Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2025, № 2 | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.5

MSC 65C60

THE CONDITION FOR THE COINCIDENCE OF LS AND AITKEN ESTIMATIONS OF BOTH PARAMETERS OF THE LINEAR REGRESSION MODEL IN THE CASE OF TRIDIAGONAL BISYMMETRIC COVARIANCE MATRIX

Marta Savkina

Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, Ukraine, E-mail: marta@imath.kiev.ua, ORCID: 0009-0006-2093-1576

УМОВА ЗБІГУ ОЦІНОК МНК ТА ЕЙТКЕНА ОБОХ ПАРАМЕТРІВ ЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ У ВИПАДКУ ТРИДІАГОНАЛЬНОЇ БІСИМЕТРИЧНОЇ КОВАРІАЦІЙНОЇ МАТРИЦІ

М. Ю. Савкіна

Інститут математики НАН України, Київ, Україна, E-mail: marta@imath.kiev.ua, ORCID: 0009-0006-2093-1576

Abstract. At the paper a linear regression model whose function has the form $f(x) = ax + b$, where a and b are unknown parameters, is studied. Approximate values (observations) of functions $f(x)$ are registered at equidistant points of a line segment. It is also assumed that the covariance matrix of deviations is a tridiagonal bisymmetric matrix. In the theorem proved in the paper, necessary and sufficient condition for the elements of such matrix is found, which ensures the equality of LS and Aitken estimations both parameters of this model simultaneously. All elements are expressed in terms of two, which correspond to the variances of random deviations at the first two observation points. A sufficient condition for the connection between these two elements of the matrix to be positive definite was also found.
Keywords: linear regression model, Aitken estimation, least square method.

Анотація. В роботі вивчається регресійна модель, функція якої має вигляд $f(x) = ax + b$, де a та b — невідомі параметри. Наближені значення (спостереження) функції $f(x)$ реєструються у рівновіддалених точках відрізку $[0, 1]$. Також припускається, що

коваріаційна матриця відхилень є тридіагональною бісиметричною матрицею. В теоремі, яку доведено в роботі, знайдено необхідну і достатню умову на елементи такої матриці, яка забезпечує рівність оцінок МНК та Ейткена обох параметрів даної моделі одночасно. Всі елементи виражаються через два, які відповідають дисперсіям випадкових відхилень в перших двох точках спостереження. Також знайдено достатню умову на зв'язок між цими двома елементами матриці, для того щоб матриця була додатно визначеною.
Ключові слова: лінійна регресійна модель, оцінка Ейткена, метод найменших квадратів.

1. Вступ

Для аналізу та обробки даних у різних сферах людської діяльності використовують статистичні методи, зокрема методи регресійного аналізу.

В схемах регресії досліджується певна кількісна характеристика деякого об'єкта чи явища, її значення в кожній точці спостереження залежить від багатьох факторів.

Більша частина таких факторів буде несуттєвою, тому доцільно просто вивчати їх сумарний вплив та розглядати його як випадкову величину.

У класичній регрсії припускається, що коваріаційна матриця значень цієї випадкової величини буде одиничною, помноженою на стале число.

Ефективною оцінкою невідомих параметрів моделі буде звичайна оцінка методу найменших квадратів (МНК).

При послабленні такого припущення в якості коваріаційної матриці може бути будь-яка додатно визначена матриця. В цьому випадку ефективною оцінкою невідомих параметрів буде оцінка Ейткена, яка в своїй формулі враховує вигляд коваріаційної матриці.

В монографії [1] доведено теорему, яка дає необхідну і достатню умову на коваріаційну матрицю для збігу оцінок МНК та Ейткена всіх параметрів моделі одночасно у випадку загальної регресійної моделі, лінійної по параметрам.

В роботі [4] вивчається лінійна регресійна модель, функція якої має такий вигляд

$$f(x) = ax + b;$$

коваріаційна матриця відхилень є тридіагональною бісиметричною матрицею.

В теоремі, яку доведено в роботі, у випадку непарної кількості точок спостереження знайдено необхідну і достатню умову на елементи даної коваріаційної матриці, яка забезпечує рівність оцінки МНК та оцінки Ейткена параметра a даної моделі.

При такому вигляді коваріаційної матриці відхилень оцінки Ейткена та МНК параметра b в загальному випадку не будуть збігатися.

2. Оцінка МНК та оцінка Ейткена лінійної регресійної моделі у випадку відхилень з тридіагональною коваріаційною матрицею

Розглянемо модель регресії

$$y_i = ax_i + b + \epsilon_i, \quad i = 0, 1, ..., n, \tag{1}$$

де $\epsilon_0, ..., \epsilon_n$ — випадкові величини з $E\epsilon_i = 0$ та коваріаційною матрицею $\sigma^2\Omega'_{B3}$, якщо n — парне, і $\sigma^2\Omega''_{B3}$, якщо n — непарне; Ω'_{B3} та Ω''_{B3} — додатно визначені матриці, які мають вигляд

$$\Omega'_{B3} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \lambda_1 & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \lambda_2 & \gamma_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{k-1} & \lambda_{k-1} & \gamma_k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_k & \lambda_k & \gamma_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_k & \lambda_{k-1} & \gamma_{k-1} & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_1 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega''_{B3} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \lambda_1 & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \lambda_2 & \gamma_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_k & \lambda_k & \gamma_{k+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_{k+1} & \lambda_k & \gamma_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_k & \lambda_{k-1} & \gamma_{k-1} & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_1 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

де $\lambda_i > 0,\ i = 0, 1, ..., k, \quad k = \frac{n}{2}$ для парних n та $k = \frac{n-1}{2}$ для непарних n.

В монографії [2] знайдено формули для оцінки МНК та оцінки Ейткена невідомих параметрів моделі лінійної регресії загального вигляду.

З цих формул у випадку моделі (1) та $x_i = \frac{i}{n}, i = 0, 1, ..., n$, маємо такі оцінки МНК та Ейткена параметрів a та b:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{MNK} \\ \hat{b}_{MNK} \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'\vec{y},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{AIT} \\ \hat{b}_{AIT} \end{pmatrix} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\vec{y},$$

де

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \dots & \frac{n-1}{n} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}\,' = (y_0, y_1, ..., y_n), \quad \Omega \ \text{— додатно визначена матриця.}$$

3. Умови на коваріаційну матрицю відхилень для збігу оцінок МНК та Ейткена параметрів лінійної моделі

Позначимо через $\Omega'_{B3}(\lambda_0, \lambda_1)$ та $\Omega''_{B3}(\lambda_0, \lambda_1)$ матриці Ω'_{B3} та Ω''_{B3} відповідно, в яких елементи $\lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_k$ та $\gamma_1, ..., \gamma_{k-1}$ мають вигляд для парних n

$$\lambda_{k-j} = \frac{(-(k-1)^2 + j^2)\lambda_0 + (k^2 - j^2)\lambda_1}{2k-1}, \quad j = 0, 1, ..., k-2; \tag{2}$$

$$\gamma_j = \frac{j(2k-j+1)}{2(2k-1)}(\lambda_0 - \lambda_1), \quad j = 1, 2, ..., k; \tag{3}$$

для непарних n

$$\lambda_{k-j} = \frac{(-(k-1)k + j(j+1))\lambda_0 + ((k+1)k - j(j+1))\lambda_1}{2k}, \tag{2$'$}$$

$$j = 0, 1, ..., k-2;$$

$$\gamma_j = \frac{j(2k-j+2)}{4k}(\lambda_0 - \lambda_1), \quad j = 1, 2, ..., k+1. \tag{3$'$}$$

Лема 1. *Якщо елементи λ_0, λ_1 матриць $\Omega'_{B3}(\lambda_0, \lambda_1)$ та $\Omega''_{B3}(\lambda_0, \lambda_1)$ задовільняють умові*

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \left(3 - \frac{1}{z}\right)\lambda_0, \quad \text{де } z = \frac{n}{2}, \tag{4}$$

або умові

$$0 < \left(1 - \frac{2z-1}{2z^2+k}\right)\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_0, \tag{5}$$

то матриці $\Omega'_{B3}(\lambda_0, \lambda_1)$ та $\Omega''_{B3}(\lambda_0, \lambda_1)$ будуть додатно визначеними.

Доведення. Згідно з [3], якщо симетрична матриця має діагональну перевагу та всі її діагональні елементи додатні, то вона буде додатно визначеною.

Розглянемо спочатку випадок парного n. Тоді $z = k$.

Доведемо, що при умовах (4) або (5) матриця $\Omega'_{B3}(\lambda_0, \lambda_1)$ буде мати діагональну перевагу.

Справді, якщо $\lambda_0 < \lambda_1$ та виконується умова (4), то враховуючи формули (2) та (3) маємо

$$|\gamma_1| = \frac{2k}{2(2k-1)}(\lambda_1 - \lambda_0) < \frac{k}{2k-1}\left(2 - \frac{1}{k}\right)\lambda_0 = \lambda_0;$$

$$|\gamma_1| + |\gamma_2| = \left(\frac{k}{2k-1} + \frac{2(2k-1)}{2(2k-1)}\right)(\lambda_1 - \lambda_0) < \frac{3k-1}{2k-1}\left(1 - \frac{k}{3k-1}\right)\lambda_1 = \lambda_1;$$

$$\lambda_j - \big(|\gamma_j| + |\gamma_{j+1}|\big) = \frac{(-(k-1)^2 + (k-j)^2)\lambda_0 + (k^2 - (k-j)^2)\lambda_1}{2k-1} -$$

$$-\frac{j(2k-j+1) + (j+1)(2k-j)}{2(2k-1)}(\lambda_1 - \lambda_0) =$$

$$= \frac{(-(k-1)^2 + (k-j)^2) + (2kj + k - j^2)}{2k-1}\lambda_0 +$$

$$+\frac{(k^2 - (k-j)^2) - (2kj + k - j^2)}{2k-1}\lambda_1 =$$

$$= \frac{1}{2k-1}\big((3k-1)\lambda_0 - k\lambda_1\big) > \frac{1}{2k-1}\big((3k-1)\lambda_0 - k(3-1/k)\lambda_0\big) = 0,$$

$$j = 2, 3, ..., k-1;$$

$$\lambda_k - 2|\gamma_k| = \frac{-(k-1)^2\lambda_0 + k^2\lambda_1}{2k-1} - \frac{2k(k+1)}{2(2k-1)}(\lambda_1 - \lambda_0) =$$

$$= \frac{1}{2k-1}\big((3k-1)\lambda_0 - k\lambda_1\big) > 0.$$

Якщо $\lambda_0 > \lambda_1$ та виконується умова (5), то

$$|\gamma_1| = \frac{k}{2k-1}(\lambda_0 - \lambda_1) < 1 \cdot \lambda_0 = \lambda_0;$$

$$|\gamma_1| + |\gamma_2| = \frac{3k-1}{2k-1}(\lambda_0 - \lambda_1) < \frac{3k-1}{2k-1} \cdot \frac{2k-1}{2k^2-k+1}\lambda_1 < \lambda_1;$$

$$\lambda_k - 2|\gamma_k| = \frac{-(k-1)^2\lambda_0 + k^2\lambda_1}{2k-1} - \frac{2k(k+1)}{2(2k-1)}(\lambda_0 - \lambda_1) =$$

$$= \frac{1}{2k-1}\big((2k^2+k)\lambda_1 - (2k^2-k+1)\lambda_0\big) > 0. \tag{6}$$

Оскільки у випадку $\lambda_0 > \lambda_1$ виконуються нерівності $\gamma_{j-1} < \gamma_j, \quad \lambda_{j-1} > \lambda_j,\ j = 2, 3, ..., k$, то з (6) при умові (5) випливає, що

$$\lambda_j - \big(|\gamma_j| + |\gamma_{j+1}|\big) > \lambda_k - 2|\gamma_k| > 0,\ j = 2, 3, ..., k-1.$$

У випадку непарного n доведення аналогічне.

Далі, з формул (2) та (2′) випливає, що $\lambda_{k-j} > 0,\ j = 0, 1, ..., k-2$; тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda_1 > \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \lambda_0 > 0 \ (n - \text{парне}), \tag{7}$$

або

$$\lambda_1 > \frac{k-1}{k+1}\lambda_0 > 0 \ (n - \text{непарне}). \tag{7′}$$

Але якщо λ_0 та λ_1 задовільняють умові (4) або (5), то вони задовільняють і умовам (7) та (7′) у випадку парного та непарного n відповідно. □

Лема 2. *Якщо елементи λ_0, λ_1 матриць $\Omega'_{B3}(\lambda_0, \lambda_1)$ та $\Omega''_{B3}(\lambda_0, \lambda_1)$ будь-які, але $\lambda_0 \neq \lambda_1$, то*

$$\mu_i = \frac{\left((3z-1) - \frac{i(i+1)}{2}\right)\lambda_0 - \left(z - \frac{i(i+1)}{2}\right)\lambda_1}{2z-1}, \qquad (8)$$
$$i = 0, 1, n,$$

будуть власними числами матриці $\Omega'_{B3}(\lambda_0, \lambda_1)$ та $\Omega''_{B3}(\lambda_0, \lambda_1)$ з власними векторами

$$\vec{v}^{(0)} = \left\{1\right\}_{j=0}^{n}, \text{ коли } i = 0;$$
$$\vec{v}^{(1)} = \left\{(z-j)\right\}_{j=0}^{n}, \text{ коли } i = 1;$$
$$\vec{v}^{(n)} = \left\{(-1)^j C_n^j\right\}_{j=0}^{n}, \text{ коли } i = n.$$

Доведення. Нехай спочатку n буде парне.

Доведемо, що вектори $\vec{v}^{(i)} = (v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, ..., v_n^{(i)}),\ i = 0, 1, n$, будуть розв'язками систем рівнянь

$$(\Omega_{B3}(\lambda_0, \lambda_1) - \mu_i I)\vec{v} = 0, \qquad (9)$$
$$i = 0, 1, n,$$

відносно $\vec{v} = (v_0, v_1, ..., v_n)$, де I — одинична матриця.

Система (9) для $i = 0, 1, n$, з урахуванням (8) має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{(-k+i(i+1)/2)(\lambda_0-\lambda_1)}{2k-1} v_0 + \frac{k(\lambda_0-\lambda_1)}{2k-1} v_1 = 0 \\ \frac{j(2k-j+1)(\lambda_0-\lambda_1)}{2(2k-1)} v_{j-1} + \frac{(k+2kj-j^2-i(i+1)/2)(\lambda_1-\lambda_0)}{2k-1} v_j + \\ \quad + \frac{(j+1)(2k-j)(\lambda_0-\lambda_1)}{2(2k-1)} v_{j+1} = 0, \quad j = 1, 2, ..., 2k-1; \\ \frac{k(\lambda_0-\lambda_1)}{2k-1} v_{2k-1} + \frac{(-k+i(i+1)/2)(\lambda_0-\lambda_1)}{2k-1} v_{2k} = 0 \end{cases}$$

Після спрощення маємо:

$$\begin{cases} (-k + i(i+1)/2)v_0 + kv_1 = 0 \\ \frac{j(2k-j+1)}{2} v_{j-1} - (k + 2kj - j^2 - i(i+1)/2)v_j + \\ \quad + \frac{(j+1)(2k-j)}{2} v_{j+1} = 0, \quad j = 1, 2, ..., 2k-1; \\ kv_{2k-1} + (-k + i(i+1)/2)v_{2k} = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Підставимо в систему (10) при $i = 0$ вектор $\vec{v}^{(0)}$. Маємо

$$-k \cdot 1 + k \cdot 1 \equiv 0;$$
$$\frac{j(2k-j+1)}{2} \cdot 1 - (k + 2kj - j^2) \cdot 1 + \frac{(j+1)(2k-j)}{2} \cdot 1 =$$
$$= \frac{4ki - 2i^2 + 3k}{2} - (k + 2kj - j^2) \equiv 0, \quad j = 1, 2, ..., 2k-1;$$
$$k \cdot 1 - k \cdot 1 \equiv 0.$$

Далі, підставимо в систему (10) при $i = 1$ вектор $\vec{v}^{(1)}$. Маємо

$$(-k+1)\cdot k + k\cdot(k-1) \equiv 0;$$
$$\frac{j(2k-j+1)}{2}\cdot(k-j+1) - (k+2kj-j^2-1)\cdot(k-j) +$$
$$+\frac{(j+1)(2k-j)}{2}\cdot(k-j-1) = \frac{2(k-j)(2kj-j^2+k-1)}{2} -$$
$$-(k+2kj-j^2-1)\cdot(k-j) \equiv 0, \quad j=1,2,...,2k-1;$$
$$k\cdot(-k+1)+(-k+1)\cdot(-k) \equiv 0.$$

Насамкінець, підставимо в систему (10) при $i=n$ вектор $\vec{v}^{(n)}$. Маємо

$$\big((-k+k(2k+1)\big)\cdot C_{2k}^0 - k\cdot C_{2k}^1 = 2k^2\cdot 1 - k\cdot 2k \equiv 0;$$
$$\frac{j(2k-j+1)}{2}\cdot C_{2k}^{j-1} - (2kj-j^2+2k^2)\cdot C_{2k}^j + \frac{(j+1)(2k-j)}{2}\cdot C_{2k}^{j+1} =$$
$$= C_{2k}^j\left(\frac{j^2}{2} - (2kj-j^2+2k^2) + \frac{(2k-j)^2}{2}\right) \equiv 0, \quad j=1,2,...,2k-1;$$
$$-k\cdot C_{2k}^{2k-1} + \big((-k+k(2k+1)\big)\cdot C_{2k}^{2k} = -k\cdot 2k + 2k^2\cdot 1 \equiv 0.$$

У випадку непарного n доведення аналогічне. □

Має місце

Наслідок 1. *Якщо матриці $\Omega'_{B3}(\lambda_0,\lambda_1)$ та $\Omega''_{B3}(\lambda_0,\lambda_1)$ додатно визначені і $\lambda_0 < \lambda_1$, то має місце нерівність (4).*

Доведення. Додатня визначеність матриці означає [3], що всі її власні числа додатні. Припустимо, права частина нерівності (4) не виконується, тобто $\lambda_1 > \left(3-\frac{1}{z}\right)\lambda_0$. З останньої нерівності та леми 2 випливає, що $\mu_0 < 0$. Маємо протиріччя. □

Таким чином, умова (4) буде необхідною і достатньою для додатної визначеності матриць $\Omega'_{B3}(\lambda_0,\lambda_1)$ та $\Omega''_{B3}(\lambda_0,\lambda_1)$.

Зауважимо, що умова (5) не буде необхідною для додатної визначеності цих матриць.

Приклад 1. Матриця

$$\Omega'_{B3}\left(1,\frac{20}{27}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{45} & \frac{20}{27} & \frac{7}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{27} & \frac{79}{135} & \frac{14}{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{45} & \frac{8}{15} & \frac{14}{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{14}{45} & \frac{79}{135} & \frac{7}{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{27} & \frac{20}{27} & \frac{7}{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{45} & 1 \end{pmatrix},$$

не має діагональної переваги (умова (5) не виконується), але вона буде додатно визначеною. Її власні числа — $\mu_0 = \frac{52}{45}$, $\mu_1 = \frac{149}{135}$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = \frac{38}{45}$, $\mu_4 = \frac{38}{135}$, $\mu_5 = \frac{17}{45}$, $\mu_6 = \frac{1}{15}$.

Наслідок 2. *Якщо матриці $\Omega'_{B3}(\lambda_0, \lambda_1)$ та $\Omega''_{B3}(\lambda_0, \lambda_1)$ додатно визначені та $\lambda_0 > \lambda_1$, то має місце нерівність*

$$0 < \left(1 - \frac{2z-1}{2z^2}\right)\lambda_0 < \lambda_1. \tag{11}$$

Доведення. Нехай (11) не виконується. З (8) маємо

$$\mu_n = \frac{2z^2}{2z-1}\left(\lambda_1 - \left(1 - \frac{2z-1}{2z^2}\right)\lambda_0\right) < 0,$$

тобто матриця $\Omega'_{B3}(\lambda_0, \lambda_1)$ (або $\Omega''_{B3}(\lambda_0, \lambda_1)$) має принаймні одне від'ємне власне число, що протирічить її додатній визначеності. □

Має місце

Теорема 1. *Оцінки МНК та Ейткена параметрів моделі (1) з коваріаційною матрицею відхилень $\sigma^2\Omega'_{B3}$ у випадку парного n та $\sigma^2\Omega''_{B3}$ у випадку непарного n збігаються тоді і тільки тоді, коли елементи $\lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_k$ та $\gamma_1, ..., \gamma_{k+1}$ матриць Ω'_{B3} та Ω''_{B3} мають вигляд (2), (3) та (2'), (3') відповідно, а λ_0 та λ_1 пов'язані співвідношеннями (4) або (5).*

Доведення. Розглянемо випадок парного n.

Достатність. Нехай $\Omega'_{B3} = \Omega'_{B3}(\lambda_0, \lambda_1)$. Згідно леми 2 матриця $\Omega'_{B3}(\lambda_0, \lambda_1)$ має власні вектори $\vec{v}^{(0)}$ та $\vec{v}^{(1)}$.

Позначимо через V матрицю порядка $(n+1) \times 2$, першим та другим стовпцями якої будуть вектори $\vec{v}^{(0)}$ та $\vec{v}^{(1)}$ відповідно.

Очевидно

$$X = VC, \tag{12}$$

де

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

З рівності (12) та теореми про необхідну і достатню умову збігу оцінки МНК та Ейткена [1] випливає, що

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{MNK} \\ \hat{b}_{MNK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{AIT} \\ \hat{b}_{AIT} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Необхідність. Нехай виконується (13). Згідно з теоремою про необхідну і достатню умову збігу оцінки МНК та Ейткена [1] рівність (13) означає, що матриця Ω'_{B3} має два власні вектори $\vec{v}_1^{(0)}$ та $\vec{v}_1^{(1)}$, які можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів матриці X, або, завдяки формулі (12), векторів $\vec{v}^{(0)}$ та $\vec{v}^{(1)}$:

$$\vec{v}_1^{(0)} = \alpha_0\vec{v}^{(0)} + \alpha_1\vec{v}^{(1)}; \quad \vec{v}_1^{(1)} = \beta_0\vec{v}^{(0)} + \beta_1\vec{v}^{(1)}.$$

Розглянемо дві системи рівнянь

$$(\Omega'_{B3} - \tilde{\mu}_0 I)\vec{v}_1^{(0)} = 0 \tag{14}$$

та

$$(\Omega'_{B3} - \tilde{\mu}_1 I)\vec{v}_1^{(1)} = 0 \tag{14'}$$

відносно змінних $\tilde{\mu}_0, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_k, \gamma_1, ..., \gamma_k, \alpha_0, \alpha_1$ та змінних $\tilde{\mu}_1, \lambda_2, \lambda_3, ...,$ $\lambda_k, \gamma_1, ..., \gamma_k, \beta_0, \beta_1$ відповідно.

З $(k+1)$-х рівнянь систем (14) та (14$'$) випливає, що

$$\tilde{\mu}_0 = \tilde{\mu}_1 = \lambda_k + 2\gamma_k, \tag{15}$$

якщо $\alpha_0 \neq 0$ та $\beta_0 \neq 0$ одночасно. В цьому випадку з перших рівнянь систем (14) та (14$'$) та рівності (15) маємо $\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{\beta_1}{\beta_0}$, тобто

$$\vec{v}_1^{(0)} = \frac{\beta_1}{\beta_0}\vec{v}_1^{(1)},$$

чого не може бути. Тому $\alpha_0 = 0$ або $\beta_0 = 0$.

Нехай $\beta_0 = 0$. Тоді $\alpha_0 \neq 0$. Розглянемо перше та останнє рівняння системи (14). Маємо

$$(\lambda_0 - \tilde{\mu}_0)(\alpha_0 - \alpha_1) + \gamma_1\Big(\alpha_0 - \frac{k-1}{k}\alpha_1\Big) = 0, \tag{16}$$

$$\gamma_1\Big(\alpha_0 + \frac{k-1}{k}\alpha_1\Big) + (\lambda_0 - \tilde{\mu}_0)(\alpha_0 + \alpha_1) = 0. \tag{17}$$

Складемо (16) та (17). Маємо

$$(\lambda_0 - \tilde{\mu}_0) + \gamma_1 = 0. \tag{18}$$

Віднімемо (16) від (17). Маємо

$$2\alpha_1\Big((\lambda_0 - \tilde{\mu}_0) + \frac{k-1}{k}\gamma_1\Big) = 0. \tag{19}$$

Враховуючи (18), з (19) отримуємо $\gamma_1 = 0$ або $\alpha_1 = 0$.

Якщо $\gamma_1 = 0$, то $\tilde{\mu}_0 = \lambda_0$; розглянемо друге та передостаннє рівняння системи (14):

$$(\lambda_1 - \lambda_0)\Big(\alpha_0 - \frac{k-1}{k}\alpha_1\Big) + \gamma_2\Big(\alpha_0 - \frac{k-2}{k}\alpha_1\Big) = 0,$$
$$\gamma_2\Big(\alpha_0 + \frac{k-2}{k}\alpha_1\Big) + (\lambda_1 - \lambda_0)\Big(\alpha_0 + \frac{k-1}{k}\alpha_1\Big) = 0,$$

звідки маємо

$$(\lambda_1 - \lambda_0) + \gamma_2 = 0, \tag{20}$$

$$2\alpha_1\Big(\frac{k-1}{k}(\lambda_1 - \lambda_0) + \frac{k-2}{k}\gamma_2\Big) = 0. \tag{21}$$

З (20) та (21) випливає, що $\gamma_2 = 0$ або $\alpha_1 = 0$. Якщо $\gamma_2 = 0$, то $\lambda_1 = \lambda_0$, що протирічить умові теореми. Отже, $\alpha_1 = 0$.

Таким чином, можна вважати, що $\vec{v}_1^{(0)} = \vec{v}^{(0)}$, $\vec{v}_1^{(1)} = \vec{v}^{(1)}$.

Розглянемо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (\Omega'_{B3} - \tilde{\mu}_0 I)\vec{v}^{(0)} = 0, \\ (\Omega'_{B3} - \tilde{\mu}_1 I)\vec{v}^{(1)} = 0, \end{cases} \tag{22}$$

відносно змінних $\mu_0, \mu_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_k, \gamma_1, ..., \gamma_{k-1}$.

Система (22) має єдиний розв'язок, в якому змінні виражаються через λ_0 та λ_1 по формулам (9), (2), (3). А це означає, що оцінки МНК та Ейткена параметрів моделі (1) з коваріаційною матрицею відхилень $\sigma^2\Omega'_{B3}$ можуть збігатися тільки тоді, коли елементи матриці Ω'_{B3} мають вигляд (2), (3).

У випадку непарного n доведення аналогічне. □

4. Висновки

Вивчається лінійна регресійна модель вигляду

$$f(x) = ax + b,$$

де a та b — невідомі параметри. Спостереження функції $f(x)$ задано у рівновіддалених точках $[0, 1]$. Припускається, що коваріаційна матриця відхилень є тридіагональною бісиметричною матрицею. Знайдено та доведено необхідну і достатню умову на елементи такої матриці, яка забезпечує рівність оцінок МНК та Ейткена обох параметрів даної моделі одночасно. Всі елементи виражаються через два, які відповідають дисперсіям випадкових відхилень в перших двох точках спостереження.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів щодо публікації цієї статті.

Література

1. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. Москва: Финансы и статистика, 1981. 304 с.
2. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. Москва: Мир, 1976. 756 с.
3. Савкіна М.Ю. Умови збігу оцінок МНК та Ейткена параметрів моделі лінійної регресії. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2018. № 3(129). С. 36–44.
4. Савкіна М.Ю. Рівність оцінок МНК та Ейткена старшого коефіціенту лінійної моделі регресії у випадку корельованих відхилень. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2021. № 2(136). С. 64–72.
5. Савкіна М.Ю. Необхідна умова збігу оцінок МНК та Ейткена старшого коефіціенту лінійної моделі регресії у випадку корельованих відхилень. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2022. № 2. С. 116–125. https://doi.org/10.17721/2706-9699.2022.2.14
6. Савкіна М.Ю. Необхідна умова збігу оцінок МНК та Ейткена у випадку,коли коваріаційна матриця відхилень є тридіагональною бісиметричною матрицею. Збірник наукових праць XXVII Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук», Львів, 7-9 листопада 2023 р. С. 194–196.

Надійшла: 28.08.2025 / Прийнята: 29.10.2025