Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки **2018, 3** *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics*

УДК 512.643.8

О.А. Тилищак, *к. ф.-м. н., доцент*

Про незвідність мономіальних матриць 7-го порядку над локальними кільцями

Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, пл. Народна, 3,
e-mail: alxtlk@gmail.com

O.A. Tylyshchak, *Ph.D, Associate Professor*

On irreducibility of monomial $7 \times 7-$matrix over local ring

Uzhhorod National University, 88000, Uzhhorod, Narodna Square, 3,
e-mail: alxtlk@gmail.com

Розглядається квадратна мономіальна матриця, що відповідає циклічній підстановці довжини порядку матриці. Ненульові елементи непорожньої множини перших стовпчиків є одиниці а непорожньої множини решти — фіксований ненульовий твірний елемент радикалу Джекобсона комутативного локального кільця. Відомо, що така матриця порядку менше 7 незвідна тоді і тільки тоді, коли кількість одиниць взаємно проста з порядком матриці. Показано, що матриця 7-го порядку незвідна, якщо ступінь нільпотентності радикала вище 2.

Ключові слова: мономіальна матриця, незвідна матриця, матриця порядку 7, локальне кільце, кільце головних ідеалів, радикал Джекобсона.

We consider a monomial $n \times n$-matrix, which corresponds to a cyclic permutation of the length n, over a commutative local principle ideals ring. Non-zero elements of a non-empty set of first columns of the matrix are identity element of the ring and non-zero elements of non-empty set of the rest columns are a fixed non-zero generator element of the Jacobson radical of the ring. It is known if number of identities or number of generator elements is exact 1 or if $n < 7$ and number of identities is relatively prime to n, then the matrix is irreducible. If the number of identities is not relatively prime to n, then the matrix is reducible. If the Jacobson radical of the ring is nilpotent of degree 2, then the 7×7-matrix of considered form with 3 or 4 identities is reducible. It has been shown that the 7×7-matrix is irreducible if the degree of nilpotency of the Jacobson radical of the ring is higher than 2. Some necessary conditions of reducibility of this square matrix of arbitrary size are also established.

Key Words: monomial matrix, irreducible matrix, 7×7-matrix, local ring, principle ideal ring, Jacobson radical.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Бондаренко В.М.

1 Вступ

Задача про опис, з точністю до подібності, матриць над комутативним кільцем, що не є полем, містить в собі нерозв'язну задачу лінійної алгебри про пару матриць над полем вже для локальних кілець головних ідеалів. Для кілець з нільпотентним радикалом це вперше доведено в 1976 р. В.М. Бондаренком [1]. В таких випадках стає актуальною задача досліджень, з точністю до подібності, матриць спеціального вигляду і, зокрема, побудови серій незвідних чи нерозкладних матриць такого вигляду.

Далі через K будемо позначати комутативне локальне кільце, радикал Джекобсона якого $tK \neq 0$ $(t \in K)$. Нехай k і n натуральні числа, $k < n$. Розглянемо мономіальну матрицю порядку n над кільцем K вигляду:

$$M(t,k,n) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 & \dots & 0}^{k} & 0 & \dots & 0 & t \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & t & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

З результатів досліджень П. М. Гудивка та автора [2] випливає наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай K — комутативне локальне кільце, радикал Джекобсона якого $tK \neq 0$ $(t \in K)$. Матриці $M(t,1,n)$, $M(t,n-1,n)$ порядку $n > 1$ незвідні над кільцем K.*

Було показано [3], що для $(n,k) > 1$ матриця $M(t,k,n)$ звідна над кільцем K, а для $n < 7$, $(n,k) = 1$ матриця $M(t,k,n)$ незвідна. Якщо $t^2 = 0$ в [3, 4] показано, що матриці $M(t,3,7)$, $M(t,4,7)$ звідні. Якщо $t^2 \neq 0$ в роботі показано, що всі матриці $M(t,k,7)$ незвідні.

2 Про звідність матриць $M(t,k,n)$

Через K^* будемо позначати мультиплікативну групу кільця K а $\overline{M} = |m_{ij} + tK|$ — матрицю над полем K/tK отриману з матриці $M = |m_{ij}|$ над кільцем K редукцією за модулем tK.

Теорема 2. *Нехай n і k натуральні числа, $k < n$, K — комутативне локальне кільце, радикал Джекобсона якого $tK \neq 0$ $(t \in K)$. Якщо матриця $M(t,k,n)$ подібна (над K) до матриці $N = \left(\begin{smallmatrix} D & B \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$, де D — квадратна матриця порядку m $(0 < m < n)$, тоді D подібна (над K) до*

$$\begin{pmatrix} \overbrace{0 & \dots & 0}^{k'} & td_{1,k'+1} & \dots & td_{1m} \\ 1 & \dots & 0 & td_{2,k'+1} & \dots & td_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & td_{k'+1,k'+1} & \dots & td_{k'+1,m} \\ 0 & \dots & 0 & td_{k'+2,k'+1} & \dots & td_{k'+2,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & td_{n,k'+1} & \dots & td_{mm} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

для деякого k' $(0 < k' < k)$.

Доведення. З подібності матриць $M(t,k,n)$ та N над K одержимо подібність над полем K/tK

$$\begin{pmatrix} J_{0,k+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{M(t,k,n)} \sim \begin{pmatrix} \overline{D} & \overline{B} \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

де $J(\lambda, r)$ — Жорданова клітка порядку r з власним значенням λ над полем K/tK. Нехай φ — лінійний оператор скінченно вимірного лінійного простору L над полем K/tK з матрицею $\overline{M(t,k,n)}$ в деякому базисі $\{a_1, \dots, a_n\}$. Тоді $\mathrm{Imm}\varphi$ має базис $\{a_2, \dots, a_{k+1}\}$, $\mathrm{Ker}\varphi$ має базис $\{a_{k+1}, \dots, a_n\}$ і $\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Imm}\varphi$ має базис $\{a_{k+1}\}$,

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Imm}\varphi) = 1. \qquad (4)$$

З (3) випливає, що φ є лінійний оператор підпростору L' простіру L над полем K/tK, що має матрицю $\overline{D}$ в деякому базисі $\{a'_1, \dots, a'_{k'}\}$ підпростору L'. Очевидно, $\overline{M(t,k,n)}$, φ і $\overline{D}$ нільпотентні. Тоді можна вважати, що $\overline{D}$ блочно діагональна матриця з Жордановими клітками на головній діагоналі з всіма нульовими власними значеннями. Якщо $\overline{D}$ має принаймні дві Жорданові клітки порядку більше 1, тоді

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} J_{0,k'+1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{0,k''+1} & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

для деяких натуральних чисел k', k''. Але $a'_{k'+1}$, $a'_{k'+k''+2} \in \mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Imm}\varphi$ і $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Imm}\varphi) \geqslant 2$, що суперечить (4).

З [4, лема 1, ст. 181] випливає, що $\overline{D}$ ненульова матриця і $\overline{D}$ має рівно одну Жорданову клітку порядку вище 1. Можна вважати, що $\overline{D} = \left(\begin{smallmatrix} J_{0,k'+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ для деякого натурального k'. Очевидно, $k' = \mathrm{rank}\overline{D} \leqslant \mathrm{rank}\overline{M(t,k,n)} = k$. Якщо $k' = k$, тоді $\mathrm{rank}\overline{D} = \mathrm{rank}\overline{M(t,k,n)}$ і з (3) $\overline{A} = 0$. Що неможливо. Отже, $0 < k' < k$.

Нехай $e_1, \dots, e_m$ — відповідні стовпчики одиничної матриці E_m. $e'_1 = e_1$, $e'_2 = De'_1$, …, $e'_{k'+1} = De'_{k'}$, $e'_{k'+2} = e_{k'+2}$, … $e'_m = e_m$. Але $\overline{e'_2} = \overline{De_1} = \overline{e_2}$, … $\overline{e'_{k'+1}} = \overline{De_{k'}} = \overline{e_{k'+1}}$. Отже, $\overline{e'_1} = \overline{e_1}$, …, $\overline{e'_m} = \overline{e_m}$ і $\det \overline{(e'_1 \dots e'_m)} = \det \overline{(e_1 \dots e_m)} = \det \overline{E_m} = 1$. Оскільки кільце K локальне, то матриця $C = (e'_1 \dots e'_m)$ має оборотній детермінант і C оборотня над K.

Розглянемо $D' = C^{-1}DC = C^{-1}D \times (e'_1 \dots e'_m) = C^{-1}(De'_1 \dots De'_m) = C^{-1}(e'_2 \dots e'_{k'+1} De'_{k'+1} \dots De'_m) = (C^{-1}e'_2 \dots C^{-1}e'_{k'+1} C^{-1}De'_{k'+1} \dots C^{-1}De'_m) = (e_2 \dots e_{k'+1} C^{-1}De'_{k'+1} \dots C^{-1}De'_m)$. Очевидно, $\overline{C} = \overline{E_m}$ і $\overline{D'} = \overline{C^{-1}DC} = \overline{D} = (\overline{e_2} \dots \overline{e_{k'+1}}\, 0 \dots 0)$. Тоді D подібна до D', що має форму (2). □

Наслідок 1. *Нехай n і k натуральні числа, $k < n$, K — комутативне локальне кільце, радикал Джекобсона якого $tK \neq 0$ $(t \in K)$. Якщо матриця $M(t,k,n)$ звідна над K, тоді $M(t,k,n)$ подібна (над K) до матриці $\left(\begin{smallmatrix} D & B \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$, де D — квадратна матриця порядку m $(2 \leqslant m \leqslant \frac{n}{2})$.*

Доведення. Із звідності над K матриці $M(t,k,n)$ одержимо, що матриця $M(t,k,n)$ подібна (над K) до матриці $N = \left(\begin{smallmatrix} D & B \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$, де D — квадратна матриця порядку m $(0 < m < n)$. Очевидно, перестановкою рядків і тою ж перестановкою стовпчиків матриця $M(t,k,n)^T$ зводиться до $M(t,k,n)$. Тобто $M(t,k,n)^T$ подібна до $M(t,k,n)$. Але маємо також подібність

$$N^T = \begin{pmatrix} D^T & 0 \\ B^T & A^T \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A^T & B^T \\ 0 & D^T \end{pmatrix}.$$

Тобто, можна вважати, що $m \leqslant n - m$, або $m \leqslant \frac{n}{2}$. За теоремою 2 для деякого натурального числа k' $k' + 1 \leqslant m$. Тоді $2 \leqslant m$. □

3 Незвідність матриць $M(t,k,7)$

Нехай далі K — комутативне локальне кільце, радикал Джекобсона якого tK ($t \in K$, $t^2 \neq 0$). Покажемо незвідність матриць $M(t,k,7)$.

Лема 1. *Матриця* $M(t,k,7)$ $(1<k<6)$ *не є подібна над* K *до матриці вигляду*

$$N = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & td_{12} & \\ 1 & td_{22} & B \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & A \end{array} \right).$$

Доведення. Якщо $d_{12} \in tK$, то $d_{12} = td'_{12}$ ($d'_{12} \in K$) і маємо подібність над K

$$\begin{pmatrix} 0 & td_{12} \\ 1 & td_{22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} td_{22} & t^2d'_{12} + t^2d_{22}^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді над кільцем K/t^2K матриця $M(t,k,7)$ подібна матриці з нульовим стовпчиком, який зміною порядку стовпчиків і відповідною зміною порядку рядків можна змістити на перше положення. Це суперечить теоремі 2.

Нехай тепер $d_{12} \in K^*$ і для деякої оборотньої матриці $C = (c_{ij})$ порядку n над K

$$M(t,k,7)C = CN. \qquad (5)$$

Без втрати загальності, можна вважати, що $t^3 = 0$. Позначимо через $(5)_{[i,j]}$ скалярну рівність $(M(t,2,7)C)_{ij} = (CN)_{ij}$. Тоді

$$\begin{array}{rr} (5)_{[1,1]}: & tc_{n1} = c_{12}, \\ (5)_{[2,1]}: & c_{11} = c_{22}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (5)_{[k+1,1]}: & c_{k1} = c_{k+1,2}, \\ (5)_{[k+2,1]}: & tc_{k+1,1} = c_{k+2,2}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (5)_{[n,1]}: & tc_{n-1,1} = c_{n2}. \end{array}$$

Таким чином $\overline{c_{12}} = \overline{c_{k+2,2}} = \cdots = \overline{c_{n2}} = 0$.

$$\begin{array}{rr} (5)_{[1,2]}: & tc_{n2} = tc_{11}d_{12} + tc_{12}d_{22}, \\ (5)_{[2,2]}: & c_{12} = tc_{21}d_{12} + tc_{22}d_{22}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (5)_{[k+1,2]}: & c_{k2} = tc_{k+1,1}d_{12} + tc_{k+1,2}d_{22}, \\ (5)_{[k+2,2]}: & tc_{k+1,2} = tc_{k+2,1}d_{12} + tc_{k+2,2}d_{22}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (5)_{[n,2]}: & tc_{n-1,2} = tc_{n1}d_{12} + tc_{n2}d_{22}. \end{array}$$

Отже, $\overline{c_{12}} = \cdots = \overline{c_{k2}} = \overline{c_{k+2,2}} = \cdots = \overline{c_{n2}} = 0$. В силу оборотності детермінанта матриці $\overline{C}$ $c_{k+1,2} = c_{k1} \in K^*$.

Підставляючи $(5)_{[i,1]}$ в $(5)_{[i,2]}$ при $k=2$ одержимо:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_{11} &=& tc_{31}d_{12} + tc_{21}d_{22}, \\ tc_{21} &=& tc_{41}d_{12} + t^2c_{31}d_{22}, \\ t^2c_{31} &=& tc_{51}d_{12} + t^2c_{41}d_{22}, \\ t^2c_{41} &=& tc_{61}d_{12} + t^2c_{51}d_{22}, \\ t^2c_{51} &=& tc_{71}d_{12} + t^2c_{61}d_{22}, \\ t^2c_{61} &=& tc_{11}d_{12} + t^2c_{71}d_{22}, \\ tc_{71} &=& tc_{21}d_{12} + tc_{11}d_{22}. \end{array} \right.$$

З 1-го рівняння $c_{11} = tc_{31}d_{12} + tc_{21}d_{22}$, з останнього рівняння оскільки $t^2 \neq 0$ $c_{71} = c_{21}d_{12} + c_{11}d_{22} + t^2c'_{71}$ ($c'_{71} \in K$). Після підстановки отримаємо систему

$$\left\{ \begin{array}{rcl} tc_{21} &=& tc_{41}d_{12} + t^2c_{31}d_{22}, \\ t^2c_{31} &=& tc_{51}d_{12} + t^2c_{41}d_{22}, \\ t^2c_{41} &=& tc_{61}d_{12} + t^2c_{51}d_{22}, \\ t^2c_{51} &=& tc_{21}d_{12}^2 + t^2c_{61}d_{22} + t^2c_{31}d_{12}^2d_{22} + \\ && t^2c_{21}d_{12}d_{22}^2, \\ t^2c_{61} &=& t^2c_{31}d_{12}^2 + 2t^2c_{21}d_{12}d_{22}. \end{array} \right.$$

З 4-го рівняння оскільки $t \neq 0$ одержуємо $c_{21}d_{12}^2 \in tK$, що неможливо, бо $c_{21}, d_{12} \in K^*$.

Підставляючи $(5)_{[i,1]}$ в $(5)_{[i,2]}$ при $k=3$ одержимо:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_{11} &=& tc_{31}d_{12} + tc_{21}d_{22}, \\ c_{21} &=& tc_{41}d_{12} + tc_{31}d_{22}, \\ tc_{31} &=& tc_{51}d_{12} + t^2c_{41}d_{22}, \\ t^2c_{41} &=& tc_{61}d_{12} + t^2c_{51}d_{22}, \\ t^2c_{51} &=& tc_{71}d_{12} + t^2c_{61}d_{22}, \\ t^2c_{61} &=& tc_{11}d_{12} + t^2c_{71}d_{22}, \\ tc_{71} &=& tc_{21}d_{12} + tc_{11}d_{22}. \end{array} \right.$$

З 1-го та 2-го рівняння відповідно маємо: $c_{11} = tc_{31}d_{12} + tc_{21}d_{22}$, $c_{21} = tc_{41}d_{12} + tc_{31}d_{22}$, з останнього рівняння оскільки $t^2 \neq 0$ $c_{71} = c_{21}d_{12} + c_{11}d_{22} + t^2c'_{71}$ ($c'_{71} \in K$) і з 3-го рівняння оскільки $t^2 \neq 0$ і $d_{12} \in K^*$ $c_{61} = tc_{41}d_{12}^{-1} - tc_{51}d_{12}^{-1}d_{22} + t^2c'_{61}$ ($c'_{61} \in K$). Після підстановки одержимо:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0 &=& t^2c_{31}d_{12}^2, \\ tc_{31} &=& tc_{51}d_{12} + t^2c_{41}d_{22}, \\ t^2c_{51} &=& t^2c_{41}d_{12}^3 + 2t^2c_{31}d_{12}^2d_{22}. \end{array} \right.$$

З 1-го рівняння оскільки $t^2 \neq 0$ одержуємо $c_{31}d_{12}^2 \in tK$, що неможливо, бо $c_{31}, d_{12} \in K^*$.

Підставляючи $(5)_{[i,1]}$ в $(5)_{[i,2]}$ при $k=4$ одержимо:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_{11} &=& tc_{31}d_{12} + tc_{21}d_{22}, \\ c_{21} &=& tc_{41}d_{12} + tc_{31}d_{22}, \\ c_{31} &=& tc_{51}d_{12} + tc_{41}d_{22}, \\ tc_{41} &=& tc_{61}d_{12} + t^2c_{51}d_{22}, \\ t^2c_{51} &=& tc_{71}d_{12} + t^2c_{61}d_{22}, \\ t^2c_{61} &=& tc_{11}d_{12} + t^2c_{71}d_{22}, \\ tc_{71} &=& tc_{21}d_{12} + tc_{11}d_{22}. \end{array} \right.$$

З 1-го, 2-го та 3-го рівняння відповідно маємо: $c_{11} = tc_{31}d_{12} + tc_{21}d_{22}$, $c_{21} = tc_{41}d_{12} + tc_{31}d_{22}$, $c_{31} = tc_{51}d_{12} + tc_{41}d_{22}$, з останнього рівняння оскільки $t^2 \neq 0$ $c_{71} = c_{21}d_{12} + c_{11}d_{22} + t^2c'_{71}$ ($c'_{71} \in K$). Після підстановки отримаємо:

$$\begin{cases} tc_{41} &= tc_{61}d_{12} + t^2c_{51}d_{22}, \\ t^2c_{51} &= t^2c_{41}d_{12}^3 + t^2c_{61}d_{22}, \\ t^2c_{61} &= 0. \end{cases}$$

З 3-го рівняння оскільки $t^2 \neq 0$ одержуємо $c_{61} \in tK$, з 1-го рівняння, оскільки $t \neq 0$, $c_{61} \in tK$, одержуємо $c_{41} \in tK$, що неможливо.

Підставляючи $(5)_{[i,1]}$ в $(5)_{[i,1]}$ при $k = 5$ одержимо:

$$\begin{cases} c_{11} &= tc_{31}d_{12} + tc_{21}d_{22}, \\ c_{21} &= tc_{41}d_{12} + tc_{31}d_{22}, \\ c_{31} &= tc_{51}d_{12} + tc_{41}d_{22}, \\ c_{41} &= tc_{61}d_{12} + tc_{51}d_{22}, \\ tc_{51} &= tc_{71}d_{12} + t^2c_{61}d_{22}, \\ t^2c_{61} &= tc_{11}d_{12} + t^2c_{71}d_{22}, \\ tc_{71} &= tc_{21}d_{12} + tc_{11}d_{22} \end{cases}$$

З 1-го, 2-го, 3-го та 4-го рівняння відповідно маємо: $c_{11} = tc_{31}d_{12}+tc_{21}d_{22}$, $c_{21} = tc_{41}d_{12}+tc_{31}d_{22}$, $c_{31} = tc_{51}d_{12} + tc_{41}d_{22}$, $c_{41} = tc_{61}d_{12} + tc_{51}d_{22}$, з останнього рівняння оскільки $t^2 \neq 0$ $c_{71} = c_{21}d_{12} + c_{11}d_{22} + t^2c'_{71}$ ($c'_{71} \in K$). Після підстановки отримаємо систему

$$\begin{cases} tc_{5,1} &= t^2c_{6,1}d_{2,2} \\ t^2c_{6,1} &= 0 \end{cases}$$

З 1-го рівняння оскільки $t \neq 0$ одержуємо $c_{51} \in tK$, що неможливо. □

Лема 2. *Матриця $M(t, k, 7)$ $(1 < k < 6)$ не є подібна над K до матриці вигляду*

$$N = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & td_{13} & \\ 1 & 0 & td_{23} & B \\ 0 & 1 & td_{33} & \\ \hline & 0 & & A \end{array} \right).$$

Доведення. Якщо $d_{13} \in tK$, то $d_{13} = td'_{13}$ ($d'_{13} \in K$) і маємо подібність над K

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & td_{13} \\ 1 & 0 & td_{23} \\ 0 & 1 & td_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2d'_{13} \\ 1 & td_{33} & td_{23} + t^2d_{33}^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & td_{23} & t^2d'_{13} \\ 1 & td_{33} & t^2d_{33}^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді над кільцем K/t^2K матриця $M(t, k, 7)$ подібна матриці з нульовим стовпчиком. Тоді маємо протиріччя з теоремою 2. Отже, $d_{13} \in K^*$.

Нехай для деякої оборотньої матриці $C = (c_{ij})$ порядку n над K

$$M(t, k, 7)C = CN. \qquad (6)$$

Для спрощення викладок знову вважаємо, що $t^3 = 0$. Тоді:

$$\begin{array}{rr} (6)_{[1,1]}: & tc_{n1} = c_{12}, \\ (6)_{[2,1]}: & c_{11} = c_{22}, \\ & \dots\dots\dots \\ (6)_{[k,1]}: & c_{k-1,1} = c_{k,2}, \\ (6)_{[k+1,1]}: & c_{k,1} = c_{k+1,2}, \\ (6)_{[k+2,1]}: & tc_{k+1,1} = c_{k+2,2}, \\ & \dots\dots\dots \\ (6)_{[n,1]}: & tc_{n-1,1} = c_{n2}, \\ (6)_{[1,2]}: & tc_{n2} = c_{13}, \\ (6)_{[2,2]}: & c_{12} = c_{23}, \\ & \dots\dots\dots \\ (6)_{[k+1,2]}: & c_{k2} = c_{k+1,3}, \\ (6)_{[k+2,2]}: & tc_{k+1,2} = c_{k+2,3}, \\ & \dots\dots\dots \\ (6)_{[n,2]}: & tc_{n-1,2} = c_{n3}. \end{array}$$

Таким чином $\overline{c_{13}} = \overline{c_{k+2,3}} = \dots = \overline{c_{n3}} = 0$.

$$\begin{array}{ll} (6)_{[1,3]}: & tc_{n3} = tc_{11}d_{13} + tc_{12}d_{23} + tc_{13}d_{33}, \\ (6)_{[2,3]}: & c_{13} = tc_{21}d_{13} + tc_{22}d_{23} + tc_{23}d_{33}, \\ & \dots\dots\dots \\ (6)_{[k+1,3]}: & c_{k3} = tc_{k+1,1}d_{13} + tc_{k+1,2}d_{23} + tc_{k+1,3}d_{33}, \\ (6)_{[k+2,3]}: & tc_{k+1,3} = tc_{k+2,1}d_{13} + tc_{k+2,2}d_{23} + tc_{k+2,3}d_{33}, \\ & \dots\dots\dots \\ (6)_{[n,3]}: & tc_{n-1,3} = tc_{n1}d_{13} + tc_{n2}d_{23} + tc_{n3}d_{33}. \end{array}$$

Таким чином $\overline{c_{13}} = \dots = \overline{c_{k3}} = \overline{c_{k+2,3}} = \dots = \overline{c_{n3}} = 0$. В силу оборотності детермінанта матриці $\overline{C}$ $c_{k+1,3} = c_{k2} = c_{k-1,1} \in K^*$.

Підставляючи $(6)_{[i,1]}$ в $(6)_{[i,2]}$, а потім отримані рівності в $(6)_{[i,3]}$ при $k = 2$ одержимо:

$$\begin{cases} 0 &= tc_{61}d_{13} + t^2c_{51}d_{23}, \\ 0 &= tc_{71}d_{13} + t^2c_{61}d_{23}, \\ 0 &= tc_{11}d_{13} + t^2c_{71}d_{23}, \\ tc_{11} &= tc_{41}d_{13} + t^2c_{31}d_{23} + t^2c_{21}d_{33}, \\ t^2c_{21} &= tc_{51}d_{13} + t^2c_{41}d_{23}, \\ t^2c_{61} &= tc_{21}d_{13} + tc_{11}d_{23} + t^2c_{71}d_{33}, \\ tc_{71} &= tc_{31}d_{13} + tc_{21}d_{23} + tc_{11}d_{33} \end{cases}$$

З 3-го рівняння оскільки $t \neq 0$ одержуємо $c_{11}d_{13} \in tK$, що неможливо, бо $c_{11}, d_{13} \in K^*$.

Підставляючи $(6)_{[i,1]}$ в $(6)_{[i,2]}$, а потім отримані рівності в $(6)_{[i,3]}$ при $k = 3$ одержимо:

$$\begin{cases} 0 &= tc_{71}d_{13} + t^2c_{61}d_{23}, \\ 0 &= tc_{11}d_{13} + t^2c_{71}d_{23}, \\ c_{11} &= tc_{41}d_{13} + tc_{31}d_{23} + tc_{21}d_{33}, \\ tc_{21} &= tc_{51}d_{13} + t^2c_{41}d_{23} + t^2c_{31}d_{33}, \\ t^2c_{31} &= tc_{61}d_{13} + t^2c_{51}d_{23}, \\ t^2c_{61} &= tc_{21}d_{13} + tc_{11}d_{23} + t^2c_{71}d_{33}, \\ tc_{71} &= tc_{31}d_{13} + tc_{21}d_{23} + tc_{11}d_{33}. \end{cases}$$

З 1-го рівняння $c_{11} \in tK$. Тоді з 6-го рівняння оскільки $t \neq 0$ одержуємо $c_{21}d_{13} \in tK$, що неможливо, бо $c_{21}, d_{13} \in K^*$.

Підставляючи $(6)_{[i,1]}$ в $(6)_{[i,2]}$, а потім отримані рівності в $(6)_{[i,3]}$ при $k = 4$ одержимо:

$$\begin{cases} 0 &= tc_{11}d_{13} + t^2c_{71}d_{23}, \\ c_{11} &= tc_{41}d_{13} + tc_{31}d_{23} + tc_{21}d_{33}, \\ c_{21} &= tc_{51}d_{13} + tc_{41}d_{23} + tc_{31}d_{33}, \\ tc_{31} &= tc_{61}d_{13} + t^2c_{51}d_{23} + t^2c_{41}d_{33}, \\ t^2c_{41} &= tc_{71}d_{13} + t^2c_{61}d_{23}, \\ t^2c_{61} &= tc_{21}d_{13} + tc_{11}d_{23} + t^2c_{71}d_{33}, \\ tc_{71} &= tc_{31}d_{13} + tc_{21}d_{23} + tc_{11}d_{33}. \end{cases}$$

З 2-го та 3-го рівняння відповідно маємо: $c_{11} = tc_{41}d_{13}+tc_{31}d_{23}+tc_{21}d_{33}$, $c_{21} = tc_{51}d_{13}+tc_{41}d_{23}+tc_{31}d_{33}$, з останнього рівняння оскільки $t^2 \neq 0$ $c_{71} = c_{31}d_{13} + c_{21}d_{23} + c_{11}d_{33} + t^2c'_{71}$ $(c'_{71} \in K)$. Після підстановки отримаємо систему

$$\begin{cases} 0 &= t^2c_{41}d_{13}^2 + 2t^2c_{31}d_{13}d_{23}, \\ tc_{31} &= tc_{61}d_{13} + t^2c_{51}d_{23} + t^2c_{41}d_{33}, \\ t^2c_{41} &= tc_{31}d_{13}^2 + t^2c_{61}d_{23} + t^2c_{51}d_{13}^2d_{23} + \\ & \quad t^2c_{41}d_{13}d_{23}^2 + t^2c_{41}d_{13}^2d_{33} + \\ & \quad 2t^2c_{31}d_{13}d_{23}d_{33}, \\ t^2c_{61} &= t^2c_{51}d_{13}^2 + 2t^2c_{41}d_{13}d_{23} + t^2c_{31}d_{23}^2 + \\ & \quad 2t^2c_{31}d_{13}d_{33}. \end{cases}$$

З 3-го рівняння оскільки $t \neq 0$ одержуємо $c_{31}d_{13}^2 \in tK$, що неможливо, бо $c_{31}, d_{13} \in K^*$.

Підставляючи $(6)_{[i,1]}$ в $(6)_{[i,2]}$, а потім отримані рівності в $(6)_{[i,3]}$ при $k = 5$ одержимо:

$$\begin{cases} c_{11} &= tc_{41}d_{13} + tc_{31}d_{23} + tc_{21}d_{33}, \\ c_{21} &= tc_{51}d_{13} + tc_{41}d_{23} + tc_{31}d_{33}, \\ c_{31} &= tc_{61}d_{13} + tc_{51}d_{23} + tc_{41}d_{33}, \\ tc_{41} &= tc_{71}d_{13} + t^2c_{61}d_{23} + t^2c_{51}d_{33}, \\ t^2c_{51} &= tc_{11}d_{13} + t^2c_{71}d_{23}, \\ t^2c_{61} &= tc_{21}d_{13} + tc_{11}d_{23} + t^2c_{71}d_{33}, \\ tc_{71} &= tc_{31}d_{13} + tc_{21}d_{23} + tc_{11}d_{33} \end{cases}$$

З 1-го, 2-го та 3-го рівняння відповідно маємо: $c_{11} = tc_{41}d_{13} + tc_{31}d_{23} + tc_{21}d_{33}$, $c_{21} = tc_{51}d_{13} + tc_{41}d_{23} + tc_{31}d_{33}$, $c_{31} = tc_{61}d_{13} + tc_{51}d_{23} + tc_{41}d_{33}$, з останнього рівняння оскільки $t^2 \neq 0$ $c_{71} = c_{31}d_{13} + c_{21}d_{23} + c_{11}d_{33} + t^2c'_{71}$ $(c'_{71} \in K)$. Після підстановки отримаємо систему

$$\begin{cases} tc_{41} &= t^2c_{61}d_{13}^3 + t^2c_{61}d_{23} + 2t^2c_{51}d_{13}^2d_{23} + \\ & \quad t^2c_{41}d_{13}d_{23}^2 + t^2c_{51}d_{33} + 2t^2c_{41}d_{13}^2d_{33}, \\ t^2c_{51} &= t^2c_{41}d_{13}^2, \\ t^2c_{61} &= t^2c_{51}d_{13}^2 + 2t^2c_{41}d_{13}d_{23}. \end{cases}$$

З 1-го рівняння оскільки $t \neq 0$ одержуємо $c_{41} \in tK$, що неможливо. □

Лема 3. *Матриця $M(t,k,7)$ $(1 < k < 6)$ не є подібна над K для жодного $d_{12} \in K^*$ до матриці вигляду*

$$N = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{td_{12}} & td_{13} & \\ 1 & td_{22} & td_{23} & B \\ 0 & td_{32} & td_{33} & \\ \hline & 0 & & A \end{array}\right).$$

Доведення. Нехай для деякої оборотньої матриці $C = (c_{ij})$ порядку n над K, для деякого k $(1 < k < 6)$ і $d_{12} \in K^*$

$$M(t,k,7)C = CN. \tag{7}$$

Для спрощення викладок знову вважаємо, що $t^3 = 0$. Тоді:

$$\begin{array}{ll} (7)_{[1,1]}: & tc_{n1} = c_{12}, \\ (7)_{[2,1]}: & c_{11} = c_{22}, \\ & \cdots\cdots\cdots \\ (7)_{[k,1]}: & c_{k-1,1} = c_{k,2}, \\ (7)_{[k+1,1]}: & c_{k,1} = c_{k+1,2}, \\ (7)_{[k+2,1]}: & tc_{k+1,1} = c_{k+2,2}, \\ & \cdots\cdots\cdots \\ (7)_{[n,1]}: & tc_{n-1,1} = c_{n2}. \end{array}$$

Таким чином $\overline{c_{12}} = \overline{c_{k+2,2}} = \cdots = \overline{c_{n2}} = 0$.

$$\begin{array}{ll} (7)_{[1,2]}: & tc_{n2} = tc_{11}d_{12} + tc_{12}d_{22} + tc_{13}d_{32}, \\ (7)_{[2,2]}: & c_{12} = tc_{21}d_{12} + tc_{22}d_{22} + tc_{23}d_{32}, \\ & \cdots\cdots\cdots \\ (7)_{[k+1,2]}: & c_{k2} = tc_{k+1,1}d_{12} + tc_{k+1,2}d_{22} + tc_{k+1,3}d_{32}, \\ (7)_{[k+2,2]}: & tc_{k+1,2} = tc_{k+2,1}d_{12} + tc_{k+2,2}d_{22} + tc_{k+2,3}d_{32}, \\ & \cdots\cdots\cdots \\ (7)_{[n,2]}: & tc_{n-1,2} = tc_{n1}d_{12} + tc_{n2}d_{22} + tc_{n3}d_{32}. \end{array}$$

Таким чином $\overline{c_{12}} = \cdots = \overline{c_{k2}} = \overline{c_{k+2,2}} = \cdots = \overline{c_{n2}} = 0$. Крім того,

$$\begin{array}{ll} (7)_{[1,3]}: & tc_{n3} = tc_{11}d_{13} + tc_{12}d_{23} + tc_{13}d_{33}, \\ (7)_{[2,3]}: & c_{13} = tc_{21}d_{13} + tc_{22}d_{23} + tc_{23}d_{33}, \\ & \cdots\cdots\cdots \\ (7)_{[k+1,3]}: & c_{k3} = tc_{k+1,1}d_{13} + tc_{k+1,2}d_{23} + tc_{k+1,3}d_{33}, \\ (7)_{[k+2,3]}: & tc_{k+1,3} = tc_{k+2,1}d_{13} + tc_{k+2,2}d_{23} + tc_{k+2,3}d_{33}, \\ & \cdots\cdots\cdots \\ (7)_{[n,3]}: & tc_{n-1,3} = tc_{n1}d_{13} + tc_{n2}d_{23} + tc_{n3}d_{33}. \end{array}$$

Також отримуємо $\overline{c_{13}} = \cdots = \overline{c_{k3}} = 0$.

Через додавання до 3-го стовпця 2-го стовпця домноженого на $-td_{12}^{-1}d_{13}$ разом з додавання до 2-го рядка 3-го рядка домноженого на $td_{12}^{-1}d_{13}$ маємо подібність матриць над K

$$\begin{pmatrix} 0 & td_{12} & td_{13} \\ 1 & td_{22} & td_{23} \\ 0 & td_{32} & td_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & td_{12} & 0 \\ 1 & td'_{22} & td'_{23} \\ 0 & td_{32} & td'_{33} \end{pmatrix}$$

для деяких $d'_{22}, d'_{23}, d'_{33} \in K$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $d_{13} = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} (7)_{[1,3]}: &\quad tc_{n3} = tc_{12}d_{23} + tc_{13}d_{33}, \\ (7)_{[k+2,3]}: &\quad tc_{k+1,3} = tc_{k+2,2}d_{23} + tc_{k+2,3}d_{33}, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (7)_{[n,3]}: &\quad tc_{n-1,3} = tc_{n2}d_{23} + tc_{n3}d_{33}. \end{aligned}$$

Оскільки $\overline{c_{12}} = \overline{c_{13}} = 0$, $t \neq 0$, то з $(7)_{[1,3]}$ $\overline{c_{n3}} = 0$. Оскільки $\overline{c_{n2}} = \overline{c_{n3}} = 0$, $t \neq 0$, то з $(7)_{[n,3]}$ $\overline{c_{n-1,3}} = 0$. Нехай $k+1 < i < n$ і $\overline{c_{i3}} = 0$. Враховуючи, що $i \neq k+1$ $\overline{c_{i,2}} = 0$ з $(7)_{[i,3]}$ $tc_{i-1,3} = tc_{i2}d_{23} + tc_{i3}d_{33}$ одержимо $\overline{c_{i-1,3}} = 0$. Таким чином $\overline{c_{k+1,3}} = \cdots = \overline{c_{n3}} = 0$. Отже, $\overline{c_{13}} = \cdots = \overline{c_{k3}} = \overline{c_{k+1,3}} = \cdots = \overline{c_{n3}} = 0$. Що суперечить оборотності $\det \overline{C}$. □

Лема 4. *Матриця* $M(t,k,7)$ $(1 < k < 6)$ *не є подібна над* K *для жодного* $d_{12} \in tK$ *до матриці вигляду*

$$N = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{td_{12}} & td_{13} & \\ 1 & td_{22} & td_{23} & B \\ 0 & td_{32} & td_{33} & \\ \hline & 0 & & A \end{array}\right).$$

Доведення. Нехай для деякої оборотньої матриці $C = (c_{ij})$ порядку n над K, для деякого k $(1 < k < 6)$ і $d_{12} \in K^*$ має місце (7). Легко бачити подібність матриць над K

$$\begin{pmatrix} 0 & td_{12} & td_{13} \\ 1 & td_{22} & td_{23} \\ 0 & td_{32} & td_{33} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & td_{12}+t^2d_{23}d_{32} & td_{13}+t^2d_{23}d_{33} \\ 1 & td_{22} & 0 \\ 0 & td_{32} & td_{33} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} td_{22} & td_{12}+t^2d_{23}d_{32}+t^2d_{22}^2 & td_{13}+t^2d_{23}d_{33} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & td_{32} & td_{33} \end{pmatrix}.$$

Якщо $\begin{vmatrix} d_{12} & d_{13} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} \in tK$, тоді над кільцем K/t^2K матриця $M(t,k,7)$ подібна матриці з нульовим стовпчиком, що за теоремою 2 неможливе. Отже, $\begin{vmatrix} d_{12} & d_{13} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} \in K^*$. Тоді $d_{12} \in K^*$ або $d_{32} \in K^*$.

Якщо $d_{12} \in tK$, то $d_{32} \in K^*$. Через додавання до 3-го стовпця 2-го домноженого на $-td_{32}^{-1}d_{33}$ разом з додавання до 2-го рядка 3-го домноженого на $td_{32}^{-1}d_{33}$ маємо подібність над K

$$\begin{pmatrix} 0 & td_{12} & td_{13} \\ 1 & td_{22} & td_{23} \\ 0 & td_{32} & td_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & td_{12} & td'_{13} \\ 1 & td'_{22} & td'_{23} \\ 0 & td_{32} & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & td_{12}+t^2d'_{23}d_{32} & td'_{13} \\ 1 & td'_{22} & 0 \\ 0 & td_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

для деяких $d'_{22}, d'_{13}, d'_{23} \in K$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $d_{23} = d_{33} = 0$, тоді враховуючи, що $\begin{vmatrix} d_{12} & d_{13} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} \in K^*$, $d_{13} \in K^*$.

Для спрощення викладок знову вважаємо, що $t^3 = 0$. Як і при доведенні леми 3 $\overline{c_{12}} = \cdots = \overline{c_{k2}} = \overline{c_{k+2,2}} = \cdots = \overline{c_{n2}} = 0$. В силу оборотності детермінанта матриці $\overline{C}$ $c_{k+1,2} = c_{k1} \in K^*$.

Враховуючи, що $d_{23} = d_{33} = 0$ вказані рівності спрощуються

$$\begin{aligned} (7)_{[1,3]}: &\quad tc_{n3} = tc_{11}d_{13}, \\ (7)_{[2,3]}: &\quad c_{13} = tc_{21}d_{13}, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ (7)_{[k+1,3]}: &\quad c_{k3} = tc_{k+1,1}d_{13}, \\ (7)_{[k+2,3]}: &\quad tc_{k+1,3} = tc_{k+2,1}d_{13}, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ (7)_{[n,3]}: &\quad tc_{n-1,3} = tc_{n1}d_{13}. \end{aligned}$$

Підставляючи $(7)_{[i,1]}$ в $(7)_{[i,2]}$ разом з $(7)_{[i,3]}$ при $k = 2$ одержимо:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_{11} &=& tc_{21}d_{22} + tc_{33}d_{32} + t^2c_{31}d'_{12}, \\ c_{13} &=& tc_{21}d_{13}, \\ tc_{21} &=& t^2c_{31}d_{22} + tc_{43}d_{32} + t^2c_{41}d'_{12}, \\ c_{23} &=& tc_{31}d_{13}, \\ t^2c_{31} &=& t^2c_{41}d_{22} + tc_{53}d_{32} + t^2c_{51}d'_{12}, \\ tc_{33} &=& tc_{41}d_{13}, \\ t^2c_{41} &=& t^2c_{51}d_{22} + tc_{63}d_{32} + t^2c_{61}d'_{12}, \\ tc_{43} &=& tc_{51}d_{13}, \\ t^2c_{51} &=& t^2c_{61}d_{22} + tc_{73}d_{32} + t^2c_{71}d'_{12}, \\ tc_{53} &=& tc_{61}d_{13}, \\ t^2c_{61} &=& t^2c_{71}d_{22} + tc_{13}d_{32} + t^2c_{11}d'_{12}, \\ tc_{63} &=& tc_{71}d_{13}, \\ tc_{71} &=& tc_{11}d_{22} + tc_{23}d_{32} + t^2c_{21}d'_{12}, \\ tc_{73} &=& tc_{11}d_{13}. \end{array} \right.$$

З 1-го, 2-го та 4-го рівняння відповідно одержимо $c_{11} = tc_{31}d_{12} + tc_{21}d_{22} + tc_{33}d_{32}$, $c_{13} = tc_{21}d_{13}$, $c_{23} = tc_{31}d_{13}$. З 12-го, 13-го та 14-го рівняння оскільки $t^2 \neq 0$ відповідно одержуємо $c_{63} = c_{71}d_{13} + t^2c'_{63}$, $c_{71} = c_{11}d_{22} + c_{23}d_{32} + tc_{21}d'_{12} + t^2c'_{71}$, $c_{73} = c_{11}d_{13} + t^2c'_{73}$ для деяких $c'_{63}, c'_{71}, c'_{73} \in K$. Після підстановки одержимо:

$$\begin{cases} tc_{21} = t^2c_{31}d_{22} + tc_{43}d_{32} + t^2c_{41}d'_{12}, \\ t^2c_{31} = t^2c_{41}d_{22} + tc_{53}d_{32} + t^2c_{51}d'_{12}, \\ tc_{33} = tc_{41}d_{13}, \\ t^2c_{41} = t^2c_{51}d_{22} + t^2c_{21}d_{13}d_{22}^2d_{32} + t^2c_{31}d_{13}^2d_{32}^2 + \\ \quad t^2c_{33}d_{13}d_{22}d_{32}^2 + t^2c_{61}d'_{12} + t^2c_{21}d_{13}d_{32}d'_{12}, \\ tc_{43} = tc_{51}d_{13}, \\ t^2c_{51} = t^2c_{61}d_{22} + t^2c_{21}d_{13}d_{22}d_{32} + t^2c_{33}d_{13}d_{32}^2, \\ tc_{53} = tc_{61}d_{13}, \\ t^2c_{61} = t^2c_{21}d_{13}d_{32}. \end{cases}$$

З 7-го та 8-го рівняння оскільки $t^2 \neq 0$ відповідно одержуємо $c_{53} = c_{61}d_{13} + t^2c'_{53}$, $c_{61} = c_{21}d_{13}d_{32} + tc'_{61}$ для деяких $c'_{53}, c'_{61} \in K$. Після підстановки отримаємо систему з рівнянням $t^2c_{31} = t^2c_{41}d_{22} + tc_{21}d_{13}^2d_{32}^2 + t^2d_{13}d_{32}c'_{61} + t^2c_{51}d'_{12}$. Тоді $c_{21}d_{13}^2d_{32}^2 \in tK$, що суперечить $c_{21}, d_{13}, d_{32} \in K^*$.

Підставляючи $(7)_{[i,1]}$ в $(7)_{[i,2]}$ разом з $(7)_{[i,3]}$ при $k = 3$ одержимо:

$$\begin{cases} c_{11} = tc_{21}d_{22} + tc_{33}d_{32} + t^2c_{31}d'_{12}, \\ c_{13} = tc_{21}d_{13}, \\ c_{21} = tc_{31}d_{22} + tc_{43}d_{32} + t^2c_{41}d'_{12}, \\ c_{23} = tc_{31}d_{13}, \\ tc_{31} = t^2c_{41}d_{22} + tc_{53}d_{32} + t^2c_{51}d'_{12}, \\ c_{33} = tc_{41}d_{13}, \\ t^2c_{41} = t^2c_{51}d_{22} + tc_{63}d_{32} + t^2c_{61}d'_{12}, \\ tc_{43} = tc_{51}d_{13}, \\ t^2c_{51} = t^2c_{61}d_{22} + tc_{73}d_{32} + t^2c_{71}d'_{12}, \\ tc_{53} = tc_{61}d_{13}, \\ t^2c_{61} = t^2c_{71}d_{22} + tc_{13}d_{32} + t^2c_{11}d'_{12}, \\ tc_{63} = tc_{71}d_{13}, \\ tc_{71} = tc_{11}d_{22} + tc_{23}d_{32} + t^2c_{21}d'_{12}, \\ tc_{73} = tc_{11}d_{13}. \end{cases}$$

З 1-го, 2-го 3-го, 4-го та 6-го рівняння відповідно одержимо $c_{11} = tc_{21}d_{22} + tc_{33}d_{32} + t^2c_{31}d'_{12}$, $c_{13} = tc_{21}d_{13}$, $c_{21} = tc_{31}d_{22} + tc_{43}d_{32} + t^2c_{41}d'_{12}$, $c_{23} = tc_{31}d_{13}$, $c_{33} = tc_{41}d_{13}$. З 13-го та 14-го рівняння оскільки $t^2 \neq 0$ відповідно одержуємо $c_{71} = c_{11}d_{22} + c_{23}d_{32} + tc_{21}d'_{12} + t^2c'_{71}$, $c_{73} = c_{11}d_{13} + t^2c'_{73}$. для деяких $c'_{71}, c'_{73} \in K$. Після підстановки одержимо:

$$\begin{cases} tc_{31} = t^2c_{41}d_{22} + tc_{61}d_{13}d_{32} + t^2c_{51}d'_{12}, \\ t^2c_{41} = t^2c_{51}d_{22} + tc_{63}d_{32} + t^2c_{61}d'_{12}, \\ tc_{43} = tc_{51}d_{13}, \\ t^2c_{51} = t^2c_{61}d_{22}, \\ t^2c_{61} = 0, \\ tc_{63} = t^2c_{31}d_{13}^2d_{32}. \end{cases}$$

З 5-го та 1-го рівняння оскільки $t^2 \neq 0$ відповідно одержуємо $c_{61} = tc'_{61}$, $c_{31} = tc_{41}d_{22} + tc'_{61}d_{13}d_{32} + tc_{51}d'_{12} + tc'_{31}$ для деяких $c'_{31}, c'_{61} \in K$, що неможливо, бо $c_{31} \in K^*$.

Підставляючи $(7)_{[i,1]}$ в $(7)_{[i,2]}$ разом з $(7)_{[i,3]}$ при $k = 4$ одержимо:

$$\begin{cases} c_{11} = tc_{21}d_{22} + tc_{33}d_{32} + t^2c_{31}d'_{12}, \\ c_{13} = tc_{21}d_{13}, \\ c_{21} = tc_{31}d_{22} + tc_{43}d_{32} + t^2c_{41}d'_{12}, \\ c_{23} = tc_{31}d_{13}, \\ c_{31} = tc_{41}d_{22} + tc_{53}d_{32} + t^2c_{51}d'_{12}, \\ c_{33} = tc_{41}d_{13}, \\ tc_{41} = t^2c_{51}d_{22} + tc_{63}d_{32} + t^2c_{61}d'_{12}, \\ c_{43} = tc_{51}d_{13}, \\ t^2c_{51} = t^2c_{61}d_{22} + tc_{73}d_{32} + t^2c_{71}d'_{12}, \\ tc_{53} = tc_{61}d_{13}, \\ t^2c_{61} = t^2c_{71}d_{22} + tc_{13}d_{32} + t^2c_{11}d'_{12}, \\ tc_{63} = tc_{71}d_{13}, \\ tc_{71} = tc_{11}d_{22} + tc_{23}d_{32} + t^2c_{21}d'_{12}, \\ tc_{73} = tc_{11}d_{13} \end{cases}$$

Підставляючи 1-е та 4-е рівняння в 13-е одержимо $tc_{71} = t^2c_{21}d_{22}^2 + t^2c_{31}d_{13}d_{32} + t^2c_{33}d_{22}d_{32} + t^2c_{21}d'_{12}$. Тоді, враховуючи, що $t^2 \neq 0$, $c_{71} = tc_{21}d_{22}^2 + tc_{31}d_{13}d_{32} + tc_{33}d_{22}d_{32} + tc_{21}d'_{12} + t^2c_{73}$ ($c'_{71} \in K$). Підставляючи отримане рівняння в 12-е, одержимо $tc_{63} = t^2c_{21}d_{13}d_{22}^2 + t^2c_{31}d_{13}^2d_{32} + t^2c_{33}d_{13}d_{22}d_{32} + t^2c_{21}d_{13}d'_{12}$. Тоді, враховуючи, що $t^2 \neq 0$, $c_{63} = tc_{21}d_{13}d_{22}^2 + tc_{31}d_{13}^2d_{32} + tc_{33}d_{13}d_{22}d_{32} + tc_{21}d_{13}d'_{12} + t^2c'_{63}$; ($c'_{63} \in K$). Підставляючи отримане рівняння в 7-е, одержимо $tc_{41} \to t^2c_{51}d_{22} + t^2c_{21}d_{13}d_{22}^2d_{32} + t^2c_{31}d_{13}^2d_{32}^2 + t^2c_{33}d_{13}d_{22}d_{32}^2 + t^2c_{61}d'_{12} + t^2c_{21}d_{13}d_{32}d'_{12}$. Тоді, враховуючи, що $t^2 \neq 0$, $c_{41} \in tK$, що неможливо.

Підставляючи $(7)_{[i,1]}$ в $(7)_{[i,2]}$ разом з $(7)_{[i,3]}$ при $k = 5$ одержимо:

$$\begin{cases} c_{11} = tc_{21}d_{22} + tc_{33}d_{32} + t^2c_{31}d'_{12}, \\ c_{13} = tc_{21}d_{13}, \\ c_{21} = tc_{31}d_{22} + tc_{43}d_{32} + t^2c_{41}d'_{12}, \\ c_{23} = tc_{31}d_{13}, \\ c_{31} = tc_{41}d_{22} + tc_{53}d_{32} + t^2c_{51}d'_{12}, \\ c_{33} = tc_{41}d_{13}, \\ c_{41} = tc_{51}d_{22} + tc_{63}d_{32} + t^2c_{61}d'_{12}, \\ c_{43} = tc_{51}d_{13}, \\ tc_{51} = t^2c_{61}d_{22} + tc_{73}d_{32} + t^2c_{71}d'_{12}, \\ c_{53} = tc_{61}d_{13}, \\ t^2c_{61} = t^2c_{71}d_{22} + tc_{13}d_{32} + t^2c_{11}d'_{12}, \\ tc_{63} = tc_{71}d_{13}, \\ tc_{71} = tc_{11}d_{22} + tc_{23}d_{32} + t^2c_{21}d'_{12}, \\ tc_{73} = tc_{11}d_{13}. \end{cases}$$

Підставляючи 1-е рівняння в 14-е одержимо $tc_{73} = t^2c_{21}d_{13}d_{22} + t^2c_{33}d_{13}d_{32}$. Тоді, враховуючи, що $t^2 \neq 0$, $c_{73} = tc_{21}d_{13}d_{22} + tc_{33}d_{13}d_{32} + t^2c'_{73}$ ($c'_{73} \in K$). Підставляючи отримане рівняння в 9-е одержимо $tc_{51} = t^2c_{61}d_{22} + t^2c_{21}d_{13}d_{22}d_{32} + t^2c_{33}d_{13}d_{32}^2 + t^2c_{71}d'_{12}$. Тоді, враховуючи, що $t^2 \neq 0$, $c_{51} \in tK$, що неможливо. □

Теорема 3. *Нехай K — комутативне локальне кільце, радикал Джекобсона якого tK ($t \in K$, $t^2 \neq 0$). Матриця $M(t,k,7)$ незвідна над K для жодного k ($0 < k < 7$).*

Доведення. За теоремою 1 достатньо розглянути випадки $1 < k < 6$. Припустимо матриця $M(t,k,7)$ звідна. Тоді маємо подібність над K

$$M(t,k,7) \sim \begin{pmatrix} D & B \\ 0 & A \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

де D — квадратна матриця порядку m. За наслідком 1 можна вважати, що $m = 2$ або $m = 3$. За теоремою 2 можна вважати, що

$$D = \begin{pmatrix} 0 & td_{13} \\ 1 & td_{23} \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & td_{13} \\ 1 & 0 & td_{23} \\ 0 & 1 & td_{33} \end{pmatrix}, \text{ або}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & td_{12} & td_{13} \\ 1 & td_{22} & td_{23} \\ 0 & td_{32} & td_{33} \end{pmatrix}$$

для деяких $d_{ij} \in K$. У першому випадку маємо протиріччя з лемою 1, у другому випадку — з лемою 2, у третьому випадку — з лемами 3 та 4. □

Автор щиро вдячний професору В. М. Бондаренку за увагу до роботи і цінні поради.

Список використаних джерел

1. *Бондаренко В.М.* О подобии матриц над кольцом классов вычетов/ В.М. Бондаренко// Матем. сборник, "Наукова думка", Киев. – 1976. – С. 275–277.
2. *Гудивок П.М.* Про незвідні модулярні зображення скінченних p-груп над комутативними локальними кільцями/ П.М. Гудивок, О.А. Тилищак// Науковий вісник Ужгородського ун-ту (Сер. матем. і інформ). – 1998. – **3**. – С. 78–83.
3. *Динис Р.Ф.* Про звідність матриць деякого вигляду над комутативними локальними кільцями головних ідеалів/ Р.Ф. Динис, О.А. Тилищак// Науковий вісник Ужгородського ун-ту (Сер. матем. і інформ). – 2012. – **23**, №1. – С. 57–62.
4. *Bondarenko V.M.* Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings/ V.M. Bondarenko, M.Yu. Bortos, R.F. Dinis, A.A. Tylyshchak// Algebra Discrete Math., **16**, No 2, (2013), 171–187.

References

1. BONDARENKO V.M. (1976) "The similarity of matrices over rings of residue classes", *Mathematics collection, Izdat. "Naukova Dumka", Kiev*, pp. 275–277.
2. GUDIVOK P.M., TYLYSHCHAK A.A. (1998) "On irreducible modular representations of finite p-groups over commutative local rings", *Nauk. Visn. Uzhgorod. Univ. (Ser. Mat.)*, **v.3**, pp. 78–83.
3. DINIS R. F., TYLYSHCHAK A. A. (2012) "On reducibility of matrixes of some type over commutative local principle ideals rings", *Nauk. Visn. Uzhgorod. Univ. (Ser. Mat. Inform.)*, **v.23**, pp. 57–62.
4. BONDARENKO V.M., BORTOS M.YU., DINIS R.F., TYLYSHCHAK A.A. (2013) "Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings", *Algebra Discrete Math.*, **16** no. 2, pp. 171–187.

Надійшла до редколегії 09.03.2018