

УДК 539.376

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.9>

Павлюк Я.В.¹, к.т.н., с.н.с.

Y.V. Pavlyuk¹, Ph. D.,

**Моделювання деформацій циклічної
повзучості нелінійно-в'язкопружних
матеріалів за допомогою функції
Хевісайда**

**Modelling of cyclic creep deformations of
nonlinear viscoelastic materials using
Heaviside function**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3,
e-mail:¹ creep@inmech.kiev.ua,

National Academy of Sciences of Ukraine
S.P.Timoshenko Institute of Mechanics, 03057,
Kyiv-57, P. Nesterov str., 3,
e-mail:¹ creep@inmech.kiev.ua,

Розглядається задача розрахунку деформацій циклічної повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів, що задається у вигляді циклічних чергувань навантажень та розвантажень рівної амплітуди за прямокутними циклами, при чому тривалість напівциклів навантаження та розвантаження співпадає. Програма навантаження реалізується у вигляді послідовності елементарних навантажень, що задається за допомогою одиничних функцій Хевісайда. Для опису процесу деформування використовується нелінійна модель повзучості з незалежною в часі нелінійністю типу моделі Работнова. Ядра спадковості задаються дробово-експоненційною функцією Работнова. В роботі розв'язано та експериментально апробовано задачу розрахунку деформацій циклічної повзучості для нейлонових волокон FM 10001.

Ключові слова: циклічна повзучість, нелінійна в'язкопружність, функція Хевісайда, ядро спадковості.

The problem of calculating the deformations of the cyclic creep of nonlinear viscoelastic materials is considered, which is given in the form of cyclic alternations of loads and unloadings of equal amplitude over rectangular cycles, where the duration of loading and unloading half-cycles coincide. The program of loading is realized in the form of sequence of elementary loadings set by means of unit functions of Heaviside. A nonlinear creep model with a time-independent nonlinearity of Yu. Rabotnov's model is used to describe the deformation process. The fractional-exponential function is used as the nucleus of heredity. The paper develops a nonlinear viscosity model with time-independent nonlinearity due to the use of instantaneous deformation diagrams as isochronous for zero time and smoothing cubic splines, as approximations of nonlinear instantaneous deformation diagrams that define the nonlinearity of the model. The concept of a single isochronous deformation diagram for the studied material is experimentally substantiated. A system of solution equations of nonlinear creep under cyclic loading is formulated. The problem of calculating the deformations of stationary and cyclic creep for nylon fibers FM 10001 is solved and experimentally tested.

Key words: cyclic creep, nonlinear viscoelasticity, Heaviside function, heredity kernel.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я.О.

Вступ. Надійна оцінка ресурсоспроможності та необхідність забезпечення працездатності відповідальних елементів сучасних конструкцій тісно пов'язані з удосконаленням методів розрахунку конструкцій внаслідок більш повного врахування властивостей матеріалів та шляхом наближення розрахункових методів до реальних процесів. Особливо актуальною є ця задача для в'язкопружних конструкційних матеріалів, деформування яких залежить як від часу, так і від історії навантаження. При цьому необхідно мати

на увазі, що у більшості практично важливих випадків (корпуси літальних апаратів, корпуси кораблів, трубопроводи, ємності високого тиску тощо) деформування в'язкопружних матеріалів є нелінійним і відбувається за змінних режимів навантаження, що вимагає врахування спадкових ефектів. Актуальними лишаються питання вибору та обґрунтування структури нелінійної моделі, вибору структури ядра спадковості та практичної реалізації методики визначення параметрів ядра, а також питання їх експериментальної апробації.

Фактично нерозв'язаними залишаються задачі розрахунку деформацій повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов нестаціонарного навантаження.

1. Постановка задачі

Визначальне рівняння в нелінійній теорії в'язкопружності із незалежною від часу нелінійністю задається співвідношенням [1]

$$\varphi_0(\varepsilon(t)) = \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (1)$$

де $\varepsilon(t)$ – повна деформація, що містить пружну компоненту ε^e і компоненту повзучості ε^c в моменти часу t і τ ; $\varphi_0(\cdot)$ – функція, що задає діаграму миттєвого деформування і визначається експериментально; λ – реологічний параметр ($\lambda > 0$); $K(t-\tau)$ – ядро повзучості.

Нелінійність процесу повзучості задана рівнянням (1) визначається видом функції $\varphi_0(\cdot)$, котра в роботі задається за допомогою згладжуючих кубічних сплайнів виду

$$\varphi_0(\varepsilon_e) = a_{0,j} + a_{1,j}\varepsilon_e + a_{2,j}\varepsilon_e^2 + a_{3,j}\varepsilon_e^3, j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

де $a_{0,j}; a_{1,j}; a_{2,j}; a_{3,j}$ – коефіцієнти сплайну, що мають розмірність напруження і залежать від інтервалу розподілу осі деформацій.

Ядро спадковості $K(t-\tau)$ задається дробово-експоненційною функцією, так що

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (3)$$

де α, β – параметри ядер, що підлягають визначенню із експерименту ($-1 < \alpha < 0$; $\beta > 0$).

Використовуючи процедуру обернення функцій, визначальне рівняння (1) запишемо у формі

$$\varepsilon(t) = \psi_0 \left[\sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right] \quad (4)$$

де $\psi_0(\cdot) = \varphi_0^{-1}(\cdot)$ – обернення функції $\varphi_0(\cdot)$, яке задається співвідношенням

$$\varphi_0(\sigma) = b_{0,j} + b_{1,j}\sigma + b_{2,j}\sigma^2 + b_{3,j}\sigma^3; j = \overline{1, n} \quad (5)$$

де $b_{0,j}, b_{1,j}, b_{2,j}, b_{3,j}$ – коефіцієнти сплайну, що апроксимують обернену функцію $\varphi_0^{-1}(\cdot)$.

Довільний закон зміни напружень σ_t в момент навантаження τ задається у вигляді суми множин різних значень сталих напружень σ_k

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (h(t-\tau_k) - h(t-\tau_{k+1})) \sigma_k \quad (6)$$

де $h(\cdot)$ – одинична функція Хевісайда, що має розрив першого роду за умови $t = \tau$; t – момент спостереження ($t \geq \tau$).

У роботі в рамках рівняння (4) розв'язується задача розрахунку деформацій циклічної повзучості для нейлонових волокон FM 10001. Результати розрахунків зіставляються з експериментальними даними запозиченими з [2].

Задача включає експериментальне обґрунтування гіпотези існування єдиної ізохронної діаграми, визначення параметрів входять у визначальне рівняння і експериментальну апробацію моделі на прикладі розрахунку деформацій стаціонарної та циклічної повзучості.

2. Обґрунтування існування єдиної ізохронної діаграми деформування

Визначальні рівняння моделі в'язкопружності побудовано за умови існування єдиної ізохронної діаграми деформування, що відображає подібність ізохронних діаграм повзучості і діаграми миттєвого деформування. Нелінійність моделі визначається нелінійністю діаграми миттєвого деформування і не залежить від часу. Існування єдиної ізохронної діаграми обґрунтовується експериментально. Єдина ізохронна діаграма деформування відображає подібність ізохронних діаграм повзучості $\varphi_t(\varepsilon)$ і діаграми миттєвого деформування $\varphi_0(\varepsilon)$. Подібність діаграм $\varphi_t(\varepsilon)$ і $\varphi_0(\varepsilon)$ встановлюється у площині « $\varphi - \varepsilon$ » для кожного із фіксованих рівнів деформацій ε_i в інтервалі $i = \overline{1, q}$ по параметру t_j в інтервалі $j = \overline{1, \ell}$. У цьому випадку умова подібності j -ої ізохронної діаграми повзучості $\varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j)$ і діаграми миттєвого деформування $\varphi_0(\varepsilon_i, 0)$ записується у вигляді

$$\varphi_0(\varepsilon_i, 0) = (1 + G(t_j)) \varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j) \quad (7)$$

де $(1 + G(t_j))$ – функція подібності, що визначається для кожної j -ї ізохронної діаграми повзучості; функції $\varphi_0(\cdot)$ і $\varphi_t(\cdot)$ задають величини напруження σ_i по діаграмі миттєвого деформування і ізохронних діаграмах повзучості відповідно для кожного з моментів часу t_j .

Величина $\overline{1 + G(t_j)}$ визначається із співвідношення

$$\overline{1+G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^q \{\varphi_0(\varepsilon_i, 0) \cdot \varphi_i(\varepsilon_i, t_j)\}}{\sum_{i=1}^q \{\varphi_i(\varepsilon_i, t_j)\}^2} \quad (8)$$

яке усереднює функції подібності $(1+G(t_j))$, знайдені для кожної j -ої ізохронної діаграми повзучості, і дозволяє розрахувати дискретні значення функції подібності і відповідно дискретні значення приведених ізохронних діаграм повзучості.

В умові подібності (8) функцію подібності $(1+G(t_j))$ замінимо на її осереднене значення $\overline{1+G(t_j)}$ і для визначення приведених дискретних значень $\overline{\varphi_i(\varepsilon_i, 0)}$ ізохронних діаграм повзучості отримаємо співвідношення

$$\overline{\varphi_i(\varepsilon_i, 0)} = (\overline{1+G(t_j)}) \varphi_i(\varepsilon_i(t), t_j). \quad (9)$$

Вважається, що єдина ізохронна діаграма обгрунтована з похибкою δ , якщо приведені ізохронні діаграми повзучості не виходять за межі інтервалу, обмеженого цією величиною по відношенню до діаграми миттєвого деформування. З достатньою для практичних розрахунків точністю величина δ може бути прийнята рівною $\pm 5\%$.

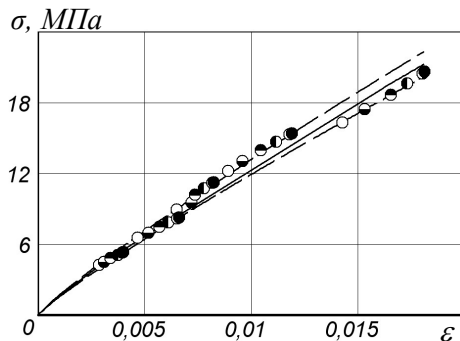


Рис.1 Обгрунтування гіпотези існування єдиної ізохронної діаграми деформування

Результати експериментального обгрунтування концепції єдиної ізохронної діаграми деформування для нейлонових волокон FM 10001 наведено на рис.1. Видно, що приведені ізохронні діаграми повзучості (точки) не виходять за межі інтервалу $\pm 5\%$ (штрихові лінії) від діаграми миттєвого деформування (суцільні лінії). Це свідчить, що гіпотеза єдиної ізохронної діаграми деформування обгрунтована з похибкою $\delta = 10\%$.

3. Визначення параметрів моделі

Значення параметрів ядер спадковості визначаються за результатами апроксимації дискретних значень ядер повзучості дробово-експоненційною функцією (3) за методикою

викладеною в [1]. Значення параметрів ядра α , β , λ , наведено в таблиці 1.

4. Повзучість за умов стаціонарного навантаження

Умова навантаження постійними у часі

Таблиця 1

Значення параметрів ядер спадковості для нейлонових волокон FM 10001

α	β , год ^{-(1+α)}	λ , год ^{-(1+α)}
-0,555	0,662	0,873

напруженнями при варіюванні величини напруження σ_k задається співвідношенням

$$\sigma(t) = h(t) \sigma_k; \quad k = \overline{1, m}, \quad (10)$$

що отримується із (6) при умові $t_{k+1} > t$.

Визначальне рівняння повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умови постійних напружень, на основі (4) з урахуванням (10), записується у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & b_{0,j} + b_{1,j} \cdot h(t) \sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) + \\ & + b_{2,j} \cdot h(t) \sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right)^2 + \\ & + b_{3,j} \cdot h(t) \sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right)^3, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (11)$$

де коефіцієнти $b_{0,j}$, $b_{1,j}$, $b_{2,j}$, $b_{3,j}$ визначаються за результатами апроксимації функції $\psi_0(\cdot)$ згладжуючим кубічним сплайном (5).

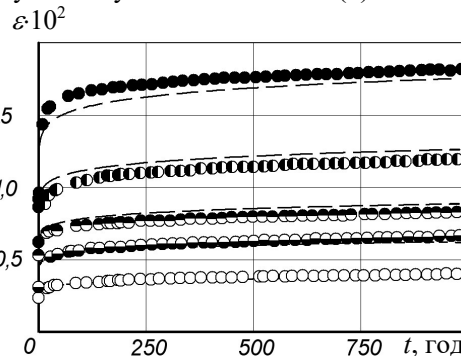


Рис.2 Значення деформацій стаціонарної повзучості нейлонових волокон FM10001

У режимі стаціонарного навантаження (10) на підставі рівняння (11) розраховано та експериментально апробовано деформації повзучості нейлонових волокон FM 10001 для декількох рівнів постійних напружень $\sigma_k = 3,2$ (○), 4,96 (⊖), 17,23 (⊕), 6,77 (⦿), 9,27 (●) МПа. Результати розрахунків наведені на рис.2 штриховими лініями, а експериментальні дані нанесені точками.

5. Циклічна повзучість

У роботі розглядається режим із циклічним чергуванням навантажень та розвантажень за прямокутними циклами.

Умова навантаження (6) конкретизується у цьому випадку у вигляді

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^{\nu} (h(t - 2(k-1)t_0) - h(t - (2k-1)t_0)) \sigma_1, \quad (12)$$

де σ_0 – амплітуда напруження у циклі;
 t_0 – тривалість напівциклу навантаження;
 ν – кількість циклів навантаження. У (12) також прийнято, що тривалість напівциклів навантаження та розвантаження співпадають.

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^3 b_{i,j} \left\{ \sum_{k=1}^{\nu} h[t - 2(k-1)t_0] \left(1 + \lambda \int_0^{t-2(k-1)t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (\tau)^{\alpha+(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]} d\tau \right) - \right. \\ \left. - h[t - (2k-1)t_0] \left(1 + \lambda \int_0^{t-2(k-1)t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (\tau)^{\alpha+(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]} d\tau \right) \right\}^i, \quad (13)$$

У режимі циклічного навантаження (12) на підставі рівняння (13), розраховано та експериментально апробовано деформації повзучості нейлонових волокон FM10001 при напруженнях: $\sigma_0 = 6,2$ (○) та $\sigma_0 = 12,4$ (●) МПа, $t_0 = 1$ година, $\nu = 4$. Результати розрахунків наведені на рис.3 штриховими лініями, а експериментальні дані нанесені точками.

Висновки

Як видно з рис.2 і 3 отримано задовільне узгодження між розрахунковими й експериментальними даними. Встановлено, що в процесі циклічного навантаження (рис.3), з'являються деформації післядії, що не встигають зникнути за напівцикл розвантаження, і накопичуються із кожним циклом. Цей ефект збільшується у випадку нелінійно-в'язкопружних матеріалів. Структура запропонованої моделі дозволяє

якісно враховувати цей ефект, що підтверджується на графіках результатами розрахунків.

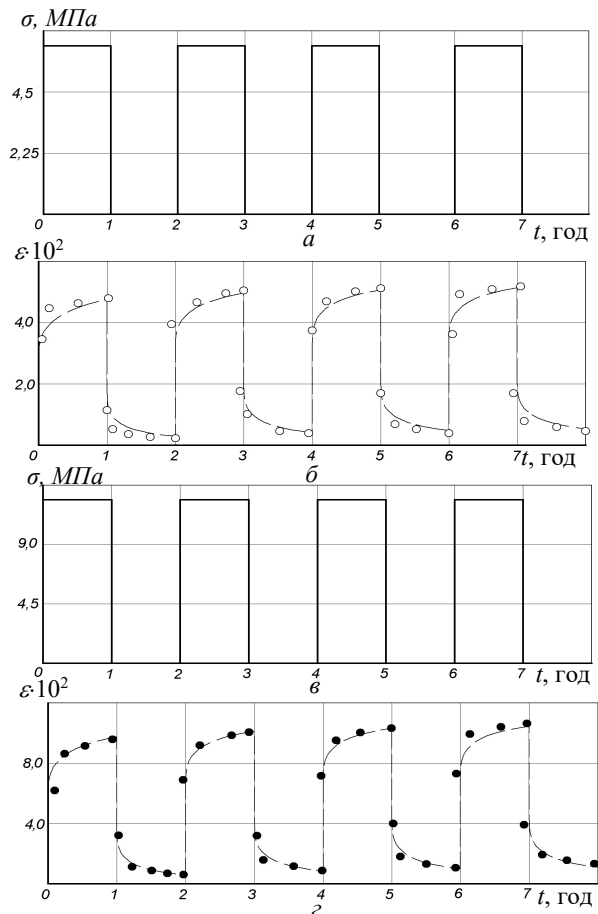


Рис.3 Програма навантаження (а,б) та розрахункові (лінії) і експериментальні (точки) значення деформацій повзучості (б,ε) значення кривих повзучості нейлонових волокон FM10001

Список використаних джерел

1. Golub V.P. Determining Parameters of Fractional–Exponential Heredity Kernels of Nonlinear Viscoelastic Materials / V.P. Golub, Y.V. Pavlyuk, P.V. Fernati // *Int Appl Mech*, 2017. – Vol.53, P.419–433. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0826-2>
2. Marin J. Creep-time relations for nylon in tension, compression, bending, and torsion / J. Marin, A.C. Webber, G.F. Weissmann // *Proc. ASTM.*-1954.- Vol. 54, pp.1313-1343.

References

- 1.GOLUB, V.P. and PAVLYUK, Y.V. and FERNATI, P.V. (2017) Determining Parameters of Fractional–Exponential Heredity Kernels of Nonlinear Viscoelastic Materials. *Int Appl Mech*, 53(4). P.419–433. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0826-2>
- 2.MARIN, J., WEBBER A.C. and WEISSMANN G.F. (1954) Creep–time relations for nylon in tension, compression, bending, and torsion. *Proc. ASTM*. 1954. Vol. 54. P. 1313–1343.

Надійшла до редколегії 29.08.2021