому збільшення кількості вузлових точок дозволяє впевнено підвищувати точність спряження звукових полів. Показано, що для частот вище резонансної частоти є смуга частот, в якій спостерігається провал у частотній характеристиці інтегрального критерію бар'єру, що свідчить про перевагу бар'єру з резонатором, при цьому зі зростанням резонансної частоти ця смуга частот збільшується. На більш високих частотах відмінність ефективності між традиційним бар'єром і бар'єром з резонатором згладжується. Тому бар'єр з резонатором особливо ефективний за наявності

відносно вузькосмугового джерела шуму, коли проблемні частоти відносно невисокі. Показано, що на частотах нижче резонансних спостерігаються ситуації, за яких ефективність бар'єру з резонатором гірша, ніж у класичного бар'єру.

5. На основі методу часткових областей побудовано розв'язок задачі розсіювання плоскої хвилі на скінченних клиноподібних об'єктах (гострий та заокруглений клин) за наявності поверхонь великого хвильового розміру. Отримані розв'язки задачі розсіювання хвиль на скінченних клиноподібних тілах становлять інтерес, оскільки форма таких тіл близька до форм окремих частин авіаційних, надводних та космічних об'єктів. Достовірність розв'язку обумовлена контролем якості умов спряження полів на границях часткових областей та граничних умов на відповідних поверхнях моделі. При цьому для гострого клину розраховані два варіанти спряження полів: середньоквадратичне наближення та поточкове спряження полів. Показано високий ступінь збігу результатів розрахунків у двох варіантах. Проведено розрахунок повного, зворотного та двопозиційного перерізу розсіювання. Показано, що зворотний переріз розсіювання істотно залежить від радіусу заокруглення кромки та нормальної провідності поверхні заокруглення. При цьому покриття заокругленої частини клину поглинаючим матеріалом істотно зменшує відбиваючу здатність об'єкта при відповідних кутах падіння хвилі.
6. Отримані результати вказують на успішне застосування поточкового спряження хвильових полів в методі часткових областей на прикладі розв'язання різних типів граничних задач, що свідчить про його універсальність та широкий спектр застосування, що робить його ефективним інструментом для розв'язання практичних задач акустичної та авіаційної інженерії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Grinchenko V., Vovk I., Matsypura V. Acoustic wave problems. *New York: Begell House, Inc.* 2018. 439 p.
2. Kotzen B., English C. Environmental noise barriers. CRC Press. 2009. 264 p.
3. Осипов Л., Бобылев В., Борисов Л. Звукоизоляция и звукопоглощение. М. Изд-во АСТ и Астрель. 2004. 450 с.
4. Okubo T., Yamamoto K. Procedures for determining the acoustic efficiency of edge-modified noise barriers. *Appl. Acoust.* 2007. Vol. 68, № 7. p. 797–819.
5. Li K., Knok M., Law M. A ray model for hard parallel noise barriers in high-rise cities. *J. Acoust. Soc. Amer.* 2008. Vol. 123, № 1. p. 121–132.
6. Боровиков В., Кинбер Б. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь. 1978. 248 с.
7. Ziegelwanger H., Conter M., Fuchs A., Reiter P., Wehr R. Optimization of an acoustic resonator for noise barrier top elements. *Conference: 45th International Congress and Exposition on Noise Control Engineering INTER-NOISE.* 2016. Hamburg.
8. Papadakis N., Stavroulakis G. Finite Element Method for the Estimation of Insertion Loss of Noise Barriers: Comparison with Various Formulae (2D). *Urban Sci.* 2020. 4(4): 77.
9. Byunghui K., Seokho K., Yejin P., Marinus M. , Heunguen Y., Joonho B., Sanghyun C. Development of a Slit-Type Soundproof Panel for a Reduction in Wind Load and Low-Frequency Noise with Helmholtz Resonators. *Appl. Sci.* 2021. 11, 8678.
10. Fard S., Peters H., Kessissoglou N., Marburg S. Quasi-periodic noise barrier with Helmholtz resonators for tailored low frequency noise reduction. *Engineering, Physics.* 2015.

11. Moser M., Volz R. Improvement of sound barriers using headpieces with finite acoustic impedance. *J. Acoust. Soc. Am.* 1999. 106 (6).
12. Урусовский И. Дифракция звука на экране с веерной насадкой. *Акуст. журнал.* 2013. Т. 59, № 1. с. 86–95.
13. Осипов Л., Прутков Б., Шишкин И., Карагодина И. Градостроительные методы борьбы с шумом. М.: *Стройиздат.* 1975. 215 с.
14. Лагарьков А., Погосян М. Фундаментальные и прикладные проблемы стелс-технологий. *Вестник РАН.* 2003. Т. 73, № 9. с. 779–787.
15. Львова Л. Радиолокационная заметность летательных аппаратов. *Снежинск: Изд-во РФЯЦ – ВНИИТФ.* 2003. 232 с.
16. Алексеев А., Штагер Е., Козырев С. Физические основы технологии STEALTH. СПб.: *ВВМ.* 2007. 284 с.
17. Knott E., Shaeffer J., Tuley M. Radar cross section. *Scitech Publishing.* 2004. 638 p.
18. Сухаревский О., Василец В., Кукобко С. Рассеяние электромагнитных волн воздушными и наземными радиолокационными объектами: монография. Харьков: *Харьковский национальный университет Воздушных Сил имени Ивана Кожедуба.* 2009. 468 с.
19. Вождаев В., Теперин Л. Характеристики радиолокационной заметности летательных аппаратов. М.: *Физматлит.* 2018. 376 с.
20. Ufimtsev P. Fundamentals of the physical theory of diffraction. *Wiley-IEEE Press.* 2007. 329 p.
21. Chatzigeorgiadis F. Development of code for a physical optics radar cross section prediction and analysis application. USA, CA, Monterey: *Naval Postgraduate School.* 2004. 127 p.

22. Гусак В. Випромінювання плоского поршня у клинуватому хвилеводі. *Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки.* 2021. №3. с. 34–37.
23. Гусак В. Випромінювання плоского поршня у клинуватому хвилеводі. *Сучасні проблеми механіки: тези доп. VI міжнар. наук. конф., м. Київ, КНУ ім. Тараса Шевченка.* 30–31 серпня 2021 р. Київ, 2021. с. 21.
24. Грінченко В., Гусак В., Маципура В. Використання двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2021. №2 (136). с. 5–16.
25. Grinchenko V., Vovk I., Husak V., Matsypura V. Properties of a noise barrier with controlled diffraction at the edge. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics (Bulgaria).* 2023. Vol. 53, No. 2. p. 152–165.
26. Grinchenko V., Vovk I., Husak V., Matsypura V. Wave Scattering on Finite Wedge-Shaped Objects. *Advances in Mechanics. Springer Nature Switzerland.* 2023. Vol. 191. p. 155–170.
27. Борисейко О., Гусак В., Маципура В. Використання комбінацій двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей. *Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки.* 2023. №2. с. 88–91.
28. Борисейко О., Гусак В., Маципура В. Використання комбінацій двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей. *Сучасні проблеми механіки: тези доп. VII міжнар. наук. конф., м. Київ, КНУ ім. Тараса Шевченка.* 28–29 серпня 2023 р. Київ, 2023. с. 8.
29. Грінченко В., Вовк І., Гусак В., Маципура В. Властивості шумозахисного бар'єру з керованою дифракцією на кромці. *Сучасні проблеми механіки: тези доп. VII міжнар. наук. конф., м. Київ, КНУ ім. Тараса Шевченка.* 28–29 серпня 2023 р. Київ, 2023. с. 20.

30. Вовк И., Конченко Т., Мацыпура В. Об одном строгом методе оценки акустических свойств шумоподавляющих барьеров. *Акустичний вісник*. Т. 7, № 4. 2004. с. 21–27.
31. Вовк И., Мацыпура В., Сотникова Т. Об одном методе повышения эффективности шумоподавляющих барьеров. *Акустичний вісник*. Т. 9, № 2. 2006. с. 17–26.
32. Вовк И., Сотникова Т. Интегральные акустические характеристики V-образного шумоподавляющего барьера. *Акустичний вісник*. Т. 10, № 3. 2007. с. 25–29.
33. Сотникова Т. Акустические свойства шумозащитного барьера с козырьком. *Акустичний вісник*. Т. 12, № 2. 2009. с. 57–64.
34. Грінченко В., Вовк І., Маципура В. Особливості методу часткових областей. *Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки*. № 1. 2019. с. 38–41.
35. Naida S., Korzhyk O., Naida N., Korzhyk M., Naida A., Popovych P. Application of the Partial Domain Method to the Determination of the Directional Properties of a Finite-Length Cone Horn for a Broadband Acoustic Ear Echo Spectrometer. *Journal of Nano and Electronic Physics*. Vol. 15, № 6. 2023. p. 06012-1–06012-7.
36. Шишкова К., Лейко О. Випромінювання звуку циліндричним п'єзокерамічним перетворювачем з радіальною поляризацією і жорстким екраном. *Акустичні прилади та системи*. Т. 24, № 4. 2019. с. 68–73.
37. Шендеров Е. Волновые задачи гидроакустики. *Л.: Судостроение*. 1972. 352 с.
38. Шендеров Е. Излучение и рассеяние волн. *Л.: Судостроение*. 1989. 304 с.
39. Waterman P. New formulation of acoustic scattering. *Journ. Acoust. Soc. Am.* V. 45, № 6. p. 1417-1429.
40. Bates R., Wall D. Null field approach to scalar diffraction. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*. A-287, № 1339. 1977. p. 45-114.

41. Власов А., Савицкий Г. Решение краевых задач для областей, ограниченных поверхностью с изломами. *Л.: Машиностроение*. 1973. с. 23-31.
42. Векслер Н., Дюбюс Б., Леви А. Рассеяние акустической волны эллипсоидальной оболочкой. *Акуст. журн.* 45, № 1. 1999. с. 53-58.
43. Апельцин В., Кюркчан А. Аналитические свойства волновых полей. *М.: Изд-во МГУ*. 1999. 208 с.
44. Купрадзе В. О приближенном решении задач математической физики. *Успехи матем. наук.* Т. 22, № 2. 1967. с. 58-109.
45. Окуно И., Икуно Х. Метод Яшууры для решения граничных задач для уравнения Гельмгольца в однородных средах. *Радиотехника и электроника.* Т. 37, № 10. 1992. с. 1744-1763.
46. Куриляк Д., Назарчук З. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на кінцевих і клиноподібних поверхнях. *К.: Наук. думка*. 2006. 277 с.
47. Куриляк Д., Назарчук З. Розвиток методів аналітичної регуляризації в теорії дифракції. *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* Т. 47, № 2. 2011. с. 42–55.
48. Дорошенко В., Кравченко В. Дифракция электромагнитных волн на незамкнутых конических структурах. *М.: Физматлит*. 2009. 272 с.
49. Боровиков В., Кинбер Б. Геометрическая теория дифракции. *М.: Связь*. 1978. 248 с.
50. Уфимцев П. Метод краевых волн в физической теории дифракции. *Советское радио*. 1962. 248 с.
51. Уфимцев П. Основы физической теории дифракции. *М.: Бинум*. 2019. 351 с.
52. David C. Radar and Laser Cross Section Engineering. *AIAA education series*. 2005. 503 p.

53. Грінченко В., Вовк І., Маципура В. Основи акустики. *Київ: Наукова думка*. 2007. 640 с.
54. Гринченко В. Развитие метода решения задач излучения и рассеяния звука в неканонических областях. *Гидромеханика*. Т. 70. 1996. с. 27–40.

ДОДАТОК

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Грінченко В. Т., Гусак В. О., Маципура В. Т. Використання двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2021. №2 (136). с. 5–16.
2. Гусак В. О. Випромінювання плоского поршня у клинுவатому хвилеводі. *Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки*. 2021. №3. с. 34–37.
3. Grinchenko V. T., Vovk I. V., Husak V. O., Matsypura V. T. Properties of a noise barrier with controlled diffraction at the edge. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics (Bulgaria)*. 2023. Vol. 53, No. 2. p. 152–165.
4. Grinchenko V. T., Vovk I. V., Husak V. O., Matsypura V. T. Wave Scattering on Finite Wedge-Shaped Objects. *Advances in Mechanics. Advanced Structured Materials. Springer, Cham*. 2023. Vol. 191. p. 155–170.
5. Борисейко О. В., Гусак В. О., Маципура В. Т. Використання комбінацій двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей. *Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки*. 2023. №2. с. 88–91.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

6. Гусак В. О. Випромінювання плоского поршня у клинுவатому хвилеводі. *Сучасні проблеми механіки: тези доп. VI міжнар. наук. конф., м. Київ, КНУ ім. Тараса Шевченка, 30–31 серпня 2021 р. Київ, 2021. с. 21.*
7. Борисейко О. В., Гусак В. О., Маципура В. Т. Використання комбінацій двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей. *Сучасні проблеми механіки: тези доп. VII міжнар. наук. конф., м. Київ, КНУ ім. Тараса Шевченка, 28–29 серпня 2023 р. Київ, 2023. с. 8.*

8. Грінченко В. Т., Вовк І. В., Гусак В. О., Маципура В. Т. Властивості шумозахисного бар'єру з керованою дифракцією на кромці. *Сучасні проблеми механіки*: тези доп. VII міжнар. наук. конф., м. Київ, КНУ ім. Тараса Шевченка, 28–29 серпня 2023 р. Київ, 2023. с. 20.

Відомості про апробацію результатів дисертації:

- *Сучасні проблеми механіки*: VI Міжнародна наукова конференція, м. Київ, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 30–31 серпня 2021 р.
- *Сучасні проблеми механіки*: VII Міжнародна наукова конференція, м. Київ, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 28–29 серпня 2023 р.