УДК 534

Грінченко В. Т.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Вовк І. В.[1], д. ф.-м. н., проф., пров. н. с.,
Маципура В. Т.[2], д. ф.-м. н., проф.

Особливості методу часткових областей

[1] Інститут гідромеханіки НАН України, 03057, м. Київ, вул. Желябова, 8/4,
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Акад. Глушкова 4-е,
e-mail: mnivtt@gmail.com

V. T. Grinchenko[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.),
I. V. Vovk[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.),
V. T. Matsypura[2], Dr. Sci. (Phys.-Math.).

Features of the method of partial domains

[1] Institute of Hydromechanics NAS of Ukraine, 03057, Kyiv, Zhelyabova str., 8/4,
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e,
e-mail: mnivtt@gmail.com

Метод часткових областей ефективно застосовується при дослідженні задач про випромінювання і розсіювання хвиль різної природи. Основні результати цього методу відносяться до випадків, коли суміжні області не перетинаються (тобто мають тільки одну загальну межу). Якщо суміжні частинні області перетинаються (можуть мати дві загальні межі) традиційні способи застосування методу часткових областей можуть виявитися не ефективними. В статті описано вдосконалений спосіб застосування методу часткових областей до випадків, коли суміжні області перетинаються. Показано, що на кожній з меж області перетинання можна задати одну з умов: рівність функцій з обох сторін межі, або рівність нормальних похідних функцій. Особливість застосування такого підходу полягає у тому, що значення хвилевого числа задачі не повинно співпадати з власним хвилевим числом області перетинання часткових областей. Але при проведенні чисельних розрахунках, указане обмеження не являє собою перешкоду до застосування даного підходу.

Ключові слова: часткові області, хвилевід.

Partial domains method is used effectively to study the problems of the radiation and dissipation of the waves of different nature. The main results of this method are relevant to the cases when adjacent domains do not intersect (it means that they have only one common border). If the adjacent partial domains intersect (it means that they can have two common borders) the traditional way of using partial domains method can be ineffective. An improved way of using partial domains method in the cases when adjacent domains intersect is described in the article. The article shows that one of the following conditions can be set on each of the borders of intersection region: functions equality on both sides of the border or equality of the normal derivative functions. The peculiarity of this approach is that the wave number in the problem should not be the same as the wave number of the partial domains intersection. However, the indicated restriction is not an obstacle to the application of this approach.

Key Words: partial domains, waveguide.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Як відомо [1], метод часткових областей широко і ефективно застосовується при вивченні проблем, пов'язаних з випромінюванням і розсіюванням хвиль різної природи. Але основні результати, досягнуті за допомогою цього методу, відносяться до тих випадків, коли суміжні області не перетинаються (тобто мають тільки одну загальну межу). У випадках. коли суміжні частинні області перетинаються (можуть мати дві загальні межі) традиційні способи застосування методу часткових областей можуть виявитися не ефективними [2].

В статті [3] описано підхід, котрий дозволяє застосувати метод часткових областей у випадках, коли суміжні часткові області перетинаються (мають непусте перетинання, котре виділене двома межами). Суть підходу полягає у тому, щоб замість двох умов на одній межі (рівність функцій і нормальних похідних), вимагати виконання по одній умові на кожній з меж області перетинання. Ця умова має вигляд лінійної комбінації умов щодо функцій і їх нормальних похідних з наявністю коефіцієнта у вигляді комплексної сталої.

Дана робота являє собою подальший розвиток застосування методу часткових областей до випадків, коли суміжні області перетинаються.

2. Загальні відомості

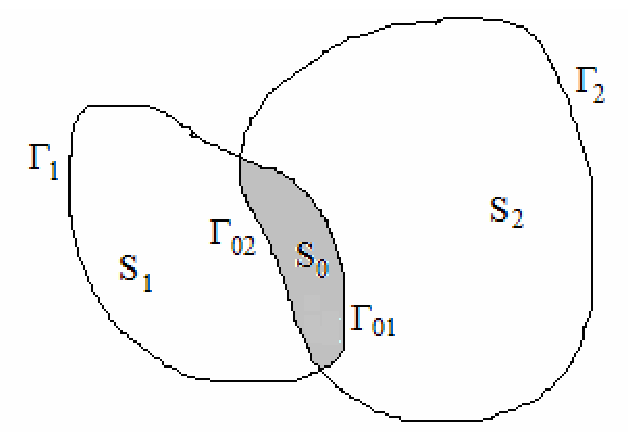

Рис. 1. Геометрія області існування хвилевого поля

На рис. 1 зображена область існування гармонічного звукового поля. Вона складається з двох областей S_1 и S_2. Межа області S_1 є Γ_1, а Γ_2 – межа області S_2. Нехай u_1 є розв'язок рівняння Гельмгольца $\Delta u_1 + k^2 u_1 = 0$ для області S_1, а u_2 – розв'язок рівняння Гельмгольца $\Delta u_2 + k^2 u_2 = 0$ для області S_2. Тут $k = \omega / c$ – хвилеве число, ω – кругова частота, c – швидкість звуку. Область S_0 є загальною для u_1 і u_2. Межа області S_0 складається з двох меж $\Gamma_0 = \Gamma_{01} \bigcup \Gamma_{02}$, де Γ_{01} і Γ_{02} – частини меж Γ_1 і Γ_2.

Умови спряження на межах області S_0 визначимо у вигляді:

$$u_1 = u_2 \text{ на межі } \Gamma_{01}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} \text{ на межі } \Gamma_{02}. \tag{2}$$

Введемо функцію $u = u_1 - u_2$ і розглянемо в області S_0 граничну задачу для функції u:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{3}$$

$$u = 0 \text{ на межі } \Gamma_{01}, \ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на межі } \Gamma_{02}. \tag{4}$$

Якщо гранична задача (3), (4) має тривіальний розв'язок $u \equiv 0$, то це означає, що розв'язки u_1 и u_2 в області S_0 співпадають, тобто $u_1 = u_2$. Така ситуація має місце при умові, що значення k не є власним хвилевим числом граничної задачі (3), (4). Але указане обмеження не являє собою перешкоду до застосуванню даного підходу, оскільки при чисельних розрахунках, в наслідок округлення, практично неможливо попасти на ті значення k, які є власними хвилевими числами граничної задачі (3), (4). Проілюструємо застосування описаного підходу на прикладі простого плоско паралельного хвилеводу.

3. Плоскопаралельний хвилевід

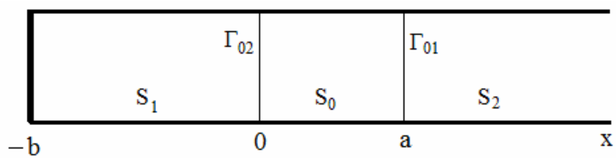

Рис. 2. Геометрія хвилеводу

Розглянемо просту задачу, котра дозволяє отримати аналітичний розв'язок у явному вигляді. Маємо напівнескінченний плоскопаралельний хвилевід (рис. 2) з жорсткими межами, наповнений ідеальним середовищем з густиною ρ і швидкістю звука c. В перерізі $x = -b$ знаходиться плоский поршень, що коливається за гармонічним законом зі швидкістю $\upsilon \exp(-i\omega t)$. Як наслідок, у хвилеводі утворюється біжуча плоска гармонічна хвиля тиску $p = p_0 \exp(kx)$. Розписуючи граничну умову на поверхні поршня

$$\left. \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=-b} = \upsilon, \tag{5}$$

отримуємо вираз для поля тиску у хвилеводі (часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо)

$$p = \frac{\omega\rho\upsilon}{k}\exp(ika)\exp(ikx). \qquad (6)$$

Тепер уявімо собі, що область існування поля розділена на дві області: обмежена область S_1 визначається нерівністю $-b \le x \le a$ і напівнескінченна область S_2 визначається нерівністю $x \ge 0$. Область S_0, котра утворена в результаті перетину областей S_1 і S_2, визначається нерівністю $0 \le x \le a$.

Поле в області S_1 можна представити у вигляді двох плоских хвиль, котрі біжать одна назустріч одній:

$$p_1 = A\exp(ikx) + B\exp(-ikx).$$

Враховуючи граничну умову (5), матимемо

$$p_1 = A\left[\exp(ikx) + \exp(-i2kb)\exp(-ikx)\right] - \\ -\frac{\omega\rho\upsilon}{k}\exp(-ikb)\exp(-ikx). \qquad (7)$$

Поле в області S_2 являє собою біжучу плоску хвилю

$$p_2 = C\exp(ikx). \qquad (8)$$

На межах області S_0 задамо такі умови спряження полів:

$$p_1 = p_2 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial p_2}{\partial x} \quad \text{при} \quad x = a. \qquad (10)$$

Підставляючи вирази (7), (8) в умови (9), (10), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів A і C:

$$A\left[1 + \exp(-i2kb)\right] - C = \frac{\omega\rho\upsilon}{k}\exp(-ikb), \qquad (11)$$

$$A\left[1 - \exp(-i2kb)\exp(-i2ka)\right] - C = \\ = -\frac{\omega\rho\upsilon}{k}\exp(-ikb)\exp(-i2ka), \qquad (12)$$

Визначник системи рівнянь (11), (12) має вигляд

$$\Delta = -\exp(-i2kb)\left[1 + \exp(-i2ka)\right]. \qquad (13)$$

Як бачимо, при виконані умови

$$\exp(-i2ka) = -1 \qquad (14)$$

визначник системи $\Delta = 0$. Отже при значеннях хвилевого числа k, для котрих має місце рівність (14), система рівнянь (11), (12) не має однозначного розв'язку.

Тепер розглянемо окремо для області S_0 таку граничну задачу:

$$\Delta u(x,y) + k^2 u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in S_0, \qquad (15)$$

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = a. \qquad (16)$$

Функцію $u(x,y)$, що визначає поле тиску в області S_0, запишемо у вигляді $u = A_1\exp(ikx) + A_2\exp(-ikx)$. Розписуючи умови (16) отримаємо систему рівнянь відносно коефіцієнтів A_1 і A_2. Неважко переконатися, що визначник цієї системі рівнянь дорівнює нулю якщо виконується умова (14).

Таким чином, хвилеві числа, для котрих, за умов (9), (10), задача про коливання поршня у плоскому хвилеводі не має однозначного розв'язку співпадають з власними хвилевими числами області перетину S_0. Коли зазначені хвилеві числа не співпадають, то система рівнянь (11), (12) має однозначний розв'язок для коефіцієнтів A і C. Якщо ці вирази для коефіцієнтів A і C підставити у формули (7), (8) для полів в часткових областях S_1 і S_2, то, після нескладних перетворень, вирази для полів p_1 і p_2 приймуть вигляд формули (6), а саме $p = \frac{\omega\rho\upsilon}{k}\exp(ika)\exp(ikx)$.

5. Проходження хвилі крізь область спряження плоского і клиноподібного хвилеводів

На рис. 3 показано хвилевід, котрий утворено сполученням плоского хвилеводу з клиноподібним хвилеводом з кутом розкриву $\theta_0 > 90^\circ$. Стрілка показує напрям поширення нульової моди плоско паралельного хвилеводу. Для побудови розв'язку задачі вводимо декартову (x,y) і полярну (r,θ) системи координат з загальним центром у точці O. Вся область існування звукового поля поділяється на три області: Область S_1 – плоский хвилевід $x \le x_0$, $|y| \le h$, область S_2 являє собою круг радіусу r_0, область S_3 – клиноподібний хвилевод $r \ge r_0$, $|\theta| \le \theta_0$.

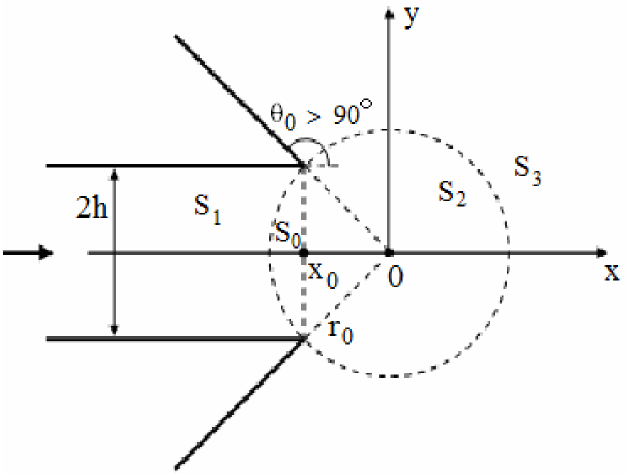

Рис. 3. Геометрія хвилеводу

Як бачимо, виникає область перетину S_0 часткових областей S_1 і S_2. Умови спряження полів на межах часткових областей запишемо у вигляді, котрий відповідає описаному підходу застосування методу часткових областей при наявності області перетину часткових областей:

1) $p_1 = p_2, \quad x = x_0, \quad |y| \le h,$

2) $p_2 = p_3, \quad r = r_0, \quad |\theta| \le \theta_0,$

3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial p_2}{\partial r} = \dfrac{\partial p_3}{\partial r}, & r = r_0, \quad |\theta| \le \theta_0, \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial r} = \dfrac{\partial p_1}{\partial r}, & r = r_0, \quad \theta_0 \le |\theta| \le \pi. \end{cases}$$

Формат статті не дозволяє представити побудову розв'язку поставленої задачі і провести аналіз чисельних результатів.

5. Висновки

Проведені дослідження підтверджують ефективність застосування описаної модифікації методу часткових областей у випадках, коли часткові області перетинаються. Суть підходу полягає у тому, щоб замість двох умов на одній межі (рівність функцій і нормальних похідних), вимагати виконання по однієї умови на кожній з меж області перетинання, тобто на одній межі вимагаємо виконання рівності функцій, а на другій – рівності нормальних похідних.

Особливість застосування такого підходу полягає у тому, що значення хвилевого числа задачі не повинно співпадати з власним хвилевим числом області перетинання часткових областей. Але указане обмеження не являє собою перешкоду до застосування даного підходу, оскільки ширина зони, де неможливо отримати надійні кількісні дані, може бути, при належному виборі кількості мод хвилеводу, достатньо малою.

Список використаних джерел

1. *Гринченко В. Т.* Волновые задачи акустики / В. Т. Гринченко, И. В. Вовк, В. Т. Мацыпура. – Киев: ИНТЕРСЕРВИС, 2013. – 572 с.
2. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Миттра. – Москва: Мир, 1977. – 485 с.
3. *Вовк И. В.* Об особенностях применения метода частичных областей в волновых задачах / И. В. Вовк, А. М. Гомилко, Н. С. Городецкая // Акустический журнал. – 1995. – Т. 41, № 3. – С. 399–404.

References

1. GRINCHENKO, V.T., VOVK, I.V. and MATSYPURA, V.T. (2013) *Volnovyie zadachi akustiki*. Kiev: INTERSERVIS.
2. MITTRA, P. (ed.) (1977) *Vyichislitelnyie metodyi v electrodinamike*. Moscow: Mir.
3. VOVK, I. V., GOMILKO, A. M. and GORODETSKAYA, N. S. (1995) Ob osobennostyah primeneniya metoda chastichnyih oblastey v volnovyih zadachah. *J. Acoust.* 41 (3). p. 399–404.

Надійшла до редколегії 20.05.19