

УДК 519.85

MSC 37C75, 65K05

## EXTRAPOLATION FROM THE PAST METHOD FOR VARIATIONAL INEQUALITIES IN A HILBERT SPACE

V. V. SEMENOV, O. S. KHARKOV

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of  
Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: {volodya.semenov, olehharek}@gmail.com

## АЛГОРИТМ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ З МИНУЛОГО ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРИ

В. В. СЕМЕНОВ, О. С. ХАРЬКОВ

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, КНУ імені Тараса Шевченка, Київ,  
Україна, E-mail: {volodya.semenov, olehharek}@gmail.com

**ABSTRACT.** The article considers variational inequalities with operators acting in a Hilbert space. For these problems, variants of the Extrapolation from the Past method have been proposed and studied. A sub-linear efficiency estimate for the gap function is proved. The strong convergence of the Extrapolation from the Past method for variational inequalities with uniformly monotone operators is proved. The linear rate of convergence of the Extrapolation from the Past method for variational inequalities with operators satisfying the generalized strong monotonicity condition is proved. An adaptive version of the algorithm is proposed. Regularized variants of the algorithm are proposed and theorems on their strong convergence are proved.

**KEYWORDS:** variational inequality, Hilbert space, Extrapolation from the Past method, convergence.

**АНОТАЦІЯ.** У статті розглядаються варіаційні нерівності з операторами, що діють в гільбертовому просторі. Для цих задач запропоновано та обґрунтовано варіанти алгоритму екстраполяції з минулого. Доведено сублінійну оцінку ефективності для функції зазору. Доведено сильну збіжність алгоритму екстраполяції з минулого для варіаційних нерівностей з рівномірно монотонними операторами. Доведено лінійну швидкість збіжності алгоритму екстраполяції з минулого для варіаційних нерівностей з операторами, що задовольняють умову типу узагальненої сильної монотонності. Запропоновано та обґрунтовано адаптивний варіант алгоритму. Запропоновано регуляризовані варіанти алгоритму та доведено теореми про їх сильну збіжність.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** варіаційна нерівність, гільбертовий простір, метод екстраполяції з минулого, збіжність.

## ВСТУП

Створення та дослідження алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей та близьких задач є напрямом прикладної математики, що активно розвивається. Найвідомішим чисельним методом розв'язання варіаційних нерівностей є екстраградієнтний метод, що запропонований Г. М. Корпелевич в 1970-х роках [1]. В 1980 році Л. Д. Попов [2] запропонував для пошуку сідлових точок опукло-угнутих функцій цікаву модифікацію методу Ерроу–Гурвіца, який став джерелом багатьох сучасних алгоритмів. Алгоритми цього типу відомі серед спеціалістів з машинного навчання під назвою «Extrapolation from the Past» [3].

У статті розглядаються варіаційні нерівності з операторами, що діють в гільбертовому просторі. Для цих задач запропоновано та обгрунтовано нові модифікації методу Л. Д. Попова.

Статтю побудовано таким чином. В розділі 1 розглянуто варіаційні нерівності в гільбертовому просторі, наведено основні припущення та необхідний мінімум відомостей, що відіграють важливу роль у доведеннях основних результатів. В розділі 2 розглянуто алгоритм екстраполяції з минулого та прокоментовано літературу, що присвячено дослідженню його збіжності. В розділі 3 доведено слабку збіжність алгоритму екстраполяції з минулого та отримано сублінійну оцінку ефективності для функції зазору. Сильну збіжність алгоритму екстраполяції з минулого для варіаційних нерівностей з рівномірно монотонними операторами доведено в розділі 4. Лінійну швидкість збіжності алгоритму екстраполяції з минулого для варіаційних нерівностей з операторами, що задовольняють умову типу узагальненої сильної монотонності, доведено в розділі 5. В розділі 6 запропоновано та обгрунтовано адаптивний варіант алгоритму. Нарешті, в розділі 7 запропоновано регуляризовані варіанти алгоритму та доведено теореми про їх сильну збіжність.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ

Нехай  $H$  — дійсний гільбертовий простір з скалярним добутком  $(\cdot, \cdot)$  та породженою нормою  $\|\cdot\|$ . Сильну та слабку збіжність в  $H$  послідовності  $(x_n)$  до  $x$  позначимо  $\rightarrow$  та  $\rightharpoonup$ , відповідно.

Нехай  $C$  — непорожня опукла і замкнена підмножина простору  $H$  та  $A : H \rightarrow H$  — деякий оператор.

Варіаційною нерівністю називаємо таку задачу:

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (1)$$

Множину розв'язків варіаційної нерівності (1) позначимо через  $S$ .

Задача (1) — зручна загальна форма запису різних задач, що виникають в математичній фізиці, дослідженні операцій [4–8]. Зокрема, у вигляді варіаційної нерівності можуть бути сформульовані задачі розв'язання рівнянь, знаходження екстремуму функціоналів, знаходження точок рівноваги тощо. Наведемо ряд типових постановок.

1) Задача розв'язання операторного рівняння

$$\text{знайти } x \in H : Ax = 0$$

рівносильна варіаційній нерівності

$$\text{знайти } x \in H : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in H.$$

2) Нехай  $f$  — диференційовна опукла функція,  $C$  — опукла замкнена множина. Критерій оптимальності першого порядку для задачі

$$f \rightarrow \min_C$$

має вигляд

$$x \in C \quad \text{та} \quad (\nabla f(x), y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

3) Нехай  $F : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  — диференційовна опукло-угнута функція,  $X, Y$  — опуклі замкнені множини. Точка  $(x^*, y^*) \in X \times Y$  називається сідловою точкою функції  $F$ , якщо

$$F(x^*, y) \leq F(x^*, y^*) \leq F(x, y^*) \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y. \quad (2)$$

Задача пошуку сідлової точки (2) рівносильна варіаційній нерівності:

$$\left( \left( \begin{array}{c} \nabla_x F(x^*, y^*) \\ -\nabla_y F(x^*, y^*) \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} x - x^* \\ y - y^* \end{array} \right) \right) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

4) Нехай  $X, Y$  — опуклі замкнені множини,  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  ( $g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ) — диференційовна по  $x$  (по  $y$ ) при фіксованому  $y$  (при фіксованому  $x$ ) функція. Точка  $(x^*, y^*) \in X \times Y$  називається рівновагою Неша, якщо

$$f(x^*, y^*) \leq f(x, y^*) \quad \forall x \in X, \quad g(x^*, y^*) \leq g(x^*, y) \quad \forall y \in Y. \quad (3)$$

Якщо функція  $f(\cdot, y)$  опукла на  $X$  для всіх  $y \in Y$ , а функція  $g(x, \cdot)$  опукла на  $Y$  для всіх  $x \in X$ , то задача пошуку рівноваги Неша (3) рівносильна варіаційній нерівності:

$$\left( \left( \begin{array}{c} \nabla_x f(x^*, y^*) \\ \nabla_y g(x^*, y^*) \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} x - x^* \\ y - y^* \end{array} \right) \right) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Нагадаємо основні означення [9–11].

**Означення 1.** Оператор  $A : H \rightarrow H$  називаємо псевдомонотонним на множині  $C \subseteq H$ , якщо для  $x, y \in C$

$$(Ax, y - x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (Ay, x - y) \leq 0.$$

**Означення 2.** Оператор  $A : H \rightarrow H$  називаємо монотонним, якщо

$$(Ax - Ay, x - y) \geq 0 \quad \forall x, y \in H.$$

**Означення 3.** Оператор  $A : H \rightarrow H$  називаємо обернено сильно монотонним (ко-коерцитивним) на множині  $C \subseteq H$ , якщо існує така стала  $\alpha > 0$ , що

$$(Ax - Ay, x - y) \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2 \quad \forall x, y \in C.$$

У цьому випадку кажуть, що оператор  $A$  —  $\alpha$ -обернено сильно монотонним ( $\alpha$ -ко-коерцитивним).

**Означення 4.** Оператор  $A : H \rightarrow H$  називаємо рівномірно монотонним на множині  $C \subseteq H$ , якщо існує така зростаюча функція  $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $\phi(0) = 0$  та  $\phi(t) > 0$  для  $t > 0$ , що

$$(Ax - Ay, x - y) \geq \phi(\|x - y\|) \quad \forall x, y \in C.$$

**Означення 5.** Оператор  $A : H \rightarrow H$  називаємо сильно монотонним на множині  $C \subseteq H$ , якщо існує така стала  $\mu > 0$ , що

$$(Ax - Ay, x - y) \geq \mu\|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in C.$$

У цьому випадку кажуть, що оператор  $A$  —  $\mu$ -сильно монотонний.

Скрізь у роботі будемо вважати, що оператор  $A : H \rightarrow H$  — ліпшицевий на множині  $C$  (з константою  $L > 0$ ), тобто

$$\|Ax - Ay\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in C,$$

та  $S \neq \emptyset$ .

Для замкненої опуклої множини  $C$  та ліпшицевого сильно монотонного оператора  $A$  множина  $S$  не порожня та складається з одного елемента [10].

Нагадаємо декілька відомих та потрібних нам фактів.

Нехай  $P_C$  — оператор метричного проектування на замкнену опуклу підмножину  $C \subseteq H$ , тобто  $P_C x$  — єдиний елемент  $C$ , що володіє властивістю

$$\|P_C x - x\| = \min_{z \in C} \|z - x\|.$$

Елемент  $P_C x$  можна охарактеризувати таким чином [10, 11]:

$$y = P_C x \Leftrightarrow y \in C \text{ та } (y - x, z - y) \geq 0 \quad \forall z \in C, \quad (4)$$

$$y = P_C x \Leftrightarrow y \in C \text{ та } \|y - z\|^2 \leq \|x - z\|^2 - \|y - x\|^2 \quad \forall z \in C. \quad (5)$$

Оператор метричного проектування  $P_C$  є нерозтягуючий, тобто

$$\|P_C x - P_C y\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in H,$$

точніше, обернено сильно монотонним (1-ко-коерцитивним)

$$\|P_C x - P_C y\| \leq (P_C x - P_C y, x - y) \quad \forall x, y \in H.$$

Варіаційну нерівність (1) можна сформулювати як задачу пошуку нерухомої точки [10, 11]:

$$x = P_C(x - \lambda Ax), \quad (6)$$

де  $\lambda > 0$ .

Формулювання (6) корисне, оскільки веде до ітераційної схеми

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda Ax_n), \quad (7)$$

яка сильно збіжна для ліпшицевих сильно монотонних операторів та слабо збіжна для обернено сильно монотонних (ко-коерцитивних) операторів [10, 11]. Але для ліпшицевих монотонних операторів схема (7) в загальному випадку не збігається.

---

**Зауваження 1.** Варіаційна нерівність (1) записується у формі операторного включення [10]:

$$\text{знайти } x \in H : 0 \in Ax + N_C x,$$

де  $N_C x$  — нормальний конус множини  $C$  в точці  $x$ :

$$N_C x = \begin{cases} \{z \in H : (z, y - x) \leq 0 \ \forall y \in C\}, & \text{якщо } x \in C, \\ \emptyset, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Розглянемо дуальну варіаційну нерівність:

$$\text{знайти } x \in C : (Ay, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (8)$$

Множину розв'язків варіаційної нерівності (8) позначимо  $S^d$ . Відомо, що множина  $S^d$  опукла та замкнена [11]. Нерівність (8) називають слабким або дуальним формулюванням варіаційної нерівності (1) (або нерівністю типу Мінті), а розв'язки нерівності (8) — слабкими розв'язками варіаційної нерівності (1). Для монотонних (псевдомонотонних) операторів  $A$  завжди маємо

$$S \subseteq S^d.$$

А коли оператор  $A$  монотонний та неперервний маємо (лема Мінті, [11])

$$S^d = S.$$

Однією з основних теоретичних задач є оцінка числа ітерацій алгоритму, що необхідне для отримання наближеного розв'язку заданої якості. Якість наближеного розв'язку  $x \in C$  варіаційної нерівності (1) у монотонному випадку будемо оцінювати за допомогою невід'ємної функції зазору [12, 13]

$$\text{gap}(x) = \sup_{y \in C} (Ay, x - y). \quad (9)$$

Очевидно, що для коректності означення функції зазору (9) необхідна обмеженість допустимої множини  $C$ .

**Лема 1** (Nesterov Y., [13]). *Нехай оператор  $A : C \rightarrow H$  — монотонний. Якщо  $x \in C$  — розв'язок (1), то*

$$\text{gap}(x) = 0.$$

*Навпаки, якщо для  $x \in C$  маємо*

$$\text{gap}(x) = 0,$$

*то  $x$  — розв'язок (1).*

Нагадаємо відомі леми про числові нерівності.

**Лема 2.** *Нехай невід'ємні послідовності  $(\alpha_n)$ ,  $(\beta_n)$ , такі, що*

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n - \beta_n, \quad n \geq 1.$$

*Тоді існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \in \mathbb{R}$  та  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < +\infty$ .*

**Лема 3.** Нехай послідовність невід'ємних чисел  $(\xi_n)$  задовольняє рекурентний нерівності

$$\xi_{n+1} \leq (1 - \alpha_n) \xi_n + \alpha_n \beta_n, \quad n \geq 1,$$

де послідовності  $(\alpha_n)$  та  $(\beta_n)$  мають властивості:  $\alpha_n \in (0, 1)$  та  $\beta_n \leq \beta$ , де  $\beta \geq 0$ . Тоді

$$\xi_n \leq e^{-\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k} \xi_1 + \beta.$$

**Лема 4.** Нехай послідовність невід'ємних чисел  $(\xi_n)$  задовольняє рекурентний нерівності

$$\xi_{n+1} \leq (1 - \alpha_n) \xi_n + \alpha_n \beta_n + \gamma_n, \quad n \geq 1,$$

де послідовності  $(\alpha_n)$  та  $(\beta_n)$  мають властивості:

- 1)  $\alpha_n \in (0, 1)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ ;
- 3)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq 0$ ;
- 4)  $\gamma_n \in [0, +\infty)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$ .

Тоді  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$ .

**Лема 5** (Maingé P.-E., [14]). Нехай числова послідовність  $(\alpha_n)$  має підпослідовність  $(\alpha_{n_k})$  з властивістю  $\alpha_{n_k} < \alpha_{n_k+1}$  для всіх  $k \geq 1$ . Тоді існує така неспадна послідовність  $(m_k)$  натуральних чисел, що

$$m_k \rightarrow +\infty$$

та

$$\alpha_{m_k} \leq \alpha_{m_k+1}, \quad \alpha_k \leq \alpha_{m_k+1}$$

для всіх  $k \geq n_1$ .

При доведенні слабкої збіжності послідовностей елементів гільбертового простору будемо використовувати відому лему Опяла.

**Лема 6** (Z. Oriá, [15]). Нехай послідовність  $(x_n)$  елементів гільбертового простору  $H$  слабо збігається до точки  $x \in H$ . Тоді для всіх  $y \in H \setminus \{x\}$  маємо

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|.$$

## 2. АЛГОРИТМ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ З МИНУЛОГО

Для розв'язання задачі (1) розглянемо такий ітераційний алгоритм.

### Алгоритм 1. Алгоритм екстраполяції з минулого.

Для  $x_1 = y_0 \in C$  генеруємо послідовність елементів  $x_n, y_n \in C$  за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n A y_{n-1}), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n A y_n), \end{cases}$$

де  $\lambda_n > 0$ .

**Зауваження 2.** Частинний випадок алгоритму 1 запропонований Поповим [2] для пошуку сідлових точок опукло-угнутих функцій, що задані в скінченномірному евклідовому просторі. Останнім часом цей метод став відомим у середовищі спеціалістів з машинного навчання під назвою «Extrapolation from the Past» (екстраполяція з минулого) [3]. Дослідженню та розробці модифікацій цього методу присвячено роботи [16–33]. Модифікація алгоритму Попова з одним метричним проектуванням на допустиму множину запропонована в [17], Варіантам методу для задач про рівновагу присвячено роботи [22, 23], модифікації з бегманівською відстанню досліджено в [23–27], методи для задач в просторах Адамара запропоновані в [28–31]. Регуляризовані методи та модифікації для дворівневих задач досліджено в [32, 33]. У роботі уточнюються та узагальнюються результати вказаних робіт.

При виконанні для деякого  $n \in \mathbb{N}$  в алгоритмі 1 рівностей

$$y_n = y_{n-1} = x_n \quad \text{або} \quad x_{n+1} = x_n = y_n \quad (10)$$

має місце включення  $y_n \in S$ . Дійсно, рівність

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n A y_n)$$

рівносильна нерівності

$$(A y_n, y - x_{n+1}) + \frac{(x_{n+1} - x_n, y - x_{n+1})}{\lambda_n} \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

З другої рівності (10) випливає

$$(A y_n, y - y_n) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

тобто,  $y_n \in S$ .

Аналогічно, з

$$(A y_{n-1}, y - y_n) + \frac{(y_n - x_n, y - y_n)}{\lambda_n} \geq 0 \quad \forall y \in C$$

при першій рівності в (10) отримуємо  $y_n \in S$ .

Далі припустимо, що для всіх номерів  $n \in \mathbb{N}$  умова (10) не має місця.

### 3. СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ ТА СУБЛІНІЙНА ОЦІНКА

Припустимо додатково, що оператор  $A$  є псевдомонотонним.

**Лема 7.** Для породжених алгоритмом 1 послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  та точки  $z \in S$  виконується нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \lambda_n L) \|x_{n+1} - y_n\|^2 - \\ &\quad - (1 - 2\lambda_n L) \|y_n - x_n\|^2 + 2\lambda_n L \|x_n - y_{n-1}\|^2. \end{aligned} \quad (11)$$

*Доведення.* Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &= \|x_n - z\|^2 - \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - z) = \\ &= \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 - \\ &\quad - 2(x_n - y_n, y_n - x_{n+1}) + 2(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - z). \end{aligned} \quad (12)$$

З правила породження точок  $x_{n+1}$  та  $y_n$  випливає

$$\lambda_n(Ay_n, z - x_{n+1}) \geq (x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - z), \quad (13)$$

$$\lambda_n(Ay_{n-1}, x_{n+1} - y_n) \geq -(x_n - y_n, y_n - x_{n+1}). \quad (14)$$

Використавши нерівності (13), (14) для оцінки скалярних добутків в (12), отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &\quad + 2\lambda_n \{(Ay_{n-1}, x_{n+1} - y_n) + (Ay_n, z - x_{n+1})\} = \\ &= \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &\quad + 2\lambda_n \{(Ay_n, z - y_n) + (Ay_{n-1}, x_{n+1} - y_n) + (Ay_n, y_n - x_{n+1})\}. \end{aligned} \quad (15)$$

З псевдомонотонності оператора  $A$  та включення  $z \in S$  випливає

$$(Ay_n, z - y_n) \leq 0,$$

а ліпшицевість  $F$  гарантує виконання нерівності

$$\begin{aligned} (Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n) &\leq L \|y_{n-1} - y_n\| \|x_{n+1} - y_n\| \leq \\ &\leq \frac{L}{2} \|y_{n-1} - y_n\|^2 + \frac{L}{2} \|y_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Використавши вищенаведені оцінки в (15), отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &\quad + \lambda_n L \|y_{n-1} - y_n\|^2 + \lambda_n L \|y_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Член  $\|y_{n-1} - y_n\|^2$  оцінимо таким чином

$$\|y_{n-1} - y_n\|^2 \leq 2 \|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2 \|y_n - x_n\|^2.$$

Ураховуючи цю оцінку в (16), приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &\quad + 2\lambda_n L \|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2\lambda_n L \|y_n - x_n\|^2 + \lambda_n L \|y_n - x_{n+1}\|^2, \end{aligned}$$

тобто, до нерівності (11).  $\square$

**Зауваження 3.** Для монотонних операторів нерівність леми 7 отримана в [17].

Перейдемо безпосередньо до доведення слабкої збіжності алгоритму 1.

Нехай  $z \in S$ . Покладемо

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \|x_n - z\|^2 + 2\lambda_n L \|y_{n-1} - x_n\|^2, \\ \beta_n &= (1 - 2\lambda_n L) \|y_n - x_n\|^2 + (1 - 2\lambda_{n+1} L - \lambda_n L) \|y_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Тоді (11) приймає вигляд

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n - \beta_n.$$

Вимагатимемо виконання умови

$$0 < \underline{\lambda} \leq \lambda_n \leq \bar{\lambda} < \frac{1}{3L}.$$

Тоді з леми 2 можемо зробити висновок, що існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \|x_n - z\|^2 + 2\lambda_n L \|y_{n-1} - x_n\|^2 \right)$$

та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( (1 - 2\lambda_n L) \|y_n - x_n\|^2 + (1 - 2\lambda_{n+1} L - \lambda_n L) \|y_n - x_{n+1}\|^2 \right) = 0.$$

Звідки отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_{n+1}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{n+1}\| = 0 \quad (17)$$

та збіжність числових послідовностей  $(\|x_n - z\|)$ ,  $(\|y_n - z\|)$  для всіх  $z \in S$ . Зокрема, послідовності  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  обмежені.

З (17) випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Ay_n, x_{n+1} - y_n) = 0. \quad (18)$$

Розглянемо підпослідовність  $(x_{n_k})$ , слабо збіжну до деякої точки  $\bar{z} \in C$ . Тоді з (17) випливає, що й  $y_{n_k} \rightharpoonup \bar{z}$ . Припустимо, що оператор  $A$  монотонний та покажемо, що  $\bar{z} \in S$ . Маємо

$$(Ay_n, y - y_n) \geq (Ay_n, x_{n+1} - y_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - y)}{\lambda_n} \quad \forall y \in C. \quad (19)$$

Здійснивши граничний перехід в (19) з урахуванням (17), (18) та умови монотонності оператора  $A$ , отримаємо

$$\begin{aligned} (Ay, y - \bar{z}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (Ay, y - y_{n_k}) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} (Ay_{n_k}, y - y_{n_k}) \geq \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ (Ay_{n_k}, x_{n_k+1} - y_{n_k}) + \frac{(x_{n_k+1} - x_{n_k}, x_{n_k+1} - y)}{\lambda_{n_k}} \right\} = 0 \quad \forall y \in C, \end{aligned}$$

тобто,  $\bar{z} \in S$ .

Покажемо тепер, що  $x_n \rightharpoonup \bar{z}$ . Тоді з  $x_n - y_n \rightarrow 0$  випливає, що й послідовність  $(y_n)$  слабо збігається  $\bar{z}$ . Міркуємо від супротивного. Нехай існує така підпослідовність  $(x_{m_k})$ , що  $x_{m_k} \rightharpoonup \tilde{z}$  та  $\tilde{z} \neq \bar{z}$ . Ясно, що  $\tilde{z} \in S$ . Застосуємо двічі лему 6. Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{z}\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - \bar{z}\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - \tilde{z}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \tilde{z}\| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{m_k} - \tilde{z}\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{m_k} - \bar{z}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{z}\|, \end{aligned}$$

що неможливо. Отже,  $x_n \rightharpoonup \bar{z}$ .

Таким чином, має місце

**Теорема 1.** *Нехай  $H$  – гільбертовий простір,  $C \subseteq H$  – непорожня опукла замкнена множина,  $A : H \rightarrow H$  – монотонний та  $L$ -ліпшицевий на множині  $C$  оператор та  $S \neq \emptyset$ . Припустимо, що*

$$\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \subseteq \left(0, \frac{1}{3L}\right).$$

*Тоді породжені алгоритмом 1 послідовності  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  слабо збігаються до розв'язку  $\bar{z} \in S$  варіаційної нерівності (1), причому*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

У випадку обмеженості допустимої множини  $C$  доведемо, що алгоритму 1 необхідно зробити  $O\left(\frac{LD^2}{\varepsilon}\right)$  ітерацій для отримання точки  $x \in C$  з

$$\text{gap}(x) \leq \varepsilon,$$

де  $\varepsilon > 0$ ,  $D = \sup_{a,b \in C} \|a - b\| < +\infty$ .

Нехай  $y \in C$ . Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - y\|^2 &\leq \|x_n - y\|^2 - (1 - \lambda_n L) \|x_{n+1} - y_n\|^2 - \\ &\quad - (1 - 2\lambda_n L) \|y_n - x_n\|^2 + 2\lambda_n L \|x_n - y_{n-1}\|^2 + 2\lambda_n (Ay_n, y - y_n). \end{aligned} \quad (20)$$

З монотонності оператора  $A$  та (20) випливає

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - y\|^2 &\leq \|x_n - y\|^2 - (1 - \lambda_n L) \|x_{n+1} - y_n\|^2 - \\ &\quad - (1 - 2\lambda_n L) \|y_n - x_n\|^2 + 2\lambda_n L \|x_n - y_{n-1}\|^2 + 2\lambda_n (Ay, y - y_n). \end{aligned} \quad (21)$$

Перепишемо (21) у вигляді

$$\begin{aligned} 2\lambda_n (Ay, y_n - y) &\leq \left( \|x_n - y\|^2 + 2\lambda_n L \|x_n - y_{n-1}\|^2 \right) - \\ &\quad - \left( \|x_{n+1} - y\|^2 + 2\lambda_{n+1} L \|x_{n+1} - y_n\|^2 \right) - \\ &\quad - (1 - 2\lambda_{n+1} L - \lambda_n L) \|x_{n+1} - y_n\|^2 - \\ &\quad - (1 - 2\lambda_n L) \|y_n - x_n\|^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Припустимо, що  $\lambda_n \in (0, \frac{1}{3L}]$ . Тоді з (22) випливає

$$\begin{aligned} 2\lambda_n (Ay, y_n - y) &\leq \left( \|x_n - y\|^2 + 2\lambda_n L \|x_n - y_{n-1}\|^2 \right) - \\ &\quad - \left( \|x_{n+1} - y\|^2 + 2\lambda_{n+1} L \|x_{n+1} - y_n\|^2 \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Просумувавши (23) по  $n$  від 1 до  $N$  отримаємо

$$2 \sum_{n=1}^N \lambda_n (Ay, y_n - y) \leq \|x_1 - y\|^2 + 2\lambda_1 L \|x_1 - y_0\|^2,$$

та

$$(Ay, z_N - y) \leq \frac{\|x_1 - y\|^2}{2 \sum_{n=1}^N \lambda_n}, \quad (24)$$

де  $z_N = \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n y_n}{\sum_{n=1}^N \lambda_n}$ . Переходимо до супремуму по  $y \in C$  в (23)

$$\text{gap}(z_N) \leq \frac{\sup_{y \in C} \|x_1 - y\|^2}{2 \sum_{n=1}^N \lambda_n}.$$

Таким чином, має місце

**Теорема 2.** *Нехай  $H$  — гільбертовий простір,  $C \subseteq H$  — непорожня опукла замкнена обмежена множина,  $A : H \rightarrow H$  — монотонний та*

$L$ -ліпшицевий на множині  $C$  оператор. Нехай  $(y_n)$  – послідовність, що породжена алгоритмом 1 з  $\lambda_n = \frac{1}{3L}$ , тобто,

$$\begin{cases} x_1 = y_0 \in C, \\ y_n = P_C(x_n - \frac{1}{3L}Ay_{n-1}), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \frac{1}{3L}Ay_n). \end{cases}$$

Тоді для послідовності середніх  $z_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n$  має місце оцінка

$$\text{gap}(z_N) \leq \frac{3L \sup_{y \in C} \|x_1 - y\|^2}{2N}.$$

#### 4. СИЛЬНА ЗБІЖНІСТЬ

Припустимо, що оператор  $A : H \rightarrow H$  є рівномірно монотонним на обмежених підмножинах множини  $C \subseteq H$ . Тоді варіаційна нерівність (1) має єдиний розв'язок  $\bar{z} \in C$ .

Покажемо, що породжені алгоритмом 1 послідовності  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  сильно збігаються до  $\bar{z}$ .

Оскільки множина  $\{y_n\} \cup \{\bar{z}\} \subseteq C$  обмежена, то якщо існує така зростаюча функція  $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $\phi(0) = 0$  та  $\phi(t) > 0$  для  $t > 0$ , що

$$(Ay_n, \bar{z} - y_n) \leq -\phi(\|\bar{z} - y_n\|).$$

Замість нерівності леми 7 запишемо її уточнену версію

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - \bar{z}\|^2 + 2\lambda_n \phi(\|\bar{z} - y_n\|) &\leq \|x_n - \bar{z}\|^2 - (1 - \lambda_n L) \|x_{n+1} - y_n\|^2 - \\ &- (1 - 2\lambda_n L) \|y_n - x_n\|^2 + 2\lambda_n L \|x_n - y_{n-1}\|^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Перепишемо (25) у вигляді

$$\begin{aligned} 2\lambda_n \phi(\|\bar{z} - y_n\|) &\leq \left( \|x_n - \bar{z}\|^2 + 2\lambda_n L \|x_n - y_{n-1}\|^2 \right) - \\ &- \left( \|x_{n+1} - \bar{z}\|^2 + 2\lambda_{n+1} L \|x_{n+1} - y_n\|^2 \right) - \\ &- (1 - 2\lambda_{n+1} L - \lambda_n L) \|x_{n+1} - y_n\|^2 - \\ &- (1 - 2\lambda_n L) \|y_n - x_n\|^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Нерівність (26) та припущення  $\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \subseteq (0, \frac{1}{3L})$  дають

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi(\|\bar{z} - y_n\|) < +\infty \quad \text{та} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\|\bar{z} - y_n\|) = 0.$$

Отже,  $\|\bar{z} - y_n\| \rightarrow 0$  та  $\|\bar{z} - x_n\| \rightarrow 0$ .

Таким чином, має місце

**Теорема 3.** Нехай  $H$  – гільбертовий простір,  $C \subseteq H$  – непорожня опукла замкнена множина,  $A : H \rightarrow H$  – рівномірно монотонний на обмежених підмножинах множини  $C \subseteq H$  та  $L$ -ліпшицевий на множині  $C$

оператор,  $\bar{z} \in C$  — єдиний розв'язок варіаційної нерівності (1). Припустимо, що  $\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \subseteq (0, \frac{1}{3L})$ . Тоді породжені алгоритмом 1 послідовності  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  сильно збігаються до  $\bar{z}$ .

### 5. ЛІНІЙНА ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ

Припустимо, що існує єдиний розв'язок  $z \in C$  варіаційної нерівності (1), а оператор  $A$  задовольняє умову

$$(Ax, x - z) \geq \mu \|x - z\|^2 \quad \forall x \in C \quad (27)$$

для деякого  $\mu > 0$ .

**Зауваження 4.** Умова (27) випливає з сильної монотонності  $A$ . Але існують немонотонні оператори з (27). Наприклад [34],

$$Ax = (2 - \|x\|)x, \quad x \in C = \left\{ x \in \ell_2 : \|x\| \leq \frac{3}{2} \right\}.$$

Розглянемо варіант алгоритму 1 з лінійною швидкістю збіжності для варіаційної нерівності (1), де ліпшицевий оператор  $A$  задовольняє (27).

#### Алгоритм 2.

Для  $x_1 = y_0 \in C$  генерируємо послідовність елементів  $x_n, y_n \in C$  за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_n = P_C \left( x_n - \frac{1}{4L} Ay_{n-1} \right), \\ x_{n+1} = P_C \left( x_n - \frac{1}{4L} Ay_n \right). \end{cases}$$

Покажемо, що

$$\|x_{n+1} - z\|^2 = O\left(\left(1 - \frac{\mu}{4L}\right)^n\right), \quad \|y_n - x_{n+1}\|^2 = \left(\left(1 - \frac{\mu}{4L}\right)^n\right).$$

Запишемо нерівність (15):

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &\quad + 2\lambda \{(Ay_n, z - y_n) + (Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n)\}. \end{aligned}$$

З умови (27) та нерівності  $\|a + b\|^2 \leq 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$  випливає

$$(Ay_n, y_n - z) \geq \mu \|y_n - z\|^2 \geq \mu \left( \frac{1}{2} \|x_n - z\|^2 - \|y_n - x_n\|^2 \right),$$

а ліпшицевість  $A$  гарантує виконання нерівності

$$\begin{aligned} (Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n) &\leq L \|y_{n-1} - y_n\| \|x_{n+1} - y_n\| \leq \\ &\leq \frac{L}{2} \|y_{n-1} - y_n\|^2 + \frac{L}{2} \|y_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Використавши вищенаведені оцінки, отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq (1 - \lambda\mu) \|x_n - z\|^2 - (1 - 2\lambda\mu) \|x_n - y_n\|^2 - \\ &\quad - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \lambda L \|y_{n-1} - y_n\|^2 + \lambda L \|y_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Член  $\|y_{n-1} - y_n\|^2$  оцінимо таким чином

$$\|y_{n-1} - y_n\|^2 \leq 2\|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2\|y_n - x_n\|^2.$$

Ураховуючи цю оцінку в (28), приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq (1 - \lambda\mu)\|x_n - z\|^2 - (1 - 2\lambda L - 2\lambda\mu)\|x_n - y_n\|^2 - \\ &\quad - (1 - 2\lambda L)\|y_n - x_{n+1}\|^2 + 2\lambda L\|y_{n-1} - x_n\|^2. \end{aligned}$$

Перепишемо останню нерівність у вигляді

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 + \frac{2\lambda L}{1 - \lambda\mu}\|y_n - x_{n+1}\|^2 &\leq \\ &\leq (1 - \lambda\mu)\left(\|x_n - z\|^2 + \frac{2\lambda L}{1 - \lambda\mu}\|y_{n-1} - x_n\|^2\right) - \\ &\quad - (1 - 2\lambda L - 2\lambda\mu)\|x_n - y_n\|^2 - \\ &\quad - \left(1 - 2\lambda L - \frac{2\lambda L}{1 - \lambda\mu}\right)\|y_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Для  $\lambda = \frac{1}{4L}$  отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 + \frac{2L}{4L - \mu}\|y_n - x_{n+1}\|^2 &\leq \\ &\leq \left(1 - \frac{\mu}{4L}\right)\left(\|x_n - z\|^2 + \frac{2L}{4L - \mu}\|y_{n-1} - x_n\|^2\right). \end{aligned}$$

Таким чином, має місце

**Теорема 4.** Нехай  $H$  – гільбертовий простір,  $C \subseteq H$  – непорожня опукла замкнена множина,  $A : H \rightarrow H$  –  $L$ -ліпшицевий на множині  $C$  оператор, існує єдиний розв'язок  $z \in C$  варіаційної нерівності (1) та виконується умова (27). Тоді для породжених алгоритмом 2 послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  виконується оцінка

$$\|x_{n+1} - z\|^2 + \frac{1}{2}\|y_n - x_{n+1}\|^2 \leq \left(1 - \frac{\mu}{4L}\right)^n \|x_1 - z\|^2, \quad n \geq 1.$$

**Зауваження 5.** З теореми 4 випливають оцінки

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq e^{-\frac{\mu}{4L}n} \|x_1 - z\|^2, \quad \|y_n - x_{n+1}\|^2 \leq e^{-\frac{\mu}{4L}n} 4 \|x_1 - z\|^2.$$

**Зауваження 6.** Для сильно монотонних та ліпшицевих операторів та алгоритму 2 оцінка  $\|x_{n+1} - z\|^2 = O\left(e^{-\frac{\mu}{4L}n}\right)$  отримана в [3].

## 6. АДАПТИВНИЙ АЛГОРИТМ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ З МИНУЛОГО

Для наближеного розв'язання задачі (1) розглянемо алгоритм екстраполяції з минулого з адаптивним вибором  $\lambda_n$ .

### Алгоритм 3.

Обираємо елементи  $x_1 = y_0 \in C$ ,  $\tau \in (0, \frac{1}{3})$ ,  $\lambda_1 \in (0, +\infty)$ . Покладаємо  $n = 1$ .

**1:** Обчислити

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n A y_{n-1}).$$

**2:** Обчислити

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n A y_n).$$

Якщо  $x_{n+1} = x_n = y_n$ , то зупинити та  $x_n$  — розв'язок. Інакше перейти на крок **3**.

**3:** Обчислити

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо } (A y_{n-1} - A y_n, x_{n+1} - y_n) \leq 0, \\ \min \left\{ \lambda_n, \frac{\tau}{2} \frac{\|y_{n-1} - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2}{(A y_{n-1} - A y_n, x_{n+1} - y_n)} \right\}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти  $n := n + 1$  та перейти на **1**.

**Зауваження 7.** Схема, що подібна алгоритму 3, запропонована для задач про рівновагу в просторах Адамара в [30].

**Зауваження 8.** Результати, аналогічні наведеним нижче, мають місце для модифікації алгоритму 3 з заміною інструкції перерахунку  $\lambda_n$  на таку

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min \left\{ \lambda_n, \tau \frac{\|y_{n-1} - y_n\|}{\|A y_{n-1} - A y_n\|} \right\}, & \text{якщо } A y_{n-1} \neq A y_n, \\ \lambda_n, & \text{інакше.} \end{cases}$$

де  $\tau \in (0, \frac{1}{3})$  [27].

Параметр  $\lambda_{n+1}$  залежить від розташування точок  $y_{n-1}$ ,  $y_n$ ,  $x_{n+1}$ , значень  $A y_{n-1}$ ,  $A y_n$ . Інформація про константу  $L$  не використовується. Очевидно, що послідовність  $(\lambda_n)$  незростаюча. Також вона обмежена знизу числом

$$\min \left\{ \lambda_1, \frac{\tau}{L} \right\}.$$

Дійсно, маємо

$$(A y_{n-1} - A y_n, x_{n+1} - y_n) \leq \frac{L}{2} (\|y_{n-1} - y_n\|^2 + \|y_n - x_{n+1}\|^2).$$

Для послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$ , породжених алгоритмом 3, мають місце нерівності

$$\begin{aligned} (A y_{n-1}, y_n - y) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_n} (\|y - x_n\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - y\|^2) \quad \forall y \in C, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} (A y_n, x_{n+1} - y) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_n} (\|y - x_n\|^2 - \|x_n - x_{n+1}\|^2 - \|x_{n+1} - y\|^2) \quad \forall y \in C. \end{aligned} \quad (30)$$

**Зауваження 9.** Зокрема, нерівність (30) дає обґрунтування правила зупинки алгоритму 3. Дійсно, при  $x_{n+1} = x_n = y_n$  із (30) випливає

$$(A y_n, y_n - y) \leq 0 \quad \forall y \in C,$$

тобто  $x_n = y_n \in S$ .

**Зауваження 10.** Можна використовувати для зупинки алгоритму 3 правило  $x_n = y_n = y_{n-1}$ , яке гарантує  $x_n \in S$ .

Доведемо основну оцінку, яка пов'язує відстані між породженими алгоритмом 3 точками і довільним елементом множини розв'язків  $S$ .

Припустимо додатково, що оператор  $A$  є псевдомонотонним.

**Лема 8.** Для послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$ , породжених алгоритмом 3, має місце нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 \leq & \|x_n - z\|^2 - \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \|x_{n+1} - y_n\|^2 - \\ & - \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \|x_n - y_n\|^2 + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_n - y_{n-1}\|^2, \end{aligned} \quad (31)$$

де  $z \in S$ .

*Доведення.* Нехай  $z \in S$ . Із псевдомонотонності оператора  $A$  випливає

$$(Ay_n, z - y_n) \leq 0. \quad (32)$$

Із (32) і (30) випливає

$$2\lambda_n(Ay_n, x_{n+1} - y_n) \leq \|z - x_n\|^2 - \|x_n - x_{n+1}\|^2 - \|x_{n+1} - z\|^2. \quad (33)$$

Склавши нерівності (33) та нерівність, що випливає з (29)

$$2\lambda_n(Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1}) \leq \|x_{n+1} - x_n\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2$$

маємо

$$\begin{aligned} 2\lambda_n(Ay_{n-1} - Ay_n, y_n - x_{n+1}) \leq & \|z - x_n\|^2 - \\ & - \|z - x_{n+1}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|x_{n+1} - y_n\|^2. \end{aligned} \quad (34)$$

З правила обчислення  $\lambda_{n+1}$  випливає нерівність

$$(Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \leq \frac{\tau}{2\lambda_{n+1}} (\|y_{n-1} - y_n\|^2 + \|y_n - x_{n+1}\|^2). \quad (35)$$

Для оцінки виразу  $(Ay_{n-1} - Ay_n, y_n - x_{n+1})$  в (34) скористаємося (35). Отримаємо

$$\begin{aligned} \|z - x_{n+1}\|^2 \leq & \|z - x_n\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|x_{n+1} - y_n\|^2 + \\ & + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} (\|y_{n-1} - y_n\|^2 + \|y_n - x_{n+1}\|^2). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\|y_{n-1} - y_n\|^2 \leq 2\|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2\|y_n - x_n\|^2,$$

то

$$\begin{aligned} \|z - x_{n+1}\|^2 \leq & \|z - x_n\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|x_{n+1} - y_n\|^2 + \\ & + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|y_n - x_n\|^2 + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|y_n - x_{n+1}\|^2, \end{aligned}$$

що і треба було довести.  $\square$

Сформулюємо основний результат.

**Теорема 5.** Нехай  $H$  — гільбертовий простір,  $C \subseteq H$  — непорожня опукла замкнена множина,  $A : H \rightarrow H$  — монотонний та  $L$ -ліпшицевий на множині  $C$  оператор та  $S \neq \emptyset$ . Тоді породжені алгоритмом 3 послідовності  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  слабо збігаються до розв'язку  $\bar{z} \in S$  варіаційної нерівності (1), причому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - y_n\| = 0.$$

*Доведення.* Нехай  $z' \in S$ . Покладемо

$$\alpha_n = \|x_n - z'\|^2 + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_n - y_{n-1}\|^2,$$

$$\beta_n = \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \|y_n - x_n\|^2 + \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \|x_{n+1} - y_n\|^2.$$

Нерівність (31) набуває вигляду

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n - \beta_n.$$

Оскільки існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n > 0$ , то

$$1 - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \rightarrow 1 - 2\tau \in (0, 1) \quad \text{і} \quad 1 - 2\tau \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \rightarrow 1 - 3\tau \in (0, 1)$$

при  $n \rightarrow \infty$ . З леми 2 можемо зробити висновок, що існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \|x_n - z'\|^2 + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_n - y_{n-1}\|^2 \right)$$

та збігається числовий ряд

$$\sum_n \left( \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \|y_n - x_n\|^2 + \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \|x_{n+1} - y_n\|^2 \right).$$

Звідки отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - y_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0 \quad (36)$$

і збіжність числових послідовностей  $(\|x_n - z'\|)$ ,  $(\|y_n - z'\|)$  для всіх  $z' \in S$ . Зокрема, послідовності  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  обмежені.

Розглянемо підпослідовність  $(x_{n_k})$ , слабо збіжну до деякої точки  $\bar{z} \in C$ . Тоді з (36) випливає, що й  $y_{n_k} \rightharpoonup \bar{z}$ . Покажемо, що  $\bar{z} \in S$ . Маємо

$$(Ay_n, y - y_n) \geq (Ay_n, x_{n+1} - y_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - y)}{\lambda_n} \quad \forall y \in C. \quad (37)$$

З (36) випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Ay_n, x_{n+1} - y_n) = 0. \quad (38)$$

Здійснивши граничний перехід в (37) з урахуванням (36), (38) та умови монотонності оператора  $A$ , отримуємо

$$\begin{aligned} (Ay, y - \bar{z}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (Ay, y - y_{n_k}) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} (Ay_{n_k}, y - y_{n_k}) \geq \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ (Ay_{n_k}, x_{n_k+1} - y_{n_k}) + \frac{(x_{n_k+1} - x_{n_k}, x_{n_k+1} - y)}{\lambda_{n_k}} \right\} = 0 \quad \forall y \in C, \end{aligned}$$

тобто,  $\bar{z} \in S$ .

Покажемо тепер, що  $x_n \rightharpoonup \bar{z} \in S$ . Тоді з  $x_n - y_n \rightarrow 0$  випливає, що й послідовність  $(y_n)$  слабо збігається  $\bar{z}$ . Міркуємо від супротивного. Нехай існує така підпослідовність  $(x_{m_k})$ , що  $x_{m_k} \rightharpoonup \tilde{z}$  та  $\tilde{z} \neq \bar{z}$ . Ясно, що  $\tilde{z} \in S$ . Застосуємо двічі лему 6. Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{z}\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - \bar{z}\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - \tilde{z}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \tilde{z}\| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{m_k} - \tilde{z}\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{m_k} - \bar{z}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{z}\|, \end{aligned}$$

що неможливо. Отже,  $x_n \rightharpoonup \bar{z}$ .  $\square$

## 7. РЕГУЛЯРИЗОВАНИЙ АЛГОРИТМ

Для непорожньої опуклої замкненої множини  $C \subseteq H$ , монотонного ліпшицевого оператора  $A : H \rightarrow H$  та  $z \in H$  розглянемо задачу:

$$\text{знайти } x^* = P_S z, \quad (39)$$

де  $S = \{x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C\}$ .

Будемо звичайно припускати, що  $S \neq \emptyset$ . Задача (39) має єдиний розв'язок [11].

**Зауваження 11.** Відомим окремим випадком (39) є задача пошуку нормального розв'язку варіаційної нерівності (при  $z = 0$ ).

Апроксимуємо задачу (39) однорівневою та більш регулярною варіаційною нерівністю.

Розглянемо допоміжну задачу:

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) + \varepsilon(x - z, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (40)$$

де  $\varepsilon > 0$ .

**Зауваження 12.** Варіаційну нерівність (40) називають апроксимацією Тихонова–Браудера задачі (39) [35]. Для розв'язання екстремальних задач подібна апроксимація була запропонована А. М. Тихоновим для побудови регуляризуючих алгоритмів, а пізніше Ф. Browder [36, 37] застосував подібну схему для стійкої апроксимації нормального розв'язку варіаційної нерівності або проекції заданої точки на множину нерухомих точок нерозтягуючих операторів.

З результатів [38] випливає існування та єдиність розв'язку  $x_\varepsilon \in C$  задачі (40) для довільного  $\varepsilon > 0$ .

Елементи  $x_\varepsilon \in C$  мають декілька важливих властивостей [33].

**Лема 9.** *Справедливі такі нерівності:*

- (i)  $\|x_\varepsilon\| \leq \|x^* - z\| + \|x^*\|$  для всіх  $\varepsilon > 0$ ;
- (ii)  $\|x_\varepsilon - x_\delta\| \leq \frac{|\varepsilon - \delta|}{\varepsilon} 2\|x^* - z\|$  для всіх  $\varepsilon, \delta > 0$ .

При прямуванні малого додатнього параметру  $\varepsilon$  до нуля елементи  $x_\varepsilon$  сильно збігаються до розв'язку задачі (39).

**Лема 10.** *Має місце*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|x_\varepsilon - x^*\| = 0.$$

Перейдемо до опису алгоритму розв'язання задачі (39).

Відштовхуючись від алгоритму 1, для розв'язання задачі (39) пропонуємо такий

#### Алгоритм 4.

Для  $z \in H$ ,  $x_1 = y_0 \in C$  генеруємо послідовність елементів  $x_n, y_n \in C$  за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_n = P_C(\alpha_n \lambda_n z + (1 - \alpha_n \lambda_n)x_n - \lambda_n A y_{n-1}), \\ x_{n+1} = P_C(\alpha_n \lambda_n z + (1 - \alpha_n \lambda_n)x_n - \lambda_n A y_n), \end{cases}$$

де  $\lambda_n > 0$ ,  $\alpha_n > 0$ .

Відносно параметрів алгоритму 4 будемо припускати, що виконані такі умови:

- (A1)  $\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \subseteq (0, \frac{1}{3L})$ , де  $L > 0$  — стала Лібшиця оператора  $A$ ;
- (A2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ;
- (A3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ ;
- (A4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_n^2} = 0$ .

**Зауваження 13.** В якості допустимої послідовності  $(\alpha_n)$  можна обрати таку:

$$\alpha_n = \frac{1}{(n+1)^p}, \quad p \in (0, 1).$$

**Зауваження 14.** В [39] для був запропонований та обґрунтований близький алгоритм:

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ z_n = P_C(x_n - \lambda_n A y_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n z + (1 - \alpha_n)z_n. \end{cases}$$

Алгоритм 4 поєднує у собі ідеї методу екстраполяції з минулого (алгоритм 1) та ітеративної регуляризації [35]. Доведення його сильної збіжності проведемо за такою схемою. Нехай  $x_{\alpha_n}$  — розв'язок задачі (40) при  $\varepsilon = \alpha_n$ . Оскільки

$$\|x_n - x^*\| \leq \|x_n - x_{\alpha_n}\| + \|x_{\alpha_n} - x^*\|, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{\alpha_n} - x^*\| = 0,$$

то достатньо показати, що породжена алгоритмом 4 послідовність  $(x_n)$  має властивість

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{\alpha_n}\| = 0.$$

Доведення збіжності алгоритму 4 почнемо з доведення важливої нерівності для згенерованих ним послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  та елементів  $x_{\alpha_n}$ .

**Лема 11.** *Для породжених алгоритмом 4 послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  та елементів  $x_{\alpha_n}$  виконується нерівність*

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 &\leq (1 - \alpha_n \lambda_n) \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \\ &\quad - (1 - 2\lambda_n L - \alpha_n \lambda_n) \|x_n - y_n\|^2 - (1 - \lambda_n L) \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &\quad + 2\lambda_n L \|y_{n-1} - x_n\|^2. \end{aligned} \quad (41)$$

*Доведення.* Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 &= \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - x_{\alpha_n}) = \\ &= \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 - \\ &\quad - 2(x_n - y_n, y_n - x_{n+1}) + 2(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - x_{\alpha_n}). \end{aligned} \quad (42)$$

З визначення точок  $x_{n+1}$  та  $y_n$  випливає

$$\lambda_n(Ay_n, x_{\alpha_n} - x_{n+1}) \geq (x_{n+1} - x_n + \alpha_n \lambda_n(x_n - z), x_{n+1} - x_{\alpha_n}), \quad (43)$$

$$\lambda_n(Ay_{n-1}, x_{n-1} - y_n) \geq -(x_n - \alpha_n \lambda_n(x_n - z) - y_n, y_n - x_{n+1}). \quad (44)$$

Використовуючи нерівності (43), (44) для оцінки скалярних добутків в (42), отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 &\leq \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &\quad + 2\lambda_n \{(Ay_{n-1}, x_{n+1} - y_n) + (Ay_n, x_{\alpha_n} - x_{n+1})\} + \\ &\quad + 2\alpha_n \lambda_n(x_n - z, x_{\alpha_n} - y_n) = \\ &= \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &\quad + 2\lambda_n \{(Ay_n, x_{\alpha_n} - y_n) + (Ay_{n-1}, x_{n+1} - y_n) + (Ay_n, y_n - x_{n+1})\} + \\ &\quad + 2\alpha_n \lambda_n(x_n - z, x_{\alpha_n} - y_n). \end{aligned} \quad (45)$$

Ліпшицевість оператора  $A$  гарантує виконання нерівності

$$\begin{aligned} (Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n) &\leq L \|y_{n-1} - y_n\| \|x_{n+1} - y_n\| \leq \\ &\leq \frac{L}{2} \|y_{n-1} - y_n\|^2 + \frac{L}{2} \|y_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Використавши вищенаведену оцінку в (45), отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 &\leq \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &\quad + \lambda_n L \|y_{n-1} - y_n\|^2 + \lambda_n L \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &\quad + 2\alpha_n \lambda_n(x_n - z, x_{\alpha_n} - y_n) + 2\lambda_n(Ay_n, x_{\alpha_n} - y_n). \end{aligned} \quad (46)$$

Член  $\|y_{n-1} - y_n\|^2$  оцінимо таким чином

$$\|y_{n-1} - y_n\|^2 \leq 2\|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2\|y_n - x_n\|^2.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 &\leq \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &+ 2\lambda_n L \|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2\lambda_n L \|y_n - x_n\|^2 + \lambda_n L \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &+ 2\alpha_n \lambda_n (x_n - z, x_{\alpha_n} - y_n) + 2\lambda_n (Ay_n, x_{\alpha_n} - y_n). \end{aligned} \quad (47)$$

З монотонності оператора  $A$  випливає

$$(Ay_n, x_{\alpha_n} - y_n) \leq -(Ax_{\alpha_n}, y_n - x_{\alpha_n}),$$

звідки

$$(Ay_n, x_{\alpha_n} - y_n) - \alpha_n (x_{\alpha_n} - z, y_n - x_{\alpha_n}) \leq -(Ax_{\alpha_n}, y_n - x_{\alpha_n}) - \alpha_n (x_{\alpha_n} - z, y_n - x_{\alpha_n}).$$

Оскільки

$$(Ax_{\alpha_n}, y_n - x_{\alpha_n}) + \alpha_n (x_{\alpha_n} - z, y_n - x_{\alpha_n}) \geq 0,$$

то

$$(Ay_n, x_{\alpha_n} - y_n) \leq \alpha_n (x_{\alpha_n} - z, y_n - x_{\alpha_n}).$$

Урахувавши останню оцінку в (47), приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 &\leq \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &+ 2\lambda_n L \|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2\lambda_n L \|y_n - x_n\|^2 + \lambda_n L \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &+ 2\alpha_n \lambda_n (x_n - x_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - y_n). \end{aligned} \quad (48)$$

Оцінимо зверху член  $(x_n - x_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - y_n)$ . Маємо

$$\begin{aligned} (x_n - x_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - y_n) &= (x_n - x_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - x_n) + \\ &+ (x_n - x_{\alpha_n}, x_n - y_n) \leq -\|x_{\alpha_n} - x_n\|^2 + \|x_n - x_{\alpha_n}\| \|x_n - y_n\| \leq \\ &\leq -\|x_{\alpha_n} - x_n\|^2 + \frac{1}{2} \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + \frac{1}{2} \|x_n - y_n\|^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + \frac{1}{2} \|x_n - y_n\|^2. \end{aligned} \quad (49)$$

З нерівностей (48) та (49) отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 &\leq (1 - \alpha_n \lambda_n \mu) \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \\ &- (1 - 2\lambda_n L - \alpha_n \lambda_n) \|x_n - y_n\|^2 - (1 - \lambda_n L) \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &+ 2\lambda_n L \|y_{n-1} - x_n\|^2. \end{aligned}$$

що й було потрібно.  $\square$

Доведемо оцінку з якої випливає збіжність до нуля послідовностей  $(\|x_n - x_{\alpha_n}\|)$  та  $(\|y_{n-1} - x_n\|)$ .

**Лема 12.** Для породжених алгоритмом 4 послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  та елементів  $x_{\alpha_n}$  при великих  $n \in \mathbb{N}$  виконується нерівність

$$\begin{aligned} & \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 + \frac{2\lambda_{n+1}L}{1 - \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}} \|y_n - x_{n+1}\|^2 \leq \\ & \leq \left(1 - \frac{\alpha_n\lambda_n}{2}\right) \left(\|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + \frac{2\lambda_nL}{1 - \alpha_n\lambda_n} \|y_{n-1} - x_n\|^2\right) + \\ & \quad + \frac{8\|x^* - z\|^2 (\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2}{\lambda_n \alpha_n^3}. \end{aligned} \quad (50)$$

*Доведення.* Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 &= \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 + \|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\|^2 + \\ & \quad + 2(x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}, x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}) \geq \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 + \\ & \quad + \|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\|^2 - 2\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\| \|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\| \geq \\ & \quad \geq (1 - \varepsilon) \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 + \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\|^2, \end{aligned} \quad (51)$$

де  $\varepsilon > 0$ . Покладемо в (51)  $\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha_n\lambda_n$ . Отримаємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 &\geq \frac{2 - \alpha_n\lambda_n}{2} \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 - \\ & \quad - \frac{2 - \alpha_n\lambda_n}{\alpha_n\lambda_n} \|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\|^2. \end{aligned} \quad (52)$$

В силу правил узгодження значень параметрів  $\alpha_n$ ,  $\lambda_n$  при великих  $n$  маємо  $1 - \alpha_n\lambda_n > 0$ . З урахуванням другої нерівності леми 9 з (52) виводимо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 &\geq \frac{2 - \alpha_n\lambda_n}{2} \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 - \\ & \quad - \frac{(2 - \alpha_n\lambda_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2}{\alpha_n\lambda_n \alpha_n^2} 4\|x^* - z\|^2, \end{aligned} \quad (53)$$

для всіх  $n \geq n_0$ . Використавши (53) в (41), отримаємо (для  $n \geq n_0$ )

$$\begin{aligned} & \frac{2 - \alpha_n\lambda_n}{2} \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 \leq (1 - \alpha_n\lambda_n) \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \\ & \quad - (1 - 2\lambda_nL - \alpha_n\lambda_n) \|x_n - y_n\|^2 - (1 - \lambda_nL) \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ & \quad + 2\lambda_nL \|y_{n-1} - x_n\|^2 + \frac{(2 - \alpha_n\lambda_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2}{\alpha_n\lambda_n \alpha_n^2} 4\|x^* - z\|^2. \end{aligned}$$

Звідки випливає нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 &\leq \frac{2 - 2\alpha_n\lambda_n}{2 - \alpha_n\lambda_n} \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \\ &- \frac{2(1 - 2\lambda_n L - \alpha_n\lambda_n)}{2 - \alpha_n\lambda_n} \|x_n - y_n\|^2 - \frac{2(1 - \lambda_n L)}{2 - \alpha_n\lambda_n} \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &+ \frac{4\lambda_n L}{2 - \alpha_n\lambda_n} \|y_{n-1} - x_n\|^2 + \frac{8\|x^* - z\|^2}{\lambda_n} \frac{(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2}{\alpha_n^3}. \end{aligned} \quad (54)$$

Перегрупувавши члени в (54), отримаємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 + \frac{2\lambda_{n+1}L}{1 - \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}} \|y_n - x_{n+1}\|^2 &\leq \\ &\leq \frac{2 - 2\alpha_n\lambda_n}{2 - \alpha_n\lambda_n} \left( \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + \frac{2\lambda_n L}{1 - \alpha_n\lambda_n} \|y_{n-1} - x_n\|^2 \right) - \\ &- \frac{2(1 - 2\lambda_n L - \alpha_n\lambda_n)}{2 - \alpha_n\lambda_n} \|x_n - y_n\|^2 - \\ &- \left( \frac{1 - \lambda_n L}{1 - \frac{\alpha_n\lambda_n}{2}} - \frac{2\lambda_{n+1}L}{1 - \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}} \right) \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &+ \frac{8\|x^* - z\|^2}{\lambda_n} \frac{(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2}{\alpha_n^3}. \end{aligned} \quad (55)$$

Оскільки

$$\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \subseteq \left(0, \frac{1}{3L}\right) \quad \text{та} \quad \alpha_n > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0,$$

то починаючи з деякого номера  $n_1$  будуть виконуватися нерівності

$$\frac{1 - 2\lambda_n L - \alpha_n\lambda_n}{2 - \alpha_n\lambda_n} > 0, \quad \frac{1 - \lambda_n L}{1 - \frac{\alpha_n\lambda_n}{2}} - \frac{2\lambda_{n+1}L}{1 - \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}} > 0,$$

та

$$\frac{2 - 2\alpha_n\lambda_n}{2 - \alpha_n\lambda_n} < 1 - \frac{\alpha_n\lambda_n}{2}.$$

Таким чином, для  $n \geq N = \max\{n_0, n_1\}$  з (55) випливає

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 + \frac{2\lambda_{n+1}L}{1 - \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}} \|y_n - x_{n+1}\|^2 &\leq \\ &\leq \left(1 - \frac{\alpha_n\lambda_n}{2}\right) \left( \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + \frac{2\lambda_n L}{1 - \alpha_n\lambda_n} \|y_{n-1} - x_n\|^2 \right) + \\ &+ \frac{8\|x^* - z\|^2}{\lambda_n} \frac{(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2}{\alpha_n^3}, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.  $\square$

Сформулюємо теорему про збіжність алгоритму 4.

**Теорема 6.** Нехай  $H$  — гільбертовий простір,  $C \subseteq H$  — непорожня опукла замкнена множина,  $A : H \rightarrow H$  — монотонний та  $L$ -ліпшицевий на множині  $C$  оператор та  $S \neq \emptyset$ . Нехай виконуються умови (A1)–(A4). Тоді для породжених алгоритмом 4 послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  має місце

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x^*\| = 0, \quad (56)$$

де  $x^* \in H$  — єдиний розв'язок задачі (39).

*Доведення.* В силу леми 4 та нерівності (50) маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + \frac{2\lambda_n L}{1 - \alpha_n \lambda_n} \|y_{n-1} - x_n\|^2 \right) = 0.$$

Звідки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{\alpha_n}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_{n-1} - x_n\| = 0. \quad (57)$$

З нерівності

$$\|x_n - x^*\| \leq \|x_n - x_{\alpha_n}\| + \|x_{\alpha_n} - x^*\|,$$

леми 10 та (57) отримуємо шукані співвідношення (56).  $\square$

З метою позбутися явного використання в алгоритмі 4 інформації про значення константи  $L$  при заданні меж для  $\lambda_n$  розглянемо такий алгоритм з адаптивним вибором  $\lambda_n$ .

#### Алгоритм 5. Адаптивний варіант.

Обираємо елементи  $z \in H$ ,  $x_1 = y_0 \in C$ ,  $\tau \in (0, \frac{1}{3})$ ,  $\lambda_1 \in (0, +\infty)$ . Покладаємо  $n = 1$ .

**1:** Обчислити

$$y_n = P_C (\alpha_n \lambda_n z + (1 - \alpha_n \lambda_n) x_n - \lambda_n A y_{n-1}).$$

**2:** Обчислити

$$x_{n+1} = P_C (\alpha_n \lambda_n z + (1 - \alpha_n \lambda_n) x_n - \lambda_n A y_n).$$

**3:** Обчислити

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо } (A y_{n-1} - A y_n, x_{n+1} - y_n) \leq 0, \\ \min \left\{ \lambda_n, \frac{\tau}{2} \frac{\|y_{n-1} - y_n\|^2 + \|y_n - x_{n+1}\|^2}{(A y_{n-1} - A y_n, x_{n+1} - y_n)} \right\}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти  $n := n + 1$  та перейти на **1**.

**Зауваження 15.** Алгоритм 5 є поєднанням алгоритму 4 з адаптивним перерахунком  $\lambda_n$  з алгоритму 3.

У запропонованому алгоритмі параметр  $\lambda_{n+1}$  залежить від розташування точок  $y_{n-1}$ ,  $y_n$ ,  $x_{n+1}$ , значень  $A y_{n-1}$ ,  $A y_n$ . Ніяка інформація про константу  $L$  не використовується. Очевидно, що послідовність  $(\lambda_n)$  незростаюча. Також вона обмежена знизу числом

$$\min \left\{ \lambda_1, \frac{\tau}{L} \right\}.$$

Дійсно, маємо

$$(A y_{n-1} - A y_n, x_{n+1} - y_n) \leq \frac{L}{2} (\|y_{n-1} - y_n\|^2 + \|y_n - x_{n+1}\|^2).$$

Перейдемо до обґрунтування алгоритму 5. А саме, покажемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{\alpha_n}\| = 0,$$

де  $x_{\alpha_n}$  — розв'язок задачі (40) при  $\varepsilon = \alpha_n$ .

Спочатку доведемо важливу нерівність для послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  та елементів  $x_{\alpha_n}$ .

**Лема 13.** *Для породжених алгоритмом 5 послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  та елементів  $x_{\alpha_n}$  виконується нерівність*

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 &\leq (1 - \alpha_n \lambda_n) \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \\ &- \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \|x_{n+1} - y_n\|^2 - \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} - \alpha_n \lambda_n\right) \|y_n - x_n\|^2 + \\ &+ 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_n - y_{n-1}\|^2. \end{aligned} \quad (58)$$

*Доведення.* Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 &= \\ &= \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - x_{\alpha_n}) = \\ &= \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 - \\ &- 2(x_n - y_n, y_n - x_{n+1}) + 2(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - x_{\alpha_n}). \end{aligned} \quad (59)$$

З визначення точок  $x_{n+1}$  і  $y_n$  випливає

$$\lambda_n (Ay_n, x_{\alpha_n} - x_{n+1}) \geq (x_{n+1} - x_n + \alpha_n \lambda_n (x_n - z), x_{n+1} - x_{\alpha_n}), \quad (60)$$

$$\lambda_n (Ay_{n-1}, x_{n+1} - y_n) \geq -(x_n + \alpha_n \lambda_n (x_n - z) - y_n, y_n - x_{n+1}). \quad (61)$$

Використавши нерівності (60), (61) для оцінки скалярних добутків в (59), отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 &\leq \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &+ 2\lambda_n ((Ay_n, x_{\alpha_n} - y_n) + (Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n)) + \\ &+ 2\alpha_n \lambda_n (x_n - z, x_{\alpha_n} - y_n). \end{aligned} \quad (62)$$

З правила обчислення  $\lambda_{n+1}$  випливає нерівність

$$(Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \leq \frac{\tau}{2\lambda_{n+1}} (\|y_{n-1} - y_n\|^2 - \|x_{n+1} - y_n\|^2). \quad (63)$$

Для оцінки виразу  $(Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n)$  в (62) скористаємося (63). Отримаємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 &\leq \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &+ \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|y_{n-1} - y_n\|^2 + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_{n+1} - y_n\|^2 + \\ &+ 2\lambda_n (Ay_n, x_{\alpha_n} - y_n) + 2\alpha_n \lambda_n (x_n - z, x_{\alpha_n} - y_n). \end{aligned}$$

Член  $\|y_{n-1} - y_n\|^2$  оцінимо наступним чином:

$$\|y_{n-1} - y_n\|^2 \leq 2\|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2\|x_n - y_n\|^2.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 &\leq \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &+ 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_n - y_n\|^2 + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_{n+1} - y_n\|^2 + \\ &+ 2\lambda_n (Ay_n, x_{\alpha_n} - y_n) + 2\alpha_n \lambda_n (x_n - z, x_{\alpha_n} - y_n). \end{aligned} \quad (64)$$

Із монотонності оператора  $A$  випливає

$$(Ay_n, x_{\alpha_n} - y_n) \leq (Ax_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - y_n),$$

звідки

$$(Ay_n, x_{\alpha_n} - y_n) - \alpha_n (x_{\alpha_n} - z, y_n - x_{\alpha_n}) \leq -(Ax_{\alpha_n}, y_n - x_{\alpha_n}) - \alpha_n (x_{\alpha_n} - z, y_n - x_{\alpha_n}).$$

Оскільки

$$(Ax_{\alpha_n}, y_n - x_{\alpha_n}) + \alpha_n (x_{\alpha_n} - z, y_n - x_{\alpha_n}) \geq 0,$$

то

$$(Ay_n, x_{\alpha_n} - y_n) \leq \alpha_n (x_{\alpha_n} - z, y_n - x_{\alpha_n}).$$

Враховавши останню оцінку в (64), приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 &\leq \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &+ 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_n - y_n\|^2 + \\ &+ \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_{n+1} - y_n\|^2 + 2\alpha_n \lambda_n (x_n - x_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - y_n). \end{aligned} \quad (65)$$

Оцінимо зверху член  $(x_n - x_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - y_n)$ . Маємо

$$\begin{aligned} (x_n - x_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - y_n) &= \\ &= (x_n - x_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - x_n) + (x_n - x_{\alpha_n}, x_n - y_n) \leq \\ &\leq -\|x_{\alpha_n} - x_n\|^2 + \|x_n - x_{\alpha_n}\| \|x_n - y_n\| \leq \\ &\leq -\|x_{\alpha_n} - x_n\|^2 + \frac{1}{2} \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + \frac{1}{2} \|x_n - y_n\|^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + \frac{1}{2} \|x_n - y_n\|^2. \end{aligned} \quad (66)$$

З нерівностей (65) і (66) отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 &\leq (1 - \alpha_n \lambda_n) \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \\ &- \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \|x_{n+1} - y_n\|^2 - \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} - \alpha_n \lambda_n\right) \|y_n - x_n\|^2 + \\ &+ 2\tau \lambda_n \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_n - y_{n-1}\|^2, \end{aligned}$$

що і треба було довести.  $\square$

Доведемо тепер оцінку, з якої буде слідувати збіжність до нуля послідовностей  $(\|x_n - x_{\alpha_n}\|)$  і  $(\|x_n - y_{n-1}\|)$ .

**Лема 14.** Для породжених алгоритмом 5 послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  і елементів  $x_{\alpha_n}$  при великих  $n \in \mathbb{N}$  виконується нерівність

$$\begin{aligned} & \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 + \frac{2\tau\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}^{-1}}{1 - \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}} \|x_{n+1} - y_n\|^2 \leq \\ & \leq \left(1 - \frac{\alpha_n\lambda_n}{2}\right) \left( \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + \frac{2\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{1 - \alpha_n\lambda_n} \|x_n - y_{n-1}\|^2 \right) + \\ & \quad + \frac{8\|x^* - z\|^2 (\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2}{\lambda_n \alpha_n^3}. \end{aligned} \quad (67)$$

*Доведення.* Маємо

$$\begin{aligned} & \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 = \\ & = \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 + \|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\|^2 + 2(x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}, x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}) \geq \\ & \geq \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 + \|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\|^2 - 2\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\| \|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\| \geq \\ & \geq (1 - \varepsilon)\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\|^2, \end{aligned} \quad (68)$$

де  $\varepsilon > 0$ . Покладемо в (68)  $\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha_n\lambda_n$ . Отримаємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 & \geq \frac{2 - \alpha_n\lambda_n}{2} \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 - \\ & \quad - \frac{2 - \alpha_n\lambda_n}{\alpha_n\lambda_n} \|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\|^2. \end{aligned} \quad (69)$$

В силу правил узгодження значень параметрів  $\alpha_n$ ,  $\lambda_n$  при великих номерах  $n \in \mathbb{N}$  маємо  $1 - \alpha_n\lambda_n > 0$ . З урахуванням другої нерівності леми 9 з (69) виводимо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 & \geq \frac{2 - \alpha_n\lambda_n}{2} \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 - \\ & \quad - \frac{(2 - \alpha_n\lambda_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2}{\alpha_n\lambda_n \alpha_n^2} 4\|x^* - z\|^2. \end{aligned} \quad (70)$$

для всіх  $n \geq n_0$ . Використавши (70) в (58), отримаємо (для  $n \geq n_0$ )

$$\begin{aligned} & \frac{2 - \alpha_n\lambda_n}{2} \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 \leq (1 - \alpha_n\lambda_n) \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \\ & \quad - \left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \|x_{n+1} - y_n\|^2 - \left(1 - 2\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} - \alpha_n\lambda_n\right) \|y_n - x_n\|^2 + \\ & \quad + 2\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_n - y_{n-1}\|^2 + \frac{(2 - \alpha_n\lambda_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2}{\alpha_n\lambda_n \alpha_n^2} 4\|x^* - z\|^2. \end{aligned}$$

Звідки випливає нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 &\geq \frac{2 - 2\alpha_n\lambda_n}{2 - \alpha_n\lambda_n} \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \\ &\quad - \frac{2(1 - \tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1})}{2 - \alpha_n\lambda_n} \|x_{n+1} - y_n\|^2 - \\ &\quad - \frac{2(1 - 2\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1} - \alpha_n\lambda_n)}{2 - \alpha_n\lambda_n} \|y_n - x_n\|^2 + \\ &\quad + \frac{4\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{2 - \alpha_n\lambda_n} \|x_n - y_{n-1}\|^2 + \frac{8\|x^* - z\|^2 (\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2}{\lambda_n \alpha_n^3}. \end{aligned} \quad (71)$$

Перегрупувавши члени в (71), отримаємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 &+ \frac{2\tau\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}^{-1}}{1 - \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}} \|x_{n+1} - y_n\|^2 \leq \\ &\leq \frac{2 - 2\alpha_n\lambda_n}{2 - \alpha_n\lambda_n} \left( \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + \frac{2\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{1 - \alpha_n\lambda_n} \|x_n - y_{n-1}\|^2 \right) - \\ &\quad - \frac{2(1 - 2\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1} - \alpha_n\lambda_n)}{2 - \alpha_n\lambda_n} \|y_n - x_n\|^2 - \\ &\quad - \left( \frac{1 - \tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{1 - \frac{1}{2}\alpha_n\lambda_n} - \frac{2\tau\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}^{-1}}{1 - \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}} \right) \|x_{n+1} - y_n\|^2 + \\ &\quad + \frac{8\|x^* - z\|^2 (\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2}{\lambda_n \alpha_n^3}. \end{aligned} \quad (72)$$

Оскільки  $\tau \in (0, \frac{1}{3})$ , існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n > 0$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ , то починаючи з деякого номера  $n_1 \in \mathbb{N}$  будуть виконуватися нерівності

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1} - \alpha_n\lambda_n}{2 - \alpha_n\lambda_n} &> 0, \quad \frac{1 - \tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{1 - \frac{1}{2}\alpha_n\lambda_n} - \frac{2\tau\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}^{-1}}{1 - \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}} > 0, \\ \frac{2 - 2\alpha_n\lambda_n}{2 - \alpha_n\lambda_n} &< 1 - \frac{\alpha_n\lambda_n}{2}. \end{aligned}$$

Таким чином, для  $n \geq N = \max\{n_0, n_1\}$  з (72) випливає нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 &+ \frac{2\tau\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}^{-1}}{1 - \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}} \|x_{n+1} - y_n\|^2 \leq \\ &\leq \left( 1 - \frac{\alpha_n\lambda_n}{2} \right) \left( \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \frac{2\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{1 - \alpha_n\lambda_n} \|x_n - y_{n-1}\|^2 \right) + \\ &\quad + \frac{8\|x^* - z\|^2 (\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2}{\lambda_n \alpha_n^3}, \end{aligned}$$

що і потрібно було довести.  $\square$

Сформулюємо основний результат.

**Теорема 7.** *Нехай  $H$  – гільбертовий простір,  $C \subseteq H$  – непорожня опукла замкнена множина,  $A : H \rightarrow H$  – монотонний та  $L$ -ліпшицевий на множині  $C$  оператор та  $S \neq \emptyset$ . Нехай виконуються умови (A2)–(A4). Тоді для породжених алгоритмом 5 послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  має місце*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x^*\| = 0, \quad (73)$$

де  $x^* \in H$  – єдиний розв'язок задачі (39).

*Доведення.* В силу леми 4 і нерівності (67) маємо

$$\|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + 2\tau \frac{\lambda_n \lambda_{n+1}^{-1}}{1 - \alpha_n \lambda_n \mu} \|x_n - y_{n-1}\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Звідки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{\alpha_n}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_{n-1} - x_n\| = 0. \quad (74)$$

З нерівності

$$\|x_n - x^*\| \leq \|x_n - x_{\alpha_n}\| + \|x_{\alpha_n} - x^*\|,$$

леми 10 і (74) отримуємо рівності (73).  $\square$

**Зауваження 16.** Аналогічний результат має місце для модифікації алгоритму 5 з заміною інструкції перерахунку  $\lambda_n$  на наступну

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min \left\{ \lambda_n, \tau \frac{\|y_{n-1} - y_n\|}{\|Ay_{n-1} - Ay_n\|} \right\}, & \text{якщо } Ay_{n-1} \neq Ay_n, \\ \lambda_n, & \text{інакше.} \end{cases}$$

де  $\tau \in (0, \frac{1}{3})$ .

#### ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ

У статті розглядались варіаційні нерівності з операторами, що діють в гільбертовому просторі. Для цих задач запропоновано та обгрунтовано нові алгоритми екстраградієнтного типу, які є модифікаціями методу Л. Д. Попова пошуку сідлових точок опукло-угнутих функцій. Також отримано нові результати для відомих варіантів методу.

А саме, отримано сублінійну оцінку ефективності для функції зазору. Доведено сильну збіжність алгоритму екстраполяції з минулого для варіаційних нерівностей з рівномірно монотонними операторами. Доведено лінійну швидкість збіжності алгоритму екстраполяції з минулого для варіаційних нерівностей з операторами, що задовольняють умову типу узагальненої сильної монотонності. Запропоновано та обгрунтовано адаптивний варіант алгоритму. Запропоновано регуляризовані варіанти алгоритму та доведено теореми про їх сильну збіжність.

Робота виконана за фінансової підтримки МОН України (проект «Обчислювальні алгоритми і оптимізація для штучного інтелекту, медицини та оборони», 0122U002026).

---

ЛІТЕРАТУРА

1. Korpelevich G. M. An extragradient method for finding saddle points and for other problems. *Matecon*. 1976. Vol. 12. No. 4. P. 747–756.
2. Popov L. D. A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*. 1980. Vol. 28. Issue 5. P. 845–848.
3. Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A Variational Inequality Perspective on Generative Adversarial Networks. arXiv preprint arXiv:1802.10551. 2018.
4. Patriksson M. Nonlinear programming and variational inequality problems: A unified approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. xiv + 334 p.
5. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 325 p.
6. Alber Y., Ryazantseva I. Nonlinear Ill Posed Problems of Monotone Type. Dordrecht: Springer, 2006. 410 p.
7. Kassay G., Radulescu V. D. Equilibrium Problems and Applications. London: Academic Press, 2019. xx + 419 p.
8. Polyak R. Finding Nonlinear Production–Consumption Equilibrium. arXiv preprint arXiv:2204.04496. 2022.
9. Konnov I. V. Combined relaxation methods for variational inequalities. Berlin, Heidelberg, New York: Springer–Verlag, 2001. 181 p.
10. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2011. 408 p.
11. Семенов В. В. Варіаційні нерівності: теорія та алгоритми. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2021. 167 с.
12. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence  $O(1/T)$  for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM J. on Optim.* 2004. Vol. 15. P. 229–251.
13. Nesterov Y. Dual Extrapolation and Its Applications to Solving Variational Inequalities and Related Problems. *Math. Program.* 2007. V. 109. No. 2-3. P. 319–344.
14. Mainge P.-E. Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization. *Set-Valued Analysis*. 2008. Vol. 16. P. 899–912.
15. Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. Vol. 73. P. 591–597.
16. Popov L. D. On schemes for the formation of a master sequence in a regularized extragradient method for solving variational inequalities. *Russian Mathematics*. 2004. Vol. 48. Issue 1. P. 67–76.
17. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50. P. 271–277.
18. Mokhtari A., Ozdaglar A., Pattathil S. A unified analysis of extra-gradient and optimistic gradient methods for saddle point problems: proximal point approach. arXiv preprint arXiv:1901.08511. 2019.
19. Mokhtari A., Ozdaglar A., Pattathil S. Convergence rate of  $O(1/k)$  for optimistic gradient and extra-gradient methods in smooth convex-concave saddle point problems. arXiv preprint arXiv:1906.01115. 2020.
20. Denysov S., Semenov V. Theoretical Bound of the Complexity of Some Extragradient-Type Algorithms for Variational Inequalities in Banach Spaces.

- Selected Papers of the VIII International Scientific Conference «Information Technology and Implementation» (IT&I-2021). Workshop Proceedings, Kyiv, Ukraine, December 1-3, 2021. CEUR Workshop Proceedings, vol. 3179. 2022. P. 144–155.
21. Semenov V. V., Denisov S. V. Convergence of the Method of Extrapolation from the Past for Variational Inequalities in Uniformly Convex Banach Spaces. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58. Iss. 4. P. 564–575.
  22. Lyashko S. I., Semenov V. V. A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming. In: B. Goldengorin (ed.) *Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences*. Springer Optimization and Its Applications, vol. 115. Springer, Cham, 2016. P. 315–325.
  23. Chabak L., Semenov V., Vedel Y. A New Non-Euclidean Proximal Method for Equilibrium Problems. In: Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (eds) *Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information*. ICDSIAI 2018. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol. 836. Springer, Cham, 2019. P. 50–58.
  24. Semenov V. V. A Version of the Mirror descent Method to Solve Variational Inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53. P. 234–243.
  25. Semenov V. V. A variant of mirror descent method for solving variational inequalities. In: Polyakova, L. N. (ed.) *Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V. F. Demyanov)*. IEEE, 2017. P. 281–284.
  26. Nomirovskii D. A., Rublyov V. V., Semenov V. V. Convergence of Two-Stage Method with Bregman Divergence for Solving Variational Inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55. P. 359–368.
  27. Semenov V. V., Denisov S. V., Kravets A. V. Adaptive Two-Stage Bregman Method for Variational Inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57. Issue 6. P. 959–967.
  28. Vedel Y. I., Sandrakov G. V., Semenov V. V., Chabak L. M. Convergence of a Two-Stage Proximal Algorithm for the Equilibrium Problem in Hadamard Spaces. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56. Issue 5. P. 784–792.
  29. Vedel Y., Semenov V. Adaptive Extraproximal Algorithm for the Equilibrium Problem in Hadamard Spaces. In: Olenev N., Evtushenko Y., Khachay M., Malkova V. (eds.) *Optimization and Applications*. OPTIMA 2020. *Lecture Notes in Computer Science*, vol 12422. Springer, Cham, 2020. P. 287–300.
  30. Vedel Y. I., Sandrakov G. V., Semenov V. V. An Adaptive Two-Stage Proximal Algorithm for Equilibrium Problems in Hadamard Spaces. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56. Issue 6. P. 978–989.
  31. Semenov V., Vedel Y. Convergence of adaptive methods for equilibrium problems in Hadamard spaces. Proceedings of the 7th International Conference «Information Technology and Interactions» (IT&I-2020). *Workshops Proceedings Kyiv, Ukraine*, December 02-03, 2020. CEUR Workshop Proceedings, vol. 2845. 2021. P. 321–335.
  32. Denisov S., Semenov V., Vedel Y. Adaptive Algorithm for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problem. 2020 IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT), Kyiv, Ukraine, 2020. P. 325–329.
  33. Vedel Y. I., Denisov S. V., Semenov V. V. An Adaptive Algorithm for the Variational Inequality Over the Set of Solutions of the Equilibrium Problem. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57. Issue 1. P. 91–100.

- 
34. Khanh P. D., Vuong P. T. Modified projection method for strongly pseudomonotone variational inequalities. *J. Glob. Optim.* 2014. Vol. 58. P. 341–350.
  35. Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. Москва: Изд-во МГУ, 1989. 200 с.
  36. Browder F. Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1966. Vol. 56. No. 4. P. 1080–1086.
  37. Browder F. E. Convergence of approximants of fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1967. Vol. 24. P. 82–90.
  38. Combettes P. L., Hirstoaga S. A. Equilibrium Programming in Hilbert Spaces. *J. Nonlinear Convex Anal.* 2005. Vol. 6. P. 117–136.
  39. Апостол Р. Я., Гриненко А. А., Семенов В. В. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей. *Журнал обчисл. та прикл. матем.* 2012. № 1 (107). С. 3–14.

Надійшла: 14.08.2023 / Прийнята: 10.10.2023