МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ГРОД Іван Миколайович

УДК 517.9

ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА МНОГОВИДАХ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор,
академік НАН України
Самойленко Анатолій Михайлович,
Інститут математики НАН України, м. Київ,
директор.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
Слюсарчук Василь Юхимович,
Національний університет водного господарства
та природокористування (м. Рівне),
професор кафедри вищої математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Петришин Роман Іванович,
Чернівецький національний університет
ім. Ю. Федьковича, перший проректор;

доктор фізико-математичних наук, професор
Теплінський Юрій Володимирович,
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, завідувач кафедри математики.

Захист відбудеться “ 30 ” січня 2017 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 03022 м. Київ – 22, проспект Академіка Глушкова 4 Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601 м. Київ, вул. Володимирська 58.

Автореферат розіслано “ 29 ” грудня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради М.П. Моклячук

Актуальність теми. Теорія лінійних розширень динамічних систем на многовидах є одним із розділів якісної теорії диференціальних рівнянь, основне завдання якої полягає у вивченні властивостей розв'язків цих рівнянь, не маючи явного вигляду самих розв'язків.

Як відомо, розвиток методів дослідження нелінійних динамічних систем є одним із актуальних напрямів сучасної математики, оскільки такі системи використовуються для математичного опису багатьох явищ природи та технічних процесів, однак через їх складність важко піддаються вивченню. Незважаючи на те, що у даному напрямку працювало і працює багато видатних учених (математиків, механіків, фізиків), на сьогодні залишається ще чимало нерозв'язаних проблем і задач, вивчення яких має велике значення як для розвитку теоретичних досліджень, так і для практики. Зокрема, в даний час значна увага дослідників приділяється розгляду нелінійних кінетичних рівнянь, вивченню якісної поведінки розв'язків лінійних і слабо-нелінійних диференціальних та різницевих рівнянь в просторах Банаха та Гільберта, рівнянь Гамільтона. При цьому розробляються не лише нові методи побудови точних і наближених (асимптотичних) розв'язків таких задач, а й досліджуються асимптотичні властивості розв'язків згаданих задач, питання існування та аналізу властивостей певних множин спеціальної структури.

Задачі про існування обмежених розв'язків виникли у ході вивчення питань існування періодичних розв'язків лінійних і нелінійних систем ще в класичних роботах О. Ляпунова та А. Пуанкаре. Дослідженню існування періодичних розв'язків різних класів функціонально-диференціальних рівнянь, імпульсних і різницевих рівнянь присвячена велика кількість робіт. Задача про існування неперіодичних, обмежених на всій осі розв'язків лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь почала інтенсивно розвиватися після появи роботи А. Майзеля, де використовувався метод Перрона. Розширення цих результатів на випадок нескінченновимірних систем було розроблено в монографії Х. Массери і Х. Шеффера. В цих роботах вперше вивчались питання про існування обмежених на всій осі розв'язків у зв'язку з властивостями експоненціальної дихотомії відповідної однорідної лінійної системи. Таку ж проблему було розглянуто для функціонально-диференціальних рівнянь. Слід зазначити, що подальші досідження питань дихотомії на всій осі було пов'язані з фундаментальними роботами Ю. Далецького та М. Крейна, В. Плісса, А. Самойленка, М. Перестюка, В. Коппеля. В подальшому ці проблеми вивчалися в роботах Д. Хенрі, А. Баскакова, В. Слюсарчука, Ю. Теплінського, М. Городнього, А. Чайковського, А. Дороговцева, І. Чуєшова для систем диференціальних та різницевих рівнянь в банахових просторах.

У працях Ю. Митропольського, А. Самойленка, В. Кулика ці задачі розглядались для систем звичайних диференціальних рівнянь та лінійних розширень динамічних систем на торі за допомогою знакозмінних функцій Ляпунова. В багатьох роботах для дослідження умов існування обмежених розв'язків диференціальних та різницевих рівнянь використовувалася спектральна теорія операторів. Серед них, зокрема, слід відзначити роботи Р. Саккера та Д. Селла. Для нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь ця теорія почала інтенсивно застосовуватись після появи відомої статті Г. Мельникова. Цей напрямок досліджень в якісній теорії диференціальних рівнянь розвивали С. Шоу, Д. Хейл, Д. Мале-Паре, Д. Гукенхеймер, П. Холмс, Д. Груендлер.

Ще один поштовх для вивчення задачі про обмежені на всій осі розв'язки дала відома лема К. Палмера. Він довів еквівалентність між властивостями експоненціальної дихотомії на півосях і умовою нетеровості оператора диференціальної системи на просторі неперервно-диференційовних та обмежених вектор-функцій. Варто також відмітити більш ранню роботу Р. Саккера, в якій було доведено цей результат в один бік. Для дослідження обмежених розв'язків звичайних неоднорідних систем диференціальних рівнянь, в припущенні е-дихотомії на півосях однорідної системи, продуктивним виявився апарат псевдообернених матриць (Е. Мур, Р. Пенроуз) та операторів, що часто використовувався в межах теорії матричних та операторних рівнянь. В працях А. Самойленка, О. Бойчука та інших цей апарат було застосовано до вивчення крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь з імпульсним впливом, рівнянь із запізненням тощо. Завдяки цим результатам та лемі К. Палмера стало можливим використання апарату псевдообернених матриць та операторів до задачі про обмежені на всій осі розв'язки лінійних і нелінійних диференціальних рівнянь в банахових просторах за умови експоненціальної дихотомії на півосях відповідного лінійного однорідного рівняння.

Водночас актуальним розділом нелінійної динаміки, що продовжує активно розвиватися в наш час, є теорія збурень одно та багаточастотних коливань у гамільтонових системах. Такі системи належать до числа найважливіших об'єктів дослідження в класичній та небесній механіці, математичній фізиці, теорії динамічних систем. У теорії збурень гамільтонових систем важливе місце посідають питання, пов'язані з дослідженням ефектів, спричинених резонансами.

Математичні дослідження класичних динамічних систем вперше почали проводитись у роботах А. Пуанкаре, який вивчав структуру розв'язків диференціальних рівнянь у фазовому просторі на двовимірному торі. Зокрема, він показав, що в загальному випадку інваріантні тори інтегровної гамільтонової системи, які несуть на собі квазіперіодичні рухи з резонансними частотами, руйнуються через будь-які малі збурення. При цьому внаслідок впливу збурень зберігається тільки скінченна кількість періодичних орбіт, у той час, як інші знищуються, що приводить до виникнення зон хаотичної поведінки. Дослідження в цьому напрямі виявились надзвичайно плідними, тому пізніше вже розглядались структури інтегральних кривих на m–вимірному торі.

Після Пуанкаре значним проривом у вивченні майже інтегровних гамільтонових систем стало створення КАМ-теорії. Близько п'ятдесят років тому А. Колмогоровим, В. Арнольдом та Ю. Мозером була заснована теорія квазіперіодичних рухів аналітичних та гладких динамічних систем, яку сьогодні називають КАМ-теорією. А. Колмогоров запропонував ідею поєднання асимптотичних методів з послідовними замінами змінних ньютонівського типу, що відкрила широкі перспективи для одержання строгих результатів щодо збереження квазіперіодичних рухів при малих збуреннях гамільтоніанів інтегровних систем. В. Арнольд навів повне доведення теореми Колмогорова. Для розв'язання задач, пов'язаних з проблемою малих знаменників, у класі скінченно диференційовних функцій Ю. Мозер запропонував метод згладжування. КАМ-теорія стверджує, що за умови функціональної незалежності частот квазіперіодичних рухів аналітичної інтегровної за Ліувіллем гамільтонової системи більшість (у розумінні міри Лебега) її інваріантних торів під впливом малих збурень функції Гамільтона не руйнується, а лише дещо деформується. Вивчення некласичного випадку в КАМ-теорії, коли фазовий простір незбуреної гамільтонової системи розшаровується коізотропними інваріантними торами (розмірність таких торів перевищує половину розмірності фазового простору), проводилось в працях І. Парасюка.

Значним кроком у розвитку теорії динамічних систем були дослідження математиків М. Крилова та М. Боголюбова, які, починаючи з 40-х років XX століття, займалися теорією коливань і вважаються творцями методу асимптотичних наближень Крилова-Боголюбова, що полягає в наближенні диференціальних рівнянь усередненими рівняннями руху. Крім того, вони вперше ввели поняття інваріантних тороїдальних многовидів у системах нелінійної механіки, які називають інваріантними торами. Пізніше ідеї, висловлені ними, були розвинуті в дослідженнях Ю. Митропольського і вилились у метод інтегральних многовидів нелінійної механіки. Це привело до подальшого розвитку цієї теорії та отримання багатьох глибоких результатів С. Діліберто, Дж. Хейла, Я. Курцвейля, Е. Гребеннікова, Ю. Рябова, О. Ликової, Дж. Кунера, І. Купки, В. Волосова, Петришина Р.І. та інших. Початком нового циклу досліджень, у цьому напрямку, стали роботи А. Самойленка, де вводиться поняття функції Гріна (Гріна-Самойленка) задачі про інваріантні тори лінійного розширення динамічної системи, яке виявилось надзвичайно важливим і дало поштовх до нових досліджень. Ефективним методом дослідження питання існування функцій Гріна-Самойленка виявився метод знакозмінних функцій Ляпунова, які розглядаються у вигляді квадратичних форм. Розвитку цього напрямку присвячені роботи Ю. Митропольського, А. Самойленка, В. Кулика, В. Ткаченка, О. Бурилка та ін.

Вивчаючи структури траєкторій системи

$$\frac{dz}{dt} = Z(z), \quad z \in R^{m+n},$$

які починаються в околі інваріантного m-мірного многовиду M, зручно перейти (як показано в роботах А.М. Самойленка) до локальних координат

$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, які вводяться в околі даного многовиду, так, що рівняння існуючого тороідального многовиду приймає вигляд $x = 0$.

При цьому, приходимо до розгляду системи:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{1}$$

де вектор-функція $a(\varphi)$ і матрична функція $A(\varphi)$ є неперервними за сукупністю змінних $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ і 2π – періодичними по кожній змінній $\varphi_j, j = \overline{1, m}$, тобто задані на m-вимірному торі $\mathcal{T}_m$, $x \in R^n$. Очевидно, що цей розв'язок визначений при всіх $t \in R$ і неперервно залежить від φ_0. Дисертаційне дослідження присвячене вирішенню порушених питань.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в рамках науково-дослідної роботи «Якісний та асимптотичний аналіз систем диференціальних, функціонально-диференціальних та імпульсних рівнянь» відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (Державний реєстраційний номер роботи 0111U002035).

Метою дисертаційної роботи є подальший розвиток якісних методів дослідження систем диференціальних рівнянь і застосування цих методів до вивчення стійкості, обмеженості, періодичності і квазіперіодичності розв'язків, встановлення умов існування обмежених інваріантних множин і збереження їх при збуреннях, дослідження умов гладкості інваріантних тороїдальних многовидів.

Для досягнення поставленої мети визначено такі завдання:

- дослідити залежність від параметра обмежених інваріантних многовидів автономних систем лінійних рівнянь;
- здійснити аналіз систем лінійних розширень на многовидах з тотожно виродженою матрицею і навести приклади таких систем, які є регулярними;
- дослідити специфіку побудови узагальнених функцій Ляпунова для регулярних лінійних розширень динамічних систем на торі;
- встановити критерій регулярності лінійних систем в термінах властивостей матрицантів;
- отримати нові класи систем лінійних диференціальних рівнянь, які є регулярними;
- встановити умови існування єдиного тороїдального многовиду для систем динамічних розширень на торі типу Ріккаті й достатні умови (використовуючи поняття функції Гріна-Самойленка про існування обмежених інваріантних многовидів, в термінах квадратичних форм) ;
- дослідити умови гладкості обмеженого інваріантного многовиду нелінійної системи типу Ріккаті;
- встановити взаємозв'язок між властивостями матриканта лінійних розширень динамічних систем на торі для експоненціально дихотомічних і слабо регулярних лінійних систем;
- дослідити характер модулів неперервності вищих похідних функції

Гріна-Самойленка і інваріантного тора лінійних розширень динамічних систем на торі, отримати умови (оцінки) їх збіжності;

- дослідити питання існування обмежених розв'язків систем диференціальних рівнянь в банаховому просторі;

- визначити достатні умови існування обмежених послідовностей для нелінійних різницевих рівнянь, використовуючи теорію c-неперервних операторів.

Об'єктом дослідження є розширення динамічних систем на многовидах і їх збурення, нелінійні диференціальні і різницеві рівняння в банаховому проторі.

Предметом дослідження є необхідні і достатні умови існування обмежених і тороїдальних інваріантних многовидів для розширень динамічних систем на многовидах і дослідження їх властивостей на предмет гладкості, існуння обмежених розв’язків нелінійних диференціальних і різницевих рівнянь в банаховому проторі .

Методи дослідження. У роботі використовуються вдосконалені та розвинені методи якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь, зокрема, методи узагальнених функцій Ляпунова і метод функції Гріна-Самойленка задачі про обмежені інваріантні многовиди, методи нелінійного функціонального аналізу і теорії c-неперервних операторів.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими, і основні з них полягають в тому, що запропоновано та описано нові підходи при дослідженні регулярних і слабо регулярних лінійних розширень динамічних систем на многовидах; вивчаються різні конструкції знакозмінних функцій Ляпунова. Для певних класів таких систем описано нові структури побудови вироджених узагальнених функцій Ляпунова. Отримані результати дають змогу вивчати множини лінійний розширень динамічних систем на многовидах при фіксованій функції Ляпунова і множини функцій Ляпунова при фіксованих лінійних розширеннях динамічних систем.

Серед найважливіших результатів, що отримано в дисертаційній роботі, виділено такі:

- запропоновано підхід до побудови узагальнених функцій Ляпунова для регулярних лінійних розширень динамічних систем на торі;

- вперше отримано достатні мови існування обмежених розв'язків нелінійних диференціальн их рівнянь в банаховому просторі;

- для нелінійних різницевих рівнянь, використовуючи теорію c-неперервних операторів, отримано достатні умови існування обмежених послідовностей;

- розглянуто питання залежності від параметра обмежених інваріантних многовидів автономних систем лінійних рівнянь;

- проведено аналіз систем лінійних розширень на многовидах з тотожно виродженою матрицею і наведено приклади таких систем, які є регулярними;

- досліджено характер модулів неперервності вищих похідних функції

Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори і інваріантного тора лінійних розширень динамічних систем на торі, отримані умови (оцінки) їх збіжності;

- встановлено критерій регулярності лінійних систем в термінах властивостей матрицантів;
- отримано нові структури систем лінійних диференціальних рівнянь, які є регулярними;
- для систем динамічних розширень на торі типу Ріккаті знайдено достатні умови існування єдиного тороїдального многовиду;
- встановлено достатні умови, в термінах квадратичних форм, існування обмеженого інваріантного многовиду для динамічних систем типу Ріккаті;
- досліджено умови гладкості обмеженого інваріантного многовиду нелінійної системи типу Ріккаті;
- встановлено взаємозв'язок між властивостями матриманта лінійних розширень динамічних систем на торі для експоненціально дихотомічних і слабо регулярних лінійних систем.

Наукове та практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Результати та розвинені в ній методи знайдуть застосування в розвитку загальних напрямків якісної теорії як звичайних диференціальних рівнянь, так і диференціальних рівнянь в банаховому просторі і можуть бути використані для подальшої розробки якісно нових методів дослідження систем лінійних розширень динамічних систем на многовидах.

Особистий внесок здобувача. Загальний план та основний напрямок дослідженнь дисертації визначені науковим консультантом – А. Самойленком. Усі результати, що виносяться на захист, одержано автором самостійно. В роботах, які опубліковані у співавторстві, А. Самойленку належить загальна постановка задачі, дисертанту – доведення теорем і розробка методів дослідження властивостей розв'язків систем диференціальних рівнянь; О. Бурилку належить перевірка складних технічних викладок, В. Кулику – обговорення отриманих результатів, водночас постановка задач та доведення теорем належать І. Гроду.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на:

1) засіданнях семінарів відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (науковий керівник – академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор А. Самойленко);

2) засіданнях вченої ради Інституту математики НАН України;

3) наукових семінарах в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (керівник – академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор М. Перестюк)

4) міжнародних конференціях, конгресах, семінарах як закордоном, так і в Україні: Всесоюзная конференция «Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики», (12–15 сентября

1989 г., г. Тернополь); Международная конференция «Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики – вторые Боголюбовские чтения» (14–18 сентября 1992 г., г. Киев); Четвертая Крымская Международная Математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения» (5–12 сентября 1998 г., г. Симферополь); Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математики» (25–29 вереня 1998 р., м. Чернівці); Український математичний конгрес «Диференціальні рівняння і нелінійні коливання» (27–29 серпня 2001 р., м. Київ); Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробагатька (27 вереня – 1 жовтня 2004 р., м. Дрогобич); Міжнародна наукова конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування» (11–14 жовтня 2006 р., м. Чернівці); Міжнародна школа «Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2009)» (5–9 жовтня 2009 р., м. Кам'янець-Подільський); Міжнародна конференція «Проблеми стійкості та оптимізації динаміних систем детермінованої та стохастичної структури» (17–21 жовтня 2010 р., м. Чернівці); Международная конференція «Актуальные проблемы современной математики, информатики и механики» (28–30 сентября 2011 р., г. Алма-Аты, Казахстан); Міжнародна конференція: «Диференціальні рівняння та їх застосування» (27–29 вересня 2012 р., м. Ужгород); Всеукраїнська наукова конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування» (6–8 червня року 2012 р., м.Чернівці); Всеукраїнська наукова конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці» (11–13 червня року 2012 р., м.Чернівці); Боголюбівські читання DIF–2013. Диференціальні ріняння, теорія функцій та їх застосування (23–30 червня 2013 р.); Международная научная конференция «Дифференциальние уравнения и математическая физика» (11–12 апреля 2014, г. Алма-Аты, Казахстан); Кримська міжнародна математична конференція (23 вересня – 4 жовтня 2013 р., м. Судак); Международная математическая конференция «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (7–10 декабря 2015, г. Минск, Республика Беларусь); Міжнародна наукова конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування» (19–21 травня 2016 р., м. Ужгород); Міжнародна наукова конференція «Диференціально- функціональні рівняння та їх застосування» (28–30 вересня 2016 р., м. Чернівці).

Публікації. Всього за темою дисертації опубліковано 50 праць, з них 22 статті у фахових наукових виданях, 11 з них входять до міжнародних наукометричних баз даних.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел та списку публікацій автора. Загальний обсяг роботи становить 315 сторінок; список використаних джерел (245 найменування) та список публікацій займають 27 сторінок.

Подяки. Я висловлюю свою щиру подяку моєму вчителю академіку НАН України А. Самойленку за проявлені ним постійну увагу і турботу. А

також професору В. Кулику за вияв зацікавленості у проблемі дослідження та висловлені поради.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* обґрунтовано актуальність дисертації, сформульовано мету і завдання дослідження, висвітлено питання про наукову новизну, теоретичне і практичне значення одержаних результатів. Наведено відомості про апробацію результатів роботи та публікації за темою дисертації.

У *першому розділі* подано огляд наукових праць за темою дисертації, обґрунтовано актуальність роботи і визначено напрями досліджень.

Другий розділ присвячено дослідженню регулярності динамічних систем на многовидах типу (1).

Позначимо через $C^0(\mathcal{T}_m)$ простір неперервних функцій $F(\varphi)$, 2π - періодичних за кожною змінною φ_j, $j=\overline{1,m}$, а через $C^{'}(\mathcal{T}_m;a)$ – підпростір $C^0(\mathcal{T}_m)$ таких функцій $F(\varphi)$, що функція $F\big(\varphi_t(\varphi_0)\big)$ є неперервно диференційованою по t при всіх $t \in R$, $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$ і при цьому

$$\frac{d}{dt}F\big(\varphi_t(\varphi_0)\big)\Big|_{t=0}\mathrm{d}ef = F(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m).$$

А через $\Omega_0^t(\varphi;A)$ − матрицант лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = A\big(\varphi_t(\varphi)\big)x,$$

$\Omega_0^t\ (\varphi;A)|_{t=0} = I_n - (n\times n)$-вимірна одинична матриця.

Означення 1.1. *Нехай існує $(n\times n)$-вимірна матрична функція $C(\varphi)\in C^0(\mathcal{T}_m)$, яка задовольняє оцінки*

$$\|\Omega_0^t(\varphi;A)C(\varphi)\| \le Ke^{-\gamma t}, \qquad t\ge 0$$
$$\|\Omega_0^t(\varphi;A)[C(\varphi)-I_n]\| \le Ke^{\gamma t}, t\le 0. \tag{2}$$

з додатними сталими K та γ, які не залежать від $\varphi\in\mathcal{T}_m$.

Тоді функцію

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi;A)C\big(\varphi_\tau(\varphi)\big), & \tau\le 0 \\ \Omega_\tau^0(\varphi;A)\big[C\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)-I_n\big], & \tau>0 \end{cases} \tag{3}$$

називають функцією Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори для системи (1).

З робіт А. Самойленка і В. Кулика відомо, що існування функції Гріна–Самойленка (3) еквівалентне існуванню симетричної матриці $S(\varphi)\in C'(\mathcal{T}_m;a)$, для якої виконується умова

$$\big\langle\big[\dot S(\varphi) - S(\varphi)A^T(\varphi) - A(\varphi)S(\varphi)\big]x,x\big\rangle \ge \|x\|^2, \qquad \forall x\in R^n,$$

де A^T транспонована матриця.

Існування такої функції забезпечує існування інваріантного тора системи рівнянь (1) для кожної вектор-функції $f(\varphi)\ \in C^0(\mathcal{T}_m)$.

Нагадаємо, що рівністю $x=u(\varphi)$ задається інваріантний тор системи (1), якщо $u(\varphi)\in C'(\mathcal{T}_m;a)$ і виконується тотожність

$\dot{u}(\varphi) \equiv A(\varphi)u(\varphi) + f(\varphi)$, для всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Вважають, що система (1) регулярна, якщо вона має єдину функцію Гріна (3) з оцінкою (2). Якщо відомо, що система (1) має хоча б одну функцію Гріна (3), то кажуть, що вона слабо регулярна. У випадку, коли система (1) має не менше двох різних функцій Гріна (3) з оцінкою (2), то її називають строго слабо регулярною. Як відомо, для того, щоб система (1) була слабо регулярною, необхідно і достатньо, щоб існувала квадратична форма

$V(\varphi, x) = \langle S(\varphi)y, y\rangle$

з неперервно диференційовною матрицею коефіцієнтів $S(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$,

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \frac{dy}{dt} = -A^T(\varphi)y,$$

тобто

$$\left\langle \left[\frac{\partial S}{\partial \varphi} a(\varphi) - S(\varphi)A^T(\varphi) - A(\varphi)S(\varphi)\right] y, y \right\rangle \geq \|y\|^2.$$

При цьому система (1) буде регулярною в тому і тільки в тому випадку, коли $\det S(\varphi) \neq 0$, Відомо також, що кожну слабо регулярну систему (1) завжди можна доповнити до регулярної таким чином

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \qquad \frac{dy}{dt} = x - A^*(\varphi)y,$$

Це наводить на думку, що існують інші матриці $P(\varphi)$, більш загальної структури, такі, що система

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \tag{4}$$

є регулярною.

Проведені в цьому напрямі дослідження дали змогу отримати нові структури регулярних і слабо регулярних лінійних розширень динамічних систем на торі.

Теорема 2.1. *Нехай система (4) така, що матриця $P(\varphi)$ має вигляд:*

$$\frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} A_{12}(\varphi) + A_{13}(\varphi) & B_2(\varphi) + A_{23}(\varphi) & -A_{23}^*(\varphi) + B_3(\varphi) \\ B_1(\varphi) - A_{12}(\varphi) & -A_{12}^*(\varphi) - B_2(\varphi) & -A_{13}^*(\varphi) + A_{23}^*(\varphi) \\ B_1(\varphi) - A_{13}(\varphi) & -A_{12}^*(\varphi) - A_{23}(\varphi) & -A_{13}^*(\varphi) - B_3(\varphi) \end{pmatrix},$$

де симетричні матриці $B_i(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ додатно визначені, тобто

$$\langle B_i(\varphi)x, x\rangle \geq \beta_i \|x\|^2, \ \forall x \in R^n, \beta_i > 0, \ i = \overline{1,3}, \tag{5}$$

а $A_{ij}(\varphi)$ довільні матриці з простору $C^0(\mathcal{T}_m)$.

Тоді система (4) має єдину функцію Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори (буде регулярною).

Зауваження 2.2. *Теорема* 1.1 *має місце і тоді, коли $P(\varphi)$ приймає вигляд*

$$P(\varphi) = \begin{pmatrix} B_1(\varphi) & -A_{12}^*(\varphi) & -A_{13}^*(\varphi) \\ -A_{12}(\varphi) & -B_2(\varphi) & A_{23}^*(\varphi) \\ -A_{13}(\varphi) & -A_{23}(\varphi) & -B_3(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.2. *Нехай в структурі матриці $P(\varphi)$ симетричні матриці $B_1(\varphi), B_3(\varphi)$ – додатно визначені, тобто виконані нерівності (5) при i=1,3, а симетрична матриця $B_2(\varphi)$ така, що $\langle B_2(\varphi)x, x\rangle \geq 0$, тобто може бути і нульовою $B_2 \equiv 0$. Окрім цього, припустимо також, що наступна система*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\big(A_{12}(\varphi) + B_2(\varphi)\big)x$$

є слабо регулярною, тоді система (4) буде регулярною.

Теорема 2.3. *Нехай симетричні матриці $B_i(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m), i = \overline{1,3}$ задовольняють умови*

$$\langle B_1(\varphi)x, x\rangle \geq \beta_1\|x\|^2 \quad , \quad \beta_1 > 0$$

$$\langle B_i(\varphi)x, x\rangle \geq 0 \quad , \quad i = 1,2 \quad , \qquad \forall x \in R^n,$$

і система рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$
$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{2}\Big[\big(A_{1\,2}(\varphi) + B_2^*(\varphi)\big)x_2 + \big(A_{1\,3}(\varphi) - A_{2\,3}(\varphi)\big)x_3\Big]$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2}\Big[\big(A_{1\,2}(\varphi) + A_{2\,3}^*(\varphi)\big)x_2 + \big(A_{1\,3}(\varphi) + B_3(\varphi)\big)x_3\Big]$$

$\tilde{x} = (x_2, x_3) \in R^{2n}$ *є слабо регулярною. Тоді система (4) буде регулярною.*

Теорема 2.4. *Нехай в системі (4) матриця $P(\varphi)$ має вигляд*

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (2-k)B_1 - \sum_{j=2}^{k+1} A_{1\,j}C_1(\varphi) & & C_2(\varphi) & \cdots C_k(\varphi) \\ B_1(\varphi) - A_{1\,1}(\varphi) & -A_{1\,1}^*(\varphi) - B_2(\varphi) & -A_{1\,2}^*(\varphi) + A_{2\,1}^*(\varphi) & \cdots -A_{1\,k}^*(\varphi) + A_{2\,k-1}^*(\varphi) \\ B_1(\varphi) - A_{1\,2}(\varphi) & -A_{1\,1}^*(\varphi) - A_{2\,1}(\varphi) & -A_{1\,2}^*(\varphi) - B_3(\varphi) & \cdots -A_{1\,k}^*(\varphi) + A_{3\,k-2}^*(\varphi) \\ . & . & . & \cdots. \\ B_1(\varphi) - A_{1\,k}(\varphi) & -A_{1\,1}^*(\varphi) - A_{2\,k-1}(\varphi) & -A_{1\,2}^*(\varphi) - A_{3\,k-2}(\varphi) & \cdots -A_{1\,k}^*(\varphi) - B_{k+1}(\varphi) \end{pmatrix}, (6)$$

де

$C_i(\varphi) = (2-k)A_{1\,i}(\varphi) + B_i(\varphi) - \sum_{j=2}^{i} A_{j\,i-(j-1)}^*(\varphi) + \sum_{j=1}^{k-i} A_{i+1\,j}(\varphi)\,,\ i = \overline{2,k},$

а всі матриці $B_i(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ додатно визначені, тобто

$$\langle B_i(t)x, x\rangle \geq \beta_i\|x\|^2, \qquad \beta_i - const > 0, \qquad \forall x \in R^n, i = \overline{1, k+1}.$$

Тоді система рівнянь виду (4), $x \in R^{n(k+1)}$ з матрицею (6)буде регулярною при довільних матричних функціях $A_{i\,j}(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$

Теорема 2.5. *Нехай k матриць $B_i(\varphi)$ є додатно визначеними, тобто $\langle B_i(\varphi)x, x\rangle \geq \beta_i\|x\|^2, \forall x \in R^n, \beta_i > 0, i = \overline{1,k}$, а $B_{k+1}(\varphi)$ така, що $\langle B_{k+1}(\varphi)x, x\rangle \geq 0$, а значить, може бути і нулем $B_{k+1}(\varphi) \equiv 0$. Крім цього,* *припустимо також, що наступна система*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(A_{1k}(\varphi) + B_k(\varphi)\right)x$$

є слабо регулярною.

Тоді система (4), де $P(\varphi)$ має вигляд (17), буде регулярною.

Вивчаючи питання про взаємозв'язок між властивостями матриканта лінійних розширень динамічних систем на торі для експоненціально дихотомічних і слабо регулярних лінійних систем, доведено теореми.

Теорема 2.6. *Нехай існує скалярна функція $T = T(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m)$, для якої виконується нерівність*

$$\left\|\Omega_0^{T(\varphi)}\right\|_0^2 \quad \left|1 + \dot{T}(\varphi)\right|_0 < 1.$$

Тоді система (1) буде регулярною і обов'язково $T(\varphi) \neq 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{T}_m$. Більше того, якщо $T(\varphi) > 0$, то тривіальний тор $x = 0$ цієї системи є експоненціально стійким на $-\infty$.

Теорема 2.8. *Нехай існує $k \geq 1$ матриць $C^{(i)}(\varphi) \in C^o(\mathcal{T}_m), i = \overline{1,k}$ розміру $n \times n$ і скалярних функцій $T = T_i(\varphi) \in C^o(\mathcal{T}_m)$, для яких виконуються умови*

$$\sum_{i=1}^{k} C^{(i)}(\varphi) \equiv I_n,$$

$$\left(C^{(i)}(\varphi)\right)^2 \equiv C^{(i)}(\varphi), \qquad i = \overline{1,k}$$

$$\left\|\Omega_o^{t+T_i(\varphi)}(\varphi) C^{(i)}(\varphi) \Omega_t^o(\varphi)\right\| \leq d = const < 1$$

Тоді система (1) буде регулярною.

Теорема 2.9. *Нехай існує k матриць $C^{(i)}(\varphi) \in C^o(\mathcal{T}_m)$, які задовольняють умови теореми 2.8 і крім цього $\exists \ l \geq 2$ матриць $\overline{C}^{(j)}(\varphi) \in C^o(\mathcal{T}_m)$ таких, що $l \sum_{j=1}^{l} \overline{C}^{(j)}(\varphi) \equiv I_n$ і виконується нерівність*

$$l \sum_{j=1}^{l} \left\|\overline{C}^{(j)}(\varphi) \Omega_{\tau_j}^o(\varphi)\right\|_o^2 < 1$$

при деяких постійних числах τ_j.

Тоді система (1) буде регулярною.

У припущенні, що система (1) має інваріантний тор $x = u(\varphi)$ або функцію Гріна-Самойленка, важливим є питання про степінь неперервності по φ цих функцій залежно від матричної функції $A(\varphi)$ і вектор-функцій $a(\varphi)$, $f(\varphi)$. Ця залежність має далеко неочевидний характер. Так праві частини в системі (1) можуть бути неперервно диференційованими, а інваріантний тор може не задовольняти умову Ліпшиця по φ. Виявилось також, що функція Гріна $G_0(\tau, \varphi)$ має дещо більшу степінь неперервності, ніж інваріантний тор.

Для подальших викладок, позначимо через $C^q(\mathcal{T}_m)$, $q \geq 1$, – підпростір $C^0(\mathcal{T}_m)$ функцій $F(\varphi)$, які мають частинні похідні $D_\varphi^p F(\varphi)$, $|p| = \sum_{i=1}^m p_m$, $|p| = \overline{1,q}$.

Досліджуючи характер модуля неперервності вищих похідних функції Гріна та інваріантного тора системи (1) отримано наступні результати.

Нехай деяка матрична або вектор-функція $\Phi(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, тоді скалярна функція $\omega(\Phi;\sigma) = \sup\limits_{\|\varphi-\overline{\varphi}\|\leq\sigma} \|\Phi(\varphi) - \Phi(\overline{\varphi})\|$ називається її модулем неперервності. У випадку $\Phi(\varphi) \in C^q(\mathcal{T}_m)$, $q \geq 1$, для її вищих похідних позначимо:

$$\omega_p(\Phi;z) = \begin{cases} \max\{\omega(D_\varphi^p\Phi;z)L_{q-1}(\Phi)z\}, & |p| = q, \\ L_{|p|}(\Phi)z, & |p| = \overline{1,q-1}, \end{cases}$$

де $L_p(\Phi) = \max\limits_{|i|=0,|p|} L_i(\Phi)$, $L_i(\Phi)$ – константа Ліпшиця відповідної частинної похідної функції $\Phi(\varphi)$ $|i|$-го порядку, тобто така, що $\|D_\varphi^i\Phi(\varphi) - D_\varphi^i\Phi(\overline{\varphi})\| \leq L_i(\Phi)$. Також покладемо $\omega_0(A;z) = \omega(A;z)$, $\omega_0(f;z) = \omega(f;z)$, $\omega_0(a;z) \equiv 0$.

Щоб отримати оцінки для різниці похідних розв'язку задачі Коші в точках $\varphi, \overline{\varphi} \in \mathcal{T}_m$, $\varphi \neq \overline{\varphi}$ для вище описаного класу функцій $\Phi(\varphi)$, розглянемо допоміжні відображення

$$J_\nu(\Phi;p;z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\nu|\sigma|\}\omega_p(\Phi;F^{-1}(F(z)+|\sigma|))d\sigma, \qquad |p| = \overline{0,q},$$

де ν – довільна додатна константа і $F(z) = \int_\eta^z \omega(a;z)^{-1}d\sigma$, $\eta = const > 0$. Має місце таке твердження.

Лема 2.1. Якщо $a(\varphi) \in C^q(\mathcal{T}_m)$, $q \geq 1$, то для додатної сталої ν виконуються оцінки

$$\|D_\varphi^p\varphi_t(\varphi) - D_\varphi^p\varphi_t(\overline{\varphi})\| \leq M_p \exp\{(\alpha|p|+\nu)|t|\} \times$$
$$\times J_\nu(a;p;\|\varphi - \overline{\varphi}\|), \qquad |p| = \overline{1,q},$$

де M_p – додатні сталі, α визначена нерівністю $\alpha \geq \max\limits_{\|\xi\|=1} \|(\partial a/\partial\varphi)\xi\|$

Теорема 2.10. *Нехай функції $a(\varphi)$, $A(\varphi)$ належать класу $C^q(\mathcal{T}_m)$ і система (1) має єдину функцію Гріна (3) задачі про інваріантний тор, яка задовольняє оцінку (2).*

Тоді при виконанні нерівності

$2\gamma > \alpha q$

існують всі частинні похідні по φ функції $G_t(\tau,\varphi)$ до порядку q включно і має місце оцінка

$$\|D_\varphi^p G_t(\tau,\varphi) - D_\varphi^p G_t(\tau,\overline{\varphi})\| \leq exp\{-\gamma|t-\tau| + (\alpha|p|+\nu)max\{|t|;|\tau|\}\} \times$$

$$\times\left(K_pJ_v(\|\varphi-\overline{\varphi}\|)+\overline{K}_pJ_v(A;p;\|\varphi-\overline{\varphi}\|)\right), |p|\overline{0,q},$$

для кожного фіксованого $\nu \in (0,2\gamma-\alpha|p|)$ *, де* K_p*,* $\overline{K}_p$ *– деякі додатні сталі.*

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}&\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi),\\&\frac{dX}{dt}=XH_1(\varphi)X+H_3(\varphi)X+XH_2(\varphi)+H_4(\varphi),\end{aligned}\qquad(7)$$

де $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_m)\in\mathcal{T}_m$, $a(\varphi)$ – m-мірна векторна функція з простору $C^0(\mathcal{T}_m)$. Припускаємо, $a(\varphi)$ така, що задача Коші $d\varphi/dt=a(\varphi),\varphi|_{t=0}=\varphi_0$ при довільному фіксованому $\varphi_0\in\mathcal{T}_m$ має єдиний розв'язок $\varphi_t(\varphi_0)$, визначений на всій осі R, і він неперервно залежить від параметрів $\varphi_0\in\mathcal{T}_m$. $H_i(\varphi)$ $\left(i=\overline{1,4}\right)$ – прямокутні матричні функції розмірності відповідно $r_2\times r_1$, $r_2\times r_2$, $r_1\times r_1$, $r_1\times r_2$, визначені на всьому просторі $\mathcal{T}_m$, неперервні за сукупністю змінних і обмежені.

Досліджуючи модулі неперервності інваріантних многовидів системи (7), отримано таке твердження.

Теорема 2.11. *Припустимо, що система* (7) *така, що функції* $a(\varphi)$*,* $H_i(\varphi)$*, при* $i=\overline{1,4}$ *належать класу* $C^q(\mathcal{T}_m)$ *і має місце нерівність*

$$\begin{aligned}&|\langle H_2(\varphi)z_1,z_1\rangle+\langle[H_4(\varphi)+H_1^T(\varphi)]z_1,z_2\rangle+\langle H_3(\varphi)z_2,z_2\rangle|\geq\\&\geq\beta(\|z_1\|^2+\|z_2\|^2),\end{aligned}$$

для всіх $z_1\in R^{k_1}$, $z_2\in R^{k_2}$*, де* $\beta=const>0$.

Тоді при виконанні нерівності

$$\beta>\alpha q$$

система рівнянь (7) має інваріантний тор $Y=M(\varphi)$ *разом з усіма своїми частинними похідними до порядку* q *включно і виконуються оцінки*

$$\left\|D_\varphi^pM(\varphi)-D_\varphi^pM(\overline{\varphi})\right\|\leq$$

$$\leq K_pJ_v(a;p;\|\varphi-\overline{\varphi}\|)+\overline{K_p}J_v(H;p;\|\varphi-\overline{\varphi}\|), |p|=\overline{0,q}.$$

Також, показано, що степінь неперервності по φ інваріантного тора $x=u(\varphi)$ менша за степінь неперервності функції Гріна-Самойленка системи (1).

Теорема 2.12. *Якщо в припущеннях теореми* 2.10 *вимагати виконання нерівності*

$$\gamma>\alpha q,$$

то для будь-якого $\nu\in(0,\gamma-a|p|)$ *і для кожної фіксованої вектор-функції* $f(\varphi)\in C^q(\mathcal{T}_m)$ *існує єдиний інваріантний тор* $x=u(\varphi)$ *з усіма своїми* *частинними похідними до порядку q включно і викнуються оцінювання*

$$\left\|D_{\varphi}^{p}u(\varphi)-D_{\varphi}^{p}u(\overline{\varphi})\right\|\leq N_{p}J_{\nu}(a;p;\|\varphi-\overline{\varphi}\|)+\overline{N_{p}}J_{\nu}(A;p;\|\varphi-\overline{\varphi}\|)+$$

$$+\overline{\overline{N_{p}}}J_{\nu}(f;p;\|\varphi-\overline{\varphi}\|),|p|=\overline{0,q},$$

де N_p, $\overline{N_p}$, $\overline{\overline{N_p}}$ − додатні сталі.

Підрозділ 2.4 присвячений побудові нових, достатньо широких, класів регулярних динамічних систем.

Спершу розглядаються системи

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi),\frac{dx}{dt}=[\mu_{0}(\varphi)+\mu_{1}(\varphi)]\,, \tag{8}$$

де $\varphi=(\varphi_{1},\varphi_{2},\ldots,\varphi_{m})$, $x\in R$, $\mu_{j}(\varphi)=\mu_{j}(\varphi_{1},\varphi_{2},\ldots,\varphi_{m})$ – неперервні скалярні функції $\mu_{j}(\varphi)\in C^{0}(\mathcal{T}_{m})$, $j=0,1$.

Припустивши, що функція $\mu_{1}(\varphi)$ така, що лінійне неоднорідне рівняння в частинних похідних

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial s}{\partial\varphi_{j}}a_{j}(\varphi)=\mu_{1}(\varphi_{1},\varphi_{2},\ldots,\varphi_{m}) \tag{9}$$

має 2π-періодичним за кожною змінною φ_{j}, $j=\overline{1,m}$, розв'язок $s=s(\varphi)=s(\varphi_{1},\varphi_{2},\ldots,\varphi_{m})$, приходимо до такого твердження.

Лема 2.2. *Якщо в системі рівнянь (8) скалярна функція $\mu_{0}(\varphi)\in C^{0}(\mathcal{T}_{m})$ задовольняє нерівність*

$$|\mu_{0}(\varphi)|>0\qquad\forall\varphi\in\mathcal{T}_{m}$$

і рівняння (9) має розв'язок $s(\varphi)\in C^{1}(\mathcal{T}_{m})$, то система (8) є регулярною, тобто має єдину функцію Гріна-Самойленка про інваріантні тори.

Зауваження 2.4. *Якщо не вдається з'ясувати, чи має рівняння (9) розв'язок $s=s(\varphi)=s(\varphi_{1},\varphi_{2},\ldots,\varphi_{m})$, який є 2π-періодичним за кожною зі змінних $\varphi_{j},j=\overline{1,m}$, чи такого розв'язку не існує, то можна розглядати збурене рівняння*

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial s}{\partial\varphi_{j}}a_{j}(\varphi)=\mu_{1}(\varphi)-\bar{\mu}(\varphi),$$

де є можливісь вибору функції $\bar{\mu}(\varphi)\in C^{0}(\mathcal{T}_{m})$, таким чином, щоб рівняння (9) вже мало розв'язок $s(\varphi)\in C^{1}(\mathcal{T}_{m})$. Тоді у випадку виконання нерівності

$$|\mu_{0}(\varphi)+\bar{\mu}(\varphi)|>0,\forall\varphi\in\mathcal{T}_{m}$$

система (8) буде регулярною.

Далі розглянемо систему, яка є узагальненням системи (8), виду

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi),\qquad\frac{dx}{dt}=[\mu_{0}(\varphi)+\mu_{1}(\varphi)]A(\varphi)x, \tag{10}$$

де $x\in R^{n}$, $A(\varphi)-$ $n\times n$-вимірна матриця з простору $C^{0}(\mathcal{T}_{m})$.

Припустивши, що матрицю $A(\varphi)$ в цій системі можна представити у вигляді $A(\varphi) = \lambda I_n + \tilde{A}(\varphi)$,
де $\lambda = \mathrm{const} \neq 0$, $\tilde{A}^T(\varphi) \equiv -\tilde{A}(\varphi)$ і рівняння (9) має розв'язок $s = s_0(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$, тоді показано, що система (10) буде регулярною.

Для системи рівнянь вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$
$$\frac{dx_1}{dt} = [\mu_{10}(\varphi) + \mu_1(\varphi)]\left[\lambda_1 I_{n_1} + \tilde{A}_1(\varphi)\right]x_1, \qquad (11)$$
$$\frac{dx_1}{dt} == [\mu_{20}(\varphi) + \mu_2(\varphi)]\left[\lambda_2 I_{n_2} + \tilde{A}_2(\varphi)\right]x_2,$$

де $x_1 \in R^{n_1}$, $x_2 \in R^{n_2}$, $\tilde{A}_i^T(\varphi) \equiv -\tilde{A}_i(\varphi), i = 1,2, \lambda_i = con\square t \neq 0$,
має місце твердження.

Теорема 2.14. Нехай в системі (11) скалярні функції $\mu_i(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ такі, що обидва рівняння в частинних похідних

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) = \mu_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m), \quad i = 1,2$$

мають розв'язки $s = s_{0i}(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$, $\mu_i(\varphi) \neq 0$, тоді система рівнянь (11) з будь-якими кососиметричними матрицями $\tilde{A}_i(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ буде регулярною. Причому одна із квадратичних форм, яка забезпечує її регулярність, має вигляд

$$V = \begin{cases} \|x_1\|^2 \exp\{-2\lambda_1 s_{01}(\varphi)\} + \|x_2\|^2 \exp\{-2\lambda_2 s_{02}(\varphi)\}, \\ \qquad \lambda_1\mu_{10}(\varphi) > 0 \wedge \lambda_2\mu_{20}(\varphi) > 0, \\ \|x_1\|^2 \exp\{-2\lambda_1 s_{01}(\varphi)\} - \|x_2\|^2 \exp\{-2\lambda_2 s_{02}(\varphi)\}, \\ \qquad \lambda_1\mu_{10}(\varphi) > 0 \wedge \lambda_2\mu_{20}(\varphi) < 0, \\ -\|x_1\|^2 \exp\{-2\lambda_1 s_{01}(\varphi)\} + \|x_2\|^2 \exp\{-2\lambda_2 s_{02}(\varphi)\}, \\ \qquad \lambda_1\mu_{10}(\varphi) < 0 \wedge \lambda_2\mu_{20}(\varphi) > 0, \\ -\|x_1\|^2 \exp\{-2\lambda_1 s_{01}(\varphi)\} - \|x_2\|^2 \exp\{-2\lambda_2 s_{02}(\varphi)\}, \\ \qquad \lambda_1\mu_{10}(\varphi) < 0 \wedge \lambda_2\mu_{20}(\varphi) < 0 \end{cases}.$$

Тепер, враховуючи обгрунтовані вище допоміжні твердження, для систем рівнянь вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = [\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi)][R(\varphi) + M(\varphi)]x, \qquad (12)$$

де матриці $R(\varphi), M(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, $R^T(\varphi) \equiv R(\varphi)$, $M^T(\varphi) \equiv -M(\varphi)$, отримуємо основний результат.

Теорема 2.15. *Нехай система лінійних розширень на торі (12) така, що*

1) рівняння (9) має розв'язок $s = s_0(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$ при скалярній функції $\mu_1(\varphi)$;

2) система рівнянь $d\varphi/dt = a(\varphi), dx/dt = R(\varphi)x$ ортогональною *заміною змінних $x = Q(\varphi)y$, $Q^{-1}(\varphi) \equiv Q(\varphi)$ приводиться до системи з постійними коефіцієнтами, тобто*

$$Q^{-1}(\varphi)R(\varphi)Q(\varphi) - Q^{-1}(\varphi)\dot{Q}(\varphi) = \Lambda = diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \qquad (13)$$

$\lambda_i = const \neq 0$.

Тоді при будь-якій кососиметричній матриці $M^T(\varphi) \equiv -M(\varphi)$ система (12) буде регулярною.

Зауваження 2.7. У випадку, коли симетрична матриця $R(\varphi) \equiv R$ є постійною і невиродженою, завжди існує ортогональна постійна матриця Q, яка приводить матрицю R до діагонального виду, тобто виконується рівність (13).

Досліджуючи питання збереження обмежених інваріантних многовидів при певних збуреннях нелінійної системи (7), показано, що система виду

$$\frac{dx}{dt} = f(\varphi, Y),$$
$$\frac{dY}{dt} = \lambda[YH_1(\varphi)Y + H_2(\varphi)Y + YH_3(\varphi) + H_4(\varphi) + F(\varphi, Y, \lambda)] \qquad (14)$$

де $f(\varphi, Y)$, $F(\varphi, Y, \lambda)$ – відповідно векторна і матрична функція розмірності m і $k_1 \times k_2$ залежні від $m + k_1 \times k_2$ змінних, а $H_i(\varphi)$, $i = 1,\dots,4$ – прямокутні матричні функції розмірностей: $k_2 \times k_1$, $k_2 \times k_2$, $k_1 \times k_1$, $k_1 \times k_2$., має при певних умовах інваріантний тороїдальний многовид.

Припускається, що для функції $f(\varphi, Y)$, $F(\varphi, Y, \lambda)$ і $H_i(\varphi)$, $i = 1{,}4$ мають місце нерівності:

$$\|f(\varphi^1, Y^1) - f(\varphi^2, Y^2)\| \leq p(\|Y^1 - Y^2\| + \|x^1 - x^2\|),$$
$$\|H_i(\varphi^1) - H_i(\varphi^2)\| \leq L\|x^1 - x^2\|,$$
$$\|F(\varphi^1, Y^1, \lambda) - F(\varphi^2, Y^2, \lambda)\| \leq \mu(\lambda)(\|x^1 - x^2\| + \|Y^1 - Y^2\|)$$
$$\lim_{\lambda \to 0} F(\varphi, Y, \lambda) \equiv 0,$$

при деяких додатних сталих $L, p = \text{const} > 0$, $\lambda >> 0$.

Тоді показано, що знайдеться таке додатне λ_0, що для довільного $\lambda \geq \lambda_0$ система має інваріантний тороїдальний многовид $Y = M(\varphi, \lambda)$ з оцінками:

$$\|M(\varphi, \lambda)\| < 1$$

і

$$\|M(\varphi, \lambda) - M(\overline{\varphi}, \lambda)\| < \nu\|\varphi - \overline{\varphi}\|,$$

при $\varphi, \overline{\varphi} \in \mathcal{T}_m, \nu$ – деяка додатна стала.

Третій розділ роботи присвячено дослідженню лінійних розширень динамічних систем на обмежених многовидах.

Тобто вивчаються системи вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad \frac{dy}{dt} = A(x) \qquad (16)$$

де $x \in R^m, y \in R^n$, $f(x)$ – вектор-функція, визначена, неперервна на R^m і локально задовольняє умову Ліпшиця. Матриця $A(x)$є $n \times n$–вимірною, елементами якої є дійсні функції, визначені на R^m, неперервні і обмежені. Додатково припускаємо, що кожний розв'язок $x(t; x_0)$ задачі Коші

$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x|_{t=0} = x_0$ є визначений при всіх $t \in R$. Для цього досить припустити, що вектор-функція $f(x)$ задовольняє оцінку $\|f(x)\| \leq \alpha_1\|x\| + \alpha_2$ з деякими невід'ємними сталими α_1, α_2.

Ключовим питанням в теорії збурення інваріантних многовидів динамічних систем є питання існування функкції Гріна-Самойленка задачі про обмеженні многовиди. Ця функція дозволяє записувати інваріантні многовиди в явному інтегральному вигляді, що дає можливість дослідження гладкості інваріантних многовидів, а також їх неперервну залежність від параметрів. Питання існування функції Гріна-Самойленка тісно пов'язане з питанням існування узагальненої функції Ляпунова, яка розглядається у вигляді квадратичних форм. Знання конкретного вигляду функції Ляпунова дає можливість оцінити величину збурення динамічних систем, при яких зберігаються обмежені інваріантні многовиди. Не дивлячись на глибокі теоретичні дослідження в цьому напрямку, питання побудови узагальнених функції Ляпунова для лінійних розширень динамічних систем на многовидах залишається відкритим. Вивченню питань конструкції функцій Ляпунова для лінійних розширень динамічних систем і присвячені дослідження цього розділу.

Надалі будемо використовувати такі позначення: $C^0(R^m)$ – простір дійсних функцій, неперервних і обмежених на R^m, $C'(R^m; f)$– підпростір простору $C^0(R^m)$ таких функцій $F(x)$, що суперпозиція $F\big(x(t; x_0)\big)$ як функція змінної t є неперервно диференційовною, причому за означенням $\frac{d}{dt}F\big(x(t;x)\big)\Big|_{t=0} \overset{def}{=} \dot{F}(x) \in C^0(R^m)$. Норму $n \times n$-вимірної матриці G будемо розуміти як операторну норму: $\|G\| = \max\limits_{\|y\|=1}\|Gy\|$. $\Omega_\tau^t(x_0)$ – фундаментальна матриця розв'язків лінійної системи

$$\frac{dy}{dt} = A\big(x(t; x_0)\big)y \tag{17}$$

нормована в точці $t = \tau$: $\Omega_\tau^t(x_0)|_{t=\tau} = I_n, I_n$ – одинична матриця.

Поряд із системою (16) будемо розглядати неоднорідну систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dy}{dt} = A(x)y + h(x), \tag{18}$$

де $h(x) \in C^0(\mathrm{R}^m)$.

Означення 3.1. *Будемо говорити, що система (18) має обмежений інваріантний многовид, визначений рівністю*

$$y = u(x), \tag{19}$$

якщо функція $u(x) \in C'(R^m; f)$ *і виконується тотожність*

$$\dot{u}(x) \equiv A(x)u(x) + h(x) \tag{20}$$

при всіх $x \in R^m$.

Зазначимо, що у випадку, коли функція (19) є неперервно диференційовною, то тотожність (20) записується у вигляді

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} f_j(x) \equiv A(x)u(x) + h(x).$$

Означення 3.2. *Нехай існує* $n \times n$*-вимірна матриця* $C(x) \in C^0(R^m)$ *така, що для функції вигляду*

$$G_0(\tau,x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x)C\big(x(\tau;x)\big), & \tau \le 0 \\ \Omega_\tau^0(x)\big[C\big(x(\tau;x)\big) - I_n\big], & \tau > 0 \end{cases} \qquad (21)$$

виконутьєся оцінка

$$\|G_0(\tau,x)\| \le K\exp\{-\gamma|\tau|\} \qquad (22)$$

з деякими додатними сталими K, γ. *Тоді функцію (21) називають функцією Гріна-Самойленка задачі про обмежені інваріантні многовиди системи (16).*

Існування функції Гріна-Самойленка (21) дозволяє стверджувати, що система (18) має обмежений інваріантний многовид (20) при кожній функції $h(x) \in C^0(R^m)$ і його можна записати в інтегральному вигляді:

$$y = u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau,x) \cdot h\big(x(\tau;x)\big)d\tau.$$

Необхідною і достатньою умовою існування єдиної функції Гріна задачі про обмежені інваріантні многовиди (21) є існування квадратичної форми $V = \langle S(x)y, y\rangle$, з невиродженою симетричною матрицею коефіцієнтів $S(x) \in C'(R^m; f)$, яка задовольняє нерівності

$$\dot{V} = \big\langle\big[\dot{S}(x) + S(x)A(x) + A^T(x)S(x)\big]y, y\big\rangle \ge \beta\|y\|^2 . \qquad (23).$$

Постає питання про збереження обмежених інваріантних многовидів при нелінійних збуреннях. Для цього розглянемо систему нелінійних розширень динамічних систем виду

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad \frac{dy}{dy} = A(x)y + Q(x,y), \qquad (24)$$

де $Q(x,y)$ – неперервна і обмежена на $R^m \times R^n$ вектор-функція і така, що

$$\sup_{(x,y)\in R^m \times M} \| Q(x,y) \| < +\infty$$

для довільної обмеженої множини $M \subset R^n$.

Для таких систем нелінійних диференціальних рівнянь вивчаються умови існування обмежених інваріантних многовидів.

Кажуть, що система (24) має обмежений інваріантний многовид, визначений рівністю $y = u(x)$, *якщо функція* $u(x) \in C'(R^m; f)$ *і виконується тотожність*

$$\dot{u}(x) \equiv A(x)u(x) + Q\big(x, u(x)\big)$$

при всіх $x \in R^m$.

Теорема 3.1. *Нехай система (24) така, що матрична функція* $A(x) \in C^0(R^m)$, $f(x)$ *– вектор-функція, визначена, неперервна на* R^m, *локально задовольняє умову Ліпшиця* $\|f(x)\| \le \alpha_1\|x\| + \alpha_2$, *а для* $Q(x,y)$ *має* *місце нерівність*

$$\|Q(x,y) - Q(x,\overline{y})\|_0 \le N\|y - \overline{y}\|,$$

при деякій додатній сталій N *і довільних* $y, \overline{y} \in R^m$.

Припустимо також, що існує невироджена квадратична форма $V = \langle S(x)y, y\rangle$, $(\,detS(x) \neq 0,\ \forall\, x \in\ R^m)$ *така, що виконується нерівність (23), причому*

$$\| A \|_0^{3/2} \cdot N < \frac{1}{4(2+\sqrt{2})}\left\{\frac{\beta}{\| S \|_0}\right\}^{5/2},$$

тоді система (24) має єдиний обмежений інваріантний многовид $y = u(x)$.

В наступному підрозділі описано клас збурень матриці $A(x)$, не обов'язково малих за нормою, при яких зберігається регулярність системи (18).

В підрозділі вивчаються системи (16) для яких виконується тотожність

$$\det\ A(x) \equiv 0, \quad \forall x \in R^m. \quad (25)$$

Припустивши, що у системі (16) матриця $A(x) \equiv A$ є постійною, тоді ця система буде регулярною тільки в тому випадку, коли для всіх власних чисел λ_j матриці A виконується умова $Re\lambda_j \neq 0$. Отже, якщо постійна матриця A є виродженою ($\det A = 0$), то є очевидним, що система (16) не може бути регулярною. Вивчається питання існування регулярних систем лінійних розширень на многовидах зі змінною матрицею, для яких виконується тотожність (25). Тут показано, що такі системи існують і наведено приклади таких регулярних систем виду (16), в яких тривіальний многовид $y = 0$ є асимптотично стійким.

Встановлено твердження.

Теорема 3.2. *Нехай в системі рівнянь*

$$\frac{dy}{dt} = By, \quad y \in R^n, \quad \frac{dx}{dt} = \omega(x)$$

вектор-функція $\omega(x) = \big(\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_m(x)\big)$ *така, що лінійне неоднорідне рівняння*

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} = 1$$

має неперервно диференційовний розв'язок $u = u(x)$, *визначений при всіх* $x \in R^m$, *тоді для кожної постійної* $n \times n$*-вимірної* ($n \ge 2$) *матриці* B *існує невироджена* $n \times n$*-вимірна, неперервно диференційовна і обмежена на* R^m *матриця* $L(x)$, *яка задовольняє тотожність*

$$det\left(B - \dot{L}(x)L^{-1}(x)\right) \equiv 0 \qquad \forall x \in R^m.$$

При цьому обернена матриця $L^{-1}(x)$ *разом з похідною* $\dot{L}(x)$, *яка* *визначається рівністю* $\dot{L}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial L(x)}{\partial x_j} \omega_j(x)$, *є обмеженими на* R^m.

В підрозділі 3.6 вивчається питання гладкості функції Гріна-Самойленка задачі про обмежені інваріантні многовиди.

Відносно системи

$$\frac{dx}{dt} = \omega(x), \quad \frac{dy}{dt} = H(x)y + f(x), \tag{26}$$

припустимо, що вектор-функція $H(x) \in C^1(R^m)$ задовольняє оцінки

$$\|\omega(x)\| \leq \alpha_1, \qquad \sup_{x \in R^m} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \omega(x) \right\| < \infty, \tag{27}$$

де $\alpha_1 = \mathrm{const} < \infty$. А для матричної функції $H(x) \in C^1(R^m)$ припускаємо існування неперервних частинних похідних першого порядку $\frac{\partial}{\partial x_i} H(x)$, $i = \overline{1,m}$, та виконання нерівностей

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} H(x) \right\| \leq \alpha_2 \exp\{\nu \|x\|\} + \alpha_3, \tag{28}$$

$\alpha_2, \alpha_3, \gamma = const < \infty$. Простір таких функцій позначаємо через $C_\nu^1(R^m)$.

Встановлено наступне твердження.

Теорема 3.12. *Нехай система рівнянь (26), для якої виконуються оцінки (27) і (28), має єдину функцію Гріна-Самойленка задачі про обмежені іваріантні многовиди. Тоді для того, щоб обмежений інваріантний многовид* $x = u_0(x)$ *системи (26) при кожній фіксованій вектор-функції* $f(x) \in C_\nu^1(R^m)$ *належав простору* $C_\nu^1(R^m)$, *достатньо виконання нерівності*

$$\alpha_1 \nu + \alpha_0 < \gamma,$$

де

$$\alpha_0 = \sup_{x \in R^m} \left(\max_{\|\eta\|=1} \left| \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \omega(x)\eta, \eta \right\rangle \right| \right).$$

Важливим є дослідження питання залежності обмежених інваріантних многовидів від параметра. Як показують приклади, не дивлячись на неперервність правої частини системи, сам обмежений інваріантний многовид цієї системи, тобто функція $u(x,p)$, не обов'язково буде неперервною від параметра $p \in [0,1]$.

Розглянемо систему лінійних розширень

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x,p), \\ \frac{dy}{dt} &= A(x,p)y + h(x,p), \end{aligned} \tag{29}$$

де $x \in R^n$, $y \in R^m$, $t \in R$, $p \in [0,1]$. Функція $F(x,p)$ неперервна по сукупності змінних x, p. Припустимо далі, що для будь-якого параметра $p \in [0,1]$, в будь-якій фіксованій області $D \subset R^m$ виконується умова

$$\|F(x,p) - F(\overline{x},p)\| \leq L\|x - \overline{x}\|, \tag{30}$$

де L є константа, що залежить від вибору області D. Водночас припускаємо, що функція $f(x,p)$ є необмеженою, але має місце оцінка
$x \in \mathrm{R}^m$: $\|f(x,p)\| \leq \alpha_1\|x\| + \alpha_2$
де α_1 , $\alpha_2 > 0$ деякі вільні сталі.

Позначимо через $C^0(R^m \times [0,1])$ простір всіх функцій $F(x,p)$, неперервних по сукупності змінних x,p, таких, що задовольняють умову
$F(x,p) \leq \sup\limits_{x\in \mathrm{R}^m, p\in[0,1]} \|F(x,p)\| \equiv \|F\|_0 < \infty$.

Нехай $C'(R^m, F)$ є простір неперервних по змінній x функцій $F(x,p)$, при фіксованому параметрі $p \in [0,1]$, таких, що суперпозиція $F(x_t^p(x),p)$ є диференційовною функцією по змінній $t \in \mathrm{R}$, при цьому

$$\frac{d}{dt}F(x_t^p(x),p)|_{t=0} \overset{\text{def}}{=} \dot{F}\ (x,p) \ \in C^0(\ \mathrm{R}^m \times\ [0,1]).$$

Тут $x_t^p(x)$ – розв'язок рівняння $\frac{dx}{dt} = f(x,\ p)$ з початковою умовою $x_t^p(x)|_{t=0} = x$.

Нехай функції $A(x,p), h(x,p)$ належать простору $C^0(R^m \times [0,1])$. Припустимо також, що для кожної функції $h(x,p)$ система (29) має обмежений інваріантний многовид $y = u(x,p)$, тобто існує $u(x,p) \in C'(\mathrm{R}^m, f)$ така, що для всіх $x \in R^m$ при фіксованому параметрі p виконується тотожність:

$$\dot{A}(x,p) = A(x,p)u(x,p) + h(x,p),\ \dot{u} = \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0}.$$

А тому виникає потреба звясувати достатні умови, при яких для системи (29) існує обмежений інваріантний многовид $u(x,p)$ неперервно залежний від параметра p. Умови, які забезпечують збереження даної властивості, задає таке твердження.

Теорема 3.13. *Нехай система (29) для кожного фіксованого параметра* $p \in [0,1]$ *має обмежений інваріантний многовид*

$$y = u(x,p),$$

більше того, нехай існує матриця $S_p(x) \in C'(R^m, f)$ *така, що*

$$\forall x \in R^m, \forall y \in R^n:$$

$$\langle[\dot{S}_p(x) + S_p\ (x)A(x,p) + A^T(x,p)S_p\ (x)]y,y\rangle \geq \|y\|^2,$$

для $p \in [0,1]$*, при цьому*

$$\sup_{x\in R^m, p\in[0,1]} \|S_p\ (x)\| \equiv \|S\|_0 < \infty\ .$$

Тоді функція $y = u(x,p)$ *неперервна по параметру* p.

Далі розглядається система (29), але з припущеннями, що похідні функції $f(x,p)$, $A(x,p)$, $h(x,p)$ неперервні по змінних x_j, $j = \overline{1,m}$, при фіксованому параметрі p і для будь-якого $x \in R^m$, $p \in [0,1]$ виконуються оцінки

$$\left\|\frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\right\| \leq L_0(\|x\|), \qquad (31)$$

$$\left\|\frac{\partial f(x,p)}{\partial x_j}\right\| \leq \alpha, \qquad (32)$$

$$\left\|\frac{\partial A(x,p)}{\partial x_j}\right\| \leq L_1(\|x\|), \left\|\frac{\partial h(x,p)}{\partial x_j}\right\| \leq L_2(\|x\|),$$

$$\left\|\frac{\partial A(x,p)}{\partial p}\right\| \leq L_3(\|x\|), \left\|\frac{\partial h(x,p)}{\partial p}\right\| \leq L_4(\|x\|), \qquad (33)$$

для $j = 1 \dots m$, де α – деяка стала, де функції $L_i(\|x\|)$, для $i \in \{1,2,3,4\}$ додатно визначені.

Наступне твердження показує, які умови повинні бути накладені на функції L_i, щоб обмежений інваріантний многовид $y = u(x,p)$ системи (29) мав неперервну похідну по параметру p.

Теорема 3.14. *Нехай система (29) для кожного фіксованого параметра* $p \in [0,1]$ *має обмежений інваріантний многовид* $y = u(x,p)$ *і така, що виконуються умови*

1) існує n*-вимірна матриця* $S_p(x) \in C'(R^m, f)$ *така, що*

$$\forall x \in R^m, \forall y \in R^n: \langle [\dot{S}_p(x) + S_p(x)A(x,p) + A^T(x,p)S_p(x)]y, y\rangle \geq \|y\|^2,$$

$$\sup_{x\in R^m, \square\in[0,1]} \|S_p(x)\| \equiv \|S\|_0 < \infty;$$

2) функції $f(x,p)$, $A(x,p)$ *і* $h(x,p)$ *мають неперервні похідні по змінних* (x,p) *і виконуються оцінки (30) – (33). При таких оцінках зберігаються умови про збіжність інтегралів*

$$\int_0^\infty L_i(\lambda)\lambda^{-\frac{\gamma-\alpha+\alpha_1}{\alpha_1}} \int_1^\lambda L_0(r) r^{-\frac{\alpha+\alpha_1}{\alpha_1}} dr d\lambda, \qquad i = 1,2,$$

$$\int_1^\infty L_i(r) r^{-\frac{\lambda+\alpha_1}{\alpha_1}} dr, \qquad i = 3,4,$$

функція $y = u(x,p)$, *яка задає обмежений інваріантний многовид системи (29), має неперервну похідну по параметру* p.

В четвертому розділі розглядається лінійна система диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad (34)$$

де $x \in R^n, t \in R, \dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $A(t) \in C^0(R)$, $C^0(R)$ – простір неперервних і обмежених на всій осі $R = (-\infty, \infty)$ функцій.

Відомо, що для того, аби система (34) була слабо регулярною, необхідно і досить, щоб існувала квадратична форма $V(t,\ y) = \langle S(t)y, y)\rangle$ з неперервно диференційовною матрицею коефіцієнтів $S(t) \in C^1(R)$, для якої $\left\langle \left[\dot{S}(t) - S(t)A^T(t) - A(t)S(t)\right]z, z\right\rangle \geq \|z\|^2$.

При цьому система (34) буде регулярною в тому випадку, коли $\det S(t) \neq 0$, і слабо регулярною, коли при деякому значенні $t = \tilde{t}$: $\det S(\tilde{t}) = 0$. Нагадаємо, що кожну слабо регулярну на R систему (34) завжди можна розширити до регулярної наступним чином

$$\dot{z} = P(t)z,$$

де $z \in R^{2n}$, $P(t) = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ I_n & -A^*(t) \end{pmatrix}$, $A^*(t)$ – транспонована матриця.

При цьому квадратичну форму можна вибрати в такого вигляду

$$V_p(t, x, y) = p\langle x, y\rangle + \langle S(t)y, y\rangle,$$

де $p > 0, (p > 2\|S\|_0)$.

Розглянувши більш загальні квадратичні форми

$$V_\mu(x,\ y,\ z) = \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2 + \mu(\langle \mathrm{x},\ y\rangle + \langle y,\ z\rangle + \langle x,\ z\rangle), \qquad (35))$$

де $\mu >> 0$, вдалося отримати нові класи регулярних і слабо регулярних систем.

Теорема 4.1. *Нехай всі матриці $B_i(t) \in C^0(R), i = 1,2,3$ додатно визначені:*

$$\langle B_i(t)x, x\rangle \geq \beta_i \|x\|^2, \qquad \beta_i - const > 0, \qquad \forall x \in\ R^{\mathrm{n}}. \qquad (36)$$

Тоді при довільних матрицях $A_{ij} \in C^0(R), i, j = 1,2,3$ система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A_{12}(t) + A_{13}(t)]x + [B_2(t) + A_{23}(t)]y + [B_3(t) - A_{23}^*(t)]z \\ \dot{y} &= [B_1(t) - A_{12}(t)]x - [A_{12}^*(t) + B_2(t)]y + [A_{23}^*(t) - A_{13}^*(t)]z \\ \dot{z} &= [B_1(t) - A_{12}(t)]x - [A_{12}^*(t) + A_{23}(t)]y + [A_{13}^*(t) + B_3(t)]z, \end{aligned} \qquad (37)$$

де $x, y, z \in R^n$, буде регулярною на всій осі R.

Теорема 4.2. *Нехай в системі (37) симетричні матриці $B_1(t), B_2(t)$– додатно визначені, тобто виконуються нерівності (35) при $i = 1,\ 2,$ а симетрична матриця $B_3(t)$ така, що $\langle B_3(t)x, x\rangle \geq 0$, тобто може бути і нульовою. Крім цього припустимо, що система*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2}\left(B_3(t) - A_{13}(t)\right)z$$

є слабо регулярною, тоді система (36) буде регулярною.

Теорема 4.3. *Нехай в системі (34) матриця $A(t)$ така, що її можна подати у вигляді*

$$A(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) & -A_{12}^*(t) & -A_{13}^*(t) \\ -A_{12}(t) & -B_2(t) & A_{23}(t) \\ -A_{13}(t) & -A_{23}(t) & -B_3(t) \end{pmatrix},$$

де $B_1(t)$ – симетрична матриця, для якої виконується нерівність (36), а симетричні матриці $B_2(t), B_3(t)$ такі, що системи $\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{2}B_2(t)z$,

$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{2}B_3(t)z$ є слабо регулярними і $\langle B_i(t)x, x\rangle \geq 0, \quad i = 1,2$ тоді система (34) буде регулярною.

Для ситем типу (34) одержано нові результати, щодо їх регулярності. Оновне твердження можна сформулювати таким чином.

Теорема 4.4. *Нехай існує k матриць $C_i(\tau) \in C^0(R),\ i = \overline{1,k},$ таких, що*

$$\sum_{i=1}^{k} C_i(\tau) \equiv I_n$$

і існує k чисел $T_i \in R,\ i = \overline{1,k}$ таких, що

$$k\sum_{i=1}^{k} \left\|\Omega_\tau^{\tau+T_i}(A)C_i(\tau)\right\|_0^2 < 1.$$

Тоді система (34) буде слабо регулярною.

І більш загальне твердження.

Теорема 4.5. *Нехай існують $k + l$ матриць*
$C_i(\tau),\ i = \overline{1,k},\ \ \overline{C}_i(\tau),\ i = \overline{1,l}$ *такі, що*

$$\sum_{i=1}^{k} C_i(\tau) \equiv I_n, \qquad \sum_{i=1}^{l} \overline{C}_i(\tau) \equiv I_n,$$

і $k + l$ чисел $T_i,\ i = \overline{1,k+l},$ таких, що

$$k\sum_{i=i}^{k} \left\|\Omega_\tau^{\tau+T_i}(A)C_i(\tau)\right\|_0^2 < 1$$

$$l\sum_{i=1}^{L} \left\|\overline{C}_i(\tau)\Omega_{k+1}^{\tau}(A)\right\|_0^2 < 1.$$

Тоді система (34) є регулярною на R.

В підрозділі 4.3 розглядається матричне рівняння

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y - YB(t) + H(t), \tag{37}$$

де $Y = Y(t)$ – невідома прямокутна матриця, $A(t)$ – n-вимірна квадратна матриця, елементами якої є дійсні скалярні функції $a_{ij}(t)$, неперервні і обмежені на $\mathrm{R} = (-\infty, \infty)$. Коротко будемо позначати $A(t) \in \mathbf{C}^0(\mathrm{R})$, де $\mathbf{C}^0(\mathrm{R})$ – простір дійсних функцій (скалярних, матричних, або векторних), неперервних і обмежених на R. Також $B(t) \in \mathbf{C}^0(\mathrm{R})$ є квадратною p-вимірною матрицею, а матриця $H(t)$ є прямокутною матрицею таких же розмірів, як і матриця Y, тобто складається із n рядків і p стовпчиків, $H(t) \in \mathbf{C}^0(\mathrm{R})$.

Основне питання, яке є предметом дослідження полягає в тому, щоб знайти достатні умови на матриці $A(t), B(t)$, які забезпечують існування обмеженого на R розв'язку $Y = Y(t)$ для рівняння (37) при довільній фіксованої матриці $H(t) \in \mathbf{C}^0(\mathrm{R})$.

Тут варто подати таке твердження.

Теорема 4.6. *Нехай одночасно для двох матрицантів* $\Omega_\tau^t(A)$, $\Omega_\tau^t(B)$ *виконується оцінка*

$$\|\Omega_\tau^t(A)\| \cdot \|\Omega_t^\tau(B)\| \leq Kexp\{\gamma(t-\tau)\}, \qquad t \leq \tau$$

з додатними сталими K, γ, *незалежними від* $t, \tau \in R$, *тоді рівняння (37) при кожній фіксованій матриці* $H(t) \in \boldsymbol{C}^0(R)$ *має єдиний обмежений на* □ *розв'язок і його можна подати в такому вигляді:*

$$Y = \bar{Y}(t) = -\int_t^{+\infty} \Omega_\tau^t(A) H(\tau) \Omega_t^\tau(B) d\tau.$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad \frac{dY}{dt} = A(x)Y - YB(x) + F(x). \tag{38}$$

Нагадаємо деякі визначення.

Означення 4.1. *Кажуть, що система рівнянь (38) має обмежений інваріантний многовид, визначений рівністю*

$$Y = U(x),$$

якщо матриця $U(x) \in \mathbf{C}'(\mathrm{R}^m; f)$ і виконується тотожність

$$\dot{U}(x) \equiv A(x)U(x) - U(x)B(x) + F(x), \forall x \in \mathrm{R}^m.$$

Тут має місце наступне твердження.

Теорема 4.7. *Якщо система (38) така, що виконується оцінка*

$$\|\Omega_t^o(x_0; A)\| \cdot \|\Omega_0^t(x_0; B)\| \leq K\exp\{-\gamma t\}, t \geq 0, \qquad \gamma = const > 0,$$

тоді для кожної фіксованої матриці $F(x) \in \boldsymbol{C}^0(R^m)$ *вона має єдиний обмежений інваріантний многовид і він має таке зображення*

$$Y = U_0(x) = -\int_0^{+\infty} \Omega_\tau^0(x; A) \times F\big(x(\tau; x)\big) \Omega_0^\tau(x; B) d\tau.$$

При виконанні наступної оцінки

$$\|\Omega_t^o(x_0; A)\| \cdot \|\Omega_0^t(x_0; B)\| \leq Kexp\{\gamma t\}, t \leq 0, \gamma = const > 0$$

для системи (38) існує єдиний обмежений інваріантний многовид при кожній фіксованій матриці $F(x) \in \boldsymbol{C}^0(R^m)$ *і задається він наступним чином*

$$Y = U_0(x) = \int_{-\infty}^0 \Omega_\tau^0(x; A) \times F\big(x(\tau; x)\big) \Omega_0^\tau(x; B) d\tau.$$

У п'ятомуу розділі розглядаються системи дифернціальних рівнянь в банаховому просторі. Одним із важливих питань якісної теорії диференціальних рівнянь є питання існування обмежених на R розв'язків систем диференціальних рівнянь.

Є зрозумілим, що у випадку, коли матриця A постійна в системі рівнянь (34), це рівносильне тому, що для її спектра $\sigma(A)$ справедливе співвідношення : $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}: Re\lambda \neq 0\}$.

Для нелінійних систем вигляду $\frac{dx}{dt} = A(x)x + f(t)$, де $A(x)$ неперервна і обмежена на R матрична функція, виконання співвідношення
$\sigma(A(x)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}: Re\lambda \neq 0\}$,
як показують приклади, не гарантує існування обмеженого на R розв'язку. А тому є потреба в знаходженні додаткових умов, які б забезпечили існування таких розв'язків для даної системи.

Тут розгляндається більш загальна задача.

Нехай $\mathbb{C}^0$ – банахів простір обмежених і неперервних на всій осі R функцій $x = x(t)$ зі значеннями в скінченновимірному банаховому просторі $\mathbb{E}$ з нормою

$$\| x \|_{\mathbb{C}^0} = \sup_{t \in \mathrm{R}} \| x(t) \|_{\mathbb{E}}$$

і $\mathbb{C}^1$ – банахів простір усіх тих функцій $x \in \mathbb{C}^0$, для кожної з яких $\frac{dx}{dt} \in \mathbb{C}^0$, з нормою

$$\| x \|_{\mathbb{C}^1} = max\left\{\| x \|, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{\mathbb{C}^0}\right\}.$$

Позначимо через $A(x)$ неперервну на $\mathbb{E}$ функцію із значеннями в $L(\mathbb{E}, \mathbb{E})$, де $L(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ – банахів простір всіх лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $\mathbb{E}$.

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A(x)x + f(t). \tag{39}$$

Паралельно введемо в розгляд допоміжні оператори $L: \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0$ і $L_y: \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0, y \in \mathbb{C}^0$, що визначаються рівностями

$$(Lx)(t) = \frac{dx}{dt} - A\big(x(t)\big)x(t), \qquad t \in \mathrm{R},$$

$$\big(L_y x\big)(t) = \frac{dx}{dt} - A\big(y(t)\big)x(t), \qquad t \in \mathrm{R},$$

де $x \in \mathbb{C}^1$.

а) для кожного $y \in \mathbb{C}^0$ оператор $L_y: \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0$ має обернений неперервний $(L_y)^{-1}: \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^1$;

b)

$$\sup_{y \in \mathbb{C}^0} \| (L_y)^{-1} \|_{\mathbb{L}(C^0, C^1)} < +\infty.$$

Має місце теорема.

Теорема 5.1. *Припустимо, що функція $A(x)$ така, що для кожного $y \in \mathbb{C}^0$ оператор $L_y: \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0$ має обернений неперервний $(L_y)^{-1}: \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^1$ і*

$$\sup_{y \in \mathbb{C}^0} \| (L_y)^{-1} \|_{\mathbb{L}(C^0, C^1)} < +\infty.$$

Тоді для кожної функції $f \in \mathbb{C}^0$ диференціальне рівняння (39) має хоча б один розв'язок $x \in \boldsymbol{C}^1$.

Лема 5.1. Оператор $\mathcal{U}_f = (L_y)^{-1}f, : \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0$ є неперервним для кожного $f \in \mathbb{C}^0$.

Теорема 5.2. *Кожна нерухома точка відображення $\mathcal{U}_f = (L_y)^{-1}f, : \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0$ є обмеженим розв'язком рівняння (39).*

Теорема 5.3. *У випадку виконання умов теореми 5.1 для кожного $f \in \mathbb{C}^0$ множина нерухомих точок відображення $\mathcal{U}_f: \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0$ є непорожньою.*

В наступному підрозділі, на предмет існування обмежених розвязків, вивчаються нелінійні диференціальні рівняня

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x)x + f(t), \quad t \in \mathrm{R}, \qquad (40)$$

де $f(t) \in \mathbb{C}^0$, а $F(t,x)$ визначена і неперервна на R$\times$ $\mathbb{E}$ функцію зі значеннями в $L(\mathbb{E},\mathbb{E})$ ($L(\mathbb{E},\mathbb{E})$ – банахів простір всіх лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $\mathbb{E}$).

Наведено достатні умови існування хоча б одного розв'язку $x(t)$ рівняння (40), в просторі $\mathbb{C}^1$, якщо $f(t) \in \mathbb{C}^0$.

Теорема 5.4. *Припустимо, що функція $F(t,x)$ така, що виконуються умови:*

1) $F(t,x)$ неперервно залежить від $(t,x) \in R \times \mathbb{E}$ і

$$\lim_{u-v\to 0} \sup_{t\in R, \|u\|\le r, \|v\|_E \le r} \| F(t,u) - F(t,v) \|_{L(E,E}= 0;$$

2)

$$\sup_{(t,x)\in R\times B[0,r]} \| F(t,x) \| \le \infty,$$

де $B[0,r] = \{x \in E: \| x \|_E \le r\}$ – замкнена куля з радіусом r;

3) оператор $(L_y x)$ такий, що для кожного $y \in \mathbb{C}^0$ оператор $L_y: \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0$ має обернений неперервний $(L_y)^{-1}: \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^1$;

4)

$$\sup_{y\in\mathbb{C}^0} \| (L_y)^{-1} \| < +\infty.$$

Тоді для кожної функції $f \in \mathbb{C}^0$ диференціальне рівняння (96) має хоча б один розв'язок $x \in \boldsymbol{C}^1$.

Згадані в теоремі оператори $L_y: \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0, y \in \mathbb{C}^0$, визначаються рівностями

$$\big(L_y x\big)(t) = \frac{dx(t)}{dt} - F\big(t, y(t)\big)x(t), t \in \mathrm{R}.$$

Лема 5.8. *Відображення $\mathcal{U}_f = (L_y)^{-1}f, : \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0$ є-цілком неперервним.*

Зауважимо, що завдяки неперервності $F(t,x)$ на $\mathrm{R} \times \mathbb{E}$ та скінченній розмірності простору $\mathbb{E}$ задані оператори L_y є неперервними і обмеженими на $\mathbb{C}^1$. Крім цього, оператор L_y є лінійним оператором при кожному фіксованому

$y \in \mathbb{C}^0$.

Перевіряючи стійкість розв'язків рівняння (40) до малих збурень у просторі $\mathbb{C}^0$, розглядається збурене диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \big(F(t,x) + B(t,x)\big)x + f(t)\,, \qquad (41)$$

де $B(t,x)$ деяка, достатньо мала за нормою, функція визначена і неперервна на $\mathrm{R} \times \mathbb{E}$ зі значеннями в $L(\mathbb{E},\mathbb{E})$.

Тоді має місце наступне твердження.

Теорема 5.5. *Нехай в рівнянні (41) функція $F(t,x)$ така, що виконуються умови теореми 5.4, тоді існує достатньо мале $\varepsilon_0 > 0$ таке, що диференціальне рівняння (41) має хоча б один розв'язок $x \in \boldsymbol{C}^1$ для кожної функції $f \in \mathbb{C}^0$, якщо $\| B(t,x) \|_{L(E,E)} \leq \varepsilon_0$.*

У підрозділі 5.3 об'єктом досліджень є системи нелінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x(n+1) = A\big(x(n)\big)x(n) + f(n), \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad (42)$$

де $A(x)$ неперервна на R^m матрична функція.

Нехай $l_\infty = l_\infty(\mathbb{Z}, \mathrm{R}^m)$ – банахів простір усіх відображень $x: \mathbb{Z} \to \mathrm{R}^m$, множина значень кожного з яких обмежена з нормою

$$\| x \|_{l_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \| x(n) \|_{\mathrm{R}^m}.$$

Введемо у розгляд допоміжні оператори $D: l_\infty \to l_\infty$ і $D_y: l_\infty \to l_\infty$, що визначаються рівностями

$$(Dx)(n) = x(n+1) - A(x(n))x(n), n \in \mathbb{Z}$$

$$(D_y x)(n) = x(n+1) - A(y(n))x(n), n \in \mathbb{Z},$$

де $y(n) \in \mathrm{R}^m$ при $n \in \mathbb{Z}$ довільний фіксований вектор.

Зазначимо, що завдяки неперервності $A(x)$ на R^m та скінченній розмірності простору R^m задані оператори D, D_y є неперервними і обмеженими на $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathrm{R}^m)$. Крім цього, оператор D_y є лінійним оператором при кожному фіксованому $y \in l_\infty$. Позначимо через $R(D)$ множину значень оператора D. Тоді зрозуміло, що існування розв'язків для кожного $f \in l_\infty$ задається рівністю $R(D) = l_\infty$.

Для отримання основних тверджень будемо використовувати результати теорії *c-неперервних* операторів.

Згідно означення, введеного Е. Мухамедієвим[1], послідовність $x_k \in l_\infty, k \in \mathbb{N}$ *локально збігається* до елемента $x \in l_\infty$ при $k \to \infty$, і позначатимемо

---

[1] Мухамадиев Э. Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченых на оси функций / Э. Мухамадиев // Матем. заметки. – 1972. 11, – №3. – С. 269 – 274.

$x_k \xrightarrow{\text{лок.},l_\infty} x$ при $k \to \infty$,
якщо ця послідовність обмежена і

$$\lim_{k\to\infty} \max_{|n|\le p} |x_k(n) - x(n)| = 0,$$

для всіх $p \in \mathbb{N}$.

Оператор F називається *c-неперервним*, якщо для довільних $x \in l_\infty$ і послідовності $x_k \in l_\infty, k \in \mathbb{N}$, для яких $x_k \xrightarrow{\text{лок.},l_\infty} x$ при $k \to \infty$, випливає, що $Fx_k \xrightarrow{\text{лок.},l_\infty} Fx$ при $k \to \infty$.

Клас таких операторів, очевидно, є досить широким.

Теорема 5.6. *Нехай система (42) така, що:*

1) $A(x)$ *неперервна на* R^m *матрична функція*;
2) *для кожного* $y \in l_\infty$ *оператор* $D_y: l_\infty \to l_\infty$ *має обернений неперервний* $(D_y)^{-1}: l_\infty \to l_\infty$;
3) $\sup_{y\in l_\infty} \| (D_y)^{-1} \| < +\infty$.

Тоді для кожного $f \in l_\infty$ *різницеве рівняння (41) має хоча б один розв'язок* $x \in l_\infty$.

У підрозділі 5.4 використовуючи теорію *c-неперервних* операторів, вивчається питання існування в просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ розв'язків рівняння

$$x(n+1) = (\mathcal{F}x)_n + f(n), n \in \mathbb{Z}, \qquad (43)$$

тут $f \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$, а $\mathcal{F}$ різницевий оператор, що діє у просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ і визначається рівністю

$$(\mathcal{F}x)_n = F(n, x(n))x(n), \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad (44)$$

де $F(n,x)$ – функція визначена на $\mathbb{Z} \times \mathbb{E}$, причому для кожного фіксованого n і x набирає значення з простору $L(\mathbb{E}, \mathbb{E})$, $x \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$.

Лема 5.12. *Для оператора* $\mathcal{U}_f$ $(\mathcal{U}_f y = (D_y)^{-1} f)$ *при будь якому* $y \in l_\infty$ *має місце оцінка*

$$\| \mathcal{U}_f y \|_{l_\infty} \le d \| f \|_{l_\infty},$$

де $d = \sup_{y\in l_\infty} \| (D_y)^{-1} \|_{L(l_\infty, l_\infty)}$ *– скінченне додатне число.*

Лема 5.13. *Оператор* $\mathcal{U}_f: l_\infty \to l_\infty$ *є неперервним для кожного* $f \in l_\infty$.

Лема 5.14. *Відображення* $\mathcal{U}_f$: $l_\infty \to l_\infty$ є *c-цілком неперервним.*

Теорема 5.7. *Припустимо, що рівняння (43) таке, що*

1) *функції* $F(n,x)$ *задоволяє умовам:*

- $F(n,x)$ *неперервно залежить від* $x \in \mathbb{E}$ *при* $n \in \mathbb{Z}$ *і*

$$\lim_{u-v\to 0} \sup_{n\in\mathbb{Z}, \|u\|\le r, \|v\|\le r} \| F(n,u) - F(n,v) \|_{L(E,E)} = 0;$$

-

$$\sup_{(n,x)\in\mathbb{E}\times B[0,r]} \| F(n,x) \|_{L(E,E)} < \infty,$$

для $\forall r$, *де* $B[0,r] = \{x \in E : \| x \|_E \leq r\}$ *– замкнена куля з радіусом* r;

2) для кожного $y \in l_\infty$ *оператор* $D_y: l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{E}) \to l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{E})$ *має обернений неперервний* $(D_y)^{-1}: l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{E}) \to l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{E})$;

3)

$$\sup_{y\in l_\infty} \| (D_y)^{-1} \|_{L(l_\infty,l_\infty)} < +\infty.$$

Тоді для кожної функції $f \in l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{E})$ *різницеве рівняння*

$$x = \mathcal{F}x + f$$

має хоча б один розв'язок $x \in l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{E})$.

Згаданий в теоремі оператор $(D_y x)(n)$ має вигляд

$$(D_y x)(n) = x(n+1) - F(n, y(n))x(n), n \in \mathbb{Z},$$

де $y(n) \in \mathbb{E}$ при $n \in \mathbb{Z}$ – довільний фіксований вектор.

А отже, D_y є лінійним оператором при кожному фіксованому $y \in l_\infty$, а тому завдяки неперервності $F(n,x)$ на $\mathbb{E}$ та скінченній розмірності простору $\mathbb{E}$ він є неперервним і обмеженим на $l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{E})$.

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена розробці сучасних якісних методів дослідження систем диференціальних рівнянь та застосування цих методів до вивчення стійкості, обмеженості, періодичності і квазіперіодичності розв'язків, встановленню умов існування обмежених інваріантних множин і збереження їх при збуреннях, дослідженню умов гладкості інваріантних тороїдальних многовидів, а також дослідженню питання існування обмежених розв'язків систем диференціальних і різницевих рівнянь в банаховому просторі.

Зокрема отримано такі наукові результати:

- досліджено залежність від параметра обмежених інваріантних многовидів автономних систем лінійних рівнянь;
- вперше проведено аналіз систем лінійних розширень на многовидах з тотожно виродженою матрицею і наведено приклади таких систем, які є регулярними;
- досліджено характер модулів неперервності вищих похідних функції Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори і інваріантного тора лінійних розширень динамічних систем на торі, отримані умови (оцінки) їх збіжності;
- запропоновано новий підхід до побудови узагальнених функцій Ляпунова для регулярних лінійних розширень динамічних систем на торі;
- отримано критерій регулярності лінійних систем в термінах властивостей матрицантів;
- отримано нові класи систем лінійних диференціальних рівнянь, які є регулярними;

- для систем динамічних розширень на торі типу Ріккаті знайдено достатні умови існування єдиного тороїдального многовиду;
- наведено достатні умови (використовуючи поняття функції Гріна-Самойленка про існування обмежених інваріантних многовидів) (в термінах квадратичних форм) існування обмеженого інваріантного многовиду для динамічних систем типу Ріккаті;
- досліджено умови гладкості обмеженого інваріантного многовиду нелінійної системи типу Ріккаті;
- вперше встановлено взаємозв'язок між властивостями матриціанта лінійних розширень динамічних систем на торі для експоненціально дихотомічних і слабо регулярних лінійних систем;
- запропоновано підхід до дослідження питання існування обмежених розв'язків систем диференціальних рівнянь в банаховому просторі;
- для нелінійних різницевих рівнянь, використовуючи теорію c-неперервних операторів, отримано достатні умови існування обмежених послідовностей.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертаці

1. Грод И. Н. О сохранении ограниченного решения Риккати при малом нелинейном возмущении / И. Н. Грод // Укр. мат. журн. – 1989. – 41. – № 7. – С. 965–969.
2. Грод И. Н. О свойствах непрерывности инвариантного тора и функции Грина / И. Н. Грод, В. Л. Кулик // Укр. мат. журн. – 1990. – 41.– № 12. – С. 1756–1761.
3. Грод И. Н. О зависимости от параметра почти периодических решений Риккати / И. Н. Грод //Асимптотические решения нелинейных уравнений с малым параметром. – Киев : Ин-т математики АН УССР. – 1991. – С. 123–127.
4. Грод І. М. Існування інваріантних многовидів нелінійних систем / І. М. Грод, А. М. Габрель. // Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування. – Київ : Ін-т математики України. – 1992. – С. 97–100.
5. Грод І. М. Про збереження обмежених інваріантних многовидів динамічних систем / І. М. Грод // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложение. – Киев : Ин-т математики АН Украины. – 1994. – С. 59–61.
6. Грод І. М. Про гладкість обмежених інваріантних многовидів лінійних неоднорідних розширень динамічних систем / І. М. Грод // Укр. мат. журн. – 1996. – 48. – № 1. – С. 136–140.
7. Грод І. М. Критерій регулярності лінійних систем в термінах властивостей матрицантів / І. М. Грод // Дослідження математичних моделей. – Київ : Ін-т математики України. –1997. – С. 56–60.
8. Samoilenko A. M. On regular linear extensions of dynamical systems on

torus / A. M. Samoilenko, I. M. Grod // Nonlinear Oscillations. – 1998. – Vol. 1. – № 1. – P. 95–102.

9. Грод І. М. До питання локального збурення лінійних розширень динамічних систем / І. М. Грод // Сучасні проблеми математики. – Київ : Ін-т математики України. – 1998. – С. 162–165.

10. Samoilenko A. M. Moduli of continuity of the derivatives of invariant tori for linear extensions of dynamical systems / A. M. Samoilenko, A. A. Burilko, I. N. Grod // Differential Equations. – 2000. – Vol. 36. – № 1. – P. 120–131.

11. Грод І. М. Про локальні збурення лінійних розширень динамічних систем н а торі / І. М. Грод, В. Л. Кулик // Укр. мат. журн. – 2000. – 52. – № 2. – С. 282–287.

12. Грод І.М. Про регулярність на всій осі R лінійних систем диференціальних рівнянь / І. М. Грод // Допов. АН України. – 2000. – № 2. – С. 12–15.

13. Грод І. М. Використання функцій Ляпунова при дослідженні умов керованості деяких систем / І. М. Грод // Труды Одесского политехнического университета. – 2001. – Вип. 3. – С. 166–169.

14. Grod I. M. Sufficient conditions for existence of bounded solutions for systems of nonlinear difference equations / I. M. Grod // Nonlinear Oscillations. – 2005. – Vol. 8. – № 2. – P. 165–173.

15. Grod I. M. Conditions for the existence of bounded solutions of one class of nonlinear differential equations / I. M. Grod // Ukrainian Mathematical Journal. – 2006. – Vol. 58. – № 3. – P. 317–325.

16. Grod I. M. Systems of nonlinear differential equations with bounded solutions / I. M. Grod // Nonlinear Oscillations. – 2008. – Vol. 11. – № 2. – P. 60–167.

17. Грод І. М. Побудова функцій Ляпунова деяких лінійних розширень динамічних систем / І. М. Грод, В. Л. Кулик // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2010. – Вип. 72. – С. 79–93.

18. Грод І. М. Регулярність матрично-диференціальних рівнянь / І. М. Грод, В. Л. Кулик // Буковинський математичний журнал. – 2013. – 1.– № 1. – С. 48–53.

19. Hrod I. M. Existence of Bounded Solutions of Nonlinear Difference Equations in Banach Spaces / I. M. Hrod // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 198. – № 3. – P. 252–259.

20. Grod I. M. Relationship between the Green and Lyapunov functions in linear extensions of dynamical systems / I. M. Grod, V. L. Kulyk // Ukrainian Mathematical Journal. – 2014. – Vol. 66. – № 4. – P. 617–625.

21. Грод І. М. Гладкість інваріантних многовидів нелінійних систем типу Ріккаті / І. М. Грод // Буковинський математичний журнал. – 2015. – 3. – № 2. – С. 25–37.

22. Грод І. М. Деякі класи регулярних лінійних розширень динамічних систем на торі / / І. М. Грод, В. Л. Кулик // Буковинський математичний журнал. – 2016. – 4. – № 1. – С. 37–42.

23. Grod I. Some questions of the existence of invariant sets of extensions of dynamical systems on the manifolds / I. Grod // Journal of Applied Mathematics and Statistics [Electronic resource]. – 2016. – Vol. 3. – №. 3. – P. 122–136. – Mode of access: http://paper.uscip.us/jams/JAMS.2016.1010.pdf

Опубліковані праці апробаційного характеру

24. Грод И. Н. Об инвариантных многообразиях для некоторых нерегулярно возмущенных систем / И. Н. Грод // Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики : тезисы докл. Всесоюзной конференции (12–15 сентября 1989 г., г. Тернополь). – Тернополь, 1989. – С.47.

25. Грод И. Н. О некоторых свойствах решений матричных уравнений Риккати / И. Н. Грод // Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики : вторые Боголюбовские чтения : тезисы докл. Международной конференции (14–18 сентября 1992 г., г. Киев). – К., 1992. – С. 44.

26. Грод І. М. Існування обмежених многовидів динамічних систем / І.М. Грод // Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування: тези доп. Всеукраїнської наукової конференції (15–18 травня 1996 р., м. Чернівці). – Київ, 1996. – С. 32.

27. Грод И. М. Регулярные линейные расширения динамических систем с вырожденной матрицей при нормальных переменных / І. М. Грод, В. Л. Кулик // Метод функций Ляпунова и его приложения : тезисы докл. Четвертой крымской международной математической школы (5–12 сентября 1998 г., г. Симферополь). – Симферополь, 1998. – С. 39.

28. Грод І. М. До питання локального збурення лінійних розширень динамічних систем / І. М. Грод // Сучасні проблеми математики : матеріали Міжнародної наукової конференції (25–29 вереня 1998 р., м. Чернівці). – Київ, 1998. – С. 162–165.

29. Грод І. М. Лінійні розширення динамічних систем, які володіють функцією Гріна / І. М. Грод // Диференціальні рівняння і нелінійні коливання : тези доп Українського математичного конгресу (27–29 серпня 2001 р., м. Київ). – К., 2001. – С.42–43.

30. Грод І. М. Дослідження умов керованості деяких систем з використовуючи апарат знакозмінних функцій Ляпунова / І. М. Грод, А.Я Ходорчук // Автоматика 2001 : матеріали доп. Міжнародної наукової конференції (10–14 вересня 2001 р., м. Одеса). – Одеса, 2001. – С. 23–24.

31. Грод І. М. Аналіз приведення лінійних розширень динамічних систем до спряжених понормальних змінних / І. М. Грод, В. Л. Кулик // Теорія еволюційних рівнянь: тези доп Міжнародної наукової конференції (22–24 травня 2002 р., м. Кам'янець-Подільський). – Київ, 2002. – С.56.

32. Грод І. М. Питання існування обмежених розв'язків деяких нелініних диференціальних рівнянь / І. М. Грод // Міжнародна математична конференція ім. В.Я.Скоробагатька : тези доп. (27 вереня – 1 жовтня 2004 р., м. Дрогобич).

– Дрогобич, 2004. – С. 65.

33. Грод І. М. Про регулярні лінійні розширення системи диференціальних рінянь з виродженою змінною матрицею / І. М. Грод, В. Л. Кулик // Modern problems and new trends in probability theory: тези доп. Міжнародної наукової конференції (19–26 червня 2005 р., м. Чернівці). – Черніці, 2005. – С. 61.

34. Грод І. М. Про властивості розв'язків одного класу нелінійних диференціальних рівнянь / І. М. Грод // Диференціальні рівняння та їх застосування : тези доп. Міжнародної наукової конференції (11–14 жовтня 2006 р., м. Чернівці). – Черніці, 2006. – С. 32.

35. Грод І. М. Побудова функцій Ляпунова для деяких лінійних розширень динамічних систем / І. М. Грод, В. Л. Кулик // Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2009) : тези доп. Міжнародної школи (5–9 жовтня 2009 р., м. Кам’янець-Подільський). – Кам'янець-Подільський, 2009. – С. 56–57.

36. Грод І. М. Функції Ляпунова в теорії обмежених інваріантних многовидів динамічних систем / І. М. Грод, В. Л. Кулик // Проблеми стійкості та оптимізації динаміних систем детермінованої та стохастичної структури : тези доп. Міжнародної конференції (17–21 жовтня 2010 р., м. Чернівці). – Чернівці, 2010. – С. 55–57.

37. Грод І. М. Регулярные линейные расширения динамических систем с вырожденной матрицей при нормальных переменных / І. М. Грод, В. Л. Кулик // Актуальные проблемы современной математики, информатики и механики : тезы док. Международной конференции (28–30 сентября 2011 р., г. Алма-Аты, Казахстан). – Алма-Аты, 2011. – С. 57–58.

38. Грод І. М. Проблема розділення змінних в лінійних розширеннях динамічних систем / І. М. Грод, В. Л. Кулик // Диференціальні рівняння та їх застосування : тези доп. Міжнародної наукової конференції (27–29 вересня 2012 р., м. Ужгород). – Ужгород, 2012. – С. 23.

39. Грод І. М. До питання регулярності лінійних розширень динамічних систем / І. М. Грод // Диференціальні рівняння та їх застосування : тези доп. Всеукраїнської наукової конференції (6–8 червня 2012 р., м. Чернівці). – Чернівці, 2012. – С. 16.

40. Грод І. М. Питання побудови функцій Ляпунова лінійних розширень динамічних систем / І. М. Грод // Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці : тези доп. Всеукраїнської наукової конференції (11–13 червня 2012 р., м. Чернівці). – Чернівці, 2012. – С. 62.

41. Грод І. М. Про існування обмежених розв'язків одного класу нелінійних диференціальних рівнянь / І. М. Грод // Диференціальні ріняння, теорія функцій та їх застосування : тези доп. Боголюбівських читань DIF-2013 (23–30 червня 2013 р., м. Севастополь). – Севастополь, 2013. – С. 90–91.

42. Грод І. М. Деякі структури регулярних лінійних розширень динамічних систем / І. М. Грод, В. Л. Кулик // Кримська міжнародна математична конференція : тези доп. (23 вересня – 4 жовтня 2013 р., м. Судак).

– Судак, 2013. – С. 5–6.

43. Грод І. М. О существованиии ограниченных решений нелинейных разностных уравнений в банаховом пространстве / І.М.Грод// Дифференциальные уравнения и математическая физика : тезисы док. Международной научной конференции (11–12 апреля 2014, г. Алма-Аты, Казахстан). – Алма-Аты, 2014. – С. 84–86.

44. Грод И. Н. О степени непрерывности инвариантных торов линейных расширений динамических систем / И. Н. Грод // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : тези док. Международной математической конференции (7–10 декабря 2015, г. Минск, Республика Беларусь). – Минск, 2015. – С. 61–63.

45. Грод І. М. Про регулярність деяких розширень динамічних систем на многовидах / І. М. Грод // Диференціальні рівняння та їх застосування : тези доп. Міжнародної наукової конференції (19–21 травня 2016 р., м. Ужгород). – Ужгород, 2016. – С. 60.

46. Grod I. Invariant sets of certain non-linear extensions of dynamic systems on manifolds / I. Grod // Differential-functional Equations and their Application: proceedings of the international scientific conference (28–30 September 2016, Chernivtsi). – Chernivtsi, 2016. – P. 116–117.

Опубліковані праці, які додатково відображають наукові результати дисертації

47. Янчук Н. И. Влияние среды на некаталитическое образование тиосемикарбазитов / Н. И. Янчук, И. Н. Грод // Журнал общей химии. – 2000. – Т. 70. – С. 62–76.

48. Грод І. М. Кількісна оцінка впливу властивостей розчинників на кінетичну реакцію утворення фосфоровмісних семикарбазидів / І. М. Грод, М. І. Янчук, Л. М. Іванець // XIX Українська конференція з хімії : тези доповідей (10-14 вересня 2001р., м. Львів). – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2001 – С. 204.

49. Янчук Н. И. Качественная оценка влияния физико-химических свойств растворителей на кинетику реакций образования фосфорсодержащих семикарбазидов / Н. И. Янчук, И. Н. Грод, Л. Н. Иванец // Журнал общей химии. – 2002. – Т. 72. – Вып. 11. – С. 1889–1894.

50. Василишин Н. А., Бодров В. П., Грод І. М. Вплив природи органічних розчинників на розчинність 2,6-ди-трет-бутилфенолу / Н. А. Василишин, В. П. Бодров, І. М. Грод // Наукові записки Тернопільського державного педагогічного університету. Серія: Хімія. – 2003. – Вип. 7. – С. 28–32.

АНОТАЦІЯ

Грод І.М. Якісний аналіз розширень динамічних систем на многовидах. – на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-

математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2016.

Дисертація присвячена розробці нових якісних методів дослідження систем диференціальних рівнянь та застосування цих методів до вивчення стійкості, обмеженості, періодичності і квазіперіодичності розв'язків, встановленню умов існування обмежених інваріантних множин і збереження їх при збуреннях, дослідженню умов гладкості інваріантних тороїдальних многовидів, а також дослідженню питання існування обмежених розв'язків систем диференціальних і різницевих рівнянь в банаховому просторі.

Проведено аналіз систем лінійних розширень на многовидах з тотожно виродженою матрицею і наведено приклади таких систем, які є регулярними. Досліджено характер модулів неперервності вищих похідних функції Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори і інваріантного тора лінійних розширень динамічних систем на торі, отримані умови (оцінки) їх збіжності. Запропоновано підхід до побудови узагальнених функцій Ляпунова для регулярних лінійних розширень динамічних систем на торі. Для систем динамічних розширень на торі типу Ріккаті знайдено достатні умови існування єдиного тороїдального многовиду. Досліджено умови гладкості обмеженого інваріантного многовиду нелінійної системи типу Ріккаті. Запропоновано підхід до дослідження питання існування обмежених розв'язків систем диференціальних рівнянь в банаховому просторі. Для нелінійних різницевих рівнянь, використовуючи теорію c-неперервних операторів, отримано достатні умови існування обмежених послідовностей. Досліджено властивість регулярності певних лінійних розширень динамічних систем з параметрами. Отримані результати можуть служити джерелом нових задач в теорії інваріантних многовидів динамічних систем.

Ключові слова: функція Гріна-Самойленка задачі про обмежені інваріантні многовиди, лінійні розширення динамічних систем на многовидах, регулярні лінійні розширення, слабо регулярність, квадратична форма, знакозмінні фунції Ляпунова, експоненціальна дихотомія, стійкість, інваріантний тор.

Грод И.М. Качественный анализ расширений динамических систем на многообразиях. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Министерство образования и науки Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена разработке новых качественных методов исследования систем дифференциальных уравнений и использованию этих методов к изучению устойчивости, ограниченности, периодичности и квазипериодичности решений, установлению условий существования ограниченных инвариантных множеств и их сохранения при возмущениях, исследованию условий гладкости инвариантных тороидальных многообразий, а также исследованию вопроса условий гладкости инвариантных тороидальных многообразия, а также исследованию вопроса существования ограниченных решений систем дифференциальных и разностных уравнений в банаховом пространстве.

Проведен анализ систем линейных расширений на многообразиях с тождественно вырожденной матрицей. Исследован характер модулей непрерывности высших производных функции Грина-Самойленко задачи о инвариантные торы и инвариантного тора линейных расширений динамических систем на торе, полученные условия (оценки) их сходимости. Предложен подход к построению обобщенных функций Ляпунова для регулярных линейных расширений динамических систем на торе.

Для систем динамических расширений на торе типа Риккати найдены достаточные условия существования единого тороидального многообразия. Исследованы условия гладкости ограниченного инвариантного многообразия нелинейной таких системе. Предложен подход к исследованию вопроса существования ограниченных решений систем дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Для нелинейных разностных уравнений, используя теорию с-непрерывных операторов, получено достаточные условия существования ограниченных последовательностей. Исследовано свойство регулярности определенных линейных расширений динамических систем с параметрами. Полученные результаты могут служить источником новых задач в теории инвариантных многообразий динамических систем.

Ключевые слова: функция Грина-Самойленка задачи о ограниченных инвариантных многообразиях, линейные расширения динамических систем на многообоазиях, регулярные линейные расширения, слабая регулярность, квадратическая форма, знакопеременные фунции Ляпунова, экспоненциальная дихотомия, устойчивость, инвариантный тор.

Grod I.M. Qualitative analysis of extensions of dynamical systems on manifolds. – Manuscript.

Dissertation for a Doctorate Degree in Physics and Mathematical Sciences. Specialty 01.01.02. – differential equations. – Taras Shevcheno Kyiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2016.

The dissertation is dedicated to the development of new qualitative methods of investigation of differential equations systems and implementation of these methods in the study of stability, boundedness, periodicity and quasi-periodicity of solutions; to the finding of conditions for the existence of bounded invariant sets and their preservation under perturbation; to the study of smoothness conditions of invariant toroidal manifolds; to the study of the problem of existence of bounded solutions of systems of differential and difference equations in Banach space. The dependability on the parameter of bounded invariant manifolds of autonomous systems of linear equations has been studied.

The analysis of systems of linear extensions on manifolds with identically

degenerate matrix has been carried out, and the examples of such regular systems have been provided.The character of moduli of continuity of higher variables of the Green-Samoilenko function for the problem of invariant tori and invariant torus of linear extensions of dynamical systems on torus has been investigated, and the conditions (assessment) of their convergence have been obtained. The approach to the creation of the generalized Lyapunov functions for regular linear extensions of dynamical systems on torus has been suggested. The criterion of regularity of linear systems considered in matrizant properties has been obtained. New classes of systems of regular differential equations have been described.

For the systems of dynamical extensions on torus of the Rikkati-type sufficient conditions of existence of one toroidal manifold have been found. Sufficient conditions (using the concept of the Green-Samoilenko function about the existence of bounded invariant manifolds) (considered in quadratic forms) of existence of bounded invariant manifolds for the dynamical systems of the Rikkati-type have been defined. The conditions of smoothness of bounded invariant manifold of the non-linear system of the Rikkati-type have been studied. The relationship between the properties of matrizant of linear extensions of dynamical systems on torus for the exponentially dichotomous and weakly regular linear systems has been defined. The approach to the study of the problem of existence of bounded solutions of the systems of differential equations in Banach space has been suggested. Using the theory of C-continuous operators, the sufficient conditions of existence of bounded sequences for the non-linear difference equations have been obtained. The possibilities of finding the Lyapunov functions in quadratic forms for certain classes of linear extensions of dynamical systems have been suggested. The property of regularity of certain linear extensions of dynamical systems with parameters has been investigated. The obtained results may serve as the source for new problems in the theory of invariant manifolds of dynamical systems.

Key words: Green-Samoilenko function for the problem of bounded invariant manifolds, linear extension of the dynamical system, regular linear extensions, weak regularity, quadratic form, alternating Lyapunov functions (a variable sign Lyapunov function, sign-alternating Lyapunov function), exponential dichotomy, stability, invariant torus.