УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.3

Д. В. Затула[1], *к.ф.-м.н.*

Оцінки розподілу напівнорм Гельдера від дійсних стаціонарних гауссових процесів зі стійкою кореляційною функцією

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: [1] dm_zatula@univ.kiev.ua

D. V. Zatula[1], *Ph.D.*

Estimates for the distribution of Hölder semi-norms of real stationary Gaussian processes with a stable correlation function

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, 4d Glushkova str.,
e-mail: [1] dm_zatula@univ.kiev.ua

У роботі розглядаються дійсні стаціонарні гауссові процеси зі стійкою кореляційною функцією. Показано, що траєкторії стаціонарних гауссових власних комплексних випадкових процесів із нульовим математичним сподіванням належать простору Орліча, породженому функцією $U(x) = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$. Отримано умови, за яких справджуються оцінки розподілу напівнорм Гельдера від гауссових власних комплексних випадкових процесів, визначених на компакті $\mathbb{T} = [0, T]$.

Ключові слова: стаціонарні гауссові процеси, власні комплексні випадкові процеси, простори Орліча, модулі неперервності, напівнорми Гельдера.

Complex random variables and processes with a vanishing pseudo-correlation are called proper. There is a class of stationary proper complex random processes that have a stable correlation function. In the present article we consider real stationary Gaussian processes with a stable correlation function. It is shown that the trajectories of stationary Gaussian proper complex random processes with zero mean belong to the Orlich space generated by the function $U(x) = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$. Estimates are obtained for the distribution of semi-norms of sample functions of Gaussian proper complex random processes with a stable correlation function, defined on the compact $\mathbb{T} = [0, T]$, in Hölder spaces.

Key Words: stationary Gaussian processes, proper complex random processes, Orlicz spaces, moduli of continuity, Hölder semi-norms.

Статтю представив д.ф.-м.н. Козаченко Ю.В.

1 Вступ

Нехай $(\mathbb{T}, \rho)$ — деякий метричний простір. Розглянемо такий випадковий процес $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$, що з імовірністю 1:

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sup\limits_{\substack{0<\rho(t,s)\leqslant\varepsilon \\ t,s\in\mathbb{T}}} |X(t) - X(s)|}{f(\varepsilon)} \leqslant 1.$$

У цій нерівності функція f повинна бути модулем неперервності для процесу X.

Простір функцій з модулями неперервності f є простором Гельдера, а функціонал

$$\sup_{\substack{0<\rho(t,s)\leqslant\varepsilon \\ t,s\in\mathbb{T}}} \frac{|X(t) - X(s)|}{f(\rho(t,s))}$$

є напівнормою у просторі Гельдера. У подальшому матимемо справу із оцінками розподілів напівнорм Гельдера від траєкторій власних комплексних випадкових процесів $X_\alpha = (X_\alpha(t), t \in [0, T])$, тобто ймовірностей

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{\substack{0<|t-s|\leqslant\varepsilon \\ t,s\in[0,T]}} \frac{|X_\alpha(t) - X_\alpha(s)|}{f(|t-s|)} > x \right\}.$$

Такі оцінки та припущення, згідно з якими напівнорми траєкторій процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ задовольняють умові Гельдера, були отримані в [2, 3]. Схожі результати для гауссових процесів, визначених на компакті, містяться у роботі [4]. Козаченко [5] узагальнив результати Дадлі для випадкових процесів, що належать до просторів Орліча (див. також [1, 6]).

2 Означення та попередні результати

Означення 2.1. ([7]) Випадковий комплексний процесс $X_\alpha = (X_\alpha(t),\, t \in \mathbb{R})$ називається власним комплексним випадковим процесом, якщо псевдокореляційна функція цього процесу дорівнює нулю:

$$\mathsf{E}X_\alpha(t)X_\alpha(t+\tau) = 0,$$

тобто, коли виконуються умови:

$$\mathsf{E}X_c(t)X_c(t+\tau) = \mathsf{E}X_s(t)X_s(t+\tau),$$

$$\mathsf{E}X_c(t)X_s(t+\tau) = -\mathsf{E}X_s(t)X_c(t+\tau).$$

Означення 2.2. ([8]) Функція $r(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, називається стійкою кореляційною функцією, якщо

$$r(\tau) = \sigma^2 \exp\left\{-c|\tau|^\alpha \left(1 + i\beta \frac{\tau}{|\tau|}\omega(\tau,\alpha)\right)\right\}, \tag{1}$$

де $\alpha \in (0,2]$, $|\beta| \leqslant 1$, $c > 0$, $\sigma^2 > 0$ та

$$\omega(\tau,\alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}, & \text{якщо } \alpha \neq 1; \\ \frac{2}{\pi}\ln|\tau|, & \text{якщо } \alpha = 1. \end{cases}$$

Означення 2.3. Стаціонарний власний комплексний випадковий процес називається власним стаціонарним комплексним випадковим процесом зі стійкою кореляційною функцією, якщо

$$\mathsf{E}\overline{X}_\alpha(t)X_\alpha(t+\tau) = r(\tau),$$

де функція $r(\tau)$ задана (1).

Означення 2.4. ([1]) Функцію $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називають $\mathbb{C}$–функцією, якщо U — опукла, монотонно зростаюча при $x > 0$, парна, неперервна, а також $U(0) = 0$.

За означенням, $\mathbb{C}$–функція $U(x)$, $x \geqslant 0$, має обернену функцію ([1]).

Означення 2.5. ([1]) Нехай U — довільна $\mathbb{C}$–функція. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називається сім'я випадкових величин, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа $r_\xi > 0$, що

$$\mathsf{E}\,U\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty.$$

Цей простір є простором Банаха з нормою

$$\|\xi\|_U = \inf\left\{r > 0 : \mathsf{E}\,U\left(\frac{\xi}{r}\right) \leqslant 1\right\}.$$

Означення 2.6. ([1]) Метрична масивність $N_{(\mathbb{T},\,\rho)}(u) := N(u)$ — це мінімальна кількість замкнених куль (визначених відповідно до метрики ρ) радіусу u, якими можна покрити простір $\mathbb{T}$.

Означення 2.7. ([1]) $\mathbb{C}$–функція U задовольняє Δ^2–умові, якщо $U \sim U^2$, тобто $\exists\, x_0 \geqslant 0$, $\exists L > 1$ $\forall x \geqslant x_0$:

$$U^2(x) \leqslant U(Lx). \tag{2}$$

Розглянемо простір $\mathbb{T} = [0, T], T > 0$, у якому введемо метрику

$$\rho(t,s) = |t-s|, \quad t,s \in \mathbb{T}.$$

Нехай $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — $\mathbb{C}$–функція, що задовольняє Δ^2–умові. Відповідний простір $L_U(\Omega)$ є простором Орліча з нормою $\|\cdot\|_U$.

Розглянемо стохастичний процес $X = (X(t),\, t \in \mathbb{T})$ з $L_U(\Omega)$–приростами. Тоді

$$\rho_X(t,s) = \|X(t) - X(s)\|_U, \qquad t,s \in \mathbb{T},$$

є псевдометрикою, породженою процесом X. Припустимо, що процес X є сепарабельним на $(\mathbb{T},\, \rho)$.

Покладемо $N(u)$ — метрична масивність простору $(\mathbb{T},\, \rho)$. Нехай $\sigma(u)$, $u > 0$, є деякою неперервною функцією такою, що $\sigma(u) \to 0$ при $u \to 0$. Введемо умову на псевдометрику ρ_X:

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant u} \|X(t) - X(s)\|_U \leqslant \sigma(u), \quad \forall u > 0.$$

Оскільки $\mathbb{T} = [0, T]$, то за означенням 2.6 маємо, що

$$\frac{T}{2u} \leqslant N(u) \leqslant \frac{T}{2u} + 1.$$

Тому для $\sigma^{(-1)}(p)$ — оберненої функції до $\sigma(u)$, виконується нерівність:

$$N_{(\mathbb{T},\,\rho_X)}(p) \leqslant \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(p)} + 1.$$

Теорема 2.1. ([6]) *Покладемо*

$$f(\sigma(u)) = \int_0^{\sigma(u)} U^{(-1)}\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(p)} + 1\right)dp =$$

$$= [p = \sigma(t)] = \int_0^u U^{(-1)}\left(\frac{T}{2t} + 1\right)d\sigma(t),\ u > 0;$$

$z_0 = \max\{x_0, L\}$, де x_0 та L — константи з означення 2.7; а також $u_* = \sigma^{(-1)}(T)$. Тоді існують функції $C(\sigma(u))$, $u \in (0, u_*)$, і $C_1(u)$, $u \in (0,T)$, такі, що $C(\sigma(u)) > 0$ $\forall u \in (0, u_*)$, $C_1(u) > 0$ $\forall u \in (0,T)$, $C_1(u) \to 0$ при $u \to 0$, та $\forall x \geqslant z_0$ $\forall u \in (0, u_*)$ має місце нерівність:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\0<|t-s|\leqslant u}}\frac{|X(t)-X(s)|}{C(\sigma(u))f(\sigma(|t-s|))}>x\right\}\leqslant\frac{C_1(u)}{U(x)}.$$

Для u таких, що $N(u)>U(z_0)$: $C_1(u)\leqslant 3+\sqrt{2}$ і $C(\sigma(u))\leqslant 3L(5+4L)$. Більше того,

$$\limsup_{u\downarrow 0}\frac{\Delta(X;u)}{3L(5+4L)z_0 f(\sigma(u))}\leqslant 1$$

майже напевно, де

$$\Delta(X;u)=\sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\0<|t-s|\leqslant u}}|X(t)-X(s)|.$$

3 Основні результати

Нехай ξ — гауссова випадкова величина з нульовим математичним сподіванням та дисперсією σ^2.

Теорема 3.1. *Випадкова величина $\xi\sim N(0,\sigma^2)$ належить простору Орліча $L_U(\Omega)$ з функцією $U(x)=\exp\left\{\frac{x^2}{2}\right\}-1$ та нормою $\|\xi\|_U=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma$.*

Доведення. Оскільки $U(x)=\exp\left\{\frac{x^2}{2}\right\}-1$, то

$$\mathsf{E}\,U\left(\frac{\xi}{r}\right)=\mathsf{E}\exp\left\{\frac{\xi^2}{2r^2}\right\}-1$$

для довільного $r>\sigma$. Маємо, що

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{\xi^2}{2r^2}\right\}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{x^2}{2r^2}\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}dx=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{r^2-\sigma^2}{r^2\sigma^2}\right\}dx=$$
$$=\frac{\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{r^2\sigma^2}{r^2-\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{r^2\sigma^2}{r^2-\sigma^2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{r^2-\sigma^2}{r^2\sigma^2}\right\}dx=$$
$$=\sqrt{\frac{r^2}{r^2-\sigma^2}}.$$

Отже, ξ належить простору Орліча $L_U(\Omega)$ за означенням 2.5. Її норма:

$$\|\xi\|_U=\inf\left\{r>0:\mathsf{E}\exp\left\{\frac{\xi^2}{2r^2}\right\}\leqslant 2\right\}=$$
$$=\inf\left\{r>0:\sqrt{\frac{r^2}{r^2-\sigma^2}}\leqslant 2\right\}=$$
$$=\inf\left\{r>0:r\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma\right\}=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma.$$

□

Розглянемо $X_\alpha=(X_\alpha(t),\,t\in\mathbb{T})$ — стаціонарний гауссівський власний комплексний випадковий процес такий, що $X_\alpha(t)\sim N(0,\sigma^2)$ $\forall t\in\mathbb{T}$. У такому разі, відповідно до теореми 3.1, $X_\alpha(t)$ належить простору Орліча, що породжується функцією $U(x)=\exp\left\{\frac{x^2}{2}\right\}-1$, $x\in\mathbb{R}$. Ця $\mathbb{C}$–функція задовольняє Δ^2–умові з константою $L\geqslant\sqrt{2}$ (див. означення 2.7), причому при $L=\sqrt{2}$ умова виконується для довільного $x>0$. У відповідному просторі Орліча $L_U(\Omega)$ позначимо норму через $\|\cdot\|_U$.

Таким чином, функція

$$\rho_{X_\alpha}(t,s)=\|X_\alpha(t)-X_\alpha(s)\|_U,\quad t,s\in\mathbb{T},$$

є псевдометрикою, породженою процесом X_α. Припустимо, що процес X_α є сепарабельним на $(\mathbb{T},\rho)$. Оскільки $\forall t\in\mathbb{T}$ та $\forall\tau\in[-t,T-t]$:

$$\mathsf{E}X_\alpha(t)X_\alpha(t+\tau)=r(\tau)=\sigma^2\exp\{-c|\tau|^\alpha\},$$

то, використовуючи нерівність $1-e^{-x}\leqslant x$, $x\geqslant 0$, маємо $\forall t,s\in\mathbb{T}$:

$$\mathsf{E}(X_\alpha(t)-X_\alpha(s))^2=2r(0)-2r(|t-s|)=$$
$$=2\sigma^2(1-\exp\{-c|t-s|^\alpha\})\leqslant 2c\sigma^2|t-s|^\alpha.$$

Позначимо $\sigma_1(u)=2\sigma\sqrt{\frac{2c}{3}}u^{\alpha/2}$, $u>0$. Отже, згідно із теоремою 3.1, отримали умову на псевдометрику ρ_{X_α}: для довільного $u>0$

$$\sup_{|t-s|\leqslant u}\|X_\alpha(t)-X_\alpha(s)\|_U\leqslant 2\sigma\sqrt{\frac{2c}{3}}u^{\alpha/2}.\qquad(3)$$

Згідно із означенням метричної масивності $(N_{\rho_{X_\alpha}}(u))$ та оскільки $\sigma_1^{(-1)}(u)=\left(\frac{u}{2\sigma}\sqrt{\frac{3}{2c}}\right)^{2/\alpha}$ є оберненою функцією до $\sigma_1(u)$, то буде виконуватись нерівність:

$$N_{\rho_{X_\alpha}}(u)\leqslant 1+\frac{T}{2}\left(\frac{u}{2\sigma}\sqrt{\frac{3}{2c}}\right)^{-2/\alpha}.$$

Для функції $U(x) = \exp\left\{\frac{x^2}{2}\right\} - 1$, $x \in \mathbb{R}$, оберненою є $U^{(-1)}(y) = \sqrt{2\ln(y+1)}$, $y > 0$. Тому можемо оцінити значення функції

$$f(\sigma_1(u)) = \int_0^{\sigma_1(u)} U^{(-1)}\left(\frac{T}{2\sigma_1^{(-1)}(p)} + 1\right) dp =$$

$$= \int_0^{2\sigma\sqrt{\frac{2c}{3}}u^{\alpha/2}} \sqrt{2\ln\left(2 + \frac{T}{2}\cdot\left(\frac{p}{2\sigma}\sqrt{\frac{3}{2c}}\right)^{-2/\alpha}\right)} dp.$$

Для цього скористаємося нерівністю

$$\ln(1+t) = \frac{1}{\beta}\ln(1+t)^\beta \leqslant \frac{t^\beta}{\beta}, \tag{4}$$

що справджується для будь-якого $t > 0$ та $\beta \in (0,1)$. Маємо:

$$f(\sigma_1(u)) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\beta}} \int_0^{2\sigma\sqrt{\frac{2c}{3}}u^{\alpha/2}} \left(1 + \frac{T}{2}\cdot\left(\frac{p}{2\sigma}\sqrt{\frac{3}{2c}}\right)^{-2/\alpha}\right)^{\beta/2} dp,$$

де $\beta \in (0,1)$. Припустимо, що

$$1 + \frac{T}{2}\cdot\left(\frac{p}{2\sigma}\sqrt{\frac{3}{2c}}\right)^{-2/\alpha} \leqslant c_1(u)\cdot p^{-2/\alpha},$$

тобто $c_1(u) \geqslant p^{2/\alpha} + \frac{T}{2}\cdot\left(2\sigma\sqrt{\frac{2c}{3}}\right)^{2/\alpha}$. Оскільки $p \in \left(0, 2\sigma\sqrt{\frac{2c}{3}}u^{\alpha/2}\right)$, то попередня нерівність виконується при $c_1(u) = \left(u + \frac{T}{2}\right)\cdot\left(2\sigma\sqrt{\frac{2c}{3}}\right)^{2/\alpha}$.

Отже, за умови, що $\beta < \alpha$, має місце нерівність:

$$f(\sigma_1(u)) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\beta}} \int_0^{2\sigma\sqrt{\frac{2c}{3}}u^{\alpha/2}} \left(c_1(u)\cdot p^{-2/\alpha}\right)^{\beta/2} dp =$$

$$= \frac{4\alpha\sigma}{\alpha-\beta}\sqrt{\frac{c}{3\beta}}\left(u + \frac{T}{2}\right)^{\beta/2} u^{\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Таким чином, справджується наступна теорема.

Теорема 3.2. *Покладемо*

$$g_\alpha(u) = \frac{4\alpha\sigma}{\alpha-\beta}\sqrt{\frac{c}{3\beta}}\left(u + \frac{T}{2}\right)^{\beta/2} u^{\frac{\alpha-\beta}{2}}, \ u > 0,$$

де $c, \sigma > 0$, $\alpha \in (0,2]$ *та* $\beta \in (0, \min\{1,\alpha\})$. *Також нехай* $z_0 = \max\{x_0, L\}$, *де* x_0 *та* L *— константи з означення* 2.7, *а також* $u_* = \sigma_1^{(-1)}(T) = \left(\frac{T}{2\sigma}\sqrt{\frac{3}{2c}}\right)^{2/\alpha}$. *Тоді існують функції* $C(\sigma_1(u))$, $u \in (0, u_*)$, *і* $C_1(u)$, $u \in (0,T)$, *такі, що* $C(\sigma_1(u)) > 0$ $\forall u \in (0, u_*)$, $C_1(u) > 0$ $\forall u \in (0,T)$, $C_1(u) \to 0$ *при* $u \to 0$, *та* $\forall x \geqslant z_0$ $\forall u \in (0, u_*)$ *має місце нерівність:*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\0<|t-s|\leqslant u}} \frac{|X_\alpha(t) - X_\alpha(s)|}{C(\sigma_1(u))\, g_\alpha(|t-s|)} > x\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1(u)}{\exp\left\{\frac{x^2}{2}\right\} - 1}.$$

Більше того,

$$\limsup_{u\downarrow 0} \frac{\Delta(X_\alpha; u)}{3L(5+4L)z_0\, g_\alpha(u)} \leqslant 1$$

майже напевно, де

$$\Delta(X_\alpha; u) = \sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\0<|t-s|\leqslant u}} |X_\alpha(t) - X_\alpha(s)|.$$

Наслідок 1. *Оскільки* Δ^2*–умова виконується* $\forall x > 0$ *при* $L = \sqrt{2}$, *то у такому випадку* $z_0 = \sqrt{2}$ *і для будь-якого* $u < \frac{T}{2(e-2)} =: u_{**}$ *виконується нерівність* $N(u) > U(z_0)$. *Тоді* $\forall x \geqslant \sqrt{2}$ *та* $u \in (0, \min\{u_*, u_{**}\})$ *справджується нерівність:*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\0<|t-s|\leqslant u}} \frac{|X_\alpha(t) - X_\alpha(s)|}{3(8+5\sqrt{2})\, g_\alpha(|t-s|)} > x\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3+\sqrt{2}}{\exp\left\{\frac{x^2}{2}\right\} - 1}. \tag{5}$$

Більше того,

$$\limsup_{u\downarrow 0} \frac{\Delta(X_\alpha; u)}{6(5+4\sqrt{2})\, g_\alpha(u)} \leqslant 1$$

майже напевно, де

$$\Delta(X_\alpha; u) = \sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\0<|t-s|\leqslant u}} |X_\alpha(t) - X_\alpha(s)|.$$

Зауваження 1. *Значення правої частини нерівності* (5) *менше 1 при* $x > \sqrt{2\ln(4+\sqrt{2})}$.

Приклад 1. Нехай $T = 1$, $c = \frac{3}{2}$, $\sigma = \frac{1}{4}$ та $u = \frac{1}{2} \in \left(0, \min\left\{\sqrt[\alpha]{4}, \frac{1}{2(e-2)}\right\}\right)$. Якщо $\alpha \in (0,2)$, то нехай $\beta = \frac{\alpha}{2}$, та $\beta = \frac{1}{2}$, якщо $\alpha = 2$. Отже, згідно із наслідком 1 та зауваженням 1, у такому випадку $\forall x \geqslant \sqrt{2\ln(4+\sqrt{2})}$ має місце нерівність:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{\substack{t,s\in[0,1]\\ 0<|t-s|\leqslant\frac{1}{2}}} \frac{|X_\alpha(t)-X_\alpha(s)|}{3(8+5\sqrt{2})\,h_1(\alpha)} > x\right\} \leqslant \frac{3+\sqrt{2}}{e^{\frac{x^2}{2}}-1},$$

де $h_1(\alpha) = \frac{2^{1-\frac{\alpha}{4}}}{\sqrt{\alpha}}$, якщо $\alpha \in (0,2)$ та $h_1(2) = \frac{2^{3/4}}{3}$.

Якщо для $q \in (0,1)$:

$$\frac{3+\sqrt{2}}{e^{\frac{x^2}{2}}-1} = q \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt{2\ln\left(1+\frac{3+\sqrt{2}}{q}\right)},$$

то з імовірністю, більшою за $1-q$, справджується така оцінка $\forall\alpha \in (0,2]$:

$$\sup_{\substack{t,s\in[0,1]\\ 0<|t-s|\leqslant\frac{1}{2}}} |X_\alpha(t)-X_\alpha(s)| \leqslant 6(5+4\sqrt{2})\times$$

$$\times\sqrt{\ln\left(1+\frac{3+\sqrt{2}}{q}\right)}\cdot h_1(\alpha). \quad (6)$$

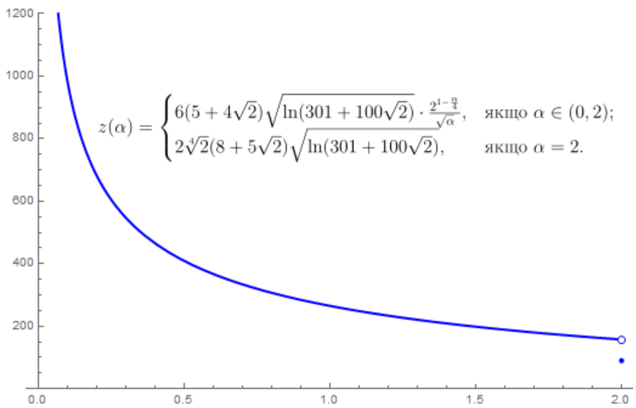

Рис. 1. Значення правої частини нерівності (6) в залежності від обраного α для $q = 0{,}01$

Приклад 2. Нехай $c = \frac{3}{2}$, $\sigma = \frac{1}{4}$ та $T = 2(1-u)$. У такому разі для будь-яких $x \geqslant \sqrt{2\ln(4+\sqrt{2})}$, $\alpha \in (0,2]$, $u \in \left(0, \frac{1}{e-1}\right)$ та $\beta \in (0,1)$ згідно із наслідком 1 та зауваженням 1 має місце нерівність:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{\substack{t,s\in[0,2(1-u)]\\ 0<|t-s|\leqslant u}} \frac{|X_\alpha(t)-X_\alpha(s)|}{h_3(\alpha,u,\beta)} > x\right\} \leqslant \frac{3+\sqrt{2}}{e^{\frac{x^2}{2}}-1},$$

де $h_3(\alpha,u,\beta) = \frac{3\alpha(5+4\sqrt{2})}{\sqrt{\beta(\alpha-\beta)}} u^{\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

Функцію $h_3(\alpha,u,\beta)$ можна мінімізувати по змінній β. З умови $\frac{\partial h_3(\alpha,u,\beta)}{\partial\beta} = 0$ маємо, що оптимальним є значення

$$\beta(\alpha,u) = \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2\ln u} - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - \frac{2\alpha}{\ln u} + \frac{9}{\ln^2 u}}.$$

Аналогічно до попереднього прикладу, $\forall q \in (0,1)$ наступна нерівність справджується $\forall\alpha \in (0,2]$ та $u \in \left(0, \frac{1}{e-1}\right)$ з імовірністю, більшою за $1-q$:

$$\sup_{\substack{t,s\in[0,2(1-u)]\\ 0<|t-s|\leqslant u}} |X_\alpha(t)-X_\alpha(s)| \leqslant 6(5+4\sqrt{2})\times$$

$$\times\sqrt{\ln\left(1+\frac{3+\sqrt{2}}{q}\right)}\cdot h_4(\alpha,u), \quad (7)$$

де $h_4(\alpha,u) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\beta(\alpha,u)(\alpha-\beta(\alpha,u))}} u^{\frac{\alpha-\beta(\alpha,u)}{2}}$, $\beta(\alpha,u) = \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2\ln u} - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - \frac{2\alpha}{\ln u} + \frac{9}{\ln^2 u}}$.

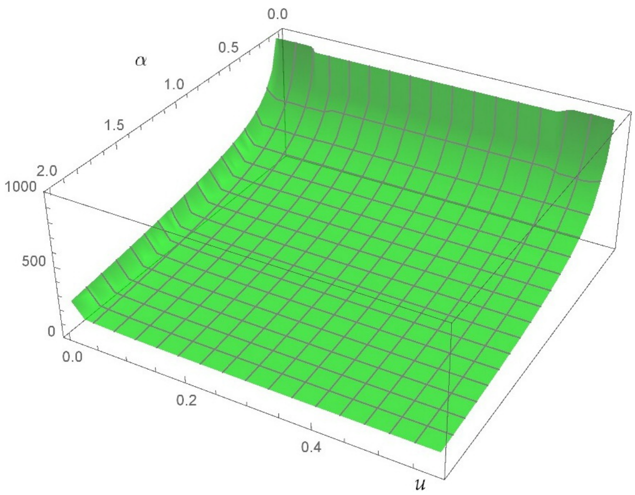

Рис. 2. Значення правої частини нерівності (7) в залежності від обраних α та u для $q = 0{,}01$

Висновки

У роботі проаналізовано оцінки розподілу деяких функціоналів для дійсних стаціонарних гауссових процесів. Зокрема, розглянуто зв'язок між траєкторіями стаціонарних гауссових власних комплексних випадкових процесів, що мають нульове математичне сподівання, та простором Орліча, що породжений функцією $U(x) = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$. Для розподілу напівнорм від гауссових власних комплексних випадкових процесів, визначених на компакті $\mathbb{T} = [0,T]$, отримано оцінки у просторах Гельдера.

Список використаних джерел

1. *Buldygin V.V.* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V.V. Buldygin, Yu.V. Kozachenko. — American Mathematical Society: Providence, RI, 2000. — 257 c.

2. *Kozachenko Yu.V.* Lipschitz conditions for stochastic processes in the Banach spaces $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ of random variables / Yu.V. Kozachenko, D.V. Zatula // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2015. — №91. — C. 43-60.

3. *Kozachenko Yu.V.* Estimates for distributions of Hölder semi-norms of random processes from $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ spaces, defined on the interval $[0,\infty)$ / Yu.V. Kozachenko, D.V. Zatula // Statistics, Optimization & Information Computing. — 2019. — №7 (1). — C. 198-210.

4. *Dudley R.M.* Sample functions of the Gaussian processes. / R.M. Dudley // The Annals of Probability. — 1973. — №1 (1). — C. 3-68.

5. *Козаченко Ю.В.* Случайные процессы в пространствах Орлича. I. / Ю.В. Козаченко // Теория вероятн. и матем. статист. — 1984. — №30. — C. 92-107.

6. *Затула Д.В.* Модулі неперервності випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин, визначених на інтервалі / Д.В. Затула // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. — 2013. — №2. — C. 23-28.

7. *Петранова М.Ю.* Власні комплексні випадкові процеси. / М.Ю. Петранова, Ю.В. Козаченко // Збірники наукових праць професорсько-викладацького складу ДонНУ імені Василя Стуса. — 2017.

8. *Козаченко Ю.В.* Дійсні стаціонарні гаусові процеси зі стійкими кореляційними функціями. / Ю.В. Козаченко, М.Ю. Петранова // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика». — 2017. — №2 (31). — C. 90-100.

References

1. BULDYGIN, V.V. and KOZACHENKO, I.V. (2000) *Metric characterization of random variables and random processes* (Vol. 188). American Mathematical Soc.

2. KOZACHENKO, Yu.V. and ZATULA, D.V. (2015) Lipschitz conditions for stochastic processes in the Banach spaces $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ of random variables. *Theory of Probability and Mathematical Statistics.* 91. pp.43-60.

3. KOZACHENKO, Yu.V. and ZATULA, D.V. (2019) Estimates for distributions of Hölder semi-norms of random processes from $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ spaces, defined on the interval $[0,\infty)$. *Statistics, Optimization & Information Computing.* 7 (1). pp.198-210.

4. DUDLEY, R.M. (1973) Sample functions of the Gaussian processes. *The Annals of Probability.* 1 (1). pp.3-68.

5. KOZACHENKO, Yu.V. (1985) Random processes in Orlicz spaces. I. *Theory of Probability and Mathematical Statistics.* 30. pp.103-117. (in Russian)

6. ZATULA, D.V. (2013) Modules of continuity of random processes from Orlicz spaces of random variables, defined on the interval. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* (2). pp.23-28.

7. PETRANOVA, M.Yu. and KOZACHENKO, Yu.V. (2017) Vlasni kompleksni vypadkovi procesy. *Zbirnyky naukovyx prac' profesors'ko-vykladac'koho skladu DonNU imeni Vasylya Stusa.*

8. KOZACHENKO, Yu.V. and PETRANOVA, M.Yu. (2017) Dijsni stacionarni hausovi procesy zi stijkymy korelyacijnymy funkciyamy. *Naukovyj visnyk Uzhhorods'koho universytetu. Seriya «Matematyka i informatyka».* 2 (31). pp.90-100.

Надійшла до редколегії 11.08.2019