

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЖЕЛЕЗНЯК ГАННА СЕРГІЇВНА

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ

**ЕНТРОПІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ ТА ПОВ'ЯЗАНІ З НИМИ ІНТЕГРАЛЬНІ
РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА З ДОДАТКОВОЮ СИНГУЛЯРНІСТЮ**

Спеціальність 111 — математика
Галузь знань 11 — математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня *доктора філософії*

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ *Г. С. Железняк*

Науковий керівник

Мішура Юлія Степанівна,
доктор фізико-математичних наук, професор



Київ — 2022

Анотація

Железняк Г. С. Ентропійні функціонали та пов'язані з ними інтегральні рівняння Фредгольма з додатковою сингулярністю. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика». – Київський національний університет імені Тараса Шевченка. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка науки України, Київ, 2022.

Дисертаційна робота присвячена пошуку екстремумів ентропійних функціоналів, сконструйованих для ймовірнісних мір, які відповідають двом незалежним вінерівським процесам зі зсувом, а також лінійній комбінації незалежних вінерівського та дробового броунівського рухів. Задача пошуку екстремумів ентропійних функціоналів зводиться до знаходження розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з ядрами із додатковою сингулярністю, тобто зі слабо сингулярними ядрами, що також мають точки розриву у чисельнику. Більшість методів, розроблених для пошуку чисельного розв'язку інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду із сингулярністю, стосуються ядер із неперервною функцією у чисельнику. У дисертації було доведено теорему про наближення розв'язків рівнянь з ядрами із додатковою сингулярністю розв'язками рівнянь зі слабо сингулярними ядрами та застосовано модифікований чисельний метод для пошуку розв'язку рівнянь із додатковою сингулярністю. Рівняння такого типу з ядром, що має більш складне зображення, виникають і у задачах статистичного оцінювання, а саме при конструюванні оцінки максимальної вірогідності параметра зсуву у моделі із двома дробовими броунівськими рухами. Для чисельного розв'язання таких рівнянь в дисертації було застосовано той самий модифікований чисельний метод та додатково сконструйовано дві альтернативні оцінки параметра зсуву.

Ентропійні функціонали, що є основним об'єктом розгляду у дисертації, нерозривно пов'язані з поняттям ентропії, яка є базовим в термодинаміці, теорії

інформації, фінансах, фундаментальною величиною в статистиці та машинно-му навчанні. Вона має велику кількість застосувань, наприклад, в астрономії, криптографії, обробці сигналів, аналізі зображень та біоінформатиці.

Піонерською у теорії інформаційної ентропії стала робота Шеннона, в якій було введено статистичне означення ентропії. Широке застосування має і добре відоме однопараметричне узагальнення ентропії Шеннона – ентропія Реньї, що використовується у статистичній фізиці, квантовій механіці та обробці даних. У теорії фінансів інтенсивне застосування отримав принцип мінімальної перехресної ентропії, сформульований Кульбаком і Лейблером, а саме порівняння цін опціонів та максимізація корисності з випадковим часовим горизонтом.

У дисертаційній роботі розглянуто суму двох незалежних вінерівських процесів зі зсувом і побудовано сім'ю ймовірнісних мір, відносно яких знос дорівнює нулю. Серед цих мір шукаємо ті, які мінімізують або максимізують певні функціонали, у тому числі функціонали ентропійного типу, що мають вигляд $E \left[F \left(\frac{dP_1}{dP}, \frac{dP_2}{dP} \right) \right]$, де $F(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ – деяка невід'ємна вимірна функція. Для сконструйованих симетричних ентропійних функціоналів у більшості випадків мінімум досягається, коли зсув ділиться на дві рівні частини. Проте, для більш нетривіального функціоналу розв'язок задачі мінімізації знаходиться з трансцендентного рівняння.

Далі розглянуто суму незалежних вінерівського процесу та дробового броунівського руху з індексом Хюрста $H \in (0, 1/2)$ зі зносом та побудовано сім'ю ймовірнісних мір, відносно яких знос дорівнює нулю. Задачу мінімізації ентропійних функціоналів в цьому випадку зведено до задачі варіаційного числення, а саме застосовано прямий метод диференціювання функціонала за параметром та знайдено інтегральне рівняння для мінімізуючої функції. Досліджено властивості L_2 -норми розв'язку цього інтегрального рівняння, а також розглянуто варіант задачі мінімізації на просторі сталих функцій. Внаслідок доведеної неперервності зважених інтегральних операторів Рімана–Ліувілля, показано L_2 -неперервність розв'язку задачі мінімізації як функції індексу Хюрста.

Нетривіальність пошуку розв'язку інтегрального рівняння полягає в тому, що отримане рівняння є інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду з ядром виду $K(t, s) = L(t, s)|t - s|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, де чисельник $L(t, s)$, $(t, s) \in [0, T]^2$ обмежений і неперервний м.с. відносно міри Лебега, але має точки розриву на $[0, T]^2$, які не можна усунути. Такі ядра ми називаємо ядрами із додатковою сингулярністю. У дисертації застосовано нові, порівняно з попередніми роботами, представлення ядер у термінах неповних бета-функцій, і ці зображення набагато зручніші для пошуку чисельного розв'язку рівняння. Наведено підхід для апроксимації таких ядер $K(t, s)$ ядрами з неперервними чисельниками і одним з головних результатів є теорема про наближення розв'язку інтегрального рівняння з ядром, що містить додаткову сингулярність, розв'язками інтегральних рівнянь, ядра яких є слабо сингулярними з неперервними чисельниками. Наближений розв'язок було знайдено для $H \in (0, 1)$ використовуючи product-integration method, згідно з яким отриманий розв'язок спочатку шукається на множині вузлових точок квадратури, а потім поширюється на всі точки за допомогою спеціальної, і загалом досить точної, інтерполяційної формули. Це дозволило розв'язати чисельно задачу мінімізації ентропійних функціоналів.

Аналогічне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду виникає при конструюванні оцінки максимальної вірогідності невідомого параметра зсуву в неперервній лінійній стохастичній моделі з двома дробовими бронівськими рухами з різними індексами Хюрста $1/2 \leq H_1 < H_2 < 1$. Складність пошуку чисельного розв'язку такого рівняння полягає в тому, що чисельник ядра складається з добутку неперервної (крім нуля) та обмеженої функції і множника, що прямує до нескінченності на осях. Дано теоретичне обґрунтування та алгоритм, що дозволяє побудувати наближений розв'язок рівняння Фредгольма і відповідну оцінку параметра зсуву. Побудовано також інші типи оцінок та наведено порівняльні таблиці для вибірових середніх та дисперсій відповідних оцінок.

Ключові слова: Ентропія, ентропійний функціонал, мінімізація, максимізація, вінерівський процес, дробовий броунівський рух, похідна Радона-Нікодима, інтегральне рівняння Фредгольма другого роду, слабко-сингулярне ядро, ядро із додатковою сингулярністю, чисельний розв'язок рівнянь, лінійна модель, оцінка максимальної вірогідності.

Summary

Zhelezniak H. S. Entropy functionals and related Fredholm integral equations with additional singularity. — Manuscript.

Doctor of Philosophy thesis undertaken in the field of knowledge 11 – Mathematics and statistics in specialty 111 – Mathematics – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2022.

The thesis is devoted to the search for extrema of entropy-type functionals constructed for a set of probability measures corresponding to two independent Wiener processes with a drift, as well as a linear combination of independent Wiener process and fractional Brownian motion. The main goal of finding extrema of entropy-type functionals is reduced to finding the solution of Fredholm integral equation of the second kind with kernels with an additional singularity, that is, with weakly singular kernels that also have discontinuity points in the numerator. Most of the methods developed for finding the numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind with weakly singular kernel consider kernels with a continuous function in the numerator. The dissertation proved a theorem on approximation of solution of integral equation with the kernel containing additional singularity by the solutions of the integral equations whose kernels are weakly singular but the numerator is continuous. Equations of this type with a kernel that has a more complex representation also arise in statistical estimation problems, namely, when constructing a maximum likelihood estimate of the drift parameter in a model with two fractional Brownian motions. For the numerical solution of such

equations, the same modified numerical method was applied and two alternative estimates of drift parameter were additionally constructed.

Entropy functionals, which are the main object of consideration in the thesis, are inextricably linked with the concept of entropy, which is basic term in thermodynamics, information theory, finance, and a fundamental quantity in statistics and machine learning. It has a huge number of applications, for example, in astronomy, cryptography, signal processing, image analysis, and bioinformatics. Shannon's work, in which a statistical definition of entropy was introduced, became a pioneer in the theory of information entropy. The well-known one-parameter generalization of Shannon's entropy – the Rényi entropy – is widely used in statistical physics, quantum mechanics, communication theory, and data processing. In the theory of finance, the principle of minimum cross-entropy, formulated by Kullback and Leibler, was intensively applied, namely the comparison of option prices and the utility maximization with a random time horizon.

In particular, the sum of two independent Wiener processes with drift is considered and the set of probability measures with respect to which drift equals zero is constructed. Among these measures, we look for those that minimize or maximize certain functionals, including entropy-type functionals, having the form $\mathbf{E} \left[F \left(\frac{dP_1}{dP}, \frac{dP_2}{dP} \right) \right]$, where $F(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ – non-negative measurable function. For constructed symmetric entropy-type functionals, in most cases the minimum is achieved by dividing the drift at the equal parts. However, for a more complicated entropy-type functionals, it turned out that the point of optimal expansion can be a solution of the transcendental equation.

Furthermore, we consider the sum of independent Wiener process and fractional Brownian motion with the Hurst index $H \in (0, 1/2)$ with a drift. As well the set of probability measures with respect to which drift is equal to zero is constructed. In this case, the problem of minimization of entropy-type functionals is reduced to the non-standard problem of the variational calculus, namely, the direct method of differentiating the functional by parameter is applied and the integral equation for the minimizing function is written. The solution of the minimization problem of such a functional in the space of L_2 -functions is found. The properties of the

solution norm are investigated, and also the variant of the minimization problem on the space of constant functions is considered. As a result of the proved continuity of weighted integral Riemann-Liouville operators, L_2 -continuity of the minimization problem solution as a function of the Hurst index is shown.

The non-triviality of the problem is due to the fact that the resulting equation is an integral Fredholm equation of the second kind with a kernel of the form $K(t, s) = L(t, s)|t - s|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, where the numerator $L(t, s)$, $(t, s) \in [0, T]^2$ is bounded and continuous a.s. with respect to Lebesgue measure, but may still have discontinuity points on $[0, T]^2$ that cannot be removed. We call such kernels kernels with an additional singularity. The thesis uses new, compared to the previous works, representations of kernels in terms of incomplete beta functions, and these representations are much more convenient for finding a numerical solution of the equation. An approach for approximating such kernels $K(t, s)$ by kernels with continuous numerators is presented, and one of the main results is the theorem on the approximation of solution of integral equation with the kernel containing additional singularity by the solutions of the integral equations whose kernels are weakly singular but the numerator is continuous. An approximate solution was found for $H \in (0, 1)$ using the product-integration method, according to which the obtained solution is first sought at a set of nodal points of the quadrature, and then extended to all points using a special, and in general quite accurate, interpolated formula, which allows to solve the problem of minimizing entropy-type functionals numerically.

Similar Fredholm integral equation of the second kind arises in construction of the maximum likelihood estimate of the unknown drift parameter in the continuous linear stochastic model with two fractional Brownian motions with different Hurst indices $1/2 \leq H_1 < H_2 < 1$. The fundamental difficulty of finding a numerical solution of such equation is that the numerator of the kernel consists of the product of a continuous (except zero) bounded function and a multiplier that tends to infinity on the axes. A theoretical justification and an algorithm are given which allows constructing an approximate solution of the Fredholm equation and the corresponding estimate of drift parameter. Other types of estimates are

also constructed and comparative tables for sample means and variances of the corresponding estimates are shown.

Keywords: relative entropy, entropy-type functional, minimization, maximization, Wiener process, fractional Brownian motion, Radon-Nikodym derivative, Fredholm integral equation of the second kind, weakly singular kernel, kernel with additional singularity, numerical solutions, linear model, maximum likelihood estimator.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Mishura Y.S., Zhelezniak H.S., *Extreme measures for entropy functionals*, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics, **4**, (2017), P. 15–20.
2. Mishura Y.S., Zhelezniak H.S., *Evaluation of extreme values of entropy functionals, (Ukrainian)*, Teor. Imovir. Mat. Stat., **99**, (2018), P. 177–186; translation in Theory of Probability and Mathematical Statistics, **99**, (2019), P. 199–210.
3. Makogin, V.I., Mishura, Y.S., Zheleznyak, G.S, *Minimization of the entropy for a mixture of standard and fractional brownian motions (Ukrainian)*, Teor. Imovir. Mat. Stat., **101** (2019), P.169–188; translation in Theory of Probability and Mathematical Statistics, **101**, (2020), P. 193–215.
4. Makogin, V., Mishura, Y., Zhelezniak, H., *Approximate solution of the integral equations involving kernel with additional singularity*, Stochastic Models, **37(4)** (2021), P. 549–567.

**Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів
дисертації**

1. Железняк Г. С., Мішура Ю. С. Екстремальні міри для ентропійних функціоналів // Матеріали XVI Міжнародної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна 2018”. К. : Київський університет, 2018. С. 16–17.
2. Железняк Г. С., Мішура Ю. С. Екстремуми функціоналів ентропійного типу // Матеріали XVII Міжнародної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна 2019”. К. : Київський університет, 2019. С. 24–25.
3. Железняк Г. С., Мішура Ю. С. Застосування інтегральних рівнянь із слабкою сингулярністю до проблеми оптимізації ентропійних функціоналів // Матеріали XVIII Міжнародної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна 2020”. К. : Київський університет, 2020. С. 16.
4. Y. S. Mishura, H. S. Zhelezniak / Approximate solution of the integral equations involving kernel with additional singularity // Proceedings of Scientific conference “Actual Problems of Stochastic Analysis”. Tashkent, Uzbekistan. February 20-21, 2021. P. 222–223.
5. Железняк Г. С., Мішура Ю. С. Ядро із додатковою сингулярністю // Матеріали XIX Міжнародної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна 2021”. К. : Київський університет, 2021. С. 14–15.
6. V. Makogin, Yu. Mishura, H. Zhelezniak / Stochastic applications of the approximate solution of the integral equation involving weakly singular kernel with additional singularity // Conference Materials of International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications. V”. Kyiv, Ukraine, 2021. P. 47.
7. Железняк Г. С. Додаткова сингулярність ядра при знаходженні наближе-

ної оцінки параметра // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ: Інститут математики НАН України, 2021. С. 92.

8. Железняк Г. С., Мішура Ю. С. Оцінка параметра зсуву θ в моделі з двома дробовими броунівськими рухами // Матеріали XX Міжнародної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна 2022”. К. : Київський університет, 2022. С. 11–12.

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації

1. Mishura Y., Ralchenko K., Zhelezniak H., *Numerical approach to the drift parameter estimation in the model with two fractional Brownian motions*, Communications in Statistics - Simulation and Computation, (2022), P. 1–15, DOI: 10.1080/03610918.2022.2099556.

Зміст

Вступ	13
1 Огляд літератури	23
1.1 Ентропія	23
1.2 Дробовий броунівський рух	26
1.3 Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду	27
2 Допоміжні означення та теореми	29
3 Відшукування екстремумів ентропійних функціоналів, заданих на вінерівських процесах	36
3.1 Вступ та постановка задачі	36
3.2 Екстремуми функціоналів для диференційовних функцій . . .	38
3.3 Екстремуми функціоналів ентропійного типу	43
3.3.1 Відшукування мінімумів найпростіших функціоналів . .	44
3.3.2 Відшукування екстремумів функціоналу $H(P, P_1, P_2)$. .	46
3.4 Висновки	54
4 Мінімізація ентропії для суміші стандартного і дробового броунівських рухів	56
4.1 Вступ	56
4.2 Мінімізація та максимізація функціоналів ентропійного типу	59
4.2.1 Знаходження розв'язку задачі мінімізації як розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма	59

	12
4.2.2	Властивості L_2 -норми мінімізатора 64
4.2.3	Задача мінімізації з обмеженнями 65
4.2.4	Неперервність розв'язку як функції індексу Хюрста 72
4.3	Висновки 84
5	Наближений розв'язок інтегральних рівнянь з ядром із дода- тковою сингулярністю 85
5.1	Вступ 85
5.2	Теорема про наближення інтегрального оператора 88
5.3	Чисельний розв'язок 94
5.3.1	Опис чисельного методу 94
5.3.2	Чисельні ілюстрації 97
5.4	Висновки 100
6	Чисельний підхід до оцінки параметра зсуву в моделі з двома дробовими броунівськими рухами 101
6.1	Вступ 101
6.2	Оцінка максимальної вірогідності для параметра зсуву θ , її властивості та чисельна побудова 101
6.2.1	Опис моделі 101
6.2.2	Ядра та їх зображення 105
6.2.3	Наближений розв'язок інтегрального рівняння 106
6.2.4	Опис чисельного методу 111
6.3	Альтернативні оцінки 112
6.4	Симуляції 114
6.5	Висновки 115
	Висновки 118
	Список використаних джерел 120
	Додаток 129

Вступ

Актуальність теми. Поняття ентропії є фундаментальним інструментом у статистичній механіці, термодинаміці, інформаційних науках та статистиці. У фізиці ентропія зазвичай відноситься до міри випадковості у фізичній системі. У термодинаміці інтерпретується як кількість молекулярних розладів (molecular disorder) у макроскопічній системі. Другий закон термодинаміки стверджує, що ентропія ізольованої системи ніколи не зменшиться з часом.

Хоча поняття ентропії спочатку використовувалося в термодинаміці, її можна застосовувати у багатьох сферах, наприклад, у сфері фінансів. Справді, ентропія має унікальні переваги у вимірюванні ризику та описі розподілів. Крім того, ентропія може бути мірою диверсифікації портфеля та приросту капіталу.

Ентропію також можна використовувати в ціноутворенні активів, що допомагає вирішити загальну задачу визначення розподілів ймовірностей активів за наявності обмеженої та неповної ринкової інформації. Теорія ентропійного ціноутворення та принцип максимальної ентропії використовуються при створенні різних моделей ціноутворення та при розробці відповідних алгоритмів.

Застосування ентропії можна знайти і в сучасному машинному навчанні, від транспортної задачі до нейронних мереж. У задачах про оптимальний план перевезення продукту із пунктів відправлення до пунктів споживання обчислення відстані Канторовича вимагає розв'язування лінійної програми, яка може бути витратною у обчислювальному відношенні. Введення регуляризатора на основі ентропії призводить до ітерації з фіксованою точкою та дозволяє обчислювати таку задачу швидше. Застосування ентропійних регуляризаторів

також можна знайти в задачах, пов'язаних із напівконтрольованим навчанням та кластеризацією. Ентропія традиційно використовується в деревах рішень як міра домішків для вузлів.

Інтегральні рівняння Фредгольма з сингулярними ядрами типу Коші або логарифмічного типу мають дуже важливі практичні застосування в багатьох областях; зокрема в області теорії потенціалу, електронної оптики, розсіювання акустичних хвиль, електромагнетизму та випромінювання.

Оскільки у дисертаційній роботі розглянуто нові види ентропійних функціоналів та їх дослідження зведено до досліджень інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду із сингулярними ядрами, то тему дисертації можна вважати цілком актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано в рамках державних бюджетних дослідницьких наукових тем № 19БФ038-01 «Точні формули, оцінки, асимптотичні властивості і статистичний аналіз складних еволюційних систем з багатьма ступенями свободи» (номер державної реєстрації 0119U100317) та № 22БФ038-01 «Стохастичні динамічні системи, неоднорідні у часі або з випадковим часом: асимптотика та статистичний аналіз» (номер державної реєстрації 0122U000821) кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, що входять до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт «Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів».

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є вивчення ентропійних функціоналів різного типу та розв'язання пов'язаних з ними аналітичних задач. Зокрема, розглянуто задачу оптимізації ентропійних функціоналів у моделі з двома стандартними броунівськими рухами та сумішшю стандартного і дробового броунівських рухів. З цією метою досліджено інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з додатковою сингулярністю, які

виникають внаслідок пошуку екстремумів функціоналів ентропійного типу. Також досліджено аналогічні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з додатковою сингулярністю, які виникають при статистичному оцінюванні параметрів.

Основними завданнями даної роботи є:

- дослідити екстремуми ентропійних функціоналів, сконструйованих для ймовірнісних мір, що відповідають двом незалежним вінерівським процесам;
- мінімізувати ентропійні функціонали, сконструйовані для ймовірнісних мір, що відповідають суміші стандартного і дробового броунівських рухів;
- знайти наближені розв'язки інтегральних рівнянь з ядром із додатковою сингулярністю, що виникають при мінімізації ентропійних функціоналів;
- знайти наближені розв'язки інтегральних рівнянь з ядром із додатковою сингулярністю, що виникають при оцінюванні параметра зсуву в моделі з двома дробовими броунівськими рухами.

Об'єктом дослідження є ентропійні функціонали та інтегральні рівняння Фредгольма другого роду із додатковою сингулярністю, які виникають внаслідок пошуку екстремумів функціоналів ентропійного типу та статистичного оцінювання параметрів.

Предметом дослідження є пошук екстремумів ентропійних функціоналів у випадку двох вінерівських процесів, суміші стандартного і дробового броунівських рухів; пошук чисельного розв'язку рівнянь із додатковою сингулярністю.

Методи дослідження. У процесі дослідження, проведеного у дисертаційній роботі, застосовуються методи теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів, функціонального аналізу та теорії інтегральних рівнянь. Для програмної реалізації методів та відповідних моделей використовується мова програмування Python 3.7.

Наукова новизна отриманих результатів. Всі результати, отримані в дисертаційній роботі, є новими та математично обґрунтованими. Основні з них наступні:

- досліджено екстремуми ентропійних функціоналів, сконструйованих для ймовірнісних мір, що відповідають двом незалежним вінерівським процесам;
- досліджено екстремуми, точніше мінімуми, ентропійних функціоналів, сконструйованих для ймовірнісних мір, що відповідають суміші стандартного і дробового броунівських рухів;
- знайдено наближені розв’язки інтегральних рівнянь з ядром із додатковою сингулярністю, що виникають при мінімізації ентропійних функціоналів, сконструйованих для ймовірнісних мір, що відповідають суміші стандартного і дробового броунівських рухів;
- знайдено наближені розв’язки інтегральних рівнянь з ядром із додатковою сингулярністю, що виникають при оцінюванні параметра зсуву в моделі з двома дробовими броунівськими рухами;
- на основі знайдених розв’язків побудовано оцінки для параметра зсуву і наведено її порівняння з іншими типами оцінок того ж параметру.

Особистий внесок здобувача. Основні результати роботи, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. За результатами дисертації здобувачем було опубліковано чотири роботи у фахових виданнях [66], [68], [75], [76]. У спільних з науковим керівником роботах Ю. С. Мішурі належать постановка задачі та загальне керівництво роботою. Роботи [66] та [68] опубліковані додатково у співавторстві з В. І. Макогоном, якому належить дослідження властивостей норми розв’язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані в роботі результати дозволили побудувати модифікований алгоритм для чисельного пошуку розв’язків рівнянь з ядрами із додатковою сингулярністю. Цей тип

рівнянь виникає при пошуку екстремумів ентропійних функціоналів, а також у задачах статистичного оцінювання, що мають широке застосування у фінансовій математиці, економіці, фізиці, біології тощо.

Апробація результатів дисертації Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня:

1. XVI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2018», 18–20 квітня, 2018, м. Київ, Україна.
2. XVII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2019», 17–19 квітня, 2019, м. Київ, Україна.
3. XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна 2020», 15–16 квітня, 2020, м. Київ, Україна.
4. International Scientific Conference “Actual Problems of Stochastic Analysis”, February 20-21, 2021, Tashkent, Uzbekistan.
5. XIX Міжнародна наукова конференція «Шевченківська весна 2021», 15-16 квітня 2021 р., м. Київ, Україна.
6. International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications. V”, June 1-4, 2021, Kyiv, Ukraine.
7. Міжнародна конференція молодих математиків, 3–5 червня 2021 р., за організацією Інституту математики НАН України, м. Київ, Україна.
8. XX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2022», 14–15 квітня, 2022, м. Київ, Україна.

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 4 статті [66], [68], [75], [76] і 8 тез на наукових конференціях [1–6], [67], [77]. Статтю [75] опубліковано у виданні, що внесено до переліку наукових фахових видань України. Дві статті [68] та [76] надруковано у науковому фаховому виданні України категорії «А», що індексується у наукометричній базі Web of Science, англomовна версія видання індексована в наукометричній базі SCOPUS та

входить до квартиля Q3. Одну статтю [66] опубліковано у міжнародному журналі, який індексується у наукометричних базах SCOPUS та Web of Science та входить до квартиля Q3. Додатково наукові результати дисертації відображено у статті [73], яку опубліковано у міжнародному журналі, який індексується у наукометричних базах SCOPUS та Web of Science.

Обсяг і структура дисертації Дисертація складається з вступу, шести розділів, висновків, списку літератури та додатків. Загальний обсяг роботи – 132 сторінки. Обсяг основного тексту дисертації – 117 сторінок. Список використаної літератури займає 9 сторінок і налічує 101 найменування. Додатки займають 4 сторінки і містять список публікацій за темою дисертації, відомості про апробацію результатів дисертації.

Зміст роботи У вступі обґрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, темами, встановлено мету і завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження, наведено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, охарактеризовано особистий внесок здобувача, наведено список конференцій, на яких дисертаційна робота пройшла апробацію.

У **першому розділі** дисертаційної роботи наведено огляд літератури за тематикою дисертаційної роботи та результатів, отриманих іншими авторами.

У **другому розділі** наведено основні загальні означення та деякі додаткові твердження, які використано в дисертаційній роботі.

У **третьому розділі** розглянуто суму двох незалежних вінерівських процесів зі зносом і побудовано сім'ю ймовірнісних мір, відносно яких знос дорівнює нулю. Серед цих мір шукаємо ті, які мінімізують або максимізують функціонали ентропійного типу.

Розглядаючи задачу про усунення зсуву для суми двох незалежних вінерівських процесів $W_1 = \{W_1(t), t \in [0, T]\}$ та $W_2 = \{W_2(t), t \in [0, T]\}$, $T > 0$, знайдемо ті міри P_1 і P_2 , які доставляють екстремуми сумі двох функціоналів

ентропійного типу:

$$H(P, P_1, P_2) = \mathbf{E} \left[\left(\frac{dP_1}{dP} \right)^2 \left(-\log \frac{dP_2}{dP} \right) \right] + \mathbf{E} \left[\left(\frac{dP_2}{dP} \right)^2 \left(-\log \frac{dP_1}{dP} \right) \right],$$

де за теоремою Гірсанова

$$\frac{dP_i}{dP} = \exp \left\{ \int_0^T f_i(s) dW_i(s) - \frac{1}{2} \int_0^T f_i^2(s) ds \right\}, \quad i = 1, 2$$

і міри P_1, P_2 відносяться до вінерівських процесів

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_1(t) &= W_1(t) - \int_0^t f_1(s) ds, & \widetilde{W}_2(t) &= W_2(t) - \int_0^t f_2(s) ds, \\ f_1(t) + f_2(t) &= f(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

та f_i задовольняють умови $f_i \in L_2([0, T], \lambda_1)$, $0 \leq f_i(t) \leq f(t)$, $t \in [0, T]$.

Знайдено мінімуми і максимуми функціонала $H(P, P_1, P_2)$ за умови, що $f_1(t) = \alpha f(t)$ та $f_2(t) = (1 - \alpha)f(t)$, тобто шукаємо точку α , в якій цей мінімум досягався. Також знайдено мінімуми і максимуми цього ж функціонала в ширшому класі функцій $f_1(t) = \alpha(t)f(t)$ та $f_2(t) = (1 - \alpha(t))f(t)$, де $\alpha(t) \in [0, 1]$ – вимірна обмежена функція.

У четвертому розділі розглянуто задачу мінімізації ентропійного функціонала

$$H_1(P, P_1, P_2) = \mathbf{E} \left[\left(\frac{dP_1}{dP} \log \frac{dP_1}{dP} \right) \right] + \mathbf{E} \left[\left(\frac{dP_2}{dP} \log \frac{dP_2}{dP} \right) \right]$$

для суміші вінерівського процесу $W = \{W(t), t \in [0, T]\}$ та дробового броунівського руху $B^H = \{B^H(t), t \in [0, T]\}$ з індексом Хюрста $H \in (0, 1/2)$, де за теоремою Гірсанова

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dP} &= \exp \left\{ - \int_0^T f_1(t) dW(t) - \frac{1}{2} \|f_1\|_{L_2([0, T])}^2 \right\}, \\ \frac{dP_2}{dP} &= \exp \left\{ - \int_0^T (K_0^{H,*} f_2)(t) dB(t) - \frac{1}{2} \|K_0^{H,*} f_2\|_{L_2([0, T])}^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$B(t) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - H)}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_0^t (K_T^{H,*} \mathbb{1}_{[0,t]})(s) dB^H(s),$$

та міра P_1 відповідає вінерівському процесу \widetilde{W} , а міра P_2 — дробовому броунівському руху \widetilde{B}^H

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(t) &= W(t) + \int_0^t f_1(s) ds, \quad \widetilde{B}^H(t) = B^H(t) + \int_0^t f_2(s) ds, \\ f_1(t) + f_2(t) &= f(t). \end{aligned}$$

Доведено, що функціонал $H_1(P, P_1, P_2)$ можна зобразити як

$$H_1 = \frac{1}{2} \|(1 - \alpha)f\|_{L_2[0,T]}^2 + \frac{1}{2} \|(K_0^{H,*} \alpha f)\|_{L_2[0,T]}^2$$

де α — деяка обмежена функція, не випадкова вимірна функція $f \in L_2([0, T])$, а $K_0^{H,*}$ — зважений інтегральний оператор Рімана – Ліувілля на $L_2[0, T]$. Позначимо $g(t) = \alpha(t)f(t)$. Задача пошуку екстремуму ентропійного функціонала зводиться до пошуку розв'язку рівняння

$$g(t) + C(H) \int_0^T \frac{L(t,v)}{|t-v|^{2H}} g(v) dv = f(t),$$

де функція $L(t,v) = B\left(\frac{T/(t \vee v) - 1}{T/(t \wedge v) - 1}, \frac{1}{2} - H, 2H\right)$ — обмежена $[0, T]^2$, проте, не має границі в точках $(0, 0)$ та (T, T) , неповна бета-функція $B(x, \alpha, \beta) = \int_0^x y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy$, $x \in [0, 1]$.

Доведено, що $g(t)$ — єдиний розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, тоді існує єдина вимірна обмежена функція $\alpha_0 = \alpha_0(t)$, що є розв'язком задачі мінімізації функціонала H_1 , причому ця функція $\alpha_0(t) = \frac{g(t)}{f(t)}$. Додатково знайдено верхню й нижню межу інтегральної норми розв'язку інтегрального рівняння.

П'ятий розділ присвячено розгляду інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$x(t) + \int_0^T K(t,s)x(s) ds = g(t), t \in [0, T],$$

з ядром $K(t, s) = \frac{L(t, s)}{|t-s|^\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, де функція $L(t, s)$ – обмежена на $[0, T]$ та неперервна скрізь, за виключенням скінченної кількості точок, в яких функція не має границі. Такий тип рівнянь виникає в теорії ентропійних функціоналів при $H \in (0, 1/2)$, розглянутій у четвертому розділі, та для задачі оптимізації малих відхилень змішаного дробового броунівського руху зі зсувом для $H \in (1/2, 1)$. Відповідний тип ядер будемо називати ядрами із додатковою сингулярністю. Побудовано наближений розв’язок такого типу рівнянь, що дозволило розв’язати чисельно проблеми оптимізації ентропії та конструювання оптимальних ймовірнісних мір.

У шостому розділі розглянуто застосування модифікованого методу із п’ятого розділу для ядер із додатковою сингулярністю, а саме ядер виду $K(s, u) = \frac{L(s, u)}{|s-u|^\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, де чисельник $L(s, u)$ обмежений і неперервний м.с. відносно міри Лебега, але може мати точки розриву на $[0, T]^2$,

Такий тип виникає при знаходженні оцінки параметра $\theta \in \mathbb{R}$ у неперервній лінійній стохастичній моделі

$$X_t = \theta t + B_t^{H_1} + B_t^{H_2}, \quad t \in [0, T],$$

де B^{H_1} та B^{H_2} – два незалежні дробові броунівські рухи з різними індексами Хюрста, що задовольняють умові $1/2 \leq H_1 < H_2 < 1$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ та параметри H_1 і H_2 відомі. Зображення оцінки параметра $\theta \in \mathbb{R}$ спирається на розв’язок інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду

$$h_T(u) + \frac{1}{2 - 2H_1} \int_0^T h_T(s) K(s, u) ds = 1, \quad u \in [0, T]$$

та має вигляд

$$\hat{\theta}_T = \frac{\int_0^T h_T(t) dY_t}{\gamma_{H_1} (2 - 2H_1) \int_0^T h_T(t) t^{1-2H_1} dt},$$

де процес $Y_t = c_{H_1} \int_0^t s^{\frac{1}{2}-H_1} (t-s)^{\frac{1}{2}-H_1} dX_s$.

Було доведено теорему про наближення розв’язку інтегрального рівняння з ядром, що містить додаткову сингулярність та знайдено чисельними методами оцінку параметра $\theta \in \mathbb{R}$.

Оцінки $\hat{\theta}_T^{(1)} = \frac{X_T}{T}$ та $\hat{\theta}_T^{(2)} = \frac{\int_0^T X_t dt}{T}$ було розглянуто в якості альтернативних. Поведінку трьох оцінок параметрів зсуву порівняно за допомогою чисельного моделювання.

У **висновках** сформульовано основні результати дисертаційної роботи.

Подяка. Автор дисертації висловлює щире подяку своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук Мішурі Юлії Степанівні за постановку розглянутих у дисертації задач, постійну увагу та підтримку в роботі.

Розділ 1

Огляд літератури

1.1 Ентропія

Вперше поняття ентропії було використано у роботі Клаузіуса 1865 року. Цей термін походить від грецького *trpos*, що означає перетворення, і префікса *en-*, щоб нагадати про його нерозривне відношення до поняття енергії. Фундаментальною в теорії комунікації та передачі інформації стала робота Шеннона [92] 1948 року, базована на роботах Nyquist [81, 82] і Hartley [43]. Робота [92] раціоналізувала ці ранні зусилля у створенні цілісної математичної теорії комунікації. Було введено суто статистичне поняття ентропії, на відміну від попередньої ідентифікації Больцманом (1872) його «Н-функціонала» як фізичної ентропії.

Розширення оригінальної роботи Шеннона призвели до багатьох альтернативних мір інформації. Наприклад, послабивши третю умову Шеннона, умову адитивності, Реньї [87] зміг поширити ентропію Шеннона на неперервну сім'ю ентропійних мір. Крім того, ентропія Реньї є монотонною функцією інформації. Монотонний зв'язок означає, що ентропія Реньї та інформація можуть використовуватися як взаємозамінні в будь-яких практичних застосуваннях. Kendall у [93] визначає модифіковану ентропію у дискретному випадку. У роботах [28, 38] показано, що ентропію Шеннона можна розширити до багатовимірних випадкових величин.

Роботу зі встановлення взаємозв'язків між статистичною ентропією, статистичною механікою і термодинамічною ентропією розпочав Jaynes [50–52].

Ентропія має широке застосування у фінансах, наприклад, є важливим інструментом у виборі портфеля та ціноутворенні активів. Philippatos та Wilson були першими двома дослідниками, які застосували концепцію ентропії до вибору портфеля [84]. Ними були запропоновані різні види ентропії та створені більш узагальнені форми ентропії, наприклад, приростна ентропія (incremental entropy).

У порівнянні з традиційною теорією вибору портфеля, теорія, заснована на приростній ентропії, використовує той факт, що існує оптимальний портфель для заданої ймовірності прибутку [83]. Деякі види ентропії також використовуються при виборі портфеля, оскільки ентропія може вимірювати ризик цінних паперів. Наприклад, Xu et al. [99] досліджували проблеми вибору портфеля, використовуючи ентропію для оцінки ризику активів.

Аналогічно ентропія була застосована в моделях оцінки вартості опціонів. Типовим прикладом є теорія ентропійного ціноутворення (ТЕЦ), введена Gulko у [39], де було показано, що ТЕЦ може запропонувати результати оцінки подібні до моделі ціноутворення капітальних активів Шарпа-Лінтнера та формули Блека-Шоулза. Також ТЕЦ застосована до ціноутворення опціонів на акції [40] та ціноутворення опціонів на облігації [41].

Обґрунтування принципу максимальної відносної ентропії було дано у [26]: розподіл, що максимізує відносну ентропію, можна охарактеризувати як границю послідовності умовних ймовірностей. Принцип максимальної ентропії також відіграє важливу роль при оцінюванні вартості опціону. Ще в 1996 році Buchen та Kelly [22] використовували принцип максимальної ентропії для оцінки розподілу активу з набору цін опціону. Їх дослідження показало, що максимальний розподіл ентропії міг точно підігнати відому функцію щільності ймовірності. Це могло б імітувати ціни опціонів при різних цінах виконання. У статті Neri et al. [78] було розроблено простий надійний тест для максимального розподілу ентропії.

Крім згаданих вище робіт, принцип максимальної ентропії можна використовувати для оцінки неявних кореляцій між різними валютними парами [60], для отримання нейтральної щільності майбутніх ризиків акцій або інших

ризиків активів [90], а також для визначення розподілу цін опціонів [19, 42]. Stutzer [94] і Hawkins [44] навіть використовували принцип максимальної ентропії для оцінки похідних цінних паперів, таких як ф'ючерси та свопи. Принцип максимальної ентропії також можна використовувати для вибору ряду репрезентативних вибірок із великої бази даних Wang [96].

Іншим корисним принципом є принцип мінімальної перехресної ентропії. У теорії ймовірностей та теорії інформації дивергенція Кульбака-Лейблера — це величина, яка вимірює різницю між двома розподілами ймовірностей, тобто визначається як функціонал розподілу ймовірностей. Вона названа на честь Соломона Кульбака та Річарда Лейблера, цей термін був розглянутий у їх роботі [61]. Принцип мінімальної перехресної ентропії був розроблений Кульбаком і Лейблером і є одним з найважливіших принципів оптимізації ентропії.

Buchen та Kelly також розширили свої дослідження від принципу максимальної ентропії до принципу мінімальної перехресної ентропії. Їх результати показали, що принцип мінімальної перехресної ентропії має той самий ефект, що і принцип максимальної ентропії. Frittelli у роботі [36] визначив достатні умови для мінімізації відносної ентропії [36]. Він також дав фінансову інтерпретацію мінімальної мартингальної міри ентропії. Мінімальна міра мартингалу ентропії може бути використана для ціноутворення опціонів, що було показано у роботі Benth et al. [15].

У роботі Hunt et al. [48] знайдено явну характеристику мартингальної міри мінімальної ентропії у випадку неповноти ринку. Робота [37] присвячена мінімізації перехресної ентропії Цалліса і та зв'язку з мартингальною мірою мінімальної ентропії. У роботі Branger [20] використав мінімальну перехресну ентропію для визначення стохастичного коефіцієнту дисконтування з урахуванням еталонного стохастичного коефіцієнту дисконтування і визначення ціни Ероу–Дебре з урахуванням деяких наборів контрольних цін Ероу–Дебре.

Rödder et al. [89] представив нову теорію визначення ваг портфеля за допомогою механізму висновку, заснованого на принципах, як за максимальної, так і мінімальної відносної ентропії.

Відносна ентропія широко використовується в задачах оптимізації машинного навчання. Властивостям відносної ентропії присвячено багато робіт, відзначимо лише [33] і [54]. Принцип максимальної ентропії та принцип мінімальної перехресної ентропії також були застосовані до машинного навчання та дерев рішень, наприклад див. [34], [101].

1.2 Дробовий броунівський рух

Дробовий броунівський рух (ДБР) був введений Андрієм Миколайовичем Колмогоровим [58] при вивченні спіральних кривих в гільбертовому просторі, і досліджений в тепер уже класичній статті Б. Б. Мандельброта та Дж. ван Несса [70], де було встановлено стохастичне інтегральне представлення в термінах стандартного броунівського руху. Параметр H називається індексом Хюрста зі статистичного аналізу, розробленого кліматологом Хюрстом [49]. Зауважимо, що ДБР зводиться до броунівського руху, коли $H = 1/2$, але на відміну від броунівського руху, він має залежні прирости, коли $H \neq 1/2$.

ДБР розглядали Річард Аллен Хант [47] у контексті випадкових перетворень Фур'є та Аківа Мойсейович Яглом [100], який досліджував кореляційну структуру процесів, які мають стаціонарні прирости n -го порядку. Б. Б. Мандельброт працював з дробовими процесами протягом тривалого періоду, і його результати, що стосувалися фракталів і масштабування, були узагальнені в книзі [69].

Стаття [30] була однією з перших, присвячених стохастичному аналізу для ДБР. ДБР не є ані напівмартингалом (за винятком випадку $H = 1/2$, коли це броунівський рух), ані марковським процесом. Однак він тісно пов'язаний з дробовим численням і може бути представлений у вигляді «дробового інтеграла» (за допомогою порівняно складного гіпергеометричного ядра) за допомогою вінерівського процесу не лише на нескінченних, а й на скінченних інтервалах. Це було доведено в статтях І. Норроса, Е. Валкейла та Дж. Віртамо [80] і К. Бендера [14].

Статистичні аспекти моделей, що включають дробовий броунівський рух,

досліджувалися в багатьох джерелах. Однією з важливих проблем, зокрема, є оцінка параметрів зсуву. У зв'язку з цим згадаємо роботи [46] і [57], де спочатку досліджувався дробовий процес Орнштейна-Уленбека з невідомим параметром зносу, книги [18] і [86] та посилання в них, а також статті [16], [97] та [98], де оцінка була побудована за допомогою дискретних спостережень.

Методи, які використовуються для побудови оцінок максимальної вірогідності (ОМВ) для параметрів зсуву, засновані на перетвореннях Гірсанова для ДБР і залежать від властивостей детермінованих дробових операторів (визначених параметром Хюрста), пов'язаних з ДБР. Як правило, ОМВ не легко обчислити. Зокрема, вона спирається на можливість обчислення стохастичних інтегралів відносно ДБР. Це важко зробити для більшості моделей, оскільки апроксимація стохастичних інтегралів відносно ДБР, коли вони існують, є складним завданням.

1.3 Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду

Розвиток теорії інтегральних рівнянь почався з праць італійського математика В. Вольтерри (1896) і шведського математика І. Фредгольма (1900). На початку 1960-х років дослідники цікавилися переважно типами випадками, в котрих функція ядра $K(t, s)$ є неперервно диференційовною. Це і був тип рівняння, який вивчав І. Фредгольм, і на його честь таке рівняння називається інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду.

Дослідниками було розроблено багато методів для розв'язку інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду, таких як квадратурний метод, метод колокації та метод Галеркіна, метод інтегрування добутку. Крім того, ітераційний метод ядра є традиційним методом розв'язку інтегрального рівняння.

В останнє десятиліття з'явився значний інтерес до чисельного аналізу розв'язків інтегральних рівнянь із сингулярними ядрами. У численних статтях і книгах, присвячених цій темі, чисельник ядра $K(t, s) = L(t, s)|t - s|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$ є неперервним. Більшість існуючих чисельних методів для цих рівнянь базуються на апроксимації розв'язків функціями без особливостей, наприклад,

поліномами або сплайнами.

Згадаємо в цьому зв'язку класичний підручник [56], який є дуже корисним при розгляді інтегральних рівнянь з сингулярними ядрами. Щодо наближених методів розв'язування інтегральних рівнянь, то згадаємо монографії [11, 13, 31, 62] та роботу [12], де показано різні методи наближення, але як у цих, так і в інших роботах, чисельник вважається принаймні неперервним і часто диференційованим. У цих методах розв'язки апроксимуються кусковими поліномами з розбиттям, що відповідає особливостям розв'язку. Цю гарну ідею нелінійної апроксимації вперше ввів Rice [88]. Модифікований метод колокації був введений у Kaneko et al.[55], де інтегральне рівняння було перетворено на інтегро-диференціальне рівняння з помірною сингулярністю.

При чисельному розв'язуванні слабо сингулярних рівнянь необхідно обчислювати велику кількість слабо сингулярних інтегралів. У цьому випадку, коли інтегральний оператор все ще компактний, техніка, яка називається *product integtation method*, найчастіше використовується для апроксимації таких інтегралів (див.[7–9]).

Product integtation method полягає у лінійній інтерполяції гладкої частини ядра, помноженої на невідому функцію. Цей метод використовується для лінійного або нелінійного рівняння Вольтерри або рівняння Фредгольма другого роду, і для кожного типу рівняння вивчаються різні ядра: логарифмічні сингулярні ядра в [32], ядра з фіксованою сингулярністю Коші, отримані з теорії розсіювання в [17], ядро Абеля, що виникає в теорії теплопередачі між твердим тілом і газами в [25].

Всі роботи, наведені вище, залежить від відповідного вибору вузлів кускових поліномів, які використовуються для апроксимації розв'язку. Наближені розв'язки, отримані цими методами, є кусковими поліномами і не мають особливостей у кінцевих точках. На основі методу зі статті [79], було розроблено алгоритм для пошуку чисельних розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду із ядрами із додатковою сингулярністю, де ядро виду $K(t, s) = \frac{L(t, s)}{|t-s|^\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$ з обмеженням і неперервним м.с. відносно міри Лебега чисельником $L(t, s)$, $(t, s) \in [0, T]^2$ може мати точки розриву на $[0, T]^2$.

Розділ 2

Допоміжні означення та теореми

У цьому розділі наведемо кілька означень та теорем, які будуть використані при доведенні основних результатів.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, P)$ – ймовірнісний простір з фільтрацією, на якому визначено всі об'єкти, що далі розглядаються. Зафіксуємо $T > 0$, та нехай P_1 – інша ймовірнісна міра на \mathcal{F}_T .

Означення 2.1. Кажуть, що P_1 абсолютно неперервна відносно міри P на \mathcal{F}_T та використовують позначення $P_1 \ll P$, якщо $P(K) = 0 \Rightarrow P_1(K) = 0$ для всіх $K \in \mathcal{F}_T$.

За теоремою Радона-Нікодіма, це виконується тоді і тільки тоді коли існує \mathcal{F}_T -вимірна інтегровна відносно міри P функція Z_T така що

$$P_1(K) = \int_K Z_T(\omega) P(d\omega) \quad \text{для всіх } K \in \mathcal{F}_T,$$

де інтеграл розуміється в сенсі Лебега.

Означення 2.2. Ентропія ймовірнісної міри P_1 відносно P визначається як

$$H(P_1|P) := \begin{cases} \mathbf{E} \left[\frac{dP_1}{dP} \log \frac{dP_1}{dP} \right], & \text{якщо } P_1 \ll P, \\ +\infty, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Зараз ми сформулюємо результати, пов'язані з властивостями ентропії (ентропійного функціонала). Почнемо з властивостей опуклих функцій.

Означення 2.3. Функція $g(x)$ називається опуклою на інтервалі (a, b) , якщо для кожних $x_1, x_2 \in (a, b)$ та $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2). \quad (2.1)$$

Функція $g(x)$ називається строго опуклою, якщо рівність має місце тоді і тільки тоді, коли $\lambda = 0$ або $\lambda = 1$.

Лема 2.1. Якщо функція g має другу похідну, яка всюди невід'ємна (додатна), тоді функція є опуклою (строго опуклою).

Наступна нерівність широко застосовується в математиці та використовується у багатьох результатах, пов'язаних з ентропійними функціоналами.

Лема 2.2 (нерівність Йенсена). Нехай $\mathbf{E}|X| < \infty$ та нехай g – опукла функція. Тоді

$$g(\mathbf{E}X) \leq \mathbf{E}g(X). \quad (2.2)$$

Тепер ми використаємо результати, отримані вище, для доведення деяких властивостей ентропійного функціоналу.

Лема 2.3. Нехай $H(P_1|P)$ – ентропійний функціонал, тоді $H(P_1|P) \geq 0$ та $H(P_1|P) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $P_1 = P$.

Справді, функція $h(x) = x \log x$ є строго опуклою на $(0, \infty)$ (за лемою 2.1). Застосувавши лему 2.2 до функції $h(x)$, маємо:

$$H(P_1|P) = \mathbf{E} \left[h \left(\frac{dP_1}{dP} \right) \right] \geq h \left(\mathbf{E} \left[\frac{dP_1}{dP} \right] \right) \geq h(1) = 0$$

та рівність має місце тоді й тільки тоді, коли $P_1 = P$.

Одним з основних інструментів у роботі з ймовірнісними мірами є теорема Гірсанова. Нагадаємо класичну теорему Гірсанова для вінерівського процесу та її модифікацію для дробового броунівського руху.

Теорема 2.1. [Гірсанова, [35], стор. 164-171] Розглянемо випадковий процес $Y = \{Y(t), t \in [0, T]\}$ вигляду

$$Y(t) = W(t) + \int_0^t a(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

де $T > 0$, $W = \{W(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ — вінерівський процес, та $a = a(t) \in L^2([0, T])$ — вимірна невинадкова функція. Покладемо

$$M_t = \exp \left(- \int_0^t a(s)dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t a^2(s)ds \right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Визначимо міру Q_W на \mathcal{F}_T як $Q_W(\omega) = M_T(\omega)dP(\omega)$. Тоді Q_W — імовірнісна міра на \mathcal{F}_T та Y — вінерівський процес відносно Q_W .

Для того, щоб сформулювати теорему Гірсанова для дробового броунівського руху, введемо такі означення та позначення.

Означення 2.4. Лівосторонній (правосторонній) дробовий інтегральний оператор Рімана – Ліувілля порядку μ на інтервалі $[0, T]$ від функції φ , визначається для $\mu > 0$ як

$$(I_{0+}^\mu \varphi)(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^t (t-z)^{\mu-1} \varphi(z) dz, \quad t \in [0, T],$$

$$(I_{T-}^\mu \varphi)(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_t^T (z-t)^{\mu-1} \varphi(z) dz, \quad t \in [0, T],$$

де $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера.

Позначимо далі через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2[0, T]}$ та $\| \cdot \|_{L_2[0, T]}$ скалярний добуток та норму в $L_2[0, T]$. Згідно з оцінками (2.72) і (2.73) з [91], справедливі такі нерівності:

$$\|I_{0+}^\mu \varphi\|_{L_2[0, T]} \leq \frac{T^\mu}{\Gamma(\mu + 1)} \|\varphi\|_{L_2[0, T]}, \quad \mu > 0, \quad (2.3)$$

$$\|I_{T-}^{\mu}\varphi\|_{L_2[0,T]} \leq \frac{T^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}\|\varphi\|_{L_2[0,T]}, \quad \mu > 0. \quad (2.4)$$

Визначимо також зважені інтегральні оператори Рімана – Ліувілля у випадку $H \in (0, 1/2)$

$$\begin{aligned} (K_0^{H,*}\varphi)(t) &= C_1(H)t^{H-\frac{1}{2}} \left(I_{0+}^{\frac{1}{2}-H} \cdot^{\frac{1}{2}-H} \varphi(\cdot) \right) (t) \\ &= C_1(H)t^{H-\frac{1}{2}} \left(I_{0+}^{\frac{1}{2}-H} u^{\frac{1}{2}-H} \varphi(u) \right) (t), \\ (K_T^{H,*}\varphi)(t) &= C_1(H)t^{\frac{1}{2}-H} \left(I_{T-}^{\frac{1}{2}-H} \cdot^{H-\frac{1}{2}} \varphi(\cdot) \right) (t) \\ &= C_1(H)t^{\frac{1}{2}-H} \left(I_{T-}^{\frac{1}{2}-H} u^{H-\frac{1}{2}} \varphi(u) \right) (t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Використовуючи очевидну нерівність $u^{\frac{1}{2}-H} \leq t^{\frac{1}{2}-H}$ для всіх $0 \leq u \leq t$ та $H \in (0, 1/2)$, першу формулу з (2.5) та нерівність (2.3), дуже легко побачити, що оператор $K_0^{H,*}$ переводить $L_2[0, T]$ в $L_2[0, T]$. Аналогічно, за допомогою нерівностей

$$\begin{aligned} |[K_T^{H,*}\varphi](t)| &\leq \frac{C_1(H)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)} \int_t^T \frac{(t/z)^{\frac{1}{2}-H}}{(z-t)^{H+\frac{1}{2}}} |\varphi(z)| dz \\ &\leq C_1(H) [I_{T-}^{\frac{1}{2}-H} |\varphi|](t), \quad t \in (0, T), \end{aligned}$$

та (2.4), одержуємо, що оператор $K_T^{H,*}$ переводить $L_2[0, T]$ в $L_2[0, T]$.

Означення 2.5. Для функції $\varphi(t)$, заданої на інтервалі $[0, T]$, кожен з виразів

$$\begin{aligned} (D_{0+}^{\alpha}\varphi)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\varphi(z) dz}{(t-z)^{\alpha}}, \quad t \in [0, T], \\ (D_{T-}^{\alpha}\varphi)(t) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^T \frac{\varphi(z) dz}{(z-t)^{\alpha}}, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

називається дробовою похідною Рімана – Ліувілля порядку α , $0 < \alpha < 1$, відповідно лівосторонньою та правосторонньою.

У випадку $H \in (1/2, 1)$ визначимо інтегро-диференціальні оператори Рімана – Ліувілля

$$\begin{aligned}
(K_0^H \varphi)(t) &= \frac{C_1^{-1}(H)}{\Gamma(H - 1/2)} t^{H-1/2} \int_0^t (t-u)^{H-3/2} u^{1/2-H} \varphi(u) du, \\
(K_0^{H,*} \varphi)(t) &= \frac{C_1(H) t^{H-1/2}}{\Gamma(3/2 - H)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-u)^{1/2-H} u^{1/2-H} \varphi(u) du, \\
(K_T^H \varphi)(t) &= \frac{C_1^{-1}(H)}{\Gamma(H - 1/2)} t^{1/2-H} \int_t^T (u-t)^{H-3/2} u^{H-1/2} \varphi(u) du, \\
(K_T^{H,*} \varphi)(t) &= -\frac{C_1(H) t^{1/2-H}}{\Gamma(3/2 - H)} \frac{d}{dt} \int_t^T (u-t)^{1/2-H} u^{H-1/2} \varphi(u) du.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Стала $C_1(H)$ дорівнює $\left(\frac{\Gamma(2-2H)}{2H\Gamma(H+1/2)\Gamma(3/2-H)} \right)^{1/2}$.

Означення 2.6. Дробовим броунівським рухом (ДБР) з індексом Хюрста $H \in (0, 1)$ називається гауссівський процес $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$, що має такі властивості $\mathbf{E}B_t^H = 0, t \geq 0$ та $\mathbf{E}B_t^H B_s^H = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$, $t, s \in \mathbb{R}_+$.

Застосовуючи деякі з означених вище фактів, сформулюємо теорему Гірсанова для дробового броунівського руху.

Теорема 2.2. [64, 71] Нехай $B^H = \{B^H(t), t \geq 0\}$ — дробовий броунівський рух, та нехай функція $\varphi \in L_1([0, T])$ задовольняє умову $(K_0^{H,*} \varphi) \in L_2([0, T])$. Тоді процес $\tilde{B}^H = \{\tilde{B}_t^H, t \in [0, T]\}$ визначений як

$$\tilde{B}_t^H = B_t^H + \int_0^t \varphi(s) ds$$

є дробовим броунівським рухом відносно міри Q_{B^H} , похідна Радона – Нікодіма якої має вигляд

$$\frac{dQ_{B^H}}{dP} = \exp \left\{ - \int_0^T (K_0^{H,*} \varphi)(t) dB(t) - \frac{1}{2} \int_0^T ((K_0^{H,*} \varphi)(t))^2 dt \right\}, \tag{2.7}$$

де $B = \{B(t), t \geq 0\}$ — той вінерівський процес, який має зображення

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - H)}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_0^t (K_T^{H,*} \mathbb{1}_{[0,t]})(s) dB^H(s) = \\ &= \left(\frac{1}{2} - H\right) C_1(H) \Gamma\left(\frac{3}{2} - H\right) \int_0^t s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t u^{H-\frac{1}{2}}(u-s)^{-\frac{1}{2}-H} du dB^H(s). \end{aligned}$$

Наведемо основні кроки, викладені у [65], для задачі оптимізації малих відхилень змішаного дробового броунівського руху зі зсувом для $H \in (1/2, 1)$. Нас цікавить асимптотика $\mathbb{P}\{|B^H(t) + W(t) + \int_0^t f(s)ds| \leq \varepsilon g(t), t \in [0, T]\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Після переходу до міри \tilde{Q} , де $\frac{d\tilde{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{dQ_W}{d\mathbb{P}} \times \frac{dQ_{B^H}}{d\mathbb{P}}$, отримуємо нижню оцінку для цієї ймовірності

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left\{ \left| B^H(t) + W(t) + \int_0^t f(s)ds \right| \leq \varepsilon g(t), t \in [0, T] \right\} \\ &\geq \exp \left(-\frac{1}{2} \|f_1\|_{L_2([0,T])}^2 - \frac{1}{2} \|K_0^{H,*} f_2\|_{L_2([0,T])}^2 \right) \\ &\quad \times \tilde{Q} \left\{ \left| \tilde{B}^H(t) + \tilde{W}(t) \right| \leq \varepsilon g(t), t \in [0, T] \right\}. \end{aligned}$$

Отже, максимізація її правої частини веде до наступної задачі оптимізації

$$\|f - x\|_{L_2([0,T])}^2 + \|K_0^{H,*} x\|_{L_2([0,T])}^2 \xrightarrow{x \in \Lambda_H} \min \quad (2.8)$$

де Λ_H складається з функцій $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, для яких існують $\phi_1, \phi_2 \in L_2([0, T])$, такі що $u^{\frac{1}{2}-H} h(u) = I_0^{H-\frac{1}{2}} \phi_1(u)$ та $u^{H-\frac{1}{2}} K_0^{H,*} h(u) = I_0^{H-\frac{1}{2}} \phi_2(u)$.

Крім того, якщо x_0 є мінімізатором у (2.8), то

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left\{ \left| B^H(t) + W(t) + \int_0^t f(s)ds \right| \leq \varepsilon g(t), t \in [0, T] \right\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \\ &\exp \left(-\frac{1}{2} \|f - x_0\|_{L_2([0,T])}^2 - \frac{1}{2} \|K_0^{H,*} x_0\|_{L_2([0,T])}^2 \right) \tilde{Q} \{|Z(t)| \leq \varepsilon g(t), t \in [0, T]\}. \end{aligned}$$

В [65] було показано, що мінімізатор в (2.8) є розв'язком наступного дробового інтегрального рівняння

$$x(t) + \left[K_T^{H,*} K_0^{H,*} x \right] (t) = f(t), \quad t \in [0, T] \quad (2.9)$$

та доведено, що (2.9) еквівалентне

$$[f - x](t) + [K_0^H K_T^H (f - x)](t) = f(t), \quad t \in [0, T] \quad (2.10)$$

для $f \in \Lambda_H$, та має єдиний розв'язок $f - x_0 \in \Lambda_H$.

Розділ 3

Відшукування екстремумів ентропійних функціоналів, заданих на вінерівських процесах

3.1 Вступ та постановка задачі

Від стандартної ентропії, визначеної згідно з означенням 2.2, перейдемо до інших функціоналів, заданих на ймовірнісних мірах. Вони виникають при розгляді, наприклад, наступної задачі. Припустимо, що на $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ задано два незалежні вінерівські процеси $W_1 = \{W_1(t), t \in [0, T]\}$ та $W_2 = \{W_2(t), t \in [0, T]\}$, і нехай невід'ємна функція $f \in L_2([0, T], \lambda_1)$, λ_1 –міра Лебега на прямій. Розглянемо суму цих вінерівських процесів зі зносом, тобто випадковий процес вигляду:

$$S(t) = W_1(t) + W_2(t) - \int_0^t f(s)ds, \quad t \in [0, T]. \quad (3.1)$$

Незважаючи на те, що сума двох незалежних вінерівських процесів знову є вінерівським процесом, з точністю до сталого множника, ми будемо розглядати ці процеси окремо. Перейдемо до іншої ймовірнісної міри $\tilde{\mathbb{P}}$, відносно якої сума $S(t)$ з (3.1) набуває вигляду

$$\tilde{S}(t) = \tilde{W}_1(t) + \tilde{W}_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.2)$$

де \tilde{W}_1 та \tilde{W}_2 – два незалежні вінерівські процеси відносно міри $\tilde{\mathbb{P}}$. В силу незалежності вінерівських процесів \tilde{W}_1 та \tilde{W}_2 , відношення вірогідностей

розпадеться в добуток:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = \frac{d\mathbf{P}_1}{d\mathbf{P}} \times \frac{d\mathbf{P}_2}{d\mathbf{P}},$$

де міри $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ відносяться до вінерівських процесів \tilde{W}_1 та \tilde{W}_2 , відповідно. Суму процесів W_1 та W_2 зі зносом розкладемо і будемо усувати знос $\int_0^t f(s)ds$ наступним чином:

$$\tilde{W}_1(t) = W_1(t) - \int_0^t f_1(s)ds,$$

$$\tilde{W}_2(t) = W_2(t) - \int_0^t f_2(s)ds,$$

$$f_1(t) + f_2(t) = f(t), t \in [0, T].$$

Заради технічного спрощення, будемо припускати, що f_i задовольняють умови

$$f_i \in L_2([0, T], \lambda_1), 0 \leq f_i(t) \leq f(t), t \in [0, T].$$

Тоді за теоремою Гірсанова

$$\frac{d\mathbf{P}_i}{d\mathbf{P}} = \exp \left\{ \int_0^T f_i(s) dW_i(s) - 1/2 \int_0^T f_i^2(s) ds \right\}, i = 1, 2.$$

Наша мета – підібрати функції $f_1(t)$ та $f_2(t)$ таким чином, щоб вони мінімізували або максимізували функціонали виду

$$\mathbf{E} \left[F \left(\frac{d\mathbf{P}_1}{d\mathbf{P}}, \frac{d\mathbf{P}_2}{d\mathbf{P}} \right) \right],$$

де $F(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ – деяка невід’ємна вимірна функція. Щоб розв’язати поставлену задачу, розглянемо два випадки – коли функція F є диференційовною і до неї можна застосувати стандартну формулу Іто, і випадок, коли F задає функціонал ентропійного типу, що містить логарифми.

3.2 Екстремуми функціоналів для диференційовних функцій

Отже, розглянемо випадок, коли функція $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ і при цьому має, разом зі своїми похідними, зростання не вище степеневого. Введемо в розгляд невід'ємні мартингали

$$M_i(t) = \exp \left\{ \int_0^t f_i(s) dW_i(s) - 1/2 \int_0^t f_i^2(s) ds \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Очевидно $\frac{dP_i}{dP} = M_i(T)$, $i = 1, 2$.

Лема 3.1. Нехай $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ і існують такі сталі $k \in \mathbb{N}$ та $C > 0$, що

$$|F(x_1, x_2)|, \left| \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_i} \right|, \left| \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_i^2} \right| \leq C \|x\|^k, \quad i = 1, 2,$$

де $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$. Тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[F \left(\frac{dP_1}{dP}, \frac{dP_2}{dP} \right) \right] &= F(1, 1) + 1/2 \left(\int_0^T \left(\mathbf{E} \left(\frac{\partial^2 F(M_1(s), M_2(s))}{\partial x_1^2} \right) f_1^2(s) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbf{E} \left(\frac{\partial^2 F(M_1(s), M_2(s))}{\partial x_2^2} \right) f_2^2(s) \right) ds \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Доведення. Застосуємо стандартну формулу Іто до функції F та мартингалів M_i , $i = 1, 2$. При цьому, в силу умови зростання не вище степеневого, всі стохастичні інтеграли, наведені нижче, існують і мають моменти всіх порядків.

Отже,

$$\begin{aligned} F \left(\frac{dP_1}{dP}, \frac{dP_2}{dP} \right) &= (M_1(T), M_2(T)) F(1, 1) \\ &+ \sum_{i=1,2} \int_0^T \frac{\partial F(M_1(s), M_2(s))}{\partial x_i} f_i(s) dW_i(s) + \\ &1/2 \sum_{i=1,2} \int_0^T \frac{\partial^2 F(M_1(s), M_2(s))}{\partial x_i^2} f_i^2(s) ds, \end{aligned}$$

звідки безпосередньо впливає доведення. \square

Тепер, задачу відшукування екстремумів функціоналу $\mathbf{E} \left[F \left(\frac{dP_1}{dP}, \frac{dP_2}{dP} \right) \right]$ доречно звести до випадків, коли математичне сподівання в правій частині (3.3) можна явно обчислити. Тому розглянемо частковий випадок

$$F(x_1, x_2) = x_1^{k+2} + x_2^{l+2},$$

де k і l —цілі невід'ємні числа. В цьому випадку

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\frac{\partial^2 F(M_1(s), M_2(s))}{\partial x_1^2} \right) &= (k+2)(k+1) \mathbf{E}(M_1(s))^k \\ &= (k+2)(k+1) \mathbf{E} \exp \left\{ k \int_0^s f_1(u) dW_1(u) - \frac{1}{2} k \int_0^s f_1^2(u) du \right\} \\ &= (k+2)(k+1) \exp \left\{ \frac{1}{2} (k^2 - k) \int_0^s f_1^2(u) du \right\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

і, цілком аналогічно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\frac{\partial^2 F(M_1(s), M_2(s))}{\partial x_2^2} \right) &= (l+2)(l+1) \mathbf{E}(M_2(s))^l \\ &= (l+2)(l+1) \mathbf{E} \exp \left\{ l \int_0^s f_2(u) dW_2(u) - \frac{1}{2} l \int_0^s f_2^2(u) du \right\} \\ &= (l+2)(l+1) \exp \left\{ \frac{1}{2} (l^2 - l) \int_0^s f_2^2(u) du \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тепер, з урахуванням формул (3.3)–(3.5), задача зводиться до оптимізації

(відшукання максимумів або мінімумів) функціоналу

$$\begin{aligned}
G(f_1, f_2) &:= \int_0^T \left(\mathbf{E} \left(\frac{\partial^2 F(M_1(s), M_2(s))}{\partial x_1^2} \right) f_1^2(s) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{E} \left(\frac{\partial^2 F(M_1(s), M_2(s))}{\partial x_2^2} \right) f_2^2(s) \right) ds \\
&= (k+2)(k+1) \int_0^T \exp \left\{ \frac{1}{2}(k^2 - k) \int_0^s f_1^2(u) du \right\} f_1^2(s) ds \\
&\quad + (l+2)(l+1) \int_0^T \exp \left\{ \frac{1}{2}(l^2 - l) \int_0^s f_2^2(u) du \right\} f_2^2(s) ds \\
&= k_1 \left(\exp \left\{ \frac{1}{2}(k^2 - k) \int_0^T f_1^2(u) du \right\} - 1 \right) \\
&\quad + l_1 \left(\exp \left\{ \frac{1}{2}(l^2 - l) \int_0^T f_2^2(u) du \right\} - 1 \right),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

де $k_1 = \frac{2(k+2)(k+1)}{k^2-k}$, $l_1 = \frac{2(l+2)(l+1)}{l^2-l}$. В свою чергу, формулу (3.6) доречно переписати наступним чином: введемо позначення $f_1(t) = \alpha(t)f(t)$, де $\alpha(t) \in [0, 1]$ – вимірна функція, при цьому $f_2(t) = (1 - \alpha(t))f(t)$, і задачу (3.6) зведемо до наступної: відшукати екстремуми функціоналу

$$\begin{aligned}
G(\alpha) &:= k_1 \exp \left\{ k_2 \int_0^T \alpha^2(u) f^2(u) du \right\} \\
&\quad + l_1 \exp \left\{ l_2 \int_0^T (1 - \alpha(u))^2 f^2(u) du \right\},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

де $k_2 = \frac{1}{2}(k^2 - k)$, $l_2 = \frac{1}{2}(l^2 - l)$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $k > l$.

Теорема 3.1. 1) Існує єдина функція $\alpha(s) = \alpha_0$, яка мінімізує функціонал $G(\alpha)$, причому α_0 задовольняє рівняння

$$\alpha_0 = \frac{l_1 l_2 \exp \{l_2 c (1 - \alpha_0)^2\}}{k_1 k_2 \exp \{k_2 c \alpha_0^2\} + l_1 l_2 \exp \{l_2 c (1 - \alpha_0)^2\}},$$

де $c = \|f\|_{L_2([0,T], \lambda_1)}^2$;

2) При $k = l$ $\alpha_0 = \frac{1}{2}$;

3) Максимум $G(\alpha)$ дорівнює $\max \{k_1 + l_1 \exp \{l_2 c\}, k_1 \exp \{k_2 c\} + l_1\}$.

Доведення. Доведемо перше твердження. З цією метою, підставимо в (3.7) замість $\alpha(u)$ функцію $\alpha(u) + \varepsilon \beta(u)$, де $\varepsilon \in \mathbb{R}$, β – будь-яка обмежена вимірна функція. Тобто, розглянемо функціонал $G(\alpha, \varepsilon) := G(\alpha + \varepsilon \beta)$. Позначимо

$$G_1(\alpha, \varepsilon) = \exp \left\{ k_2 \int_0^T (\alpha(u) + \varepsilon \beta(u))^2 f^2(u) du \right\},$$

$$G_2(\alpha, \varepsilon) = \exp \left\{ l_2 \int_0^T (1 - \alpha(u) - \varepsilon \beta(u))^2 f^2(u) du \right\}.$$

Тоді $G(\alpha, \varepsilon) = k_1 G_1(\alpha, \varepsilon) + l_1 G_2(\alpha, \varepsilon)$. Візьмемо похідну по ε :

$$\begin{aligned} G'_\varepsilon(\alpha, \varepsilon) &= k_1 G'_1(\alpha, \varepsilon) + l_1 G'_2(\alpha, \varepsilon) \\ &= 2k_1 k_2 G_1(\alpha, \varepsilon) \int_0^T (\alpha(u) + \varepsilon \beta(u)) \beta(u) f^2(u) du \\ &\quad - 2l_1 l_2 G_2(\alpha, \varepsilon) \int_0^T (1 - \alpha(u) - \varepsilon \beta(u)) \beta(u) f^2(u) du. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Оскільки зараз ми шукаємо точки мінімуму, то має бути $G(\alpha, 0) \leq G(\alpha, \varepsilon)$ для всіх $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Тому похідну, обчислену в (3.8), прирівняємо в нулі до нуля:

$$k_1 k_2 G_1(\alpha, 0) \int_0^T \alpha(u) \beta(u) f^2(u) du - l_1 l_2 G_2(\alpha, 0) \int_0^T (1 - \alpha(u)) \beta(u) f^2(u) du = 0,$$

або

$$\int_0^T [k_1 k_2 G_1(\alpha, 0) \alpha(u) - l_1 l_2 G_2(\alpha, 0) + l_1 l_2 G_2(\alpha, 0) \alpha(u)] \beta(u) f^2(u) du = 0$$

для будь-якої обмеженої функції β .

Покладемо $\beta(u) = (k_1 k_2 G_1(\alpha, 0) + l_1 l_2 G_2(\alpha, 0)) \alpha(u) - l_1 l_2 G_2(\alpha, 0)$, і одержимо рівняння для $\alpha(u)$:

$$\alpha(u) = \frac{l_1 l_2 G_2(\alpha, 0)}{k_1 k_2 G_1(\alpha, 0) + l_1 l_2 G_2(\alpha, 0)}. \quad (3.9)$$

Рівняння (3.9) означає, що $\alpha(u) = \alpha \in (0, 1)$ – деяка стала, яка задовольняє рівняння

$$\alpha = \frac{l_1 l_2 \exp \{l_2 (1 - \alpha)^2 c\}}{k_1 k_2 \exp \{k_2 \alpha^2 c\} + l_1 l_2 \exp \{l_2 (1 - \alpha)^2 c\}}, \quad (3.10)$$

де $c := \|f\|_{L_2([0, T], \lambda_1)}^2$, $k_1 k_2 = (k + 2)(k + 1)$, $l_1 l_2 = (l + 2)(l + 1)$. Ліва частина (3.10) зростає від 0 до 1. Праву частину (3.10) спростимо до дробу

$$\frac{1}{r \exp \{(k_2 \alpha^2 - l_2 (1 - \alpha)^2) c\} + 1}, \quad \text{де } r = \frac{k_1 k_2}{l_1 l_2},$$

і дослідимо поведінку функції $\varphi(\alpha) = \exp \{c (k_2 - l_2) \alpha^2 + 2l_2 c \alpha\}$. Оскільки $k > l$, то $k_2 > l_2$, і значить, функція $\varphi(\alpha)$ зростає по α . Тому дріб спадає від

$$\frac{l_1 l_2 \exp \{l_2 c\}}{k_1 k_2 + l_1 l_2 \exp \{l_2 c\}} \text{ до } \frac{l_1 l_2}{k_1 k_2 \exp \{k_2 c\} + l_1 l_2},$$

причому обидва значення з інтервалу $(0, 1)$. З неперервності функцій в лівій і правій частинах (3.10) випливає, що рівняння (3.10) має єдиний розв'язок. Позначимо його α_0 . Тепер обчислимо другу похідну $G''_{\varepsilon\varepsilon}(\alpha, \varepsilon)$ і встановимо її знак при $\varepsilon = 0$.

Очевидно, що $G''_{\varepsilon\varepsilon}(\alpha, \varepsilon) = k_1 G''_1(\alpha, \varepsilon) + l_1 G''_2(\alpha, \varepsilon)$, тому достатньо дослідити

знак кожного доданка. Наприклад, для $G_1''(\alpha, \varepsilon)$ одержимо за допомогою (3.8):

$$\begin{aligned}
 G_1''(\alpha, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} &= \left[2k_2 G_1'(\alpha, \varepsilon) \int_0^T (\alpha(u) + \varepsilon \beta(u)) \beta(u) f^2(u) du \right. \\
 &+ \left. 2k_2 G_1(\alpha, \varepsilon) \int_0^T \beta^2(u) f^2(u) du \right] |_{\varepsilon=0} = 4k_2^2 G_1(\alpha, 0) \left(\int_0^T \alpha(u) \beta(u) f^2(u) du \right)^2 \\
 &+ 2k_2 G_1(\alpha, 0) \int_0^T \beta^2(u) f^2(u) du > 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned}
 G_2''(\alpha, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} &= 4l_2^2 G_2(\alpha, 0) \left(\int_0^T (1 - \alpha(u)) \beta(u) f^2(u) du \right)^2 \\
 &+ 2l_2 G_2(\alpha, 0) \int_0^T \beta^2(u) f^2(u) du > 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Таки чином, в точці α_0 справді досягається мінімум функціоналу $G(\alpha)$, звідки випливає перше твердження. Твердження 2) і 3) є очевидними. \square

3.3 Екстремуми функціоналів ентропійного типу

Як було сказано у вступі, ентропія однієї ймовірнісної міри відносно іншої є невід'ємним функціоналом від похідної Радона-Нікодима цих мір, який дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли міри однакові. Такі функціонали будемо називати функціоналами ентропійного типу.

Один з них – це ентропійна відстань, або відстань Кульбака-Лейблера, яка є мірою того, наскільки відмінні між собою два ймовірнісних розподіли. Ця відстань записується як $I(P_1|P_2) = H(P_1|P_2) + H(P_2|P_1)$.

3.3.1 Відшукання мінімумів найпростіших функціоналів

Розглянемо наступні ентропійні функціонали, залежні від ймовірнісних мір P, P_1, P_2 :

$$H_1(P, P_1, P_2) = H(P_1|P) + H(P_2|P);$$

$$H_2(P, P_1, P_2) = I(P_1|P) + I(P_2|P);$$

$$H_3(P, P_1, P_2) = H(P_1|P_2) + H(P_2|P_1);$$

У подальших міркуваннях будемо використовувати зображення функції f у вигляді суми αf та $(1 - \alpha)f$, так щоб $f_1(t) = \alpha f(t)$ та $f_2(t) = (1 - \alpha)f(t)$. Потрібно знайти таке значення $\alpha \in [0, 1]$, яке б мінімізувало відповідний функціонал, сконструйований за допомогою визначених вище ймовірнісних мір.

Теорема 3.2. *Мінімум ентропійного функціонала H_1, H_2 та H_3 досягається у точці $f_1(t) = f_2(t) = \frac{f(t)}{2}$.*

Доведення. 1) За означенням ентропії маємо:

$$H_1 = \mathbf{E} \left[\left(\frac{dP_1}{dP} \log \frac{dP_1}{dP} \right) \right] + \mathbf{E} \left[\left(\frac{dP_2}{dP} \log \frac{dP_2}{dP} \right) \right].$$

Подальші міркування проведемо лише для першого доданку (для другого – міркування аналогічні). Використовуючи теорему Гірсанова, отримуємо наступний вираз:

$$\mathbf{E} \left[\exp \left\{ \int_0^T f_1(t) dW_1(t) - \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt \right\} \times \left\{ \int_0^T f_1(t) dW_1(t) - \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt \right\} \right].$$

Застосуємо формулу Іто до стохастичної експоненти:

$$\exp \left\{ \int_0^T f_1(t) dW_1(t) - \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt \right\} = 1 + \int_0^T \exp_t f_1(t) dW_1(t),$$

де

$$\exp_t = \exp \left\{ \int_0^t f_1(s) dW_1(s) - \frac{1}{2} \int_0^t f_1^2(s) ds \right\},$$

та $\mathbf{E} \exp_t = 1$. Отже,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\left(1 + \int_0^T \exp_t f_1(t) dW_1(t) \right) \times \int_0^T f_1(t) dW_1(t) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\int_0^T \exp_t f_1^2(t) dt \right] = \int_0^T f_1^2(t) dt. \end{aligned}$$

В результаті ми отримали такий вираз для функціонала H_1 :

$$H_1 = \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T f_2^2(t) dt.$$

Звідси $H_1 = \frac{1}{2} \alpha^2 c + \frac{1}{2} (1 - \alpha)^2 c$, де $c = \int_0^T f^2(t) dt$.

Позначимо $y(\alpha) = \alpha^2 + (1 - \alpha)^2$ та знайдемо першу похідну по α :

$y' = 2(2\alpha - 1)$. Ця похідна має єдиний корінь $\alpha = \frac{1}{2}$, де і досягається мінімум функціонала H_1 .

2) Зауважимо, що $\frac{dP}{dP_1} = \left(\frac{dP_1}{dP} \right)^{-1}$ та введемо позначення $H_{-1} = H(P|P_1) + H(P|P_2)$, тоді $H_2 = H_1 + H_{-1}$. Використовуючи означення ентропійного функціонала та теорему Гірсанова, отримуємо такий вираз:

$$\begin{aligned} H_{-1} &= \mathbf{E} \left[\left(\frac{dP_1}{dP} \right)^{-1} \log \left(\frac{dP_1}{dP} \right)^{-1} \right] + \mathbf{E} \left[\left(\frac{dP_2}{dP} \right)^{-1} \log \left(\frac{dP_2}{dP} \right)^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T f_2^2(t) dt. \end{aligned}$$

Отже, $H_2 = \alpha^2 c + (1 - \alpha)^2 c$, де $c = \int_0^T f^2(t) dt$. Тепер ми можемо використати доведення аналогічне тому, яке було наведено у першому пункті.

3) Перш за все подамо похідну Радона-Нікодима $\frac{dP_1}{dP_2}$ як добуток похідних $\frac{dP_1}{dP}$ та $\frac{dP}{dP_2}$. За теоремою Гірсанова та означенням ентропійного функціонала:

$$\begin{aligned} H_3 &= \mathbf{E} \left[\frac{dP}{dP_2} \frac{dP_1}{dP} \log \frac{dP_1}{dP} \right] + \mathbf{E} \left[\frac{dP_1}{dP} \frac{dP}{dP_2} \log \frac{dP}{dP_2} \right] \\ &+ \mathbf{E} \left[\frac{dP}{dP_1} \frac{dP_2}{dP} \log \frac{dP_2}{dP} \right] + \mathbf{E} \left[\frac{dP_2}{dP} \frac{dP}{dP_1} \log \frac{dP}{dP_1} \right]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Використовуючи теорему Гірсанова та незалежність вінерівських процесів, перепишемо кожен доданок правої частини (3.13):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\frac{dP}{dP_2} \frac{dP_1}{dP} \log \frac{dP_1}{dP} \right] &= \mathbf{E} \left[\exp \left\{ \int_0^T f_1(t) dW_1(t) - \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_0^T f_1(t) dW_1(t) - \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt \right) \right] = \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt. \end{aligned}$$

Аналогічний результат отримуємо і для виразу $\mathbf{E} \left[\frac{dP}{dP_1} \frac{dP_2}{dP} \log \frac{dP_2}{dP} \right]$, який дорівнює $\frac{1}{2} \int_0^T f_2^2(t) dt$.

Застосовуючи такі ж міркування і до виразу $\mathbf{E} \left[\frac{dP_2}{dP} \frac{dP}{dP_1} \log \frac{dP}{dP_1} \right]$, отримаємо $\frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt$. В результаті $H_3 = \alpha^2 c + (1 - \alpha)^2 c$, де $c = \int_0^T f^2(t) dt$. Тепер ми можемо зробити висновок, як у попередньому випадку. \square

3.3.2 Відшукання екстремумів функціоналу $H(P, P_1, P_2)$

Продовжуючи розглядати задачу про усунення зсуву для суми двох незалежних вінерівських процесів, знайдемо ті міри P_1 і P_2 , які доставляють екстремуми сумі двох функціоналів ентропійного типу:

$$H(P, P_1, P_2) = \mathbf{E} \left[\left(\frac{dP_1}{dP} \right)^2 \left(-\log \frac{dP_2}{dP} \right) \right] + \mathbf{E} \left[\left(\frac{dP_2}{dP} \right)^2 \left(-\log \frac{dP_1}{dP} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Вибір функціоналу (3.14) вмотивовано наступним чином: з одного боку, цікаво розглянути функціонал, який має нетривіальні точки мінімізації. З іншого боку, бажано спочатку підібрати такий функціонал, для якого точки мінімізації можна обчислити. Властивості функціонала $H(P, P_1, P_2)$, згідно з якими його справді можна вважати ентропійним, розглянуто в наступній лемі.

Лема 3.2. *Функціонал $H(P, P_1, P_2)$, який задано формулою (3.14), задовольняє нерівність $H(P, P_1, P_2) \geq 0$, причому $H(P, P_1, P_2) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $P_1 = P$ та $P_2 = P$.*

Доведення. Функціонал $H(P, P_1, P_2)$ є сумою доданків

$$\mathbf{E} \left[\left(\frac{dP_1}{dP} \right)^2 \left(-\log \frac{dP_2}{dP} \right) \right] \text{ та } \mathbf{E} \left[\left(\frac{dP_2}{dP} \right)^2 \left(-\log \frac{dP_1}{dP} \right) \right].$$

Далі,

$$\mathbf{E} \left[\left(\frac{dP_1}{dP} \right)^2 \left(-\log \frac{dP_2}{dP} \right) \right] = \mathbf{E} \left[\left(\frac{dP_1}{dP} \right) \right]^2 \left(-\mathbf{E} \log \frac{dP_2}{dP} \right).$$

Використовуючи угнутість функції $\log x$ отримуємо, що $\mathbf{E} \log \frac{dP_2}{dP} \leq \log \mathbf{E} \frac{dP_2}{dP} = \log 1 = 0$, а отже, $\mathbf{E} \left[\left(\frac{dP_1}{dP} \right)^2 \left(-\log \frac{dP_2}{dP} \right) \right] \geq 0$. Аналогічні властивості має другий доданок. \square

Зауважимо, що за допомогою формули Іто і з урахуванням незалежності вінерівських процесів, функціонал $H(P, P_1, P_2)$ можна переписати у вигляді:

$$H(P, P_1, P_2) = \frac{1}{2} \left(\exp \left\{ \int_0^T f_1^2(t) dt \right\} \int_0^T f_2^2(t) dt + \exp \left\{ \int_0^T f_2^2(t) dt \right\} \int_0^T f_1^2(t) dt \right).$$

Знайдемо мінімуми і максимуми функціонала $H(P, P_1, P_2)$ в ширшому класі функцій

$$f_1(t) = \alpha(t)f(t) \quad \text{та} \quad f_2(t) = (1 - \alpha(t))f(t), \quad (3.15)$$

де $\alpha(t) \in [0, 1]$ – вимірна обмежена функція. Нагадаємо позначення $c = \|f\|_{L_2([0, T], \lambda_1)}$.

Теорема 3.3. 1) Якщо $c \leq 2$, то функціонал $H(P, P_1, P_2)$ досягає свого мінімуму при $f_1(t) = f_2(t) = \frac{f(t)}{2}$, і це мінімальне значення дорівнює $\frac{c}{4}e^{c/4}$, а максимуму, наприклад при $f_1(t) = 1$, і це максимальне значення дорівнює $c/2$.

- 2) Якщо $2 < c < 4$, то функціонал досягає свого мінімуму при $f_1(t) = x_1 f(t)$ та $f_2(t) = (1 - x_1) f(t)$, де x_1 – той єдиний корінь рівняння

$$x \exp\{c(1 - 2x)\} + x - 1 = 0,$$

який належить до інтервалу $(0, 1/c)$. Це мінімальне значення дорівнює $\frac{1-x_1}{2} \exp\{cx_1^2\}$. В силу симетрії функціонал досягає свого мінімуму також при $f_1(t) = (1 - x_1) f(t)$ та $f_2(t) = x_1 f(t)$. Щодо максимуму, при $2 < c < \ln 16$ від дорівнює $c/2$, а при $\ln 16 \leq c < 4$ він дорівнює $\frac{c}{4} e^{\frac{c}{4}}$.

- 3) Якщо $c \geq 4$, то мінімум, як і у попередньому випадку, досягається коли $f_1(t) = x_1 f(t)$ та $f_2(t) = (1 - x_1) f(t)$, де x_1 – той єдиний корінь рівняння

$$x \exp\{c(1 - 2x)\} + x - 1 = 0,$$

який належить до інтервалу $(0, 1/c)$. При $c = 4$ максимум дорівнює $\frac{c}{4} e^{\frac{c}{4}}$, а коли $c > 4$ максимум досягається при $f_1(t) = x_{4,5} f(t)$ та $f_2(t) = (1 - x_{4,5}) f(t)$, де $x_{4,5}$ – корені квадратного полінома $1 - xc + x^2 c = 0$, які дорівнюють відповідно $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{c}}$. Значення максимуму дорівнює

$$\frac{1}{4} \exp \left\{ \frac{(c-2) - \sqrt{c(c-4)}}{2} \right\} \left((c-2) - \sqrt{c(c-4)} \right) - \left(\sqrt{c(c-4)} - (c-2) \right) \exp \left\{ \sqrt{c(c-4)} \right\}.$$

Доведення. Використовуючи формулу (3.15), перепишемо функціонал $H(P, P_1, P_2)$ у вигляді:

$$H(P, P_1, P_2) = \frac{1}{2} \exp \left\{ \int_0^T f^2(t) \alpha^2(t) dt \right\} \int_0^T f^2(t) (1 - \alpha(t))^2 dt + \frac{1}{2} \exp \left\{ \int_0^T f^2(t) (1 - \alpha(t))^2 dt \right\} \int_0^T f^2(t) \alpha^2(t) dt.$$

Як і при доведенні теореми 3.1, для довільної функції $\beta \in L_2[0, T]$ та $\varepsilon \in \mathbb{R}$ розглянемо значення функціоналу H при $\alpha(t) + \varepsilon\beta(t)$:

$$\begin{aligned} H(\alpha + \varepsilon\beta) &= \frac{1}{2} \exp \left\{ \int_0^T f^2(t)(\alpha(t) + \varepsilon\beta(t))^2 dt \right\} \int_0^T f^2(t)(1 - (\alpha(t) + \varepsilon\beta(t)))^2 dt \\ &+ \frac{1}{2} \exp \left\{ \int_0^T f^2(t)(1 - (\alpha(t) + \varepsilon\beta(t)))^2 dt \right\} \int_0^T f^2(t)(\alpha(t) + \varepsilon\beta(t))^2 dt. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Позначимо $I_1 = \exp \left\{ \int_0^T f^2(t)\alpha^2(t) dt \right\}$ та $I_2 = \exp \left\{ \int_0^T f^2(t)(1 - \alpha(t))^2 dt \right\}$. Якщо шукаємо таку функцію α , яка мінімізує (3.16), то зрозуміло, що $H(\alpha) \leq H(\alpha + \varepsilon\beta)$, тому $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \forall \beta \in L_2[0, T]$ $H(\alpha + \varepsilon\beta)$ досягає мінімуму при $\varepsilon = 0$. Знаходимо першу похідну функціонала $H(\alpha + \varepsilon\beta)$ по ε :

$$\begin{aligned} H'(\alpha + \varepsilon\beta)|_{\varepsilon=0} &= I_1 \int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t) dt - \int_0^T f^2(t)(1 - \alpha(t))^2 dt \\ &- I_1 \int_0^T f^2(t)(1 - \alpha(t))\beta(t) dt - I_2 \int_0^T f^2(t)(1 - \alpha(t))\beta(t) dt - \int_0^T f^2(t)\alpha^2(t) dt \\ &+ I_2 \int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t) dt. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Спростимо праву частину (3.17), прирівняємо її до нуля і отримаємо наступне рівняння:

$$\begin{aligned} &I_1 \left[\int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t) dt - \int_0^T f^2(t)(1 - \alpha(t))^2 dt - \int_0^T f^2(t)(1 - \alpha(t))\beta(t) dt \right] \\ &- I_2 \left[\int_0^T f^2(t)(1 - \alpha(t))\beta(t) dt - \int_0^T f^2(t)\alpha^2(t) dt - \int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t) dt \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Позначимо $K = \frac{I_1}{I_2}$. Тоді рівність (3.18) можна переписати у вигляді

$$K := \frac{\int_0^T f^2(t)(1 - \alpha(t))\beta(t)dt \int_0^T f^2(t)\alpha^2(t)dt - \int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t)dt}{\int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t)dt \int_0^T f^2(t)(1 - \alpha(t))^2dt - \int_0^T f^2(t)(1 - \alpha(t))\beta(t)dt},$$

або, що те саме,

$$\begin{aligned} & \int_0^T f^2(t)(1 - \alpha(t))\beta(t)dt \int_0^T f^2(t)\alpha^2(t)dt - \int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t)dt \\ &= K \left(\int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t)dt \int_0^T f^2(t)(1 - \alpha(t))^2dt \right. \\ & \quad \left. - \int_0^T f^2(t)(1 - \alpha(t))\beta(t)dt \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Тепер перегрупуємо доданки у (3.19) таким чином, щоб відокремити множники, що містять $\beta(t)$:

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^T f^2(t)\alpha^2(t)dt + K \right] \int_0^T f^2(t)\beta(t)(1 - \alpha(t))dt \\ &= \left[1 + K \int_0^T f^2(t)(1 - \alpha(t))^2dt \right] \int_0^T f^2(t)\alpha(t)\beta(t)dt. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Нехай коефіцієнт L дорівнює

$$L := \frac{\int_0^T f^2(t)\alpha^2(t)dt + K}{1 + K \int_0^T f^2(t)(1 - \alpha(t))^2dt},$$

тоді рівність (3.20) можна переписати у вигляді

$$\int_0^T f^2(t)\beta(t)[\alpha(t) - L(1 - \alpha(t))]dt = 0. \quad (3.21)$$

Оскільки рівність (3.21) виконується для довільної обмеженої функції $\beta = \beta(t)$, то можна покласти:

$$\beta(t) = (1 + L)\alpha(t) - L.$$

Тоді рівняння (3.21) набуває вигляду

$$\int_0^T f^2(t)(\alpha(t) - L(1 - \alpha(t)))^2 dt = 0, \quad (3.22)$$

звідки $\alpha(t) = \alpha := \frac{L}{1+L}$, тобто $L = \frac{\alpha}{1-\alpha}$. При сталому α маємо рівності

$$K = \exp\{c(2\alpha - 1)\}, \quad L = \frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{\alpha^2 c + \exp\{c(2\alpha - 1)\}}{1 + \exp\{c(2\alpha - 1)\}c(1 - \alpha)^2},$$

і остання рівність еквівалентна такому трансцендентному рівнянню:

$$(\alpha^2 c - \alpha c + 1)((1 - \alpha) \exp\{c(2\alpha - 1)\} - \alpha) = 0. \quad (3.23)$$

Оскільки ми довели, що екстремальні значенні нашого ентропійного функціоналу досягаються саме при сталих α , тепер потрібно знайти корені рівняння (3.23), з'ясувати, які з них відповідають максимумам або мінімумам, і порівняти відповідні значення зі значеннями ентропійного функціоналу при $\alpha = 0, 1$. Позначимо $x = 1 - \alpha$, при цьому перший множник в (3.23) не зміниться, а другий набуде вигляду $x \exp\{c(1 - 2x)\} + x - 1$. Сам функціонал набуде вигляду

$$H(P, P_1, P_2) = c/2((1 - x)^2 \exp\{cx^2\} + x^2 \exp\{c(1 - x)^2\}). \quad (3.24)$$

Його значення в точках 0 та $1/2$ дорівнюють, відповідно, $c/2$ та $\frac{c}{4}e^{\frac{c}{4}}$.

Проаналізуємо рівняння (3.23) та визначимо кількість коренів в залежності від c . Перший множник – це квадратична функція. Відповідне рівняння має два корені тоді і тільки тоді, коли $c > 4$. Питання полягає в тому скільки коренів має рівняння $z(x) = 0$ на $[0, 1]$, де $z(x) = x \exp\{c(1 - 2x)\} + x - 1$? Зрозуміло, що $x = 1/2$ є коренем. Перша і друга похідна функції z по x дорівнюють відповідно:

$$\begin{aligned} z'(x) &= e^{c-2xc}(1 - 2xc) + 1, \\ z''(x) &= 4c(xc - 1)e^{c-2xc}. \end{aligned}$$

Маємо єдиний корінь $x = \frac{1}{c}$ для функції z'' тоді і тільки тоді, коли $c > 1$. В точці $x = 1$ маємо:

$$z'(1) = (1 - 2c)e^{-c} + 1 > 1 - e^{-c} > 0,$$

тоді $z'(x) > 0$ та z неспадна. Враховуючи, що $x = \frac{1}{2}$ є коренем, робимо висновок, що цей корінь єдиний.

Нехай $1 < c \leq 2$. Квадратичний поліном, як і раніше, не має коренів. Заважимо, що $z(0) < 0$ та $z'(0) = e^{-c} + 1 > 0$, $z'(1) = e^{-c}(1 - 2c) + 1$. Для того, щоб визначити знак $z'(1)$ в цьому випадку потрібно знайти першу похідну по c :

$$(z')'_c = -e^{-c}(1 - 2c) - 2e^{-c} = e^{-c}(2c - 3),$$

звідси отримуємо, що $c = \frac{3}{2}$ точка мінімуму для $z'(1)$ та значення мінімуму $z'(1)$ в точці c дорівнює $1 - 2e^{-\frac{3}{2}} > 0$. Звідси випливає, що $z'(0) > 0$ та $z'(1) > 0$. Що стосується поведінки другої похідної, відзначимо, що $z''(x) < 0$ для $x \in [0, \frac{1}{c})$ та $z''(x) \geq 0$ для $x \in (\frac{1}{c}, 1]$.

Таким чином, z' не зростає на інтервалі $[0, \frac{1}{c})$ та не спадає на інтервалі $(\frac{1}{c}, 1]$, точкою мінімуму є $x = \frac{1}{c}$ зі значенням $1 - e^{c-2}$, яке є невід'ємним. В результаті, $z' > 0$ та функція $z(x)$ зростає та має один корінь $x = \frac{1}{2}$.

Отже, коли $c \leq 2$, другий множник має єдиний корінь $x = \frac{1}{2}$, це точка мінімуму. Відповідно максимум досягається на кінцях відрізка та дорівнює $c/2$. Звідси випливає перше твердження.

Випадок, коли $c > 2$, розглянемо більш детально. Нехай $c \in (2, 4)$. Друга похідна змінює знак у точці $\frac{1}{c}$, а саме $z''(x) < 0$, якщо $x \in [0, \frac{1}{c})$, та $z''(x) \geq 0$, якщо $x \in (\frac{1}{c}, 1]$. Для знаку першої похідної $z'(x)$ маємо наступні випадки:

$$\begin{aligned} z'(x) &> 0 \text{ при } x \in [0, x_1), \quad \text{де } x_1 \in \left(0, \frac{1}{c}\right), \\ z'(x) &< 0 \text{ при } x \in [x_1, x_2), \quad \text{де } x_2 \in \left(1 - \frac{1}{c}, 1\right), \\ z'(x) &> 0 \text{ при } x \in [x_2, 1]. \end{aligned}$$

Як наслідок, функція $z(x)$ не спадає на інтервалі $[0, x_1)$, потім не зростає на інтервалі $[x_1, x_2)$ та знову не спадає на $[x_2, 1]$. Оскільки $z(0) = -1 <$

$0, z(1/2) = 0$ та $z(1) = e^{-c} > 0$, ми робимо висновок про те, що $z(x)$ має три корені: $x_1 \in (0, 1/c)$, $x_2 = \frac{1}{2}$ та $x_3 \in (1 - 1/c, 1)$. Отже, при $2 < c < 4$ функціонал приймає мінімальне значення в точках x_1, x_3 , і воно дорівнює $\frac{1-x_1}{2} \exp\{cx_1^2\}$. Порівнюючи значення функціоналу в x_2 та на кінцях відрізка, отримуємо, що максимальне значення дорівнює $c/2$, коли $c \in (2, \ln 16)$ та $\frac{c}{4}e^{\frac{c}{4}}$, коли $c \in [\ln 16, 4)$.

Нехай тепер $c \geq 4$. На цьому проміжку рівняння (3.23) має 5 коренів:

$$x_1 \in (0, 1/c), x_2 = \frac{1}{2}, x_3 \in (1 - 1/c, 1) \text{ та } x_{4,5} = \frac{\sqrt{c} \pm \sqrt{c-4}}{2\sqrt{c}}.$$

Позначимо ліву частину рівняння (3.23) через y . Враховуючи антисиметричність функції y відносно $x = \frac{1}{2}$, отримуємо, що точками локального мінімуму є $x_1 \in (0, 1/c)$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 \in (1 - 1/c, 1)$. Досить порівняти значення функціонала в точках x_1 та $x_2 = \frac{1}{2}$. Для цього розглянемо функцію

$$g(x) = e^{cx^2}(1-x), \quad x \in [0, 1].$$

Її перша похідна дорівнює

$$g'(x) = e^{cx^2}(2cx - 2cx^2 - 1)$$

та має два корені

$$\tilde{x}_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2}{c}}.$$

Дійсно, $\tilde{x}_1 < \frac{1}{2} < \tilde{x}_2$, та $g'(x) > 0$ для $x \in (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, $g'(x) < 0$ для $x \in (0, \tilde{x}_1) \cup (\tilde{x}_2, 1)$.

Крім того, в точці \tilde{x}_1 $z(\tilde{x}_1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{2}{c}}\right) \left(e^{c\sqrt{1 - \frac{2}{c}}} + 1\right) - 1 > 0$. Ця нерівність еквівалентна наступному:

$$e^{\sqrt{c^2 - 2c}} > \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{c}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{2}{c}}}.$$

Перепишемо праву частину у вигляді:

$$\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{c}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{2}{c}}} = \left(c - 1 - \sqrt{c^2 - 2c}\right),$$

тоді для $u = \sqrt{c^2 - 2c}$ маємо:

$$e^u > 1 + u + \frac{u^2}{2} = 1 + \sqrt{c^2 - 2c} + \frac{c^2}{2} - c > c - 1 - \sqrt{c^2 - 2c} \quad \text{при } c \geq 4.$$

Це означає, що $\tilde{x}_1 > x_1$. Зауважимо, що $g(1) = 1$ та до \tilde{x}_1 $g'(x) < 0$.

Порівнюючи значення $g'(x)$ в точках 0 та $\frac{1}{2}$ ми отримуємо, що $g'(0) < g'(\frac{1}{2})$.

Більше того, маємо, що значення функціоналу в точці x_1 менше за значення в точці $\frac{1}{2}$.

У випадку, коли $c = 4$, $x_2 = x_4 = x_5 = \frac{1}{2}$ та максимальне значення дорівнює $\frac{c}{4}e^{\frac{c}{4}}$. При $c > 4$ максимум досягається в точках, які є коренями квадратного полінома, а саме

$$x_{4,5} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4c}}{2c} = \frac{\sqrt{c} \pm \sqrt{c-4}}{2\sqrt{c}}.$$

Визначимо у яких інтервалах містяться корені x_4 та x_5 . Порівняємо x_4 з $\frac{1}{c}$, маємо $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{c}} > \frac{1}{c}$. Отже, корінь $x_4 \in (\frac{1}{c}, \frac{1}{2})$ та $x_5 \in (\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{c})$.

Максимальне значення дорівнює

$$\frac{1}{4} \exp \left\{ \frac{(c-2) - \sqrt{c(c-4)}}{2} \right\} \left((c-2) - \sqrt{c(c-4)} \right) - \left(\sqrt{c(c-4)} - (c-2) \right) \exp \left\{ \sqrt{c(c-4)} \right\}.$$

Це справді є найбільшим значення функціоналу, що впливає з наступних міркувань: між точками максимуму x_4 та x_5 знаходиться точка локального мінімуму $x = 1/2$. Отже, значення функції в точці $x_2 = 1/2$ менше, ніж значення в точках x_4 та x_5 , а, як вже було сказано, при $c > 4$ значення в точці $x = 1/2$, яке дорівнює $\frac{c}{4}e^{\frac{c}{4}}$, перевищує значення на кінцях, яке дорівнює $c/2$. Отже, теорему доведено. \square

3.4 Висновки

У третьому розділі розглянуто ентропійні функціонали, які було сконструйовано спеціальним чином для сукупності ймовірнісних мір. Більш точно,

розглядаються два незалежні вінерівські процеси зі зсувом, який розбито на дві частини, та побудовано відповідні ентропійні функціонали. Знайдені відношення вірогідностей для цих мір, які подаються у вигляді стохастичних експонент від не випадкових функцій. За умови, що сума функцій відома, знайдено мінімум ентропійних функціоналів.

Для найпростіших ентропійних функціоналів мінімум досягається у випадку, коли зсув ділиться на дві рівні частини. Проте, у більш складних випадках виявляється, що оптимальне співвідношення знаходиться з трансцендентного рівняння, яке було розв'язано чисельним методом.

Розділ 4

Мінімізація ентропії для суміші стандартного і дробового броунівських рухів

4.1 Вступ

Припустимо, що на просторі $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ задано два незалежні випадкові процеси, а саме, вінерівський процес $W = \{W(t), t \in [0, T]\}$ та дробовий броунівський рух (ДБР) з індексом Хюрста $H \in (0, 1)$, $B^H = \{B^H(t), t \in [0, T]\}$ із середнім $\mathbf{E}B^H(t) = 0$ та коваріацією $\mathbf{E}B^H(t)B^H(s) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$. Обидва процеси, таким чином, узгоджені з фільтрацією. В цьому розділі розглядається лише випадок $H \in (0, 1/2)$, проте випадок $H \in (1/2, 1)$ було досліджено у статті [65].

Розглянемо суму вінерівського процесу та дробового броунівського руху зі зносом, а саме випадковий процес вигляду

$$Z(t) = B^H(t) + W(t) + \int_0^t f(s)ds, \quad t \in [0, T], \quad (4.1)$$

де $f \in L_2[0, T]$ — не випадкова вимірна функція, що не дорівнює нулю в жодній точці. Нашою першою задачею є усунути зсув, тобто перейти до іншої ймовірнісної міри \tilde{Q} , відносно якої сумарний процес Z з (4.1) матиме вигляд

$$Z(t) = \tilde{B}^H(t) + \tilde{W}(t), \quad t \in [0, T],$$

де \tilde{B}^H та \tilde{W} — два незалежні процеси відносно міри \tilde{Q} , \tilde{B}^H — ДБР, \tilde{W} — вінерівський процес. Зокрема, можна вважати, що міру замінено таким чином,

що зсув $\int_0^t f(s)ds$ усувається за допомогою перетворень

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(t) &= W(t) + \int_0^t f_1(s)ds, \\ \widetilde{B}^H(t) &= B^H(t) + \int_0^t f_2(s)ds, \\ f_1(t) + f_2(t) &= f(t).\end{aligned}$$

Тепер нашою задачею є оптимальний вибір функцій f_1 та f_2 , де оптимальність справджуватиметься в тому розумінні, що буде мінімізовано певний функціонал ентропійного типу. Для суми двох вінерівських процесів відповідну задачу було розглянуто в попередньому розділі, а взагалі, задача мінімізації ентропії та ентропійних функціоналів виникає у багатьох застосуваннях, зокрема, у фінансовій математиці, див., наприклад, [63]. За деяких обмежень, ми розглянемо і в яких точках досягається максимум (без всяких обмежень максимум не досягається, і супремум дорівнює нескінченності).

Оскільки процеси W та B^H незалежні, то при “усуненні” зсуву ми будемо розглядати лише такі нові міри Q , для яких відношення вірогідностей розпадається в добуток:

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{dQ_W}{dP} \times \frac{dQ_{B^H}}{dP},$$

де міра Q_W відповідає вінерівському процесу \widetilde{W}

$$\frac{dQ_W}{dP} = \exp \left\{ - \int_0^T f_1(t)dW(t) - \frac{1}{2} \|f_1\|_{L_2([0,T])}^2 \right\}, \quad (4.2)$$

а міра Q_{B^H} — дробовому броунівському руху \widetilde{B}^H .

$$\frac{dQ_{B^H}}{dP} = \exp \left\{ - \int_0^T (K_0^{H,*} f_2)(t)dB(t) - \frac{1}{2} \|K_0^{H,*} f_2\|_{L_2([0,T])}^2 \right\}, \quad (4.3)$$

У наведеному вище зображенні $B = \{B(t), t \geq 0\}$ – вінерівський процес, пов'язаний з B^H таким чином:

$$B(t) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - H)}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_0^t (K_T^{H,*} \mathbb{1}_{[0,t]})(s) dB^H(s).$$

Тепер наша мета — підібрати функції f_1 та f_2 таким чином, щоб вони мінімізували або максимізували певні функціонали вигляду

$$\mathbf{E} \left[F \left(\frac{dQ_W}{dP}, \frac{dQ_{B^H}}{dP} \right) \right], \quad (4.4)$$

де $F(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ — деяка невід'ємна вимірна функція. Введемо позначення $f_1(t) = (1 - \alpha(t))f(t)$, де α — обмежена вимірна функція. При цьому $f_2(t) = \alpha(t)f(t)$. Оскільки $f \in L_2([0, T])$, то і $f_i \in L_2([0, T])$, $i = 1, 2$. Задача оптимізації функціонала вигляду (4.4) є досить широкою, тому звуємо її до задачі оптимізації такого функціонала ентропійного типу:

$$H_1(P, Q_W, Q_{B^H}) = \mathbf{E} \left[\left(\frac{dQ_W}{dP} \log \frac{dQ_W}{dP} \right) \right] + \mathbf{E} \left[\left(\frac{dQ_{B^H}}{dP} \log \frac{dQ_{B^H}}{dP} \right) \right]. \quad (4.5)$$

Лема 4.1. Функціонал $H_1(P, Q_W, Q_{B^H})$ можна звести до вигляду

$$H_1(P, Q_W, Q_{B^H}) = \frac{1}{2} \|(1 - \alpha)f\|_{L_2[0,T]}^2 + \frac{1}{2} \|(K_0^{H,*} \alpha f)\|_{L_2[0,T]}^2. \quad (4.6)$$

Доведення. Використовуючи стандартну теорему Гірсанова (теорема 2.1), отримуємо такий вираз для першого доданка правої частини (4.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\left(\frac{dQ_W}{dP} \log \frac{dQ_W}{dP} \right) \right] &= \mathbf{E} \left[\exp \left\{ - \int_0^T f_1(t) dW(t) - \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ - \int_0^T f_1(t) dW(t) - \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt \right\} \right]. \end{aligned}$$

Застосуємо формулу Іто до стохастичної експоненти

$$P_t := \exp \left\{ - \int_0^t f_1(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t f_1^2(s) ds \right\},$$

для якої $\mathbf{E}P_t = 1$, й одержимо, що

$$P_T = 1 - \int_0^T P_t f_1(t) dW(t).$$

Отже,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\left(1 - \int_0^T P_t f_1(t) dW(t) \right) \times \left\{ - \int_0^T f_1(t) dW(t) - \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt \right\} \right] = \\ = \mathbf{E} \left[\int_0^T P_t f_1^2(t) dt \right] - \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt. \end{aligned}$$

Другий доданок із (4.5) перетворюється повністю аналогічно, із застосуванням теореми Гірсанова (теорема 2.2) для дробового броунівського руху, та відповідної стохастичної експоненти (2.7). \square

4.2 Мінімізація та максимізація функціоналів ентропійного типу

Мінімізацію чи максимізацію інтегральних функціоналів можна проводити різними методами, у тому числі шляхом зведення до більш або менш стандартних задач варіаційного числення. Ми застосуємо прямий метод диференціювання функціонала за параметром, щоб знайти інтегральне рівняння для мінімізуючої функції, а потім скористаємось тим фактом, що це рівняння було вивчене у статті [64] при дослідженні малих відхилень для змішаного процесу, який є сумою вінерівського і дробового броунівського процесів.

4.2.1 Знаходження розв'язку задачі мінімізації як розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма

Із метою спрощення позначень, праву частину формули (4.6) позначимо $\mathbf{H}(\alpha)$. Таким чином,

$$\mathbf{H}(\alpha) := \frac{1}{2} \|(1 - \alpha)f\|_{L_2[0,T]}^2 + \frac{1}{2} \|K_0^{H,*}(\alpha f)\|_{L_2[0,T]}^2. \quad (4.7)$$

Розглянемо значення функціонала \mathbf{H} від функції $\alpha(t) + \varepsilon\beta(t)$, де $\varepsilon \in \mathbb{R}$, β — довільна обмежена вимірна функція:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\alpha + \varepsilon\beta) &= \frac{1}{2} \int_0^T \left(\left(K_0^{H,*}((\alpha + \varepsilon\beta)f) \right) (t) \right)^2 dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \left((1 - \alpha - \varepsilon\beta)f(t) \right)^2 dt =: \mathbf{K}_1(\varepsilon) + \mathbf{K}_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

Лема 4.2. *Похідна функціонала $\mathbf{H}(\alpha + \varepsilon\beta)$ в точці $\varepsilon = 0$ для довільної обмеженої вимірної функції β така:*

$$\begin{aligned} &\mathbf{H}'_\varepsilon(\alpha + \varepsilon\beta)|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_0^T \left(K_0^{H,*}(\beta f) \right) (t) \left(K_0^{H,*}(\alpha f) \right) (t) dt + \int_0^T ((\alpha - 1) \beta f^2)(t) dt, \end{aligned} \quad (4.8)$$

причому обидва інтеграли у правій частині (4.8) коректно означені.

Доведення. Подамо перший доданок у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_0^T \left(\left(K_0^{H,*}((\alpha + \varepsilon\beta)f) \right) (t) \right)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^T \left[\left(\left(K_0^{H,*}(\alpha f) \right) (t) \right)^2 + \right. \\ &\left. + 2\varepsilon \left(K_0^{H,*}(\alpha f) \right) (t) \left(K_0^{H,*}(\beta f) \right) (t) + \varepsilon^2 \left(\left(K_0^{H,*}(\beta f) \right) (t) \right)^2 \right] dt. \end{aligned}$$

Тому похідну від першого доданка по ε запишемо як

$$\mathbf{K}'_1(\varepsilon) = \int_0^T \left(K_0^{H,*}(\alpha f) \right) (t) \left(K_0^{H,*}(\beta f) \right) (t) dt + \varepsilon \int_0^T \left(\left(K_0^{H,*}(\beta f) \right) (t) \right)^2 dt,$$

а похідну від другого доданка по ε , відповідно як

$$\mathbf{K}'_2(\varepsilon) = \int_0^T ((\alpha - 1) \beta f^2)(t) dt + \varepsilon \int_0^T (\beta^2 f^2)(t) dt.$$

Покладемо $\varepsilon = 0$ в обох доданках і отримаємо шуканий вигляд похідної (4.8). Коректна означеність всіх інтегралів впливає з обмеженості α і β та того факту, що оператор $K_0^{H,*}$ переводить $L_2[0, T]$ в $L_2[0, T]$. \square

Зауваження 4.1. Таким чином, якщо функціонал $\mathbf{H}(\alpha)$ досягає мінімуму або максимуму на деякій обмеженій функції α , то для будь-якої обмеженої функції β справедливе рівняння

$$\int_0^T \left(K_0^{H,*}(\beta f) \right) (t) \left(K_0^{H,*}(\alpha f) \right) (t) dt + \int_0^T ((\alpha - 1) \beta f^2) (t) dt = 0. \quad (4.9)$$

Більше того, оскільки друга похідна

$$\mathbf{H}_\varepsilon''(\alpha + \varepsilon\beta) = \int_0^T (\beta^2 f^2)(t) dt + \int_0^T \left(\left(K_0^{H,*}(\beta f) \right) (t) \right)^2 dt > 0,$$

для функцій β , не рівних нулю тотожно, то максимуму в таких точках бути не може.

Лема 4.3. Якщо для довільної обмеженої вимірної функції β похідна функціонала $\mathbf{H}(\alpha + \varepsilon\beta)$ в точці $\varepsilon = 0$ дорівнює нулю, то функція α задовольняє таке інтегральне рівняння:

$$(\alpha(t) - 1) f(t) + C_1(H) t^{\frac{1}{2}-H} I_{T-}^{\frac{1}{2}-H} \left(K_0^{H,*}(\alpha f) (v) v^{H-\frac{1}{2}} \right) (t) = 0, \quad \text{або} \quad (4.10)$$

$$(\alpha(t) - 1) f(t) + K_T^{H,*} \left[K_0^{H,*}(\alpha f) \right] (t) = 0,$$

майже скрізь відносно міри Лебега.

Доведення. Звернемось до рівняння (4.9) і зауважимо, що для $0 < \gamma < 1$, $f \in L_p[a, b]$ та $g \in L_q[a, b]$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \gamma$, згідно із [91], справедлива наступна формула інтегрування частинами дробових інтегралів:

$$\int_a^b g(x) (I_{0+}^\alpha f)(x) dx = \int_a^b f(x) (I_{b-}^\alpha g)(x) dx. \quad (4.11)$$

Використовуючи формулу (4.11) при $p = q = 2, \gamma = 1/2 - H$, перепишемо перший доданок (4.9) у вигляді

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left(K_0^{H,*}(\beta f) \right) (t) \left(K_0^{H,*}(\alpha f) \right) (t) dt = \\
& = C_1(H) \int_0^T t^{H-\frac{1}{2}} \left(I_{0+}^{\frac{1}{2}-H} (u^{\frac{1}{2}-H}(\beta f)(u)) \right) (t) \left(K_0^{H,*}(\alpha f) \right) (t) dt = \\
& = C_1(H) \int_0^T \left(I_{0+}^{\frac{1}{2}-H} (u^{\frac{1}{2}-H}(\beta f)(u)) \right) (t) t^{H-\frac{1}{2}} \left(K_0^{H,*}(\alpha f) \right) (t) dt = \\
& = C_1(H) \int_0^T t^{\frac{1}{2}-H}(\beta f)(t) \left(I_{T-}^{\frac{1}{2}-H} \left(\left(K_0^{H,*}(\alpha f) \right) (v) v^{H-\frac{1}{2}} \right) (t) \right) dt = \\
& = C_1(H) \int_0^T \beta(t) \left(t^{\frac{1}{2}-H} f(t) I_{T-}^{\frac{1}{2}-H} \left(\left(K_0^{H,*}(\alpha f) \right) (v) v^{H-\frac{1}{2}}(t) \right) (t) \right) dt. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Після цих перетворень рівняння (4.9) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \beta(t) f(t) \left[(\alpha(t) - 1) f(t) + \right. \\
& \quad \left. + C_1(H) \left(t^{\frac{1}{2}-H} I_{T-}^{\frac{1}{2}-H} \left(\left(K_0^{H,*}(\alpha f) \right) (v) v^{H-\frac{1}{2}}(t) \right) (t) \right) \right] dt = 0. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Позначимо

$$\delta(t) = f(t) \left[(\alpha(t) - 1) f(t) + C_1(H) t^{\frac{1}{2}-H} I_{T-}^{\frac{1}{2}-H} \left(\left(K_0^{H,*}(\alpha f) \right) (v) v^{H-\frac{1}{2}}(t) \right) (t) \right],$$

і для кожного $C > 0$ розглянемо таку функцію $\beta(t)$:

$$\beta(t) = \beta_C(t) = \delta(t) 1\{|\delta(t)| \leq C\}.$$

Очевидно, всі ці функції є вимірними та обмеженими. Тоді з (4.13) випливає, що

$$\int_0^T \delta^2(t) 1\{|\delta(t)| \leq C\} dt = 0.$$

У силу довільного вибору $C > 0$, а також того припущення, що функція f не дорівнює нулю в жодній точці, ми одержуємо рівняння (4.10). \square

Позначимо $\alpha(t)f(t) = g(t)$, тоді рівняння (4.10) запишемо як

$$g(t) + C_1(H)t^{\frac{1}{2}-H} I_{T-}^{\frac{1}{2}-H} \left(K_0^{H,*} (g) (v)v^{H-\frac{1}{2}} \right) (t) = f(t),$$

або

$$(4.14)$$

$$g(t) + K_T^{H,*} \left[K_0^{H,*} g \right] (t) = f(t)$$

майже скрізь відносно міри Лебега. Якщо використати означення дробового інтеграла та позначити $C_2(H) = \left(\frac{C_1(H)}{\Gamma(1/2-H)} \right)^2$, то ліва частина рівняння (4.14) дорівнюватиме

$$\begin{aligned} & g(t) + C_1(H) \frac{t^{\frac{1}{2}-H}}{\Gamma(\frac{1}{2}-H)} \int_t^T (z-t)^{-\frac{1}{2}-H} \left(K_0^{H,*} g \right) (z) z^{H-\frac{1}{2}} dz = \\ & = g(t) + C_2(H) t^{\frac{1}{2}-H} \int_t^T (z-t)^{-\frac{1}{2}-H} z^{2H-1} \left(\int_0^z (z-v)^{-\frac{1}{2}-H} v^{\frac{1}{2}-H} g(v) dv \right) dz = \\ & = g(t) + C_2(H) t^{\frac{1}{2}-H} \left(\int_0^t g(v) v^{\frac{1}{2}-H} dv \int_t^T (z-t)^{-\frac{1}{2}-H} z^{2H-1} (z-v)^{-\frac{1}{2}-H} dz + \right. \\ & \quad \left. + \int_t^T v^{\frac{1}{2}-H} g(v) \int_v^T (z-t)^{-\frac{1}{2}-H} z^{2H-1} (z-v)^{-\frac{1}{2}-H} dz \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Тепер визначимо інтегральне ядро $\kappa_H(t, v)$ за формулою

$$\begin{aligned} \kappa_H(t, v) & = (tv)^{1/2-H} \int_t^T (z-t)^{-1/2-H} z^{2H-1} (z-v)^{-1/2-H} dz 1_{\{0 \leq v < t \leq T\}} + \\ & + (tv)^{1/2-H} \int_v^T (z-t)^{-1/2-H} z^{2H-1} (z-v)^{-1/2-H} dz 1_{\{0 \leq t < v \leq T\}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

З урахуванням вигляду цього інтегрального ядра, рівняння (4.14) перетворюється на інтегральне рівняння Фредгольма другого роду:

$$g(t) + C_2(H) \int_0^T \kappa_H(t, v)g(v)dv = f(t) \quad (4.17)$$

майже скрізь відносно міри Лебега. Рівняння (4.17) розглянуто у статті [64], де було доведено, що для будь якої функції $f = f(t) \in L_2([0, T])$ воно має єдиний розв'язок $g = g(t) \in L_2([0, T])$, причому ця функція g є розв'язком задачі мінімізації функціонала (4.6), якщо позначити в ньому $g = \alpha f$. Із цього безпосередньо випливає наступний результат.

Теорема 4.1. *Нехай $H < 1/2$, функція $f \in L_2([0, T])$, і при цьому функція g/f , де g — єдиний розв'язок рівняння (4.17), є обмеженою. Тоді існує єдина вимірна обмежена функція $\alpha_0 = \alpha_0(t)$, що є розв'язком задачі мінімізації функціонала (4.6), причому ця функція $\alpha_0(t) = \frac{g(t)}{f(t)}$.*

Зауваження 4.2. Якщо розглядати розв'язок задачі мінімізації як функцію g , що задовольняє рівняння (4.17), то умови існування мінімізатора очевидним чином спрощуються до умови $f \in L_2[0, T]$.

4.2.2 Властивості L_2 -норми мінімізатора

У цьому розділі знайдемо верхню й нижню межу інтегральної норми розв'язку рівняння (4.10).

Лема 4.4. *Нехай виконуються умови теореми 4.1. Тоді*

$$0 < \|\alpha_0 f\|_{L_2[0, T]}^2 < \langle \alpha_0, f^2 \rangle_{L_2[0, T]} < \|f\|_{L_2[0, T]}^2. \quad (4.18)$$

Доведення. Позначимо через A_H інтегральний оператор $A_H : L_2[0, T] \rightarrow L_2[0, T]$, що задається ядром κ_H (4.16), тобто

$$A_H x(t) = C_2(H) \int_0^T \kappa_H(t, s)x(s)ds, t \in [0, T], x \in L_2[0, T].$$

Тоді розв'язок α_0 рівняння (4.10) задовольняє рівність $f = (A_H + I)(\alpha_0 f)$, де I — тотожний оператор. Із формул (4.12)–(4.13) та (4.15) випливає, що

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\alpha) &= \frac{1}{2} \|(1 - \alpha)f\|_{L_2[0,T]}^2 + \frac{1}{2} \|K_0^{H,*}(\alpha f)\|_{L_2[0,T]}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \|f\|_{L_2[0,T]}^2 + \frac{1}{2} \langle \alpha f, \alpha f - 2f \rangle_{L_2[0,T]} + \frac{1}{2} \langle \alpha f, A_H(\alpha f) \rangle_{L_2[0,T]} = \\ &= \frac{1}{2} \|f\|_{L_2[0,T]}^2 - \frac{1}{2} \langle \alpha f, f \rangle_{L_2[0,T]} + \frac{1}{2} \langle \alpha f, (A_H + I)(\alpha f) - f \rangle_{L_2[0,T]}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Тому мінімальне значення функціонала, тобто $\mathbf{H}(\alpha_0)$, можна подати у вигляді

$$\mathbf{H}(\alpha_0) = \frac{1}{2} \|f\|_{L_2[0,T]}^2 - \frac{1}{2} \langle \alpha_0 f, f \rangle_{L_2[0,T]} = \frac{1}{2} \int_0^T f^2(t)(1 - \alpha_0(t)) dt.$$

З очевидної нерівності $\mathbf{H}(\cdot) > 0$ маємо

$$\langle \alpha_0, f^2 \rangle_{L_2[0,T]} < \|f\|_{L_2[0,T]}^2.$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} \langle \alpha_0, f^2 \rangle_{L_2[0,T]} &= \langle \alpha_0 f, f \rangle_{L_2[0,T]} = \langle \alpha_0 f, A_H \alpha_0 f + \alpha_0 f \rangle_{L_2[0,T]} = \\ &= \|\alpha_0 f\|_{L_2[0,T]}^2 + \langle \alpha_0 f, A_H \alpha_0 f \rangle_{L_2[0,T]} > \|\alpha_0 f\|_{L_2[0,T]}^2, \end{aligned}$$

оскільки оператор A_H — додатно визначений. □

4.2.3 Задача мінімізації з обмеженнями

Зауважимо, що нерівності (4.18) означають, що мінімізатор α_0 задовольняє таке обмеження: у розумінні інтегральної норми α_0 лежить між нулем і одиницею. Поставимо відповідну задачу мінімізації з поточковим обмеженням, а саме, нехай треба знайти мінімум функціонала $\mathbf{H}(\alpha)$ з (4.7) за додаткового обмеження $0 \leq \alpha(t) \leq 1$. Таку функцію назвемо правильним поділом. Знайдемо правильний поділ лише серед сталих функцій, тобто у випадку, коли $\alpha = \alpha(t)$ є сталою. Але, якщо такий правильний поділ міститься між нулем і одиницею, то можна поставити питання, в якій крайній точці — в нулі чи в одиниці, досягається максимум функціонала $\mathbf{H}(\cdot)$. У наступній лемі нам знадобиться позначення $C_3(H, T) = \frac{\sqrt{C_2(H)}}{1/2-H} T^{1/2-H}$.

Лема 4.5. 1) Серед усіх сталих функцій мінімум функціонала (4.7) досягається в точці

$$\alpha_0 = \frac{\|f\|_{L_2[0,T]}^2}{\|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2 + \|f\|_{L_2[0,T]}^2} \quad (4.20)$$

і дорівнює $\frac{1}{2} \frac{\|f\|_{L_2[0,T]}^2 \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2}{\|f\|_{L_2[0,T]}^2 + \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2}$, причому точка α_0 є правильним поділом.

2) Якщо $C_3(H, T) < 1$, то для будь-якої функції $f \in L_2[0, T]$ максимум функціонала (4.7) досягається в точці $\alpha = 0$ і дорівнює $\frac{1}{2} \|f\|_{L_2[0,T]}^2$.

3) Якщо $C_3(H, T) \geq 1$, то залежно від значення параметра H та функції f , максимум функціонала (4.7) може досягатися як у точці $\alpha = 0$, так і в точці $\alpha = 1$. Зокрема:

(i) Якщо $C_3(H, T) = 1$, а функція $f = 1$ та $H = 1/4$, то максимум функціонала (4.7) досягається в точці $\alpha = 0$.

(ii) Якщо значення T є достатньо великим, а функція f степенева, то для будь-яких $H \in (0, \frac{1}{2})$ максимум функціонала (4.7) досягається в точці $\alpha = 1$.

Доведення. 1) Якщо розглядати лише сталі функції α , то функціонал (4.7) можна переписати у вигляді

$$\mathbf{H}(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha^2 \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2 + \frac{1}{2} (1 - \alpha)^2 \|f\|_{L_2[0,T]}^2,$$

тобто ми одержуємо квадратичну функцію від α . Знайдемо точки максимуму та мінімуму цієї функції. Очевидно,

$$\mathbf{H}'(\alpha) = \alpha \left[\|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2 + \|f\|_{L_2[0,T]}^2 \right] - \|f\|_{L_2[0,T]}^2,$$

звідки єдина точка мінімуму визначається рівнянням (4.20). Очевидно, що ця точка одночасно задовольняє умову $\alpha_0 \in (0, 1)$, тобто точка, в якій досягається мінімум серед усіх сталих, є правильним поділом. Знайдемо

відповідне значення мінімуму:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\alpha_0) &= \frac{\alpha_0^2}{2} \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2 + \frac{(1-\alpha_0)^2}{2} \|f\|_{L_2[0,T]}^2 = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\|f\|_{L_2[0,T]}^2}{\|f\|_{L_2[0,T]}^2 + \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2} \right)^2 \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2 + \\
&+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\|f\|_{L_2[0,T]}^2}{\|f\|_{L_2[0,T]}^2 + \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2} \right)^2 \|f\|_{L_2[0,T]}^2 = \\
&= \frac{\|f\|_{L_2[0,T]}^4 \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2}{2 \left(\|f\|_{L_2[0,T]}^2 + \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2 \right)^2} + \frac{\|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^4 \|f\|_{L_2[0,T]}^2}{2 \left(\|f\|_{L_2[0,T]}^2 + \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2 \right)^2} = \\
&= \frac{\|f\|_{L_2[0,T]}^2 \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2 \left(\|f\|_{L_2[0,T]}^2 + \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2 \right)}{2 \left(\|f\|_{L_2[0,T]}^2 + \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2 \right)^2} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\|f\|_{L_2[0,T]}^2 \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2}{\|f\|_{L_2[0,T]}^2 + \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2}.
\end{aligned}$$

2) Тепер порівняємо значення функціонала (4.7) у крайніх сталих точках правильного поділу, тобто при $\alpha = 0$ і $\alpha = 1$:

$$\mathbf{H}(0) = \frac{1}{2} \|f\|_{L_2[0,T]}^2, \quad \mathbf{H}(1) = \frac{1}{2} \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2.$$

Оскільки

$$\left(K_0^{H,*} f \right) (t) = \sqrt{C_2(H)} t^{H-\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{z^{\frac{1}{2}-H}}{(t-z)^{H+\frac{1}{2}}} f(z) dz$$

та

$$\begin{aligned}
\left| t^{H-\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{z^{\frac{1}{2}-H}}{(t-z)^{H+\frac{1}{2}}} f(z) dz \right| &\leq \int_0^t |f(z)| (t-z)^{-H-1/2} dz \\
&= \Gamma(1/2 - H) (I_{0+}^{1/2-H} |f|)(t),
\end{aligned}$$

то норму оператора $\left(K_0^{H,*} f \right) (t)$ оцінимо за допомогою нерівності (2.72) з

[91] таким чином:

$$\begin{aligned} \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]} &\leq C_3(H, T) \|f\|_{L_2[0,T]}, \\ C_3(H, T) &= \frac{\sqrt{C_2(H)}}{1/2 - H} T^{1/2-H}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Якщо $C_3(H, T) \leq 1$, то максимум функціонала (4.7) досягається в точці $\alpha = 0$ і дорівнює $\frac{1}{2} \|f\|_{L_2[0,T]}^2$.

3) (i) Нехай $f(t) = 1$. Тоді

$$\begin{aligned} [K_0^{H,*} 1](t) &= \frac{C_1(H) t^{H-1/2}}{\Gamma(1/2 - H)} \int_0^t (t-u)^{-1/2-H} u^{1/2-H} du \\ &= \frac{C_1(H)}{\Gamma(1/2 - H)} B\left(\frac{1}{2} - H, \frac{3}{2} - H\right) t^{1/2-H} = \frac{C_1(H) \Gamma(3/2 - H)}{\Gamma(2 - 2H)} t^{1/2-H}. \end{aligned}$$

Тому в цьому випадку

$$\mathbf{H}(1) = \frac{1}{2} \|K_0^{H,*} f\|_{L_2[0,T]}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1(H) \Gamma(3/2 - H)}{\Gamma(2 - 2H)} \right)^2 \frac{T^{2-2H}}{2 - 2H}.$$

Очевидно, $\mathbf{H}(0) = T/2$. Отже,

$$\frac{\mathbf{H}(1)}{\mathbf{H}(0)} = T^{1-2H} \frac{C_1^2(H) \Gamma^2(3/2 - H)}{\Gamma^2(2 - 2H)}.$$

Якщо $C_3(H, T) = 1$, тобто $T^{1/2-H} = \frac{1/2-H}{\sqrt{C_2(H)}}$, то

$$\frac{\mathbf{H}(1)}{\mathbf{H}(0)} = \frac{(1/2 - H)^2 C_1^2(H) \Gamma^2(3/2 - H) \Gamma^2(1/2 - H)}{C_1^2(H) \Gamma^2(2 - 2H)} = \frac{\Gamma^4(3/2 - H)}{\Gamma^2(2 - 2H)}.$$

Нехай $H = 1/4$, тоді $\Gamma^4(\frac{3}{2} - H) = \Gamma^4(\frac{5}{4}) = 0.6750$, а $\Gamma^2(\frac{3}{2}) = \frac{\pi}{4} = 0.7853$. Отже, справедлива нерівність $\mathbf{H}(1) < \mathbf{H}(0)$, тому максимум функціонала досягається в точці $\alpha = 0$.

(ii) Нехай значення $\nu > 0$ фіксовано. Розглянемо степеневу функцію $f(t) = t^\nu, t \in (0, T)$. Для цієї функції виконуються такі рівності.

$$\mathbf{H}(0) = \frac{1}{2} \int_0^T t^{2\nu} dt = \frac{T^{2\nu+1}}{2(2\nu + 1)},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(1) &= \frac{1}{2} \|K_0^{H,*} t^\nu\|_{L_2[0,T]}^2 \\
&= \frac{C_2(H)}{2} \int_0^T \left(t^{H-1/2} \int_0^t u^{\nu+1/2-H} (t-u)^{-1/2-H} du \right)^2 dt \\
&= \frac{C_2(H)}{2} \int_0^T \left(t^{\nu+1/2-H} B \left(\nu + \frac{3}{2} - H, \frac{1}{2} - H \right) \right)^2 dt \\
&= \frac{C_2(H)}{2} \left(\frac{\Gamma(\nu + 3/2 - H) \Gamma(1/2 - H)}{\Gamma(\nu + 2 - 2H)} \right)^2 \int_0^T t^{2\nu-2H+1} dt = C_\nu \frac{T^{2(\nu-H+1)}}{2(\nu-H+1)},
\end{aligned}$$

де $C_\nu = \frac{C_2(H)}{2} \left(\frac{\Gamma(\nu+3/2-H)\Gamma(1/2-H)}{\Gamma(\nu+2-2H)} \right)^2$.

Знайдемо границю

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{H}(1)}{\mathbf{H}(0)} = \frac{C_\nu(2\nu+1)}{\nu-H+1} T^{1-2H} = +\infty.$$

Це означає, що для всіх досить великих $T > 0$ значення $\mathbf{H}(1) > \mathbf{H}(0)$. \square

Тепер будемо шукати мінімум серед правильних поділів, що не є сталими. Оскільки такі функції невід'ємні, позначимо їх як x^2 .

Лема 4.6.

1) Нехай функція $\alpha_0(t) = x^2(t), t \in [0, T]$, така, що $\mathbf{H}(\alpha_0) \leq \mathbf{H}(\alpha)$ для всіх обмежених вимірних функцій $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Тоді x задовольняє таке рівняння:

$$x(t)[(A_H + I)x^2 f - f](t) = 0, t \in [0, T]. \quad (4.22)$$

2) Нехай функція x_0 задовольняє рівняння (4.22). Якщо додатково

$$[(A_H + I)x_0^2 f](t) \geq f(t), t \in [0, T], \quad (4.23)$$

то $\alpha_0(t) = x_0^2(t), t \in [0, T]$, є мінімізатором функціонала \mathbf{H} на просторі всіх правильних поділів.

Доведення. Нехай $\alpha(t) = x^2(t)$, $t \in [0, T]$, де x — деяка обмежена функція. Нехай h — довільна обмежена функція. Аналогічно до леми 4.4, запишемо різницю $\mathbf{H}((x+h)^2) - \mathbf{H}(x^2)$ у вигляді

$$\begin{aligned}
& \mathbf{H}((x+h)^2) - \mathbf{H}(x^2) \\
&= \frac{1}{2} \langle (x^2 + 2xh + h^2)f, (A_H + I)((x^2 + 2xh + h^2)f) - 2f \rangle_{L_2[0,T]} \\
&- \frac{1}{2} \langle x^2 f, (A_H + I)(x^2 f) - 2f \rangle_{L_2[0,T]} = \frac{1}{2} \langle x^2 f, (A_H + I)((2xh + h^2)f) \rangle_{L_2[0,T]} \\
&\quad + \frac{1}{2} \langle (2xh + h^2)f, (A_H + I)((2xh + h^2)f) \rangle_{L_2[0,T]} \\
&\quad + \frac{1}{2} \langle (2xh + h^2)f, (A_H + I)x^2 f \rangle_{L_2[0,T]} - \langle (2xh + h^2)f, f \rangle_{L_2[0,T]} \\
&= 2 \langle xhf, (A_H + I)x^2 f - f \rangle_{L_2[0,T]} + \langle h^2 f, (A_H + I)x^2 f - f \rangle_{L_2[0,T]} \\
&\quad + \frac{1}{2} \langle (2xh + h^2)f, (A_H + I)((2xh + h^2)f) \rangle_{L_2[0,T]}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Із виразу (4.24) випливає, що

$$\mathbf{H}'_\varepsilon((x + \varepsilon h)^2) \Big|_{\varepsilon=0} = 2 \langle xhf, (A_H + I)x^2 f - f \rangle_{L_2[0,T]}.$$

Тому локальний мінімум функціонала \mathbf{H} задовольняє рівняння

$$x(t)[(A_H + I)x^2 f - f](t) = 0, t \in [0, T].$$

Якщо при цьому $[(A_H + I)x^2 f](t) \geq f(t)$, то права частина рівності (4.24) обмежена знизу виразом $\frac{1}{2} \langle (2xh + h^2)f, (A_H + I)((2xh + h^2)f) \rangle_{L_2[0,T]}$, що є невід'ємним у силу невід'ємної визначеності оператора $A_H + I$.

Це означає, що функція x^2 є глобальним мінімумом функціонала \mathbf{H} на просторі додатних обмежених функцій. Більше того, x^2 є правильним поділом. Дійсно, поділимо відрізок $[0, T] = T_0 \cup T_1$, де $T_0 = \{t \in [0, T], x(t) = 0\}$ та $T_1 = \{t \in [0, T], x(t) \neq 0\}$. Тоді $x(t) = 0, t \in T_0$, та $[(A_H + I)x^2 f](t) = f(t), t \in T_1$. Звідси маємо $x^2(t)f(t) = f(t) - [A_H x^2 f](t) \leq f(t), t \in T_1$. \square

Очевидно, що необхідну й достатню умови леми 4.6 задовольняє не-

від'ємний розв'язок рівняння

$$[(A_H + I)yf](t) = f(t), t \in [0, T].$$

Однак для певних функцій f такого розв'язку не існує, що підтверджується таким прикладом.

Приклад 4.1. Розглянемо функцію

$$f(t) = \left(C_2(H) \int_0^{T/2} \kappa_H(t, s) ds + 1 \right) \mathbb{1} \left\{ t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \right\} \in L_2[0, T].$$

Необхідна умова (4.22) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & x(t) \left[C_2(H) \int_0^{T/2} \kappa_H(t, s) x^2(s) f(s) ds \right. \\ & \left. + (x^2(t) f(t) - f(t)) \mathbb{1} \left\{ t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \right\} \right] = 0 \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} & x(t) \left[C_2(H) \int_0^{T/2} \kappa_H(t, s) (x^2(s) f(s) - 1) ds \right. \\ & \left. + x^2(t) f(t) - 1 \right] = 0, t \in \left[0, \frac{T}{2} \right], \\ & x(t) \int_0^{T/2} \kappa_H(t, s) x^2(s) f(s) ds = 0, t \in \left(\frac{T}{2}, 1 \right]. \end{aligned}$$

Достатню умову (4.23) запишемо як

$$\begin{aligned} & C_2(H) \int_0^{T/2} \kappa_H(t, s) (x^2(s) f(s) - 1) ds + x^2(t) f(t) - 1 \geq 0, t \in \left[0, \frac{T}{2} \right], \\ & \int_0^{T/2} \kappa_H(t, s) x^2(s) f(s) ds \geq 0, t \in \left(\frac{T}{2}, 1 \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, знаходимо розв'язок, що задовольняє умови леми 4.6:

$$x_0^2(t) = \frac{1}{C_2(H) \int_0^{T/2} \kappa_H(t, s) ds + 1} \mathbb{1} \left\{ t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \right\}, t \in [0, T].$$

Очевидно, що x_0^2 є правильним поділом.

Тепер розглянемо рівняння $[(A_H + I)yf](t) = f(t), t \in [0, T]$, що в даному прикладі набуває вигляду

$$C_2(H) \int_0^{T/2} \kappa_H(t, s) (y(s)f(s) - 1) ds + y(t)f(t) - 1 = 0, t \in \left[0, \frac{T}{2} \right],$$

$$\int_0^{T/2} \kappa_H(t, s) y(s)f(s) ds = 0, t \in \left(\frac{T}{2}, 1 \right].$$

Із другої рівності випливає, що у випадку, коли $y(s) \geq 0, s \in [0, \frac{T}{2}]$, то $y(s) = 0, s \in [0, \frac{T}{2}]$. А це суперечить першій рівності. Таким чином, не існує для даної функції f правильного поділу α , що задовольняє рівняння $[(A_H + I)\alpha f](t) = f(t), t \in [0, T]$.

4.2.4 Неперервність розв'язку як функції індексу Хюрста

У цьому підрозділі покажемо неперервність розв'язку задачі мінімізації функціонала як функції параметра H , причому приділимо увагу також і "крайній" точці $H = 1/2$. Із метою доведення наступних результатів нагадаємо узагальнену нерівність Мінковського.

Лема 4.7. [91, формула (1.33)] Нехай (S_1, μ_1) та (S_2, μ_2) — два σ -скінченні вимірні простори та $F : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ є вимірною. Тоді для $p \geq 1$

$$\left[\int_{S_2} \left| \int_{S_1} F(x, y) \mu_1(dx) \right|^p \mu_2(dy) \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_{S_1} \left(\int_{S_2} |F(x, y)|^p \mu_2(dy) \right)^{\frac{1}{p}} \mu_1(dx). \quad (4.25)$$

Доведемо спочатку неперервність операторів $K_0^{H,*}$ та $K_T^{H,*}$.

Лема 4.8. Інтегральні оператори $K_0^{H,*}$ та $K_T^{H,*}$ є неперервними за нормою відносно H на інтервалі $(0, \frac{1}{2})$. Тобто,

$$\|K_0^{H\pm\delta,*} - K_0^{H,*}\| \rightarrow 0, \text{ якщо } \delta \downarrow 0, H \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad (4.26)$$

та

$$\|K_T^{H\pm\delta,*} - K_T^{H,*}\| \rightarrow 0, \text{ якщо } \delta \downarrow 0, H \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (4.27)$$

Доведення. Доведемо неперервність $K_0^{H,*}$ за нормою як функції від H на інтервалі $(0, \frac{1}{2})$. Нехай $x \in L_2[0, T]$ і розглянемо, наприклад, границю зліва. При цьому для всіх $0 < \delta < H$ правильні такі рівності:

$$\begin{aligned} & K_0^{H-\delta,*}x(t) - K_0^{H,*}x(t) \\ &= \sqrt{C_2(H-\delta)}t^{H-1/2} \int_0^t \frac{z^{1/2-H}}{(t-z)^{H+1/2}} \frac{z^\delta(t-z)^\delta}{t^\delta} x(z) dz \\ &\quad - \sqrt{C_2(H)}t^{H-1/2} \int_0^t \frac{z^{1/2-H}}{(t-z)^{H+1/2}} x(z) dz \\ &= \left(\sqrt{C_2(H-\delta)} - \sqrt{C_2(H)}\right) t^{H-1/2} \int_0^t \frac{z^{1/2-H}}{(t-z)^{H+1/2}} x(z) dz \\ &\quad + \sqrt{C_2(H-\delta)}t^{H-1/2} \int_0^t \frac{z^{1/2-H}}{(t-z)^{H+1/2}} \left(\frac{z^\delta(t-z)^\delta}{t^\delta} - (t-z)^\delta\right) x(z) dz \\ &\quad + \sqrt{C_2(H-\delta)}t^{H-1/2} \int_0^t \frac{z^{1/2-H}}{(t-z)^{H+1/2}} \left((t-z)^\delta - 1\right) x(z) dz \\ &=: \left(\sqrt{C_2(H-\delta)} - \sqrt{C_2(H)}\right) J_1(\delta, x) \\ &\quad + \sqrt{C_2(H-\delta)}J_2(\delta, x) + \sqrt{C_2(H-\delta)}J_3(\delta, x). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Легко бачити, що $\sqrt{C_2(H-\delta)} - \sqrt{C_2(H)} \rightarrow 0$, при $\delta \rightarrow 0$ та $H \in (0, 0.5)$. Норму інтеграла $J_1(\delta, x)$ оцінимо за допомогою нерівності (4.21) так:

$$\|J_1(\delta, x)\|_{L_2[0,T]} \leq \frac{T^{1/2-H}}{1/2-H} \|x\|_{L_2[0,T]}. \quad (4.29)$$

Далі, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $x(t) = 0$ за межами інтервалу $[0, T]$. Тоді інтеграл $J_3(\delta, x)$ подамо як

$$\begin{aligned} J_3(\delta, x) &= \int_0^t \left(\frac{z}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H} \left(\frac{1}{(t-z)^{H+1/2-\delta}} - \frac{1}{(t-z)^{H+1/2}} \right) x(z) dz = \\ &= \int_0^T \left(\frac{t-s}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H} \frac{s^\delta - 1}{s^{H+1/2}} x(t-s) ds. \end{aligned}$$

Застосовуючи узагальнену нерівність Мінковського (4.25) із $S_1 = S_2 = [0, T]$, маємо

$$\begin{aligned} \|J_3(\delta, x)\|_{L_2[0,T]} &\leq \left[\int_0^T \left(\int_0^T \frac{s^\delta - 1}{s^{H+1/2}} x(t-s) ds \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \stackrel{(4.25)}{\leq} \\ &\stackrel{(4.25)}{\leq} \int_0^T \left(\int_0^T \left(\frac{s^\delta - 1}{s^{H+1/2}} \right)^2 x^2(t-s) dt \right)^{\frac{1}{2}} ds \leq \int_0^T \frac{|s^\delta - 1|}{s^{H+1/2}} ds \|x\|_{L_2[0,T]}. \quad (4.30) \end{aligned}$$

причому $\int_0^T \frac{|s^\delta - 1|}{s^{H+1/2}} ds \rightarrow 0$, якщо $\delta \rightarrow 0$. До інтеграла $J_2(\delta, x)$ застосуємо наступну нерівність.

$$\begin{aligned} |J_2(\delta, x)| &\leq \int_0^t \frac{1}{(t-z)^{H+1/2-\delta}} \left| \frac{z^\delta}{t^\delta} - 1 \right| |x(z)| dz = |(\text{Заміна } z = ty)| = \\ &= \int_0^1 \frac{|y^\delta - 1|}{(1-y)^{H+1/2-\delta} t^{H-1/2-\delta}} |x(yt)| dy \leq T^{1/2-H+\delta} \int_0^1 \frac{|y^\delta - 1|}{(1-y)^{H+1/2-\delta}} |x(yt)| dy. \end{aligned}$$

Далі знову застосуємо узагальнену нерівність Мінковського (4.25) із $S_1 = [0, 1]$, $S_2 = [0, T]$ до норми $J_2(\delta, x)$:

$$\|J_2(\delta, x)\|_{L_2[0,T]} \leq T^{1/2-H+\delta} \left[\int_0^T \left(\int_0^1 \frac{|y^\delta - 1|}{(1-y)^{H+1/2-\delta}} |x(yt)| dy \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \stackrel{(4.25)}{\leq}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(4.25)}{\leq} T^{1/2-H+\delta} \int_0^1 \frac{|y^\delta - 1|}{(1-y)^{H+1/2-\delta}} \left(\int_0^T x^2(yt) dt \right)^{1/2} dy \leq \\
& \leq T^{1/2-H+\delta} \int_0^1 \frac{|y^\delta - 1|}{(1-y)^{H+1/2-\delta}} \left(\int_0^T x^2(yt) dt \right)^{1/2} dy = \\
& = T^{1/2-H+\delta} \int_0^1 \frac{|y^\delta - 1|}{y^{1/2}(1-y)^{H+1/2-\delta}} dy \|x\|_{L_2[0,T]}, \quad (4.31)
\end{aligned}$$

причому $\int_0^1 \frac{|y^\delta - 1|}{y^{1/2}(1-y)^{H+1/2-\delta}} dy \rightarrow 0$, якщо $\delta \rightarrow 0$. Твердження леми щодо $K_0^{H-\delta,*}$ тепер безпосередньо випливає із (4.29), (4.30) та (4.31). Наведений спосіб доведення (4.26) працює також для випадку неперервності справа. Дійсно, нехай $\delta \in (0, \frac{1-2H}{4})$, тоді справджуються перетворення

$$\begin{aligned}
& K_0^{H+\delta,*} x(t) - K_0^{H,*} x(t) = \\
& = \left(\sqrt{C_2(H+\delta)} - \sqrt{C_2(H)} \right) t^{H+\delta-1/2} \int_0^t \frac{z^{1/2-H-\delta}}{(t-z)^{H+\delta+1/2}} x(z) dz - \\
& - \sqrt{C_2(H)} t^{H+\delta-1/2} \int_0^t \frac{z^{1/2-H-\delta}}{(t-z)^{H+\delta+1/2}} \left(\frac{z^\delta (t-z)^\delta}{t^\delta} - (t-z)^\delta \right) x(z) dz - \\
& - \sqrt{C_2(H)} t^{H+\delta-1/2} \int_0^t \frac{z^{1/2-H-\delta}}{(t-z)^{H+\delta+1/2}} ((t-z)^\delta - 1) x(z) dz = \\
& = \left(\sqrt{C_2(H+\delta)} - \sqrt{C_2(H)} \right) U_1(\delta, x) - \\
& - \sqrt{C_2(H)} U_2(\delta, x) - \sqrt{C_2(H)} U_3(\delta, x). \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Нерівність (2.4) також забезпечує оцінку

$$\|U_1(\delta, x)\|_{L_2[0,T]} \leq \frac{T^{1/2-H-\delta}}{1/2 - H - \delta} \|x\|_{L_2[0,T]}. \quad (4.33)$$

Аналогічно до (4.30) та (4.31), доводяться такі нерівності для $\|U_2(\delta, x)\|_{L_2[0,T]}$

та $\|U_3(\delta, x)\|_{L_2[0,T]}$:

$$\|U_2(\delta, x)\|_{L_2[0,T]} \leq T^{1/2-H} \int_0^1 \frac{|y^\delta - 1|}{y^{1/2}(1-y)^{H+1/2}} dy \|x\|_{L_2[0,T]}, \quad (4.34)$$

$$\|U_3(\delta, x)\|_{L_2[0,T]} \leq \int_0^T \frac{|s^\delta - 1|}{s^{H+\delta+1/2}} ds \|x\|_{L_2[0,T]}. \quad (4.35)$$

У підсумку, із нерівностей (4.33)–(4.35) випливає твердження (4.26). Неперервність функціонала $K_T^{H,*}$ отримуємо за схемою, схожою на попереднє доведення цього факту для $K_0^{H,*}$. Аналогами зображень (4.28) та (4.32) є такі рівності:

$$\begin{aligned} & K_T^{H-\delta,*} x(t) - K_T^{H,*} x(t) \\ &= \left(\sqrt{C_2(H-\delta)} - \sqrt{C_2(H)} \right) t^{1/2-H} \int_t^T \frac{z^{H-1/2}}{(z-t)^{H+1/2}} x(z) dz \\ &+ \sqrt{C_2(H-\delta)} t^{1/2-H} \int_t^T \frac{z^{H-1/2}}{(z-t)^{H+1/2}} \left(\frac{t^\delta (z-t)^\delta}{z^\delta} - (z-t)^\delta \right) x(z) dz \\ &+ \sqrt{C_2(H-\delta)} t^{1/2-H} \int_t^T \frac{z^{H-1/2}}{(z-t)^{H+1/2}} \left((z-t)^\delta - 1 \right) x(z) dz \\ &=: \left(\sqrt{C_2(H-\delta)} - \sqrt{C_2(H)} \right) \tilde{J}_1(\delta, x) + \sqrt{C_2(H-\delta)} \tilde{J}_2(\delta, x) \\ &+ \sqrt{C_2(H-\delta)} \tilde{J}_3(\delta, x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& K_T^{H+\delta,*} x(t) - K_T^{H,*} x(t) \\
&= \left(\sqrt{C_2(H+\delta)} - \sqrt{C_2(H)} \right) t^{1/2-H-\delta} \int_t^T \frac{z^{H+\delta-1/2}}{(z-t)^{H+\delta+1/2}} x(z) dz \\
&\quad - \sqrt{C_2(H)} t^{1/2-H-\delta} \int_t^T \frac{z^{H+\delta-1/2}}{(z-t)^{H+\delta+1/2}} \left(\frac{t^\delta (z-t)^\delta}{z^\delta} - (z-t)^\delta \right) x(z) dz \\
&\quad - \sqrt{C_2(H)} t^{1/2-H-\delta} \int_t^T \frac{z^{H+\delta-1/2}}{(z-t)^{H+\delta+1/2}} \left((z-t)^\delta - 1 \right) x(z) dz \\
&=: \left(\sqrt{C_2(H+\delta)} - \sqrt{C_2(H)} \right) \tilde{U}_1(\delta, x) + \sqrt{C_2(H)} \tilde{U}_2(\delta, x) \\
&\quad + \sqrt{C_2(H)} \tilde{U}_3(\delta, x).
\end{aligned}$$

Із використанням аргументів, аналогічних до наведених при оцінюванні норм операторів $K_0^{H,*}$, норми інтегралів $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3$ та $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3$ обмежимо зверху наступними виразами:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{J}_1(\delta, x)\|_{L_2[0,T]} &\leq \frac{T^{1/2-H}}{1/2-H} \|x\|_{L_2[0,T]}, \\
\|\tilde{U}_1(\delta, x)\|_{L_2[0,T]} &\leq \frac{T^{1/2-H-\delta}}{1/2-H-\delta} \|x\|_{L_2[0,T]}
\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}
\|\tilde{J}_3(\delta, x)\|_{L_2[0,T]} &\leq \int_0^T \frac{|s^\delta - 1|}{s^{H+1/2}} ds \|x\|_{L_2[0,T]}, \\
\|\tilde{U}_3(\delta, x)\|_{L_2[0,T]} &\leq \int_0^T \frac{|s^\delta - 1|}{s^{H+\delta+1/2}} ds \|x\|_{L_2[0,T]}.
\end{aligned}$$

Застосування узагальненої нерівності Мінковського забезпечує таку оцінку норми інтеграла $\tilde{J}_2(\delta, x)$. Припустимо знову, що $x(t) = 0$ поза інтервалом $(0, T)$, тоді

$$\|\tilde{J}_2(\delta, x)\|_{L_2[0,T]} =$$

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^T \left(\int_t^T \frac{x(z)}{(z-t)^{H+1/2-\delta}} \left(\frac{t}{z}\right)^{1/2-H} \left(1 - \left(\frac{t}{z}\right)^\delta\right) dz \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = \\
& = \left[\int_0^T \left(\int_0^T \frac{x(t+s)}{s^{H+1/2-\delta}} \left(\frac{t}{t+s}\right)^{1/2-H} \left(1 - \left(\frac{t}{t+s}\right)^\delta\right) ds \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \stackrel{(4.25)}{\leq} \\
& \stackrel{(4.25)}{\leq} \int_0^T \frac{ds}{s^{H+1/2-\delta}} \left[\int_0^T x^2(t+s) \left(\frac{t}{t+s}\right)^{1-2H} \left(1 - \left(\frac{t}{t+s}\right)^\delta\right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \left(\sup_{y \in (0,1)} y^{1-2H} (1-y^\delta)^2 \right) \int_0^T \frac{ds}{s^{H+1/2-\delta}} \left[\int_0^T x^2(t+s) dt \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.36)
\end{aligned}$$

В останньому виразі супремум досягається при $y^\delta = \frac{1-2H}{1-2H+2\delta}$. Тому праву частину (4.36) оцінимо зверху виразом

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1-2H}{1-2H+2\delta} \right)^{\frac{1-2H}{\delta}} \left(\frac{2\delta}{1-2H+2\delta} \right)^2 \int_0^T \frac{ds}{s^{H+1/2-\delta}} \left[\int_0^T x^2(t+s) dt \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \frac{4\delta^2}{(1-2H)^2} \int_0^T \frac{ds}{s^{H+1/2-\delta}} \|x\|_{L_2[0,T]}.
\end{aligned}$$

Застосовуючи аналогічні міркування до оцінки інтеграла $\|\tilde{U}_2(\delta, x)\|_{L_2[0,T]}$, отримаємо

$$\|\tilde{U}_2(\delta, x)\|_{L_2[0,T]} \leq \frac{4\delta^2}{(1-2H)^2} \int_0^T \frac{ds}{s^{H+1/2}} \|x\|_{L_2[0,T]}.$$

У підсумку, неперервність (4.27) операторів $K_T^{H,*}$ також справджується. \square

Тепер розглянемо поведінку операторів $K_0^{H,*}$ та $K_T^{H,*}$ в точці $H = 1/2$. Неперервності за нормою не очікуємо, оскільки її нема і для дробових інтегралів, згідно з теоремою 2.6 із [91], тому доведемо поточкову збіжність. Нагадаємо, що оператори $K_0^{\frac{1}{2},*}$ та $K_T^{\frac{1}{2},*}$ є тотожними.

Лема 4.9. Для будь-якого $x \in L_2[0, T]$

$$\|K_0^{H,*}x - x\|_{L_2[0,T]} \rightarrow 0, \text{ та } \|K_T^{H,*}x - x\|_{L_2[0,T]} \rightarrow 0, \text{ якщо } H \uparrow 1/2.$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що $C_1(H) \rightarrow 1$ при $H \uparrow \frac{1}{2}$. Далі,

$$\begin{aligned} |K_0^{H,*}x(t) - x(t)| &= \left| \sqrt{C_2(H)}t^{H-1/2} \int_0^t \frac{z^{1/2-H}}{(t-z)^{H+1/2}}x(z)dz - x(t) \right| \leq \\ &\leq \frac{C_1(H)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)}t^{H-1/2} \left| \int_0^t \frac{z^{1/2-H}}{(t-z)^{H+1/2}}(x(z) - x(t))dz \right| + \\ &\quad + |x(t)| \left| \sqrt{C_2(H)}t^{H-1/2} \int_0^t \frac{z^{1/2-H}}{(t-z)^{H+1/2}}dz - 1 \right| \leq \\ &\leq \frac{C_1(H)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)} \int_0^t \frac{|x(z) - x(t)|}{(t-z)^{H+1/2}}dz + \\ &\quad + |x(t)| \left| t^{\frac{1}{2}-H} \frac{C_1(H)B\left(\frac{3}{2}-H, \frac{1}{2}-H\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)} - 1 \right|. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Норма першого інтеграла $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)} \int_0^t \frac{|x(z)-x(t)|}{(t-z)^{H+1/2}}dz$ прямує до нуля при $H \uparrow \frac{1}{2}$, як показано у доведенні теореми 2.6 із [91]. Оскільки

$$\frac{C_1(H)B\left(\frac{3}{2}-H, \frac{1}{2}-H\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)} = C_1(H) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)}{\Gamma(2-2H)} \rightarrow 1, H \uparrow \frac{1}{2},$$

то норма другого доданка у (4.37) прямує до нуля внаслідок теореми Лебега про мажоровану збіжність.

Аналогічна до (4.37) нерівність для $K_T^{H,*}$ має вигляд

$$\begin{aligned} |K_T^{H,*}x(T-t) - x(T-t)| &= \\ &= \left| \sqrt{C_2(H)} \int_{T-t}^T \frac{((T-t)/z)^{\frac{1}{2}-H}x(z)}{(z-T+t)^{H+\frac{1}{2}}}dz - x(T-t) \right| = \\ &= \left| \sqrt{C_2(H)}(T-t)^{\frac{1}{2}-H} \int_0^t \frac{(T-y)^{H-\frac{1}{2}}x(T-y)}{(t-y)^{H+\frac{1}{2}}}dy - x(T-t) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C_1(H)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)} \left| \int_0^t \frac{(T-t)^{\frac{1}{2}-H}}{(T-y)^{\frac{1}{2}-H}} \frac{x(T-y) - x(T-t)}{(t-y)^{H+1/2}} dy \right| + \\
&+ |x(T-t)| \left| \sqrt{C_2(H)} (T-t)^{\frac{1}{2}-H} \int_0^t \frac{(T-y)^{H-\frac{1}{2}}}{(t-y)^{H+\frac{1}{2}}} dy - 1 \right| \leq \\
&\leq \frac{C_1(H)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)} \int_0^t \frac{|x(T-z) - x(T-t)|}{(t-z)^{H+1/2}} dz + \\
&+ |x(t)| \left| C_1(H) (T-t)^{\frac{1}{2}-H} I_{0+}^{\frac{1}{2}-H} [(T-y)^{H-\frac{1}{2}}](t) - 1 \right|. \quad (4.38)
\end{aligned}$$

$L_2[0, T]$ — норма першого інтеграла із (4.38) прямує до нуля, аналогічно до норми першого інтеграла правої частини (4.37). Позначимо через $\mathbf{1}(\cdot)$ сталу функцію зі значенням 1. Щодо другого доданка правої частини (4.38) запишемо нерівність

$$\begin{aligned}
&\left| C_1(H) (T-t)^{\frac{1}{2}-H} I_{0+}^{\frac{1}{2}-H} [(T-y)^{H-\frac{1}{2}}](t) - 1 \right| \leq \left| C_1(H) I_{0+}^{\frac{1}{2}-H} [\mathbf{1}](t) - 1 \right| + \\
&+ C_1(H) \left| (T-t)^{\frac{1}{2}-H} I_{0+}^{\frac{1}{2}-H} [(T-y)^{H-\frac{1}{2}}](t) - I_{0+}^{\frac{1}{2}-H} [\mathbf{1}](t) \right|. \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Перший доданок прямує до нуля поточково, оскільки

$$I_{0+}^{\frac{1}{2}-H} [\mathbf{1}](t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)} t^{1/2-H}.$$

Другий доданок можна обмежити зверху виразом

$$\begin{aligned}
&\frac{C_1(H)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)} \int_0^t \left| \left(\frac{T-t}{T-y} \right)^{\frac{1}{2}-H} - 1 \right| \frac{dy}{(t-y)^{H+\frac{1}{2}}} = \\
&= \frac{C_1(H)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)} \int_0^t \left(1 - \left(\frac{T-t}{T-y} \right)^{\frac{1}{2}-H} \right) \frac{dy}{(t-y)^{H+\frac{1}{2}}} \leq \\
&\leq \frac{C_1(H)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)} \int_0^t \left(1 - \frac{(T-t)^{\frac{1}{2}-H}}{T^{\frac{1}{2}-H}} \right) \frac{dy}{(t-y)^{H+\frac{1}{2}}} = \\
&= \frac{C_1(H) t^{\frac{1}{2}-H}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)} \left(1 - \frac{(T-t)^{\frac{1}{2}-H}}{T^{\frac{1}{2}-H}} \right),
\end{aligned}$$

що збігається до нуля при $H \uparrow \frac{1}{2}$. Таким чином, $L_2[0, T]$ -норма лівої частини (4.39) прямує до 0 за теоремою Лебега про мажоровану збіжність. Підсумовуючи викладені оцінки, отримуємо справедливність твердження леми. \square

Теорема 4.2. 1) Оператор $A_H = K_T^{H,*} K_0^{H,*}$ є неперервним за нормою відносно H на інтервалі $(0, \frac{1}{2})$. Тобто,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|A_H - A_{H \pm \delta}\| = 0, H \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

2) Крім того для будь-якого $x \in L_2[0, T]$

$$\lim_{H \rightarrow 1/2^-} \|A_H x - x\|_{L_2[0, T]} = 0. \quad (4.40)$$

Доведення. 1) Нехай $H \in (0, \frac{1}{2})$. Тоді для $x \in L_2[0, T]$ маємо

$$\begin{aligned} \|A_H x - A_{H+\delta} x\|_{L_2[0, T]} &= \|K_T^{H+\delta,*} K_0^{H+\delta,*} x - K_T^{H,*} K_0^{H,*} x\|_{L_2[0, T]} \leq \\ &\leq \|K_T^{H+\delta,*} K_0^{H+\delta,*} x - K_T^{H,*} K_0^{H+\delta,*} x\|_{L_2[0, T]} + \\ &+ \|K_T^{H,*} K_0^{H+\delta,*} x - K_T^{H,*} K_0^{H,*} x\|_{L_2[0, T]}. \end{aligned}$$

Згідно з лемою 4.8 справедлива наступна оцінка.

$$\begin{aligned} &\|K_T^{H+\delta,*} K_0^{H+\delta,*} x - K_T^{H,*} K_0^{H+\delta,*} x\|_{L_2[0, T]} \\ &\leq \|K_T^{H+\delta,*} - K_T^{H,*}\| \|K_0^{H+\delta,*} x\|_{L_2[0, T]} \\ &= \|K_T^{H+\delta,*} - K_T^{H,*}\| \sqrt{C_2(H+\delta)} \\ &\quad \times \left[\int_0^T \left(\int_0^t \frac{t^{H+\delta-1/2} z^{1/2-H-\delta}}{(t-z)^{H+\delta+1/2}} x(s) ds \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|K_T^{H+\delta,*} - K_T^{H,*}\| \sqrt{C_2(H+\delta)} \Gamma\left(\frac{1}{2} - H - \delta\right) \|I_{0+}^{\frac{1}{2}-H-\delta} |x|\|_{L_2[0, T]} \stackrel{(2.3)}{\leq} \\ &\stackrel{(2.3)}{\leq} \|K_T^{H+\delta,*} - K_T^{H,*}\| \sqrt{C_2(H+\delta)} \frac{T^{1/2-H-\delta}}{1/2 - H - \delta} \|x\|_{L_2[0, T]}, \end{aligned}$$

Аналогічно за допомогою (2.4) отримуємо, що

$$\begin{aligned}
& \|K_T^{H,*} K_0^{H+\delta,*} x - K_T^{H,*} K_0^{H,*} x\|_{L_2[0,T]} = \\
& = \sqrt{C_2(H)} \left[\int_0^T \left(\int_t^T \frac{t^{1/2-H-\delta} z^{H+\delta-1/2}}{(z-t)^{H+\delta+1/2}} \left(K_0^{H+\delta,*} x - K_0^{H,*} x \right) (s) ds \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \sqrt{C_2(H)} \frac{T^{1/2-H}}{1/2-H} \left\| K_0^{H+\delta,*} x - K_0^{H,*} x \right\|_{L_2[0,T]} \leq \\
& \leq \left\| K_0^{H+\delta,*} - K_0^{H,*} \right\| \sqrt{C_2(H)} \frac{T^{1/2-H}}{1/2-H} \|x\|_{L_2[0,T]}.
\end{aligned}$$

Тому на підставі результатів леми 4.8

$$\frac{\|A_H x - A_{H+\delta} x\|_{L_2[0,T]}}{\|x\|_{L_2[0,T]}} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0.$$

2) Розглянемо тепер неперервність у точці $H = 1/2$. Маємо оцінки

$$\begin{aligned}
\|A_H x - x\|_{L_2[0,T]} & = \|K_T^{H,*} K_0^{H,*} x - x\|_{L_2[0,T]} \leq \\
& \leq \|K_T^{H,*} K_0^{H,*} x - K_T^{H,*} x\|_{L_2[0,T]} + \|K_T^{H,*} x - x\|_{L_2[0,T]}.
\end{aligned}$$

Доданок $\|K_T^{H,*} x - x\|_{L_2[0,T]}$ збігається до нуля за лемою 4.9. Внаслідок нерівності $|[K_T^{H,*} \varphi](t)| \leq C_1(H) [I_{T-}^{\frac{1}{2}-H} |\varphi|](t), t \in (0, T)$, для будь-якого φ та оцінки (2.4), маємо

$$\begin{aligned}
\|K_T^{H,*} K_0^{H,*} x - K_T^{H,*} x\|_{L_2[0,T]} & = \|K_T^{H,*} (K_0^{H,*} x - x)\|_{L_2[0,T]} \leq \\
& \leq C_1(H) \left\| I_{T-}^{\frac{1}{2}-H} |K_0^{H,*} x - x| \right\|_{L_2[0,T]} \leq \frac{C_1(H) T^{\frac{1}{2}-H}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)} \|K_0^{H,*} x - x\|_{L_2[0,T]}.
\end{aligned}$$

Останній вираз прямує до нуля при $H \uparrow 1/2$ завдяки твердженню леми 4.9. Отже, збіжність (4.40) доведена. \square

Зауваження 4.3. Нехай $H = 1/2$, тоді $\alpha_0(t) = 1/2, t \in [0, T]$, є мінімізатором функціонала $\mathbf{H}(\cdot)$ на просторі $L_2[0, T]$.

Справді, у цьому випадку $K_0^{\frac{1}{2},*} x = x$, та $K_T^{\frac{1}{2},*} x = x, x \in L_2[0, T]$. Тоді рівняння (4.9) набуває вигляду $(\alpha(t) - 1)f(t) + [K_T^{\frac{1}{2},*} K_0^{\frac{1}{2},*} (\alpha f)](t) = 0$, або $(\alpha(t) - 1)f(t) + \alpha(t)f(t) = 0$. Маємо очевидний розв'язок $\alpha_0(t) = \frac{1}{2}, t \in [0, T]$.

Теорема 4.3. Нехай α_H є мінімизатором функціонала $\mathbf{H}(\cdot)$ для індексу Хюрста H . Якщо $H \in (0, 0.5)$, то $\|\alpha_{H+\delta}f - \alpha_H f\|_{L_2[0,T]} \rightarrow 0$, при $\delta \rightarrow 0$, та $\|\alpha_H f - \frac{1}{2}f\|_{L_2[0,T]} \rightarrow 0$, при $H \uparrow \frac{1}{2}$.

Доведення. Нехай $H + \delta, H < \frac{1}{2}$, тоді $g_H(t) = \alpha_H(t)f(t), t \in [0, T]$, є розв'язком рівняння (4.9), а A_H — інтегральний оператор $A_H : L_2[0, T] \rightarrow L_2[0, T]$, що задається ядром \varkappa_H (4.16). Доведемо, що $g_{H+\delta} \rightarrow g_H$ в $L_2[0, T]$ при $\delta \rightarrow 0$. Оскільки для довільної $f \in L_2[0, T]$ існує єдиний розв'язок g_H , то визначимо обернений оператор $(I + A_H)^{-1}$ такий, що $g_H = (I + A_H)^{-1}f$. При цьому

$$\|f\|_{L_2[0,T]}^2 = \langle g_H + A_H g_H, g_H + A_H g_H \rangle_{L_2[0,T]} \geq \|g_H\|_{L_2[0,T]}^2$$

в силу нерівності $\langle A_H g_H, g_H \rangle_{L_2[0,T]} \geq 0$. Тому $\|(I + A_H)^{-1}\| \leq 1$. Тепер

$$g_{H+\delta} + A_{H+\delta}g_{H+\delta} = f$$

та

$$\begin{aligned} \|g_{H+\delta} - g_H\|_{L_2[0,T]} &= \|(I + A_{H+\delta})^{-1}f - (I + A_H)^{-1}f\|_{L_2[0,T]} \leq \\ &\leq \|(I + A_{H+\delta})^{-1} - (I + A_H)^{-1}\| \|f\|_{L_2[0,T]} = \\ &= \|(I + A_{H+\delta})^{-1}(A_{H+\delta} - A_H)(I + A_H)^{-1}\| \|f\|_{L_2[0,T]} \leq \\ &\leq \|A_{H+\delta} - A_H\| \|f\|_{L_2[0,T]} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\delta \rightarrow 0$ згідно з теоремою 4.2.

Друге твердження доводиться аналогічно, також із використанням теореми 4.2. Справді,

$$\begin{aligned} \left\| \alpha_H f - \frac{1}{2}f \right\|_{L_2[0,T]} &= \frac{1}{2} \|(I + A_H)^{-1}[2f] - f\|_{L_2[0,T]} \\ &= \frac{1}{2} \|(I + A_H)^{-1}(2f - (I + A_H)f)\|_{L_2[0,T]} \\ &= \frac{1}{2} \|(I + A_H)^{-1}(f - A_H f)\|_{L_2[0,T]} \\ &\leq \frac{1}{2} \|A_H f - f\|_{L_2[0,T]} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $H \uparrow \frac{1}{2}$. □

Щодо неперервності норми розв'язку α_0 маємо очевидний наслідок з теореми 4.3.

Наслідок 4.1. *Нехай α_H є мінімізатором функціонала $\mathbf{H}(\cdot)$ для індексу Хюрста H та $\inf_{t \in (0, T)} |f(t)| > 0$. Якщо $H \in (0, 0.5)$, то $\|\alpha_{H+\delta} - \alpha_H\|_{L_2[0, T]} \rightarrow 0$, при $\delta \rightarrow 0$, та $\|\alpha_H - \frac{1}{2}\|_{L_2[0, T]} \rightarrow 0$, при $H \uparrow \frac{1}{2}$.*

4.3 Висновки

У четвертому розділі отримано мінімум ентропійного функціонала $\mathbf{H}(\tilde{Q}|P)$. Зокрема, розв'язок задачі мінімізації обчислено як розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма (підрозділ 4.2.1), а також досліджено L_2 -норму розв'язку (підрозділ 4.2.2). У підрозділі 4.2.3 розв'язано задачу мінімізації з обмеженнями і знайдено сталу точку мінімуму, яка є правильним поділом. Досліджено також точки максимуму, за наявності обмежень. У підрозділі 4.2.4 доведено неперервність зважених інтегральних операторів Рімана – Ліувілля, а також неперервність розв'язку задачі мінімізації як функції параметра H .

Розділ 5

Наближений розв'язок інтегральних рівнянь з ядром із додатковою сингулярністю

5.1 Вступ

Нехай $H \in (0, 1)$. В попередньому розділі 4 було розглянуто задачу оптимізації ентропії для суміші стандартного і дробового броунівських рухів у випадку $H \in (0, \frac{1}{2})$, яка зводилась до пошуку розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Рівняння такого ж типу виникає і у випадку $H \in (1/2, 1)$ при пошуку розв'язку задачі оптимізації малого відхилення для змішаного дробового броунівського руху зі зсувом, яка була розглянута у розділі 2.

Таким чином, обидві задачі оптимізації зсуву зводяться до розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, яке можна представити у вигляді

$$x(t) + C_2(H) \int_0^T \kappa_H(t, v) x(v) dv = f(t), \quad (5.1)$$

де

$$\kappa_H(t, v) = \begin{cases} (tv)^{1/2-H} \int_{t \vee v}^T (z-t)^{-1/2-H} z^{2H-1} (z-v)^{-1/2-H} dz, & H \in (0, 1/2), \\ (tv)^{H-1/2} \int_0^{t \wedge v} (t-z)^{H-3/2} z^{1-2H} (v-z)^{H-3/2} dz, & H \in (1/2, 1). \end{cases} \quad (5.2)$$

та $C_2(H) = \left(\frac{C_1(H)}{\Gamma(|H-1/2|)} \right)^2$.

Розглянемо більш детально рівняння (5.1) і в наступній лемі доведемо, що ядро (5.2) можна значно спростити.

Нехай $B(\alpha, \beta)$ – бета-функція, а $B(x, \alpha, \beta)$ – неповна бета-функція, яку визначено формулою $B(x, \alpha, \beta) = \int_0^x y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy$, $\alpha, \beta > 0$ на проміжку $x \in [0, 1]$.

Лема 5.1. Ядро (5.2) дорівнює

(i) для $H \in (0, 1/2)$

$$\kappa_H(t, v) = \frac{1}{|t-v|^{2H}} B\left(\frac{T/(t \vee v) - 1}{T/(t \wedge v) - 1}, \frac{1}{2} - H, 2H\right), \quad t, v \in [0, T] \quad (5.3)$$

де чисельник є обмеженим на проміжку $[0, T]^2$, проте не має границі в точках $(0, 0)$ та (T, T) .

(ii) для $H \in (1/2, 1)$

$$\kappa_H(t, v) = \frac{1}{|t-v|^{2-2H}} B\left(H - \frac{1}{2}, 2 - 2H\right), \quad t, v \in [0, T]. \quad (5.4)$$

Доведення. Пункт (i): легко бачити, що ядро κ_H є симетричним, тому достатньо розглянути лише випадок $v < t$. Тоді

$$\begin{aligned} \kappa_H(t, v) &= (tv)^{\frac{1}{2}-H} \int_t^T (z-t)^{-\frac{1}{2}-H} z^{2H-1} (z-v)^{-\frac{1}{2}-H} dz \\ &= (tv)^{\frac{1}{2}-H} \int_t^T \left(1 - \frac{t}{z}\right)^{-\frac{1}{2}-H} \left(1 - \frac{v}{z}\right)^{-\frac{1}{2}-H} \frac{dz}{z^2}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

У свою чергу, використовуючи заміну змінних $\frac{z-v}{z} = \frac{t-v}{t(1-x)}$ та формули

$$\frac{1}{z} = \frac{v-tx}{vt(1-x)}, \quad \frac{dz}{z^2} = \frac{(t-v)dx}{vt(1-x)^2}, \quad 1 - \frac{t}{z} = \frac{(t-v)x}{v(1-x)}$$

перетворимо останній інтеграл в (5.5) та отримаємо

$$\begin{aligned}
\kappa_H(t, v) &= (tv)^{\frac{1}{2}-H} \int_t^T \left(1 - \frac{t}{z}\right)^{-\frac{1}{2}-H} \left(1 - \frac{v}{z}\right)^{-\frac{1}{2}-H} \frac{dz}{z^2} \\
&= (tv)^{\frac{1}{2}-H} \int_0^{\frac{v(T-t)}{t(T-v)}} \left(\frac{(t-v)x}{v(1-x)}\right)^{-\frac{1}{2}-H} \left(\frac{t-v}{t(1-x)}\right)^{-\frac{1}{2}-H} \frac{t-v}{vt(1-x)^2} dx \\
&= (t-v)^{-2H} \int_0^{\frac{v(T-t)}{t(T-v)}} x^{-\frac{1}{2}-H} (1-x)^{2H-1} dx \\
&= \frac{1}{(t-v)^{2H}} B\left(\frac{v(T-t)}{t(T-v)}, \frac{1}{2} - H, 2H\right).
\end{aligned}$$

Випадок (ii): Очевидно, що ядро κ_H є симетричним і невід'ємним. Отже, досить розглянути лише випадок $t < v$. Тоді

$$\begin{aligned}
\kappa_H(t, v) &= (tv)^{H-\frac{1}{2}} \int_0^t (t-z)^{H-\frac{3}{2}} z^{1-2H} (v-z)^{H-\frac{3}{2}} dz \\
&= (tv)^{H-\frac{1}{2}} \int_0^t \left(\frac{t}{z} - 1\right)^{H-\frac{3}{2}} \left(\frac{v}{z} - 1\right)^{H-\frac{3}{2}} \frac{dz}{z^2}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Введемо аналогічну заміну змінних $\frac{v-z}{z} = \frac{v-t}{t(1-x)}$ та отримаємо наступні рівності

$$\frac{1}{z} = \frac{v-tx}{vt(1-x)}, \quad \frac{dz}{z^2} = \frac{(t-v)dx}{vt(1-x)^2}, \quad \frac{t}{z} - 1 = \frac{(v-t)x}{v(1-x)}.$$

Для другого інтеграла в (5.6) маємо

$$\begin{aligned}
\kappa_H(t, v) &= (tv)^{H-\frac{1}{2}} \int_0^t \left(\frac{t}{z} - 1\right)^{H-\frac{3}{2}} \left(\frac{v}{z} - 1\right)^{H-\frac{3}{2}} \frac{dz}{z^2} \\
&= (tv)^{H-\frac{1}{2}} \int_1^0 \left(\frac{(v-t)x}{v(1-x)}\right)^{H-\frac{3}{2}} \left(\frac{v-t}{t(1-x)}\right)^{H-\frac{3}{2}} \frac{t-v}{vt(1-x)^2} dx \\
&= (t-v)^{2H-2} \int_0^1 x^{H-\frac{3}{2}} (1-x)^{1-2H} dx = \frac{1}{(t-v)^{2-2H}} B\left(H - \frac{1}{2}, 2 - 2H\right).
\end{aligned}$$

Лему доведено. □

5.2 Теорема про наближення інтегрального оператора

У попередньому підрозділі 5.1 у лемі 5.1 було встановлено, що ядро (5.2) рівняння (5.1) має певні особливості, а саме, при $H \in (0, \frac{1}{2})$ порушується неперервність чисельника в деяких точках, попри його обмеженість. Це означає, що стандартні методи пошуку розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду не можуть бути застосовані. а тому, виникає ідея наблизити чисельник неперервною функцією та застосувати чисельні методи вже до ядра з модифікованим, тобто неперервним, чисельником.

Почнемо з дуже простого допоміжного результату апроксимації для послідовності операторів. Нехай \mathcal{H} – дійсний гільбертів простір.

Лема 5.2. *Нехай $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – компактний додатний оператор, а $A_n, n \geq 1 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – послідовність компактних операторів зі спектром $\sigma(A_n)$ таким, що $\|A - A_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.*

Тоді спектр $\sigma(A_n)$ асимптотично вкладений в \mathbb{R}^+ , у тому сенсі, що

$$\text{dist}(\sigma(A_n), \mathbb{R}^+) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доведення. Доведемо від супротивного: нехай існує деяка стала $\beta > 0$ та підпослідовність $\{n_k, k \geq 1\}$ така, що $n_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ та

$$\text{dist}(\sigma(A_{n_k}), \mathbb{R}^+) \geq \beta > 0, k \geq 1.$$

Тоді існує $\lambda_{n_k} \in \sigma(A_{n_k})$ така, що $\text{dist}(\lambda_{n_k}, \mathbb{R}^+) \geq \frac{\beta}{2}, k \geq 1$. Однак нехай $\lambda_{n_k} \in \sigma(A_{n_k})$ – довільна послідовність власних значень операторів $A_{n_k}, k \geq 1$, та нехай

$$A_{n_k} x_{n_k} = \lambda_{n_k} x_{n_k}, \|x_{n_k}\| = 1, k \geq 1.$$

Запишемо такі очевидні рівності:

$$Ax_{n_k} = \lambda_{n_k} x_{n_k} + (A - A_{n_k})x_{n_k},$$

звідки

$$\langle Ax_{n_k}, x_{n_k} \rangle = \lambda_{n_k} + \langle (A - A_{n_k})x_{n_k}, x_{n_k} \rangle.$$

Крім того,

$$|\langle (A - A_{n_k})x_{n_k}, x_{n_k} \rangle| \leq \|A - A_{n_k}\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

та $\langle Ax_{n_k}, x_{n_k} \rangle \geq 0$, звідки одразу випливає, що $\text{dist}(\lambda_{n_k}, \mathbb{R}^+) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Отримана суперечність доводить теорему. \square

Тепер застосуємо лему 5.2 до послідовності інтегральних операторів у просторі $L_2([0, T])$ для деякого $T > 0$. А саме, розглянемо інтегральний оператор A визначений його функцією ядра $K(t, s)$ за формулою

$$(Ax)(t) = \int_0^T K(t, s)x(s)ds, 0 \leq t \leq T, \quad (5.7)$$

де x береться з деякого простору функцій, визначених на $[0, T]$, і цей простір буде вказано пізніше. Припускаємо, що K має сингулярність, точніше, має вигляд

$$K(t, s) = \frac{L(t, s)}{|t - s|^\nu} \quad (5.8)$$

де L – обмежена функція на $[0, T]^2$ і $0 < \nu < 1$. Згадаємо наступне загальне твердження з [56, стор.397, п. 6.4].

Твердження 5.1. *Нехай ядро K оператора A з (5.7) задовольняє наступним умовам: існують такі $C_1, C_2 > 0$, $r_1 > 1, r_2 > 1$ та $p > 1$, що $p - r_1(p - 1) < r_2 < p$ і для яких*

$$\int_0^T |K(t, s)|^{r_1} ds < C_1 \text{ та } \int_0^T |K(t, s)|^{r_2} dt < C_2.$$

Тоді оператор A є компактним оператором $L_p([0, T]) \rightarrow L_p([0, T])$ з нормою

$$\|A\| \leq C_1^{\frac{p-r_2}{pr_1}} C_2^{\frac{1}{p}}.$$

Наслідок 5.1. Розглянемо інтегральний оператор (5.7) з ядром (5.8), де L — обмежена функція на $[0, T]^2$ та $0 < \nu < 1$. Тоді покладемо $r_1 = r_2 = \frac{1}{\nu} - \delta > 1$ для будь-якого $0 < \delta < \frac{1}{\nu} - 1$, а також ми можемо вибрати δ таким чином, щоб $\frac{1}{\nu} - \delta < 2$. Покладемо також $p = 2$ і всі умови твердження 5.1 виконуються. Таким чином, A є компактним оператором $L_2([0, T]) \rightarrow L_2([0, T])$.

Тепер розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$x(t) + (Ax)(t) = g(t), \quad t \in [0, T], \quad (5.9)$$

де $g(t) \in L_2([0, T])$ — задана функція, а інтегральний оператор A має вигляд (5.7), а ядро взяте з (5.8). Стандартною є ситуація, коли функція L неперервна. Однак, далі ми розглянемо ситуацію, коли функція L буде обмеженою, проте вона може мати скінченну кількість розривів, тобто точок, в яких функція L не має границі. Такі ядра ми назвемо ядрами з додатковою сингулярністю. У зв'язку з цим доведемо допоміжний результат щодо можливості наближення ядра L відповідними ядрами з неперервними чисельниками.

Лема 5.3. Нехай функція $L = \{L(t, s), t, s \in [0, T]\}$ обмежена, $|L(t, s)| \leq L$, і неперервна м.с. крім скінченної кількості точок. Нехай

$$K(t, s) = L(t, s)|t - s|^{-\nu}, \\ K_n(t, s) = L_n(t, s)|t - s|^{-\nu}, \quad t, s \in [0, T], \quad \nu \in (0, 1).$$

Зафіксуємо $0 < \delta < 1/\nu$. Тоді існує послідовність обмежених неперервних функцій $L_n = \{L_n(t, s), t, s \in [0, T]\}$ (для них можна взяти ту саму сталу L) таку, що

$$\int_0^T |K(t, s) - K_n(t, s)|^{\frac{1}{\nu} - \delta} dt < C_{1,n}, \quad \text{та} \quad \int_0^T |K(t, s) - K_n(t, s)|^{\frac{1}{\nu} - \delta} ds < C_{2,n},$$

де $C_{1,n}, C_{2,n}$ залежить від δ, L та $C_{1,n}, C_{2,n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доведення. Опишемо побудову неперервної функції L_n . Нехай $x_0 = (t_0, s_0)$ — одна з точок розриву, m — загальна кількість таких точок, і нехай число n

є достатньо великим. Кожна точка розриву, зокрема, x_0 , може бути оточена досить маленькою замкнутою кулею

$$B(x_0, r_n) = \{y \in [0, T] : \|y - x_0\|_{\max} \leq r_n\},$$

де $r_n = 1/n$ та $\|\cdot\|_{\max}$ – максимум норма в евклідовому просторі. Припустимо, що $L_n = L$ за межами об'єднання цих малих куль отже, необхідно визначити L_n лише всередині кожної кулі. Покладемо для $x = (t, s)$ та

$$L_n(x) = \frac{\|x - x_0\|_{\max}}{r_n} L \left(\frac{r_n(x - x_0)}{\|x - x_0\|_{\max}} + x_0 \right), \quad x \in B(x_0, r_n). \quad (5.10)$$

Діапазон значень L_n не перевищує діапазон значень L . Точка $\frac{r_n(x-x_0)}{\|x-x_0\|_2} + x_0$ розташована на квадраті

$$S = \{y \in [0, T]^2 : \|y - x_0\|_{\max} = r_n\},$$

тому кожна L_n є неперервною функцією, $L_n \in C([0, T]^2)$. Більше того,

$$\sup_{x \in B(x_0, r_n)} |L_n(x)| \leq \sup_{x \in S(x_0, r_n)} |L(x)|,$$

і

$$\sup_{x \in [0, T]^2} |L_n(x)| \leq \sup_{x \in [0, T]^2} |L(x)|.$$

Таким чином, L_n обмежені.

Тепер позначимо через $D_n \subset [0, T]$ проекцію об'єднання цих малих куль, що оточують точки розриву L , на $[0, T]$. Очевидно, міра Лебега D_n не перевищує $\frac{m}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тому,

$$\begin{aligned} C_{1,n} &:= \sup_{s \in [0, T]} \int_0^T |K(t, s) - K_n(t, s)|^{\frac{1}{\nu} - \delta} dt \\ &\leq \sup_{(t,s) \in [0, T]^2} |L(t, s)| \sup_{s \in [0, T]} \int_{D_n} |t - s|^{-1 + \nu \delta} dt \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, та $C_{2,n}$ можуть бути введені та розглянуті аналогічним чином, звідки випливає доведення. \square

Зауваження 5.1. Звичайно, можуть бути різні способи побудови функцій L_n . Далі для нас буде важливим побудувати їх таким чином, щоб апроксимуючі оператори були самоспряженими.

Зауваження 5.2. Застосуємо твердження 5.1 та наслідок 5.1 до оператора

$$(A_n - A)x := \int_0^T [K_n(\cdot, s) - K(\cdot, s)]x(s)ds, \quad x \in L_2([0, T])$$

при $(\frac{1}{\nu} - 2)_+ < \delta < \frac{1}{\nu} - 1$. Тоді $A_n - A$ – компактний оператор $L_2([0, T]) \rightarrow L_2([0, T])$ з $\|A_n - A\| \leq C_{1,n}^{\frac{\nu}{1-\delta\nu} - \frac{1}{2}} C_{2,n}^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$.

Тепер повернемося до рівняння (5.9) та сформулюємо деяке/додаткове припущення щодо інтегрального оператора A .

Лема 5.4. Нехай інтегральний оператор A компактний $L_2([0, T]) \rightarrow L_2([0, T])$ і додатний, зокрема, він є самоспряженим, і нехай $g \in L_2([0, T])$. Тоді існує єдина функція $x = x(t)$, $t \in [0, T]$, $x \in L_2([0, T])$, яка задовольняє (5.9).

Доведення. Досить згадати, що всі власні значення оператора A є дійсними та невід'ємними, тому відповідне однорідне рівняння має лише тривіальний розв'язок, а доведення безпосередньо випливає з альтернативи Фредгольма. \square

Тепер встановимо основний результат цього розділу, а саме теорему про наближення розв'язку інтегрального рівняння з ядром, що містить додаткову сингулярність, розв'язками інтегральних рівнянь, ядра яких мають тип (5.8), але чисельник неперервний.

Теорема 5.1. Нехай $K(t, s)$ – ядро, визначене в (5.8), де чисельник $L(t, s)$ має такі властивості:

- (i) L обмежений і симетричний.
- (ii) L неперервний, за винятком скінченної кількості точок.
- (iii) L є додатно визначеним ядром.

Нехай $x \in L_2([0, T])$ — єдиний розв'язок рівняння (5.9). Тоді послідовність функцій $L_n(t, s)$, що задовольняє умовам леми 5.3 може бути обрана таким чином, щоб відповідні інтегральні оператори були самоспряженими, тоді для досить великих $n \geq 1$ рівняння

$$\begin{aligned} x_n(t) + (A_n x)(t) &= g(t), \\ (A_n x)(t) &= \int_0^T K_n(t, s)x(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T, \\ K_n(t, s) &= \frac{L_n(t, s)}{|t - s|^\nu}, \end{aligned}$$

має єдиний розв'язок $x_n \in L_2([0, T])$, та

$$\|x_n - x\|_{L_2([0, T])} \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Доведення. Виберемо L_n відповідно до леми 5.3. Тоді для відповідних інтегральних операторів, згідно з лемою 5.3 та твердженням 5.1 маємо, що $\|A - A_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Покажемо, що L_n є симетричним, звідки випливає, що A_n самоспряжений. Нехай D — об'єднання точок розриву L . Позначивши $x^* = (x_2, x_1)$ для $x = (x_1, x_2) \in [0, T]^2$ ми із симетрії L маємо, що якщо $x_0 \in D$, то й $x_0^* \in D$. Тоді з (5.10) маємо $L_n(x^*) = L(x) = L(x^*) = L_n(x^*)$ для всіх точок x за межами $\cup_{x_0 \in D} B(x_0, r_n)$. Припустимо, що n є достатньо великим, щоб усі $B(x_0, r_n), x_0 \in D$ не перетиналися. Нехай $x \in B(x_0, r_n)$ для деякого $x_0 \in D$, тоді $x^* \in B(x_0^*, r_n)$ і з побудови L_n випливає, що

$$\begin{aligned} L_n(x^*) &= \frac{\|x^* - x_0^*\|_{\max}}{r_n} L \left(\frac{r_n(x^* - x_0^*)}{\|x^* - x_0^*\|_{\max}} + x_0^* \right) \\ &= \frac{\|x - x_0\|_{\max}}{r_n} L \left(\left(\frac{r_n(x - x_0)}{\|x - x_0\|_{\max}} + x_0 \right)^* \right) = L_n(x). \end{aligned}$$

Згідно з лемою 5.2, спектр $\sigma(A_n)$ асимптотично вкладений в \mathbb{R}^+ . Більше того, ці оператори компактні $L_2([0, T]) \rightarrow L_2([0, T])$. Це означає, що для достатньо великих $n \geq 1$ інтегральне рівняння $x_n(t) + (A_n x)(t) = g(t)$ має

єдиний розв'язок $x_n \in L_2([0, T])$. Тепер розглянемо різницю

$$\begin{aligned} x(t) - x_n(t) &= - \int_0^T K(t, s)x(s)ds + \int_0^T K_n(t, s)x_n(s)ds \\ &= - \int_0^T [K(t, s) - K_n(t, s)]x(s)ds - \int_0^T K_n(t, s)[x(s) - x_n(s)]ds. \end{aligned}$$

Позначивши $x(t) - x_n(t) = y_n(t)$, отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма виду

$$y_n(t) + \int_0^T K_n(t, s)y_n(s)ds = P_n(t),$$

де $P_n(t) = \int_0^T [K_n(t, s) - K(t, s)]x(s)ds$. Оскільки $\|A - A_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, ми маємо, що $\|P_n\|_{L_2([0, T])} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тепер позначимо резольвентний оператор у точці λ : $R_{A_n}(\lambda) = (A_n - \lambda I)^{-1}$. Скористаємося наступним фактом (див., наприклад, [45, теорема 5.8]): нехай B самоспряжений оператор, та нехай $\lambda \in \rho(B)$, де $\rho(B) = \mathbb{R} \setminus \sigma(B)$. Тоді

$$\|R_B(\lambda)\| \leq \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(A))}. \quad (5.11)$$

У нашому випадку $\lambda = -1$, і ми знаємо, що спектр $\sigma(A_n)$ асимптотично вкладений в \mathbb{R}^+ . Тому для достатньо великих n $\|R_{A_n}(-1)\| \leq C$, і отримуємо, що

$$\|y_n\|_{L_2([0, T])} \leq C\|P_n\|_{L_2([0, T])} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Доведення завершено. \square

5.3 Чисельний розв'язок

5.3.1 Опис чисельного методу

Для пошуку чисельного розв'язку рівняння вигляду (5.9) використаємо метод, запропонований у [62] для слабо сингулярних ядер, названий в цьому

розділі методом інтегрування добутку (product-integration method). Відповідно до цього методу ми припускаємо, що ядро K з (5.8) можна розкласти на множники

$$K(t, s) = u(t, s)L(t, s),$$

де $u(t, s)$ є сингулярною в $\{(t, t), t \in (0, T)\}$, а $L(t, s)$ – неперервною функцією її аргументів. Тоді інтегральне рівняння Фредгольма другого роду записується таким чином

$$x(t) = g(t) + \int_0^T u(t, s)L(t, s)x(s)ds. \quad (5.12)$$

Основний механізм методу інтегрування добутку описаний у розділі 4.2 [62], який насправді є лінійним наближенням функцій u і L за інтегралом, що неперервно залежить від s .

Існує кілька різних модифікацій цього методу, див. напр. відповідні розділи в книгах [11, 13, 29, 31]. Зокрема, автори [29] доводять, що їхня модифікація працює для ядра виду

$$K(t, s) = u(t, s)L(t, s), t, s \in [0, T]$$

де функції $u(t, s)$ та $L(t, s)$ задовольняють наступним умовам

- (i) $L(t, s) \in C[0, T]$,
- (ii) $\int_0^T |u(t, s)|ds < \infty$,
- (iii) $\lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} \int_0^T |u(t_1, s) - u(t_2, s)|ds = 0$ рівномірно відносно t_1 та t_2 .

Наведені вище умови справедливі для ядер вигляду $u(t, s) = |t - s|^{-\nu}$, $\nu \in (0, 1)$. Отже, загальний метод інтегрування добутку працює у випадку неперервного чисельника L (а отже, і всіх його модифікацій).

З розрахункових міркувань ми обрали модифікацію, запропоновану в [79], представимо її основні кроки. Почнемо з заданого числа $N \geq 1$ рівновіддалених точок $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ та $h_i = t_{i+1} - t_i = \frac{T}{N-1}$. Використовуючи правило інтегрування добутку, маємо

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(t, s)|t-s|^{-\nu}x(s)ds \approx \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{L_i(t)(t_{i+1} - s)x_i + (s - t_i)L_{i+1}(t)x_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} |t-s|^{-\nu} ds,$$

де $L_i(t) = L(t, t_i)$ і $x_i = x(t_i)$. Тоді

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N-1} (L_i(t)x_i\psi_{i,i+1}^1(t) + L_{i+1}x_{i+1}\psi_{i,i+1}^2(t)) + g(t), \quad (5.13)$$

де зважені множники визначаються таким чином

$$\begin{aligned} \psi_{i+1,i}^1(t) &= \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - s)|t - s|^{-\nu} ds, \\ \psi_{i-1,i}^2(t) &= \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (s - t_{i-1})|t - s|^{-\nu} ds. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Підставивши $t = t_j$ в (5.13) та об'єднавши дві суми, отримаємо таку систему лінійних рівнянь для наближення інтегрального рівняння (5.3.1)

$$x_j = \sum_{i=1}^N L_{j,i} (\psi_{i,i+1,j}^1 + \psi_{i-1,i,j}^2) x_i + f_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.15)$$

де $L_{j,i} = L(t_i, t_j)$, $\psi_{i,j,k}^l = \psi_{i,j}^l(t_k)$ для $l = 1, 2$, та $f_j = f(t_j)$. У (5.15) ми вважаємо, що $\psi_{N,N+1,j}^1 = \psi_{0,1,j}^2 = 0$ для всіх j . Інтеграли в (5.14) обчислюються точно, а значення ψ_{ijk}^l обчислюються окремо для випадків $k = i$ та $k = j$.

Можна показати, що

$$\begin{aligned} \psi_{i,i+1,i}^1 &= \frac{(t_{i+1} - t_i)^{1-\nu}}{(1-\nu)(2-\nu)}, & \psi_{i,i+1,i+1}^1 &= \frac{(t_{i+1} - t_i)^{1-\nu}}{2-\nu}, \\ \psi_{i,i+1,j}^1 &= \frac{|t_{i+1} - t_j| |t_{i+1} - t_j|^{1-\nu} - |t_i - t_j|^{1-\nu}}{t_{i+1} - t_i (1-\nu)} \\ &\quad - \frac{|t_{i+1} - t_j|^{2-\nu} - |t_i - t_j|^{2-\nu}}{(2-\nu)(t_{i+1} - t_i)}, \quad j \neq i, i+1, \\ \psi_{i-1,i,i-1}^2 &= \frac{(t_i - t_{i-1})^{1-\nu}}{2-\nu}, & \psi_{i-1,i,i}^2 &= \frac{(t_i - t_{i-1})^{1-\nu}}{(1-\nu)(2-\nu)}, \\ \psi_{i-1,i,j}^2 &= \frac{|t_i - t_j|^{2-\nu} - |t_{i-1} - t_j|^{2-\nu}}{(t_i - t_{i-1})(2-\nu)} \\ &\quad - \frac{|t_j - t_{i-1}| |t_i - t_j|^{1-\nu} - |t_{i-1} - t_j|^{1-\nu}}{t_i - t_{i-1} (1-\nu)}, \quad j \neq i-1, i. \end{aligned}$$

Систему (5.15) можна записати у матричному вигляді

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{K}_N \mathbf{X}_N + \mathbf{G}_N, \quad (5.16)$$

де \mathbf{X}_N і \mathbf{G}_N – вектори, складовими яких є x_i і g_i , $i = 1, \dots, N$ відповідно, і \mathbf{K}_N – це $N \times N$ -матриця з компонентами $K_{i,j} = L_{i,j} (\psi_{j,j+1,i}^1 + \psi_{j-1,j,i}^2)$, $i, j = 1, \dots, N$. Наближений розв’язок отримано як розв’язок лінійної системи алгебраїчних рівнянь (5.16).

Опишемо тепер застосування представленого методу для пошуку розв’язку рівняння (5.1), використовуючи вигляд ядра (5.3) та (5.4) з леми 5.1 відповідно: при $H \in (0, \frac{1}{2})$

$$x(t) + C_2(H) \int_0^T \frac{L(t,v)x(v)}{|t-v|^{2H}} dv = f(t), t \in [0, T], \quad (5.17)$$

$$z L(t,v) = B \left(\frac{T/(t \vee v) - 1}{T/(t \wedge v) - 1}, \frac{1}{2} - H, 2H \right)$$

та при $H \in (\frac{1}{2}, 1)$

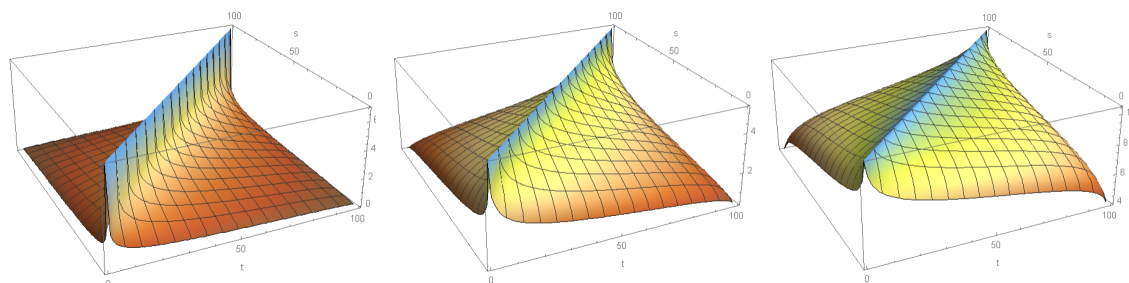
$$x(t) + C_2(H) B \left(H - \frac{1}{2}, 2 - 2H \right) \int_0^T \frac{x(v) dv}{|t-v|^{2-2H}} = f(t), t \in [0, T]. \quad (5.18)$$

Таким чином, одразу отримуємо систему рівнянь (5.15) з $L_{i,j} = 1$ у випадку $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. При $H \in (0, \frac{1}{2})$ чисельник L має додаткову сингулярність у точках $(0, 0)$ та (T, T) , тобто потрібно розв’язати систему рівнянь (5.15) з $L_{i,j} = L_n(t_i, t_j)$, де наближення L_n для L задано в (5.10). Зауважимо, що $L_n(t_i, t_j) = L(t_i, t_j)$, для $i, j \neq (1, 1)$ та $i, j \neq (N, N)$, якщо $n \geq \frac{N-1}{T}$. Покладемо у цих випадках $L_n(t_1, t_1) = L_n(t_N, t_N) = 0$. Для простоти ми будемо вважати також $n = \frac{N-1}{T}$ у подальших обчисленнях.

5.3.2 Чисельні ілюстрації

У цьому розділі наведемо декілька чисельних прикладів розв’язків рівняння (5.1), використовуючи його перетворення (5.17) та (5.18), для різних значень H і функцій f .

Спочатку зобразимо на рисунку 5.1 графік $L(t, v) = B\left(\frac{T/(t \vee v) - 1}{T/(t \wedge v) - 1}, \frac{1}{2} - H, 2H\right)$, $(t, v) \in [0, T]^2$ у випадку $H < 1/2$ для кращого розуміння сингулярності в чисельнику.



$$H = 0.1$$

$$H = 0.25$$

$$H = 0.4$$

Рисунок 5.1 – Графік чисельника $L(t, v)$ для різних H .

Приклад 5.1. Розглянемо рівняння (5.1) з лінійною функцією $f(t) = t$, $t \in [0, 1]$. Візьмемо $N = 500$, і представимо наближений розв'язок x при $H = 0.05, 0.2, 0.4, 0.49$ на рисунку 5.2. Для $H = 0.51, 0.6, 0.8, 0.95$ наведемо графік $f - x$. Таким чином, маємо графіки розв'язку f_1 задачі мінімізації (2.8). Зауважимо, що оператор A , що відповідає рівнянню (5.1), прямує до одиничного оператора, як показано в [68]. Отже, розв'язок f_1 прямує до $\{t/2, t \in [0, 1]\}$, що підтверджується чисельними розв'язками з рисунку 5.2.

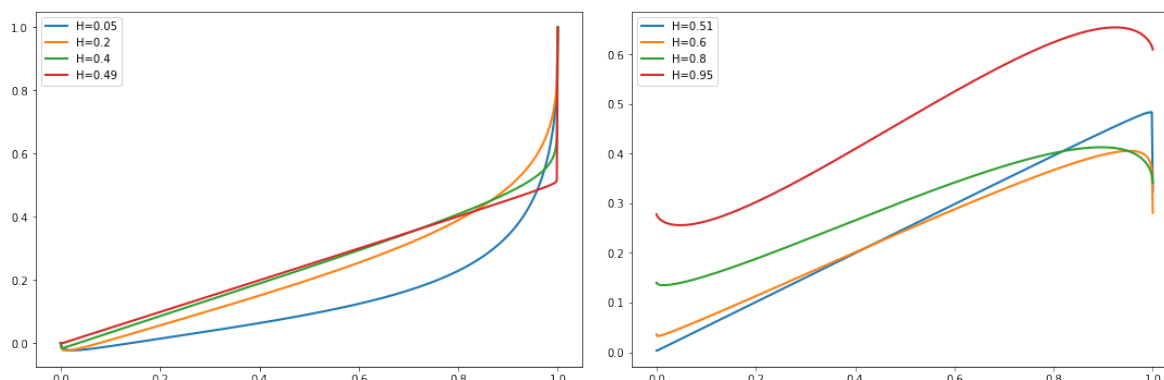


Рисунок 5.2 – Чисельний розв'язок задачі оптимізації (2.8) для різних випадків індексу Хюрста H і $f(t) = t$.

Приклад 5.2. Порівняємо наближений розв'язок рівняння (5.1) з точним розв'язком, заданим формулою для випадку сталої функції $x_2(t) = 5$.

Права частина (5.1) обчислюється як $f_2(t) = x_2(t) + C_2(H) \int_0^1 \kappa_H(t, s)x_2(s)ds$. Графіки точного і чисельного розв'язку представлені на рисунку 5.3. Можна відзначити, що наблизений розв'язок візуально не відрізняється від точного.

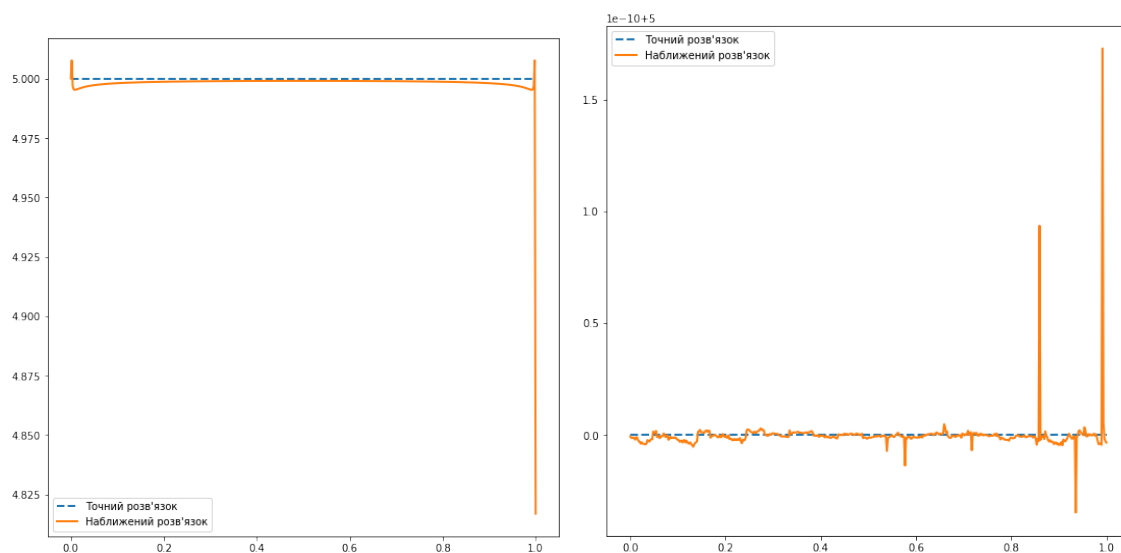


Рисунок 5.3 – Чисельні наближення x_2 при $N = 500$ для $H = 0.25$ (зліва) та $H = 0.75$.

Приклад 5.3. Розглянемо значення максимальної і $L_2[0, 1]$ -похибок між точним і наблизеним розв'язками відносно числа N для $x_3(t) = t^2, t \in [0, 1]$ та $H > 1/2$. У цьому випадку права частина (5.1) дорівнює

$$f_3(t) = t^2 + C_3(H) \left[\frac{t^{2H+1}}{H(4H^2 - 1)} + \frac{(1-t)^{2H+1}}{2H+1} + \frac{t(1-t)^{2H}}{H} + \frac{t^2(1-t)^{2H-1}}{2H-1} \right],$$

де $C_3(H) = C_2(H)B\left(H - \frac{1}{2}, 2 - 2H\right)$.

Максимальна абсолютна похибка між наблизеним і точним розв'язками представлена в таблиці 5.1, значення L_2 -норми похибки наведено в таблиці 5.2. З обчислених значень ми можемо оцінити похибку як $O(N^{-2})$.

Таблиця 5.1 – Максимальна норма похибки, масштабована до 10^7

N	$H = 0.51$	$H = 0.6$	$H = 0.8$	$H = 0.95$
25	149.26	946.55	1708.59	2697.23
50	40.19	242.03	414.26	647.79
100	10.89	62.43	102.18	158.78
200	2.95	16.12	25.40	39.31
300	1.37	7.30	11.27	17.41
500	0.52	2.68	4.05	6.25

Таблиця 5.2 – $L_2([0, 1])$ -норма похибки, масштабована до 10^7

N	$H = 0.51$	$H = 0.6$	$H = 0.8$	$H = 0.95$
25	140.70	892.52	1630.11	2665.54
50	38.21	230.11	396.76	640.43
100	10.42	59.68	98.07	157.03
200	2.83	15.47	24.41	38.88
300	1.32	7.01	10.84	17.23
500	0.50	2.58	3.90	6.19

5.4 Висновки

П'ятий розділ присвячений наближеним розв'язкам інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду на інтервалі $[0, T]$ з ядром виду $K(t, s) = L(t, s)|t - s|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, де чисельник $L(t, s)$, $(t, s) \in [0, T]^2$ обмежений і неперервний м.с. відносно міри Лебега, але може мати точки розриву на $[0, T]^2$. У розділі 5.2 наведено підхід для апроксимації таких ядер $K(t, s)$ ядрами з неперервними чисельниками. Основним результатом цього розділу є теорема 5.1 про наближення розв'язку інтегрального рівняння з ядром, що містить додаткову сингулярність, розв'язками інтегральних рівнянь, ядра яких є слабо сингулярними. Розділ 5.3 присвячено чисельному розв'язку розглянутих інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. У підрозділах 5.3.1 та 5.3.2 описано використаний чисельний метод та наведено чисельні приклади відповідно.

Розділ 6

Чисельний підхід до оцінки параметра зсуву в моделі з двома дробовими броунівськими рухами

6.1 Вступ

Інтегральне рівняння з ядром із додатковою сингулярністю, для якого теорія та чисельний метод були розвинуті в розділі 5, виникає також у деяких задачах статистичного оцінювання, наприклад, при розгляді оцінки максимальної вірогідності для параметра зсуву у моделі з двома дробовими броунівськими рухами. В загальному випадку, ядра із додатковою сингулярністю виникають внаслідок того, що моделі, які розглядаються, керуються дробовим індексом Хюрста. Оскільки далі буде розглянуто модель із двома індексами Хюрста, ядро буде мати більш складний вигляд, проте методи, запропоновані у розділі 5, залишаються ефективними і в цьому випадку.

6.2 Оцінка максимальної вірогідності для параметра зсуву θ , її властивості та чисельна побудова

6.2.1 Опис моделі

Розглянемо неперервну лінійну стохастичну модель

$$X_t = \theta t + B_t^{H_1} + B_t^{H_2}, \quad t \in [0, T],$$

де B^{H_1} та B^{H_2} – два незалежні дробові броунівські рухи з різними індексами Хюрста $1/2 \leq H_1 < H_2 < 1$. Розглянемо задачу оцінки невідомого параметра зсуву θ вважаючи, що параметри H_1 і H_2 відомі.

Введемо наступні позначення

$$\begin{aligned} \beta_H &= \left(\frac{H(2H-1)}{B(H-1/2, 2-2H)} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ c_H &= \left(\frac{\Gamma(3-2H)}{2H\Gamma^3(3/2-H)\Gamma(1/2+H)} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \gamma_H &= B(3/2-H, 3/2-H)c_H, \end{aligned} \quad (6.1)$$

де $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція, а $B(\cdot, \cdot)$ – бета-функція.

Оцінка максимальної вірогідності (ОМВ) θ була побудована в роботі [72]:

$$\hat{\theta}_T = \frac{\int_0^T h_T(t) dY_t}{\gamma_{H_1}(2-2H_1) \int_0^T h_T(t) t^{1-2H_1} dt}, \quad (6.2)$$

де випадковий процес

$$Y_t = c_{H_1} \int_0^t s^{\frac{1}{2}-H_1} (t-s)^{\frac{1}{2}-H_1} dX_s.$$

Крім того, в [72] була встановлена строга конзистентність $\hat{\theta}_T$, додатково припускаючи, що $H_2 - H_1 > \frac{1}{4}$. Цей результат узагальнено в [74] на випадок довільних $\frac{1}{2} \leq H_1 < H_2 < 1$.

Зображення оцінки на $[0, T]$ включає розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду

$$h_T(u) + \frac{1}{2-2H_1} \int_0^T h_T(s) K(s, u) ds = 1, \quad u \in [0, T]. \quad (6.3)$$

з ядром із додатковою сингулярністю

$$K(s, u) = u^{1-2H_1} \int_0^{s \wedge u} \varphi(s, v) \varphi(u, v) dv,$$

де

$$\varphi(s, v) = \frac{\partial}{\partial s} K_{H_1, H_2}(s, v)$$

та

$$K_{H_1, H_2}(s, v) = \beta_{H_2} c_{H_1} v^{\frac{1}{2} - H_2} \int_s^v (s - z)^{\frac{1}{2} - H_1} z^{H_2 - H_1} (z - v)^{H_2 - \frac{3}{2}} dz.$$

У роботі [74] було доведено, що інтегральний оператор Фредгольма $K : C([0, T]) \rightarrow C([0, T])$ з ядром $K(s, u)$ є компактним лінійним оператором, тому виконується альтернатива Фредгольма, згідно з якою для будь-якої послідовності $T_m \rightarrow \infty$, яка не містить відповідних власних значень, існує єдиний розв'язок $h_{T_m} \in C[0, T_m]$ інтегрального рівняння Фредгольма (6.3). Точніше, ми можемо обрати послідовність $T_m \rightarrow \infty$ таким чином, що

$$\lambda_m = -(2 - 2H_1)T_m^{2H_1 - 2H_2} \quad (6.4)$$

не буде власним значенням. Розглянемо лише такі T_m та для технічної простоти позначимо через T верхню межу інтегрування.

Узагальнимо властивості оцінки $\hat{\theta}_T$ у наступній теоремі.

Теорема 6.1. *Оцінка $\hat{\theta}_T$ є строго конзистентною, неупередженою та відповідна похибка має нормальний розподіл*

$$\hat{\theta}_T - \theta \sim \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{\gamma_{H_1}^2 (2 - 2H_1) \int_0^T h_T(s) s^{1 - 2H_1} ds} \right).$$

Більше того,

$$T^{1 - H_2} (\hat{\theta}_T - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V_{H_1, H_2}),$$

де асимптотична дисперсія дорівнює

$$V_{H_1, H_2} = \frac{H_1 (H_1 - \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2} - H_1) (H_2 - \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2} - H_2)}{(1 - H_1) B(\frac{3}{2} - H_1, \frac{3}{2} - H_1) B(2H_1 - H_2 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - H_1)}. \quad (6.5)$$

Доведення. У [72] було доведено, що ОМВ є строго конзистентною, неупередженою та відповідна похибка має нормальний розподіл з асимптотичною дисперсією

$$V_{H_1, H_2} = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{2 - 2H_2} \mathbf{E}_\theta (\hat{\theta}_T - \theta)^2 = \frac{1}{\gamma_{H_1}^2 (2 - 2H_1) \int_0^1 h_0(u) u^{\frac{1}{2} - H_1} du}, \quad (6.6)$$

де h_0 – розв’язок наступного інтегрального рівняння першого роду:

$$\int_0^1 h_0(s) K_1(s, u) ds = u^{\frac{1}{2}-H_1}, \quad u \in (0, 1],$$

де $K_1(s, u) = (2 - 2H_1)^{-1} s^{H_1-\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}-H_1} K(s, u)$. Єдиність розв’язку рівняння було встановлено в [72]. При доведенні цього результату розв’язок було побудовано явно. Він має таку форму:

$$h_0(u) = \lambda_{H_1, H_2} u^{H_1-\frac{1}{2}} \int_u^1 t^{H_1-H_2} (1-t)^{\frac{1}{2}-H_1} (t-u)^{H_1-\frac{3}{2}} dt,$$

де

$$\lambda_{H_1, H_2} = \frac{\left(\frac{3}{2} - H_1\right) (2 - 2H_2) B\left(H_1 - \frac{1}{2}, 3 - 2H_1\right)}{\Gamma\left(H_1 - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(H_2 - \frac{1}{2}\right) (c_{H_1} \beta_{H_2} \Gamma\left(\frac{3}{2} - H_1\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - H_2\right))^2}. \quad (6.7)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^1 h_0(u) u^{\frac{1}{2}-H_1} du &= \lambda_{H_1, H_2} \int_0^1 \int_u^1 t^{H_1-H_2} (1-t)^{\frac{1}{2}-H_1} (t-u)^{H_1-\frac{3}{2}} dt du \\ &= \lambda_{H_1, H_2} \int_0^1 t^{H_1-H_2} (1-t)^{\frac{1}{2}-H_1} \int_0^t (t-u)^{H_1-\frac{3}{2}} du dt \\ &= \frac{\lambda_{H_1, H_2}}{H_1 - \frac{1}{2}} \int_0^1 t^{2H_1-H_2-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}-H_1} dt = \frac{\lambda_{H_1, H_2} B\left(2H_1 - H_2 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - H_1\right)}{H_1 - \frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Далі підставимо (6.8) у (6.6) та використаємо (6.7), ми отримаємо

$$\begin{aligned} V_{H_1, H_2} &= \frac{H_1 - \frac{1}{2}}{\gamma_{H_1}^2 (2 - 2H_1) \lambda_{H_1, H_2} B\left(2H_1 - H_2 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - H_1\right)} \\ &= \frac{H_1 - \frac{1}{2}}{\gamma_{H_1}^2 (2 - 2H_1) B\left(2H_1 - H_2 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - H_1\right)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma\left(H_1 - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(H_2 - \frac{1}{2}\right) (c_{H_1} \beta_{H_2} \Gamma\left(\frac{3}{2} - H_1\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - H_2\right))^2}{\left(\frac{3}{2} - H_1\right) (2 - 2H_2) B\left(H_1 - \frac{1}{2}, 3 - 2H_1\right)} \end{aligned}$$

Також підставимо значення сталих β_{H_2} і γ_{H_1} з (6.1) та спростимо вираз, звідки і отримуємо (6.5). Теорему доведено. \square

6.2.2 Ядра та їх зображення

Дослідимо властивості ядра $K(s, u)$, $s, u \in [0, T]$ більш детально, оскільки вони є основними для подальших чисельних розрахунків. А саме, введемо кілька різних зображень для $K(s, u)$.

Почнемо з зображення через гіпергеометричні функції, що дозволяє обчислити ядро чисельно. Згідно з [74, лема 1],

$$K(s, u) = \begin{cases} L(s, u)|s - u|^{-\alpha}, & s \neq u, \\ 0, & s = u, \end{cases}$$

де $\alpha = 1 - 2(H_2 - H_1) > 0$, чисельник $L(s, u)$ дорівнює

$$L(s, u) = (\beta_{H_2} c_{H_1} (H_2 - H_1))^2 (s \wedge u)^{1-2H_1} u^{2H_1-1} \varkappa_0(s, u),$$

і функція $\varkappa_0(s, u)$ може бути представлена при $u < s$ як

$$\begin{aligned} \varkappa_0(s, u) &= \int_0^1 (1-y)^{1-2H_2} \left(1 - \frac{u}{s}y\right)^{2H_1-1} y^{H_2-H_1-1} \\ &\quad \times G\left(\frac{u(1-y)}{s-uy}\right) G\left(\frac{s(1-y)}{s-uy}\right) dy, \end{aligned}$$

та при $u > s$ як

$$\begin{aligned} \varkappa_0(s, u) &= \int_0^1 (1-y)^{1-2H_2} \left(1 - \frac{s}{u}y\right)^{2H_1-1} y^{H_2-H_1-1} \\ &\quad \times G\left(\frac{s(1-y)}{u-sy}\right) G\left(\frac{u(1-y)}{u-sy}\right) dy, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} G(s) &= B\left(\frac{3}{2} - H_1, H_2 - \frac{1}{2}\right) F\left(H_1 - H_2, \frac{3}{2} - H_1, 1 - H_1 + H_2; 1 - s\right) \\ &+ (1-s)B\left(\frac{3}{2} - H_1, H_2 + \frac{3}{2}\right) F\left(H_1 - H_2 + 1, \frac{3}{2} - H_1, 2 - H_1 + H_2; 1 - s\right). \end{aligned}$$

$F(a, b, c; x)$ – це гіпергеометрична функція, яка для $x < 1$ та $0 < b < c$ визначається як

$$F(a, b, c; x) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt.$$

Зауважимо, що функція $\varkappa_0(s, u)$ обмежена і належить $C([0, T]^2 \setminus \{(0, 0)\})$. Тепер перепишемо рівняння (6.3) в еквівалентному вигляді

$$u^{\frac{1}{2}-H_1} = h_T(u)u^{\frac{1}{2}-H_1} + (2 - 2H_1)^{-1} \int_0^T h_T(s)s^{\frac{1}{2}-H_1}s^{H_1-\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}-H_1}K(s, u)ds,$$

або

$$u^{\frac{1}{2}-H_1} = \tilde{h}_T(u) + \int_0^T \tilde{h}_T(s)K_1(s, u)ds, \quad (6.9)$$

де

$$\begin{aligned} K_1(s, u) &= (2 - 2H_1)^{-1}s^{H_1-\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}-H_1}K(s, u) \\ &= (2 - 2H_1)^{-1}s^{H_1-\frac{1}{2}}u^{H_1-\frac{1}{2}} \int_0^{s \wedge u} \varphi(s, v)\varphi(u, v)dv. \end{aligned}$$

симетричне по s та u ядро, $\tilde{h}_T(u) = h_T(u)u^{\frac{1}{2}-H_1} \in L_2[0, T]$.

Зауважимо, що інтегральний оператор $Af(x) = \int_0^T K_1(s, u)f(s)ds \in$ додатно визначеним на $L_2[0, T]$. Дійсно, для будь-якого $f \in L_2[0, T]$,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^T K_1(s, u)f(s)f(u)du ds \\ &= \frac{1}{2 - 2H_1} \int_0^T \int_0^T \int_0^{s \wedge u} \varphi(s, v)\varphi(u, v)dv f(s)s^{H_1-\frac{1}{2}}f(u)u^{H_1-\frac{1}{2}}du ds \\ &= \frac{1}{2 - 2H_1} \int_0^T \left(\int_v^T \varphi(s, v)f(s)s^{H_1-\frac{1}{2}}ds \right) \left(\int_v^T \varphi(u, v)f(u)u^{H_1-\frac{1}{2}}du \right) dv \geq 0. \end{aligned}$$

6.2.3 Наближений розв'язок інтегрального рівняння

Основна проблема з ядром полягає в тому, що в його зображенні

$$K_1(s, u) = \begin{cases} L_1(s, u)|s - u|^{-\alpha}, & s \neq u, \\ 0, & s = u, \end{cases}$$

з $\alpha = 1 - 2(H_2 - H_1)$ функція в чисельнику

$$L_1(s, u) = \frac{(\beta_{H_2} c_{H_1}(H_2 - H_1))^2}{2 - 2H_1} (s \wedge u)^{1-2H_1} u^{H_1-1/2} s^{H_1-1/2} \varkappa_0(s, u), \quad (6.10)$$

не є ані неперервною, ані обмеженою, а складається з добутку неперервної (крім нуля) та обмеженої функції $\varkappa_0(s, u)$ і множника $(s \wedge u)^{1-2H_1} u^{H_1-1/2} s^{H_1-1/2}$, що прямує до нескінченності на осях. У зв'язку з цим, беручи до уваги відомі наближені методи знаходження розв'язків інтегральних рівнянь з сингулярними ядрами, побудуємо послідовність наближень $K_1^{(n)}(s, u)$ ядра $K_1(s, u)$ так, щоб

$$K_1^{(n)}(s, u) = \begin{cases} L_1^{(n)}(s, u) |s - u|^{-\alpha}, & s \neq u, \\ 0, & s = u, \end{cases}$$

де $L_1^{(n)}(s, u)$ – неперервна обмежена функція. А саме, покладемо $L_1^{(n)}(s, u) = L_1(s \vee \frac{1}{n}, u \vee \frac{1}{n})$. Тоді, очевидно, $L_1^{(n)}(s, u) = L_1(s, u)$ при $s, u \geq 1/n$. Крім того, для будь-якого фіксованого $n \geq 1/T$, $L_1^{(n)}(s, u)$ є обмеженою неперервною функцією. Ця властивість забезпечує, завдяки альтернативі Фредгольма, існування та єдиність розв'язку інтегрального рівняння другого роду

$$u^{\frac{1}{2}-H_1} = \tilde{h}_T^{(n)}(u) + \int_0^T \tilde{h}_T^{(n)}(s) K_1^{(n)}(s, u) ds, \quad (6.11)$$

на будь-якому інтервалі $[0, T]$ крім інтервалу, який відповідає власному значенню так само, як у (6.4). Зауважимо, що ядро $K_1^{(n)}(s, u)$ має стандартну слабку сингулярність на діагоналі і більше не має особливостей, тому інтегральний оператор A_n , що відповідає ядру $K_1^{(n)}(s, u)$, є компактним $L_2[0, T] \rightarrow L_2[0, T]$. Оскільки будь-який компактний оператор має не більше ніж зліченну кількість власних значень, ми маємо послідовність $T_m \rightarrow \infty$ таку, що всі рівняння, (6.9) та (6.11) для будь-якого n мають єдиний розв'язок, h_{T_m} та $h_{T_m}^{(n)}$, відповідно. У подальшому індекс m не буде використовуватися.

Теорема 6.2. *Нехай T – будь-яка точка, у якій рівняння (6.9) та (6.11) мають єдині розв'язки, h_T і $h_T^{(n)}$ на $[0, T]$. Також нехай $H_2 - H_1 > \frac{1}{4}$. Тоді*

$$\|h_T^{(n)} - h_T\|_{L_2[0, T]} \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доведення. Спочатку доведемо, що $\|A - A_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, де ми розглядаємо норму в $L_2[0, T]$. Дійсно, для будь-якої функції $f \in L_2[0, T]$

$$\int_0^T |Af(t)|^2 dt = \int_0^T \left| \int_0^T K_1(t, s) f(s) ds \right|^2 dt \leq \int_0^T \int_0^T |K_1(t, s)|^2 ds dt \cdot \|f\|_{L_2[0, T]}^2,$$

та з нерівності (24) у [72]

$$\int_0^T \int_0^T |K_1(t, s)|^2 ds dt < \infty.$$

Більше того,

$$\begin{aligned} \|A - A_n\|^2 &\leq \int_0^T \int_0^T \left| K_1(t, s) - K_1^{(n)}(t, s) \right|^2 dt ds \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} \left| K_1(t, s) - K_1^{(n)}(t, s) \right|^2 dt ds + \int_{\frac{1}{n}}^T \int_0^{\frac{1}{n}} \left| K_1(t, s) - K_1^{(n)}(t, s) \right|^2 dt ds \\ &\quad + \int_0^{\frac{1}{n}} \int_{\frac{1}{n}}^T \left| K_1(t, s) - K_1^{(n)}(t, s) \right|^2 dt ds + \int_{\frac{1}{n}}^T \int_{\frac{1}{n}}^T \left| K_1(t, s) - K_1^{(n)}(t, s) \right|^2 dt ds \\ &=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Зауважимо, що $I_4 = 0$, оскільки K_1 та $K_1^{(n)}$ збігаються на $[\frac{1}{n}, T]^2$. За симетрію ядер ми можемо переписати I_1 таким чином:

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{|L_1(t, s) - L_1(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})|^2}{|t - s|^{2\alpha}} dt ds = 2 \int_0^{\frac{1}{n}} \int_0^s \frac{|L_1(t, s) - L_1(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})|^2}{(s - t)^{2\alpha}} dt ds.$$

Використовуючи зображення (6.10) та обмеженість $\varkappa_0(t, s)$ на $[0, T]^2$, маємо таку оцінку для чисельника підінтегрального виразу:

$$\begin{aligned} |L_1(t, s) - L_1(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})|^2 &\leq 2 (L_1^2(t, s) + L_1^2(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) \\ &= C \left(t^{1-2H_1} s^{2H_1-1} |\varkappa_0(t, s)|^2 + |\varkappa_0(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})|^2 \right) \\ &\leq C (t^{1-2H_1} s^{2H_1-1} + 1) \leq C t^{1-2H_1} s^{2H_1-1}, \end{aligned}$$

при $0 \leq t \leq s \leq \frac{1}{n}$ (в цьому випадку $1 \leq t^{1-2H_1} s^{2H_1-1}$). Отже,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \int_0^{\frac{1}{n}} \int_0^s \frac{t^{1-2H_1} s^{2H_1-1}}{(s-t)^{2\alpha}} dt ds \\ &= C \int_0^{\frac{1}{n}} \left(s^{2H_1-1} \int_0^s t^{1-2H_1} (s-t)^{4(H_2-H_1)-2} dt \right) ds. \end{aligned}$$

Легко бачити,

$$\int_0^s t^{1-2H_1} (s-t)^{4(H_2-H_1)-2} dt = B(2-2H_1, 4(H_2-H_1)-1) s^{4H_2-6H_1}.$$

Тому,

$$I_1 \leq C \int_0^{\frac{1}{n}} s^{4H_2-4H_1-1} ds \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6.13)$$

Тепер оцінимо I_2 , який можна записати так:

$$I_2 = \int_{\frac{1}{n}}^T \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{|L_1(t, s) - L_1(\frac{1}{n}, s)|^2}{(s-t)^{2\alpha}} dt ds.$$

Використовуючи підхід, як і вище, отримуємо для $0 \leq t \leq \frac{1}{n} \leq s \leq T$

$$\begin{aligned} |L_1(t, s) - L_1(\frac{1}{n}, s)|^2 &\leq 2(L_1^2(t, s) + L_1^2(\frac{1}{n}, s)) \\ &= C s^{2H_1-1} (t^{1-2H_1} |\varkappa_0(t, s)|^2 + (\frac{1}{n})^{1-2H_1} |\varkappa_0(\frac{1}{n}, s)|^2) \\ &\leq C (t^{1-2H_1} + (\frac{1}{n})^{1-2H_1}) \leq C t^{1-2H_1}, \end{aligned}$$

оскільки $s^{2H_1-1} \leq T^{2H_1-1} < \infty$, функція \varkappa_0 обмежена, і $(\frac{1}{n})^{1-2H_1} \leq t^{1-2H_1}$.

Тоді

$$I_2 \leq C \int_{\frac{1}{n}}^T \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{t^{1-2H_1}}{(s-t)^{2\alpha}} dt ds = C \int_0^{\frac{1}{n}} t^{1-2H_1} \int_{\frac{1}{n}}^T (s-t)^{-2\alpha} ds dt.$$

Неважко помітити, що внутрішній інтеграл обмежений. Справді,

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{n}}^T (s-t)^{-2\alpha} ds = \int_{\frac{1}{n}}^T (s-t)^{4H_2-4H_1-2} ds \\ &= \frac{(T-t)^{4H_2-4H_1-1} - (\frac{1}{n}-t)^{4H_2-4H_1-1}}{4H_2-4H_1-1} \leq \frac{T^{4H_2-4H_1-1}}{4H_2-4H_1-1} < \infty. \end{aligned}$$

Отже,

$$I_2 \leq C \int_0^{\frac{1}{n}} t^{1-2H_1} dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6.14)$$

Аналогічно можна довести збіжність $I_3 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поєднуючи це з (6.12)–(6.14) отримуємо, що $\|A - A_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Відповідно до леми 5.2, спектр $\sigma(A_n)$ асимптотично вкладений в \mathbb{R}^+ . Тепер розглянемо різницю

$$\begin{aligned} h_T(t) - h_T^{(n)}(t) &= - \int_0^T K_1(t, s) h_T(s) ds + \int_0^T K_1^{(n)}(t, s) h_T^{(n)}(s) ds \\ &= - \int_0^T [K_1(t, s) - K_1^{(n)}(t, s)] h_T(s) ds - \int_0^T K_1^{(n)}(t, s) [h_T(s) - h_T^{(n)}(s)] ds. \end{aligned}$$

Позначимо $h_T(t) - h_T^{(n)}(t) = y_n(t)$, отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма виду

$$y_n(t) + \int_0^T K_1^{(n)}(t, s) y_n(s) ds = P_n(t),$$

де $P_n(t) = \int_0^T [K_1^{(n)}(t, s) - K_1(t, s)] h_T(s) ds$. Оскільки $\|A - A_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, маємо, що $\|P_n\|_{L_2([0, T])} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тепер позначимо резольвентний оператор у точці λ : $R_{A_n}(\lambda) = (A_n - \lambda I)^{-1}$. Скористаємося наступним фактом ([45, теорема 5.8]): нехай B – самоспряжений оператор, і нехай $\lambda \in \rho(B)$, де $\rho(B) = \mathbb{R} \setminus \sigma(B)$. Тоді

$$\|R_B(\lambda)\| \leq \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(B))}.$$

У нашому випадку $\lambda = -1$, і ми знаємо, що спектр $\sigma(A_n)$ асимптотично вкладений в \mathbb{R}^+ . Тому для досить великих n $\|R_{A_n}(-1)\| \leq C$ отримуємо, що

$$\|y_n\|_{L_2([0,T])} \leq C\|P_n\|_{L_2([0,T])} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. □

6.2.4 Опис чисельного методу

Щоб знайти наближений розв'язок рівняння Фредгольма (6.3), використаємо модифікований метод інтегрування добутку для ядер із додатковою сингулярністю, розглянутий у підрозділі 5.3.1. Зауважимо, що в нашому випадку інтегрування ведеться по першій змінній.

Розглянемо наступне узагальнення рівняння (6.15):

$$h_T(u) + \frac{1}{2 - 2H_1} \int_0^T h_T(s)K(s, u)ds = g(u), \quad u \in [0, T], \quad (6.15)$$

де права частина $g \in L^2[0, T]$ довільна задана функція.

Ми можемо перетворити це рівняння, як описано на початку підрозділу 6.2.3. Тоді отримуємо такий аналог (6.9):

$$\tilde{g}(u) = \tilde{h}_T(u) + \int_0^T \tilde{h}_T(s)K_1(s, u)ds$$

з $\tilde{g}(u) = g(u)u^{\frac{1}{2}-H_1}$.

Розглянемо чисельний приклад, що демонструє якість наближеного методу.

Приклад 6.1. Ми порівнюємо наближений розв'язок рівняння (6.15) з точним розв'язком, заданим як $h_T(u) \equiv 1$, $t \in [0, T]$. Права частина (6.15) обчислюється як

$$g(u) = 1 + \frac{1}{2 - 2H_1} \int_0^T K(s, u)ds, \quad u \in [0, T], .$$

Таблиця 6.1 – Максимальна норма похибки

T	$H_1 =$ 0.6, $H_2 =$ 0.7	$H_1 =$ 0.6, $H_2 =$ 0.8	$H_1 =$ 0.6, $H_2 =$ 0.9	$H_1 =$ 0.7, $H_2 =$ 0.9
5	$2.97 \cdot 10^{-5}$	$6.42 \cdot 10^{-7}$	$3.77 \cdot 10^{-9}$	$1.97 \cdot 10^{-8}$
10	$1.07 \cdot 10^{-5}$	$1.58 \cdot 10^{-6}$	$3.75 \cdot 10^{-8}$	$5.60 \cdot 10^{-9}$
25	$1.26 \cdot 10^{-6}$	$5.27 \cdot 10^{-6}$	$5.21 \cdot 10^{-7}$	$1.43 \cdot 10^{-7}$
50	$8.85 \cdot 10^{-5}$	$6.27 \cdot 10^{-6}$	$2.59 \cdot 10^{-6}$	$3.31 \cdot 10^{-7}$
100	$2.90 \cdot 10^{-4}$	$1.23 \cdot 10^{-5}$	$1.37 \cdot 10^{-5}$	$5.66 \cdot 10^{-7}$
200	$2.53 \cdot 10^{-3}$	$3.67 \cdot 10^{-5}$	$4.91 \cdot 10^{-5}$	$1.73 \cdot 10^{-5}$

Максимальні абсолютні похибки між наближеними і точними розв'язками для $N = 500$ та різних значень T , H_1 та H_2 представлені в таблиці 6.1. Зауважимо, що метод працює навіть тоді, коли порушується умова $H_2 - H_1 > \frac{1}{4}$.

6.3 Альтернативні оцінки

Розглянемо тепер два альтернативних методи оцінки параметра зсуву. Нагадаємо, що ми розглядаємо модель виду

$$X_t = \theta t + B_t^{H_1} + B_t^{H_2}, \quad (6.16)$$

де $B_t^{H_1}$, та $B_t^{H_2}$ – два незалежні дробові броунівські рухи. Припустимо, що $0 < H_1 < H_2 < 1$. Як було доведено в [59], для будь-якого $p > 1$ і будь-якого $H \in (0, 1)$ існує невід'ємна випадкова величина $\xi(p, H)$ така, що для всіх $t \geq 0$,

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |B_s^H| \leq ((t^H |\log t|^p) \vee 1) \xi(p, H),$$

і існує таке число $c_\xi(p, H) > 0$, для будь-якого $0 < y < c_\xi(p, H)$,

$$\mathbf{E} \exp\{y \xi^2(p, H)\} < \infty.$$

Це означає, що

$$\frac{B_T^H}{T} \rightarrow 0, \quad \text{м. н. при } T \rightarrow \infty. \quad (6.17)$$

У результаті можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 6.3. Процес $\hat{\theta}_T^{(1)} = \frac{X_T}{T}$ є строго конзистентною оцінкою θ при $0 < H_1 < H_2 < 1$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{2-2H_2} \mathbf{E}(\hat{\theta}_T^{(1)} - \theta)^2 = 1.$$

Доведення. Доведення безпосередньо випливає з зображення (6.16) і того факту, що $\mathbf{E}(B_t^H)^2 = t^{2H}$. \square

Недоліком оцінки $\hat{\theta}_T$ є те, що вона будується лише за кінцевим спостереженням X_T . Щоб зменшити залежність лише від фіксованого спостереження, ми можемо розглянути «згладжену» оцінку виду

$$\hat{\theta}_T^{(2)} = \frac{2 \int_0^T X_t dt}{T^2}.$$

Зауважимо, що

$$\int_0^T X_t dt = \theta \frac{T^2}{2} + \int_0^T B_t^{H_1} dt + \int_0^T B_t^{H_2} dt.$$

Беручи до уваги (6.17) та застосовуючи правило Лопіталя, ми відразу отримуємо, що

$$\frac{\int_0^T B_t^{H_1} dt}{T^2} \rightarrow 0 \quad \text{та} \quad \frac{\int_0^T B_t^{H_2} dt}{T^2} \rightarrow 0 \quad \text{м. н.}$$

при $T \rightarrow \infty$. У результаті можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 6.4. Процес $\hat{\theta}_T^{(2)} = \frac{2}{T^2} \int_0^T X_t dt$ є строго конзистентною оцінкою θ при $0 < H_1 < H_2 < 1$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{2-2H_2} \mathbf{E}(\hat{\theta}_T^{(2)} - \theta)^2 = \frac{2}{1 + H_2}. \quad (6.18)$$

Доведення. Досить довести (6.18). Обчислимо

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\hat{\theta}_T^{(2)} - \theta)^2 &= \mathbf{E} \left(\frac{2}{T^2} \int_0^T (B_t^{H_1} + B_t^{H_2}) dt \right)^2 \\ &= \frac{4}{T^4} \int_0^T \int_0^T \frac{1}{2} (t^{2H_1} + s^{2H_1} - |t - s|^{2H_1}) ds dt \end{aligned}$$

$$+ \frac{4}{T^4} \int_0^T \int_0^T \frac{1}{2} (t^{2H_2} + s^{2H_2} - |t-s|^{2H_2}) ds dt = \frac{2T^{2H_1-2}}{1+H_1} + \frac{2T^{2H_2-2}}{1+H_2},$$

де перший інтеграл обчислено таким чином

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^T (t^{2H_1} + s^{2H_1} - |t-s|^{2H_1}) ds dt \\ &= \int_0^T \left(\int_0^T (t^{2H_1} + s^{2H_1}) ds - \int_0^t (t-s)^{2H_1} ds - \int_t^T (s-t)^{2H_1} ds \right) dt \\ &= \int_0^T \left(t^{2H_1} T + \frac{T^{2H_1+1}}{2H_1+1} - \frac{t^{2H_1+1}}{2H_1+1} - \frac{(T-t)^{2H_1+1}}{2H_1+1} \right) dt \\ &= \frac{2T^{2H_1+2}}{2H_1+1} - \frac{2T^{2H_1+2}}{(2H_1+1)(2H_1+2)} = \frac{T^{2H_1+2}}{H_1+1} \end{aligned}$$

та (6.18) доведено. □

Зауваження 6.1. Порівняємо асимптотичні дисперсії оцінок $\hat{\theta}_T^{(1)}$ і $\hat{\theta}_T^{(2)}$. При $H_2 \in (0, 1)$, $\frac{2}{1+H_2} > 1$, тому асимптотична дисперсія $\hat{\theta}_T^{(2)}$ більша. Асимптотичні дисперсії θ_T та $\hat{\theta}_T^{(i)}$, $i = 1, 2$ будемо порівнювати чисельно.

Зауваження 6.2. Запропоновані оцінки та методи можуть бути застосовані (з очевидними модифікаціями) до більш загальної моделі

$$X_t = \theta t + \sigma_1 B_t^{H_1} + \sigma_2 B_t^{H_2}, \quad t \in [0, T],$$

де σ_1 та σ_2 – відомі додатні сталі.

6.4 Симуляції

У цьому розділі ми порівняємо поведінку трьох оцінок параметру зсуву за допомогою чисельного моделювання. Для кожного набору параметрів (H_1, H_2) спочатку знайдемо розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма (6.3) описаним у підрозділі 6.2.4 методом. Потім генеруємо 1000 траєкторій

процесу X , вибираючи справжнє значення параметра зсуву $\theta = 1$. Емпіричні середні та емпіричні дисперсії оцінок для різних значень T наведені в таблицях 6.2 та 6.3 відповідно.

Аналізуючи таблицю 6.2 ми бачимо, що всі оцінки є неупередженими. Більше того, усі емпіричні дисперсії в таблиці 6.3 прямують до нуля, що підтверджує узгодженість оцінок. Швидкість збіжності набагато вища для малих значень H_2 . Це не дивно, оскільки в асимптотичних співвідношеннях для дисперсій є нормуючий множник T^{2-2H_2} .

Зауважимо, що ОМВ $\hat{\theta}_T$ у більшості випадків краща за дві інші оцінки, включаючи ситуацію, коли порушується умова $H_2 - H_1 > 1/4$ з теореми 6.2, що досить цікаво. Як правило, оцінка $\hat{\theta}_T^{(1)}$ збігається трохи повільніше, ніж $\hat{\theta}_T$. Однак, перевага $\hat{\theta}_T^{(1)}$ у простоті форми, тому обчислювати її швидше. Оцінка $\hat{\theta}_T^{(2)}$ працює значно гірше, ніж $\hat{\theta}_T$ та $\hat{\theta}_T^{(1)}$, тому не рекомендовано її використовувати.

6.5 Висновки

У шостому розділі розглянуто неперервну лінійну стохастичну модель із двома ДБР, представлено форму оцінки максимальної вірогідності невідомого параметра зсуву, яка містить розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Незважаючи на особливість та складність ядра рівняння Фредгольма (разом з різними його представленнями) було дано теоретичне обґрунтування та алгоритм, що дозволяє побудувати наближений розв'язок рівняння Фредгольма. Підрозділ 6.3 описує властивості альтернативних оцінок. У підрозділі 6.4 наведені числові результати для всіх оцінок параметра зсуву.

Таблиця 6.2 – Вибіркові середні значення оцінок $\hat{\theta}_T$, $\hat{\theta}_T^{(1)}$ та $\hat{\theta}_T^{(2)}$

T		$H_1 = 0.6,$ $H_2 = 0.7$	$H_1 = 0.6,$ $H_2 = 0.8$	$H_1 = 0.6,$ $H_2 = 0.9$	$H_1 = 0.7,$ $H_2 = 0.9$
5	$\hat{\theta}_T$	0.99843	1.02050	0.97179	0.97511
	$\hat{\theta}_T^{(1)}$	0.98028	0.98521	0.97315	1.03375
	$\hat{\theta}_T^{(2)}$	0.97844	0.98677	0.97360	1.03327
10	$\hat{\theta}_T$	0.98254	1.01568	0.99384	0.96281
	$\hat{\theta}_T^{(1)}$	0.99878	1.00275	0.98399	1.02414
	$\hat{\theta}_T^{(2)}$	0.98802	0.99007	0.98274	1.02640
25	$\hat{\theta}_T$	0.97020	1.02370	0.99230	0.98650
	$\hat{\theta}_T^{(1)}$	1.00689	1.00846	0.98988	1.00861
	$\hat{\theta}_T^{(2)}$	0.99646	1.00128	0.98437	1.01577
50	$\hat{\theta}_T$	0.98163	1.02387	0.97414	0.99587
	$\hat{\theta}_T^{(1)}$	1.00919	1.01427	1.00170	1.02509
	$\hat{\theta}_T^{(2)}$	1.00714	1.00861	0.99198	1.02039
100	$\hat{\theta}_T$	0.97936	1.02123	0.98676	1.00517
	$\hat{\theta}_T^{(1)}$	1.01171	1.00776	1.00770	1.04042
	$\hat{\theta}_T^{(2)}$	1.00845	1.01059	1.00311	1.03198
200	$\hat{\theta}_T$	0.98830	0.99949	1.00481	0.99481
	$\hat{\theta}_T^{(1)}$	1.01638	0.99784	1.00371	1.04151
	$\hat{\theta}_T^{(2)}$	1.01299	1.00583	1.00202	1.03841

Таблиця 6.3 – Вибіркові дисперсії оцінок $\hat{\theta}_T$, $\hat{\theta}_T^{(1)}$ та $\hat{\theta}_T^{(2)}$

T		$H_1 = 0.6,$ $H_2 = 0.7$	$H_1 = 0.6,$ $H_2 = 0.8$	$H_1 = 0.6,$ $H_2 = 0.9$	$H_1 = 0.7,$ $H_2 = 0.9$
5	$\hat{\theta}_T$	0.64699	0.80487	0.93363	1.06066
	$\hat{\theta}_T^{(1)}$	0.65501	0.84638	1.02237	1.11990
	$\hat{\theta}_T^{(2)}$	0.82555	0.97128	1.10788	1.22260
10	$\hat{\theta}_T$	0.42978	0.56085	0.74443	0.87134
	$\hat{\theta}_T^{(1)}$	0.39102	0.55397	0.79020	0.90523
	$\hat{\theta}_T^{(2)}$	0.48277	0.66097	0.87299	0.97534
25	$\hat{\theta}_T$	0.22352	0.33755	0.56440	0.65710
	$\hat{\theta}_T^{(1)}$	0.22508	0.33907	0.60744	0.69254
	$\hat{\theta}_T^{(2)}$	0.26144	0.39350	0.65080	0.74921
50	$\hat{\theta}_T$	0.14386	0.24854	0.48419	0.55723
	$\hat{\theta}_T^{(1)}$	0.14305	0.23685	0.51244	0.56264
	$\hat{\theta}_T^{(2)}$	0.17039	0.27073	0.54097	0.61000
100	$\hat{\theta}_T$	0.08788	0.18225	0.40255	0.45579
	$\hat{\theta}_T^{(1)}$	0.09188	0.17700	0.41662	0.46105
	$\hat{\theta}_T^{(2)}$	0.11068	0.19756	0.45442	0.49821
200	$\hat{\theta}_T$	0.05658	0.12624	0.33736	0.37987
	$\hat{\theta}_T^{(1)}$	0.05493	0.13165	0.36074	0.38137
	$\hat{\theta}_T^{(2)}$	0.06928	0.14634	0.38130	0.41179

Висновки

Дисертаційна робота присвячена дослідженню ентропійних функціоналів різного типу та розв'язанню пов'язаних з ними аналітичних задач. Зокрема, розглянуто задачу оптимізації ентропійних функціоналів у моделі з двома стандартними броунівськими рухами та сумішшю стандартного і дробового броунівських рухів. З цією метою досліджено інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з додатковою сингулярністю, тобто зі слабо сингулярними ядрами, що додатково мають точки розриву у чисельнику, що не можна усунути. Також досліджено аналогічні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з додатковою сингулярністю, які виникають при статистичному оцінюванні параметрів.

У дисертаційній роботі отримано наступні нові наукові результати:

- досліджено екстремуми ентропійних функціоналів, сконструйованих для ймовірнісних мір, що відповідають двом незалежним вінерівським процесам;
- досліджено екстремуми, точніше мінімуми, ентропійних функціоналів, сконструйованих для ймовірнісних мір, що відповідають суміші стандартного і дробового броунівських рухів;
- знайдено наближені розв'язки інтегральних рівнянь з ядром із додатковою сингулярністю, що виникають при мінімізації ентропійних функціоналів, сконструйованих для ймовірнісних мір, що відповідають суміші стандартного і дробового броунівських рухів;
- знайдено наближені розв'язки інтегральних рівнянь з ядром із додатковою сингулярністю, що виникають при оцінюванні параметра зсуву в моделі з двома дробовими броунівськими рухами;

- на основі знайдених розв’язків побудовано оцінки для параметра зсуву і наведено її порівняння з іншими типами оцінок того ж параметру.

Список використаних джерел

1. Железняк Г. С. Додаткова сингулярність ядра при знаходженні наближеної оцінки параметра // Міжнародна конференція молодих математиків. Київ: Інститут математики НАН України, 2021. С. 92.
2. Железняк Г. С., Мішура Ю. С. Екстремальні міри для ентропійних функціоналів // XVI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2018». Київ, Україна : Київський університет, 2018. С. 16–17.
3. Железняк Г. С., Мішура Ю. С. Екстремуми функціоналів ентропійного типу // XVII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2019». Київ, Україна : Київський університет, 2019. С. 24–25.
4. Железняк Г. С., Мішура Ю. С. Застосування інтегральних рівнянь із слабкою сингулярністю до проблеми оптимізації ентропійних функціоналів // XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2020». Київ, Україна : Київський університет, 2020. С. 16.
5. Железняк Г. С., Мішура Ю. С. Ядро із додатковою сингулярністю // XIX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2021». Київ, Україна : Київський університет, 2021. С. 14–15.
6. Железняк Г. С., Мішура Ю. С. Оцінка параметра зсуву θ в моделі з двома дробовими броунівськими рухами // XX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2022». Київ, Україна : Київський університет, 2022. С. 11–12.
7. Anselone P. Collectively Compact Operator Approximation Theory and Application to Integral Equations. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

8. Atkinson K. E. The numerical evaluation of fixed points for completely continuous operators // *SIAM Journal of Numerical Analysis*. 1973. Vol. 10, no. 5.
9. Atkinson K. E. A survey of numerical methods for solving nonlinear integral equation // *Journal of integral equations and applications*. 1992. Vol. 4, no. 1.
10. Atkinson K. E. *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*. Cambridge University Press, 1997.
11. Atkinson K. E. *The numerical solution of integral equations of the second kind*. Cambridge University Press, 2009.
12. Babolian E., Hajikandi A. The approximate solution of a class of Fredholm integral equations with weakly singular kernel // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2011. no. 235. P. 1148–1159.
13. Baker C. T. H. *The numerical treatment of integral equations*, Monographs on Numerical Analysis. Clarendon Press, Oxford, 1977.
14. Bender C. *Integration with respect to a fractional Brownian motion and related market models* : Ph. D. thesis / C. Bender ; Hartung-Gorre Verlag, Konstanz. 2003.
15. Benth F., Groth M. The minimal entropy martingale measure and numerical option pricing for the Barndorff-Nielsen-Shephard stochastic volatility model // *Stochastic Analysis and Applications*. 2009. no. 27. P. 875–896.
16. Bertin K., Torres S., Tudor C. Parameter estimation in stochastic differential equations // *Statistics & Probability Letters*. 2011. no. 81. P. 243–249.
17. Bertram B. On the product integration method for solving singular integral equations in scattering theory // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1989. no. 25. P. 79–92.
18. Bishwal J. P. N. *Parameter estimation in stochastic differential equations* // *Lecture Notes in Mathematics*. 2008. Vol. 1923.
19. Borwein J., Choksi R., Marchal P. Probability distributions of assets inferred from option prices via the principle of maximum entropy // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 2003. no. 14. P. 464–478.
20. Branger N. Pricing derivative securities using cross-entropy an economic

- analysis // *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 2004. no. 7. P. 63–81.
21. Brissaud J. The meanings of entropy // *Entropy*. 2005. no. 7. P. 68–96.
 22. Buchen P., Kelly M. The maximum entropy distribution of an asset inferred from option prices // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 1996. no. 31. P. 143–159.
 23. Cai C., Chigansky P., Kleptsyna M. Mixed Gaussian processes: a filtering approach // *Annals of Probability*. 2016. Vol. 44, no. 4. P. 3032–3075.
 24. Calibrating volatility surfaces via relative entropy minimization / M. Avelaneda, C. Friedman, R. Holmes, D. Samperi // *Applied Mathematical Finance*. 1997. no. 1. P. 7–64.
 25. Cameronand R., Mckee S. Product integration methods for second-kind Abel integral equations // *Journal of Computational and Applied Mathematic*. 1984. no. 11. P. 1–10.
 26. Campenhout J. M. V., Cover T. M. Maximum entropy and conditional entropy // *Transactions on Information Theory*. 1981. no. 27. P. 483–489.
 27. Cheridito P. Mixed fractional Brownian motion // *Bernoulli*. 2001. Vol. 7, no. 6. P. 913–934.
 28. Cover T. M., Thomas J. A. *Elements of information theory*, 2nd edition. Wiley, 2006.
 29. de Hoog F., Weiss R. Asymptotic expansions for product integration // *Mathematics of Computation*. 1973. Vol. 2. P. 295–306. Access mode: <https://doi.org/10.2307/2005616>.
 30. Decreusefond L., Ustunel A. Application du calcul des variations stochastiques an mouvement brownien fractionnaires // *Comptes Rendus de l'Acad?mie des Sciences Series I Math*. 1995. no. 321. P. 1605–1608.
 31. Delves L. M., Mohamed J. L. *Computational methods for integral equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
 32. Diogo T., Franco N. B., Lima P. High order product integration method for a Volterra integral equation with logarithmic singular kernel // *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2004. Vol. 3, no. 2. P. 217–235.

33. Föllmer H., Schied A. Stochastic finance: an introduction in discrete time. Walter de Gruyter, Berlin, 2002.
34. Fomina M., Vagin V. Problem of knowledge discovery in noisy databases // International Journal of Machine Learning and Cybernetics. 2011. Vol. 2, no. 3. P. 135–145.
35. Friedman A. Stochastic differential equations and applications. Academic Press, London, 1975.
36. Frittelli M. The minimal entropy martingale measure and the valuation problem in incomplete markets // Mathematical Finance. 2000. no. 10. P. 39–52.
37. Grandits P. The p -optimal martingale measure and its asymptotic relation with the minimal entropy martingale measure // Bernoulli. 1999. no. 5. P. 225–247.
38. Gray R. M. Entropy and information theory. Springer, 1990.
39. Gulko L. Dart boards and asset prices introducing the entropy pricing theory // Advances in Econometrics. 1997. Vol. 12. P. 237–276.
40. Gulko L. The entropy theory of stock option pricing // International Journal of Theoretical and Applied Finance. 1999. Vol. 2. P. 331–355.
41. Gulko L. The entropy theory of stock option pricing // International Journal of Theoretical and Applied Finance. 2002. Vol. 5. P. 355–383.
42. Guo W. Maximum entropy in option pricing: a convex-spline smoothing method // Journal of Futures Markets. 2001. no. 21. P. 819–832.
43. Hartley R. V. L. Certain topics in telegraph transmission theory // Bell Systems Technical Journal. 1928.
44. Hawkins R. J. Maximum entropy and derivative securities // Advances in Econometrics. 1997. no. 12. P. 277–300.
45. Hislop P. D., Sigal I. M. Introduction to spectral theory: With applications to Schrödinger operators. Springer Science & Business Media, 2019.
46. Hu Y., Nualart D. Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes // Statistics & Probability Letters. 2010. no. 8. P. 1030–1038.
47. Hunt G. A. Random Fourier transforms // Transactions of the American Mathematical Society. 1951. no. 71. P. 38–69.
48. Hunt J., Devolder P. Semi-Markov regime switching interest rate models

- and minimal entropy measure // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2011. no. 390. P. 3767–3781.
49. Hurst H. E. Long-term storage capacity in reservoirs // *Transactions of the American Society of Civil Engineers*. 1951. no. 116. P. 400–410.
 50. Jaynes E. Information theory and statistical mechanics Part I // *Physical Review*. 1957. no. 106. P. 620–630.
 51. Jaynes E. Information theory and statistical mechanics Part I // *Physical Review*. 1957. no. 106. P. 171–190.
 52. Jaynes E. *Papers on probability, statistics and statistical physics*. Reidel, 1982.
 53. Jost C. Transformation formulas for fractional Brownian motion // *Stochastic Processes and their Applications*. 2006. Vol. 116, no. 10. P. 1341–1357.
 54. Judge G. G., Mittelhammer R. C. *An Information Theoretic Approach to Econometrics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
 55. Kaneko H., Xu Y. Numerical solutions for weakly singular Fredholm equations of the second kind // *Applied Numerical Mathematics*. 1991. no. 7. P. 167–177.
 56. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Functional analysis*. Pergamon Press, 1982.
 57. Kleptsyna M., Bretont A. L. Statistical analysis of the fractional Ornstein-Uhlenbeck type process // *Statistical Inference for Stochastic Processes*. 2002. no. 5. P. 229–248.
 58. Kolmogorov A. N. Wiener'sche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum // *C. R. (Doklady) Acad. URSS (N.S.)*. 1940. P. 115–118.
 59. Kozachenko Y., Melnikov A., Mishura Y. On drift parameter estimation in models with fractional Brownian motion // *Statistics*. 2015. Vol. 49, no. 1. P. 35–62.
 60. Krishnan H., Nelken L. Estimating implied correlations for currency basket options using the maximum entropy method // *Derivatives Use, Trading and Regulation*. 2001. Vol. 7, no. 1.
 61. Kullback S., Leibler R. On information and sufficiency // *Annals of Mathematical Statistics*. 1951. no. 22. P. 79–86.

62. Kythe P. K., Puri P. Computational methods for linear integral equations. Springer Science & Business Media, 2011.
63. Leonard C. Minimization of entropy functionals // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2008. Vol. 346, no. 1. P. 183–204.
64. MacKay A., Melnikov A., Mishura Y. Optimization of small deviation for mixed fractional Brownian motion with trend // Stochastics. 2018. Vol. 90, no. 7. P. 1087–1110.
65. Makogin V., Mishura Y. Small deviations for mixed fractional Brownian motion with trend and with Hurst index $H > 1/2$ // Stochastics. 2019. P. 1–15.
66. Makogin V., Mishura Y., Zhelezniak H. Aproximate solution of the integral equations involving kernel with additional singularity // Stochastic Models. 2021. Vol. 37, no. 4. P. 549–567.
67. Makogin V., Mishura Y., Zhelezniak H. Stochastic applications of the approximate solution of the integral equation involving weakly singular kernel with additional singularity // International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications. V”. Kyiv, Ukraine, June 1-4, 2021. P. 47.
68. Makogin V. I., Mishura Y. S., Zheleznyak G. S. Minimization of the entropy for a mixture of standard and fractional Brownian motions (Ukrainian) // Teoriya Imovirnostei ta Matematichna Statistika. 2019. no. 101. P. 169–188.
69. Mandelbrot B. Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk. Springer, New York, 1997.
70. Mandelbrot B., van Ness J. Long-term storage capacity in reservoirs // SIAM Review. 1968. no. 10. P. 422–437.
71. Mishura Y. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes. Springer Science & Business Media, 2008.
72. Mishura Y. Maximum likelihood drift estimation for the mixing of two fractional Brownian motions // Stochastic and Infinite Dimensional Analysis. 2016. P. 263–280.
73. Mishura Y., K.Ralchenko, H.Zhelezniak. Numerical approach to the drift parameter estimation in the model with two fractional Brownian motions // Communications in Statistics - Simulation and Computation. 2022. P. 1–15.

Access mode: <https://doi.org/10.1080/03610918.2022.2099556>.

74. Mishura Y., Voronov I. Construction of maximum likelihood estimator in the mixed fractional–fractional Brownian motion model with double long-range dependence // *Modern Stochastics: Theory and Applications*. 2015. Vol. 2, no. 2. P. 147–164.
75. Mishura Y., Zhelezniak H. Extreme measures for entropy functionals // *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. 2017. no. 4. P. 15–20.
76. Mishura Y. S., Zhelezniak H. S. Evaluation of extreme values of entropy functionals, (Ukrainian) // *Teoriya Imovirnostei ta Matematichna Statistika*. 2019. no. 99. P. 177–186.
77. Mishura Y. S., Zhelezniak H. S. Approximate solution of the integral equations involving kernel with additional singularity // *Proceedings of Scientific conference “Actual Problems of Stochastic Analysis”*. Tashkent, Uzbekistan, 2021. P. 222–223.
78. Neri C., Schneider L. Maximum entropy distributions inferred from option portfolios on an asset // *Finance and Stochastics*. 2012. no. 16. P. 293–318.
79. Neta B. Adaptive method for the numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind. Part ii: Singular kernels // *Numerical Solution of Singular Integral Equations*. 1984. P. 249–263.
80. Norros I., Valkeila E., Virtamo J. An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions // *Bernoulli*. 1999. Vol. 5, no. 4. P. 571–587.
81. Nyquist H. Certain factors affecting telegraph speed // *Bell Systems Technical Journal*. 1924.
82. Nyquist H. Certain topics in telegraph transmission theory // *A.I.E.E. Trans*. 1928.
83. Ou J. Theory of portfolio and risk based on incremental entropy // *Risk Finance*. 2005. no. 6. P. 31–39.
84. Philippatos G., Wilson C. Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios // *Applied Economics*. 1972. no. 4. P. 209–220.

85. Rao B. L. S. P. Singularity of fractional Brownian motions with different Hurst indices // *Stochastic Analysis and Applications*. 2008. Vol. 26, no. 2. P. 334–337.
86. Rao B. L. S. P. *Statistical inference for fractional diffusion processes*. John Wiley & Sons, 2010.
87. Renyi A. On measures of entropy and information // *Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. Berkeley, USA, 1961*. P. 547.
88. Rice J. On the degree of convergence of nonlinear spline approximations, in *Approximation with special emphasis on spline functions* (I.J. Schoenberg, ed.). Academic Press, NY, 1969.
89. Rödder W., Gartner I. R., Rudolph S. An entropy-driven expert system shell applied to portfolio selection // *Expert Systems with Applications*. 2010. no. 37. P. 7509–7520.
90. Rompolis L. Retrieving risk neutral densities from European option prices based on the principle of maximum entropy // *Journal of Empirical Finance*. 2010. no. 17. P. 918–937.
91. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*. Gordon and Breach, Yverdon, 1993.
92. Shannon C. E. A mathematical theory of communication // *Bell Systems Technical Journal*. 1948.
93. Stuart A., Ord J. *Kendall's Advanced Theory of Statistics: Distribution Theory*. Oxford University Press, New York, 1998.
94. Stutzer M. A simple non-parametric approach to derivative security valuation // *The Journal of Finance*. 1996. no. 51. P. 1633–1652.
95. Viola P., Wells W. M. Alignment by maximisation of mutual information // *International Journal of Computer Vision*. 1997. Vol. 24, no. 2. P. 137–154.
96. Wang X., Dong L., Yan J. Maximum ambiguity based sample selection in fuzzy decision tree induction // *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. 2011. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1109/TKDE.2011.67>.
97. Xiao W., Zhang W., Xu W. Parameter estimation for fractional Ornstein-

- Uhlenbeck processes at discrete observation // *Applied Mathematical Modelling*. 2011. no. 35. P. 4196–4207.
98. Xiao W., Zhang W. G., Zhang X. Maximum-likelihood estimators in the mixed fractional Brownian motion // *Statistics*. 2011. no. 45. P. 73–85.
99. Xu J., Zhou X., Wu D. Portfolio selection using λ mean and hybrid entropy // *Annals of Operations Research*. 2011. no. 185. P. 213–229.
100. Yaglom A. M. Correlation theory of processes with random stationary n th increments // *AMS Translation*. 1955. Vol. 37, no. 79. P. 141–196.
101. Zhai J. Fuzzy decision tree based on fuzzy-rough technique // *Soft Computing*. 2011. Vol. 15, no. 6. P. 1087–1096.

Додаток

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Mishura Y.S., Zhelezniak H.S., *Extreme measures for entropy functionals*, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics, **4**, (2017), P. 15–20.
2. Mishura Y.S., Zhelezniak H.S., *Evaluation of extreme values of entropy functionals*, (Ukrainian), Teor. Imovir. Mat. Stat., **99**, (2018), P. 177–186; translation in Theory of Probability and Mathematical Statistics, **99**, (2019), P. 199–210.
3. Makogin, V.I., Mishura, Y.S., Zheleznyak, G.S., *Minimization of the entropy for a mixture of standard and fractional brownian motions* (Ukrainian), Teor. Imovir. Mat. Stat., **101** (2019), P.169–188; translation in Theory of Probability and Mathematical Statistics, **101**, (2020), P. 193–215.
4. Makogin, V., Mishura, Y., Zhelezniak, H., *Approximate solution of the integral equations involving kernel with additional singularity*, Stochastic Models, **37(4)** (2021), P. 549–567.

**Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів
дисертації**

1. Железняк Г. С., Мішура Ю. С. Екстремальні міри для ентропійних функціоналів // Матеріали XVI Міжнародної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна 2018”. К. : Київський університет, 2018. С. 16–17.
2. Железняк Г. С., Мішура Ю. С. Екстремуми функціоналів ентропійного типу // Матеріали XVII Міжнародної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна 2019”. К. : Київський університет, 2019. С. 24–25.
3. Железняк Г. С., Мішура Ю. С. Застосування інтегральних рівнянь із слабкою сингулярністю до проблеми оптимізації ентропійних функціоналів // Матеріали XVIII Міжнародної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна 2020”. К. : Київський університет, 2020. С. 16.
4. Y. S. Mishura, H. S. Zhelezniak / Approximate solution of the integral equations involving kernel with additional singularity // Proceedings of Scientific conference “Actual Problems of Stochastic Analysis”. Tashkent, Uzbekistan. February 20-21, 2021. P. 222–223.
5. Железняк Г. С., Мішура Ю. С. Ядро із додатковою сингулярністю // Матеріали XIX Міжнародної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна 2021”. К. : Київський університет, 2021. С. 14–15.
6. V. Makogin, Yu. Mishura, H. Zhelezniak / Stochastic applications of the approximate solution of the integral equation involving weakly singular kernel with additional singularity // Conference Materials of International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications. V”. Kyiv, Ukraine, 2021. P. 47.
7. Железняк Г. С. Додаткова сингулярність ядра при знаходженні наближе-

ної оцінки параметра // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ: Інститут математики НАН України, 2021. С. 92.

8. Железняк Г. С., Мішура Ю. С. Оцінка параметра зсуву θ в моделі з двома дробовими броунівськими рухами // Матеріали XX Міжнародної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна 2022”. К. : Київський університет, 2022. С. 11–12.

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації

1. Mishura Y., Ralchenko K., Zhelezniak H., *Numerical approach to the drift parameter estimation in the model with two fractional Brownian motions*, Communications in Statistics - Simulation and Computation, (2022), P. 1–15, DOI: 10.1080/03610918.2022.2099556.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Конференції

1. XVI Міжнародна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна 2018” (Київ, 2018).
2. XVII Міжнародна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна 2019” (Київ, 2019).
3. XVIII Міжнародна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна 2020” (Київ, 2020).
4. International Scientific conference “Actual Problems of Stochastic Analysis” (Tashkent, Uzbekistan, 2021).
5. XIX Міжнародна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна 2021” (Київ, 2021).
6. International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications. V” (Kyiv, 2021).

7. Міжнародна конференція молодих математиків, організована Інститутом математики НАН України (Київ, 2021).
8. XX Міжнародна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна 2022” (Київ, 2022).

Документ підписано у сервісі Вчасно (продовження)
thesis_Zhelezniak.pdf

Документ відправлено: 06:31 04.11.2022

Власник документу

Електронний підпис

06:31 04.11.2022

Ідентифікаційний код: 3487603189

ЖЕЛЕЗНЯК ГАННА СЕРГІЇВНА

Власник ключа: ЖЕЛЕЗНЯК ГАННА СЕРГІЇВНА

Час перевірки КЕП/ЕЦП: 06:31 04.11.2022

Статус перевірки сертифікату: Сертифікат діє

Серійний номер: 248197DDFAB977E504000000F6E2DC004746B703

Тип підпису: удосконалений