Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Рашитов Богдан Сергійович

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ

Граничні теореми для загальних процесів дробового ефекту та ітерованих збурених випадкових блукань

113 — Прикладна математика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

____

Науковий керівник: д. ф.-м. н., проф. **Іксанов Олександр Маратович**

Електронний підпис
Рашитов
Богдан
Сергійович
Ідентифікаційний
код
3445410498
Підписано у Вчасно

Київ – 2022

АНОТАЦІЯ

Рашитов Б. С. Граничні теореми для загальних процесів дробового ефекту та ітерованих збурених випадкових блукань. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 — Прикладна математика. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2022.

Дисертаційна робота присвячена аналізу загальних процесів дробового ефекту, збурених випадкових блукань та ітерованих збурених випадкових блукань на деревах загальних гіллястих процесів.

Загальні процеси дробового ефекту формують окремий підклас класу випадкових процесів з іммiграцією у випадкові моменти часу, що описують різноманітні явища кумулятивного характеру. Під загальним процесом дробового ефекту ми розуміємо процес дробового ефекту, у якому вхідний процес є довільним локально скінченним лічильним процесом. Нашу увагу до таких процесів привернув той факт, що останнім часом все частіше з'являються публікації, у яких досліджуються окремі приклади загальних процесів дробового ефекту.

Збурені випадкові блукання, що є природним узагальненням стандартних випадкових блукань, є цікавим і складним об'єктом дослідження. Такі блукання є допоміжним інструментом аналізу випадкових рядів, породжених лінійними рекурсіями, граток Бернуллі, систем масового обслуговування $G/G/\infty$ та інших моделей прикладної теорії ймовірностей.

Ітеровані збурені випадкові блукання на деревах загальних гіллястих процесів вперше були визначені у статті 2020 року Д. Бурачевського, Б. Довгая та О. Іксанова. Аналіз таких випадкових послідовностей є важливою складовою дослідження випадкових дерев та послідовностей узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі, породженому процесом ламання палиці. Сьогодні розвинення елементів теорії відновлення для ітерованих збурених випадкових блукань набирає обертів зусиллями О. Іксанова, І. Са-

мойленка, О. Маринича, В. Богуна, Б. Довгая та Д. Бурачевського, проте багато питань залишаються без відповіді.

У даній дисертаційній роботі продовжено побудову асимптотичної теорії процесів дробового ефекту, розпочатої в роботах О. Іксанова, О. Маринича, М. Майнерса, З. Каблучко, Ц. Донга та інших. Рушійною силою розвинення теорії слабкої збіжності для процесів дробового ефекту, побудованих за процесами відновлення, була затребуваність відповідних результатів для асимптотичного аналізу різних характеристик випадкових регенеративних структур: порядку випадкових перестановок, числа нульових блоків та числа ненульових блоків слабких випадкових композицій, числа зіткнень коалесцентів з множинними зіткненнями, числа зайнятих серверів у системі масового обслуговування, випадкових процесів з імміграцією, що керується процесом відновлення. Автором отримано результати стосовно граничної поведінки загальних процесів дробового ефекту, що узагальнюють деякі раніше відомі результати. Зокрема, у дисертації доведено функціональні граничні теореми для належним чином нормалізованого (як центрованого, так і нецентрованого) загального процесу дробового ефекту та наведено конкретні приклади застосування отриманих результатів. Також було досліджено неперервність за Гьольдером процесів типу Рімана-Ліувілля, що виступають в якості граничних процесів. Було проведено комп'ютерне моделювання процесів дробового ефекту, броунівського руху, стійкого субординатору, а також дробово-інтегровного оберненого стійкого субординатору.

Автором також зроблено внесок до розвинення елементів теорії відновлення для ітерованих збурених випадкових блукань на деревах загальних гіллястих процесів. Було доведено аналоги відомих результатів класичної теорії відновлення, а саме елементарну теорему відновлення, ключову теорему відновлення, теорему Блекуелла, посилений закон великих чисел, функціональну граничну теорему, теорему про асимптотику дисперсії лічильного процесу та інші суміжні результати. Також було знайдено умови скінченності моментів часу першого проходження рівня збуреним випадковим блуканням.

Отримані автором результати мають переважно теоретичну цінність та є значним кроком у розвиненні теорії загальних процесів дробового ефекту та теорії ітерованих збурених випадкових блукань. Методи, прийоми, думки та ідеї, що були використані при доведенні теорем та лем, можуть бути корисними у подальших дослідженнях в області прикладної теорії ймовірностей. З метою моделювання випадкових процесів, що з'являлися у основних результатах даної дисертації, автором було створено програмне забезпечення мовою Scala.

Основні результати автора були висвітлені у вітчизняних фахових виданнях та міжнародних реферованих журналах, індексованих в наукометричних базах, та доповідалися на міжнародних конференціях. Дослідження проводилися у межах держбюджетної теми №19БФ015-01 «Асимптотичний та структурний аналіз стохастичних моделей динаміки популяцій» та проєкту НФДУ №2020.02/0014 «Асимптотичні режими збурених випадкових блукань: на межі сучасної та класичної теорії ймовірностей».

Ключові слова: загальний гіллястий процес, збурене випадкове блукання, ключова теорема відновлення, неперервність за Гьольдером, посилений закон великих чисел, процес дробового ефекту, слабка збіжність у просторі Скорохода, теорія відновлення, функціональна гранична теорема.

SUMMARY

Rashytov B. S. Limit theorems for general shot noise processes and iterated perturbed random walks. — Manuscript.

Dissertation for the scientific level of Doctor of Philosophy in specialty 113 – "Applied Mathematics". – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2022.

The thesis is devoted to the analysis of general shot noise processes, perturbed random walk and iterated perturbed random walk on a general branching process tree.

The general shot noise processes form a particular subclass of the class of random processes with immigration at random times, that describe various cumulative phenomena. By the general shot noise process we mean a shot noise process in which the counting process of shots is arbitrary locally finite. In the recent past, the number of publications have increased which investigated some particular general shot noise processes. It is this fact that attracted our attention to these processes.

Perturbed random walks, which are a natural generalization of the standard random walks, are an interesting and complicated object of investigation. Such walks are an auxiliary tool for analyzing the perpetuities, the Bernoulli sieve, the $G/G/\infty$ queuing system, and some other models of applied probability theory.

For the first time, iterated perturbed random walks on a general branching process tree were introduced in 2020 by D. Buraczewski, B. Dovgay and O. Iksanov. The analysis of these random sequences is an inevitable ingredient in the study of some random trees and nested occupancy schemes in random environment generated by stick-breaking. As of today, the development of renewal theory for iterated perturbed random walks is gaining momentum through the efforts of O. Iksanov, I. Samoilenko, O. Marynych, V. Bohun, B. Dovgay and D. Buraczewski. Nevertheless, many problems remain unsolved.

In the present work we continue constructing the asymptotic theory of shot noise processes, initiated in the articles by O. Iksanov, O. Marynych, M. Meiners, Z. Kabluchko, K. Dong and others. Development of elements of the weak convergence theory for renewal shot noise processes was motivated by and effectively used for the asymptotic analysis of various characteristics of several random regenerative structures: the order of random permutations, the number of zero and nonzero blocks of weak random compositions, the number of collisions in coalescents with multiple collisions, the number of busy servers in a queueing system, random processes with immigration at the epochs of a renewal process. Some new results are obtained concerning the limiting behavior of the general shot noise processes, which generalize some previously known results. In particular, we prove functional limit theorems for general shot noise processes, properly normalized (with and without centering), and provide some examples of application. Also, we investigate Hölder continuity of the Riemann-Liouville-type processes that appear as limit processes. We performed computer simulations of the shot noise processes, the Brownian motion, the stable subordinator and a fractionally integrated inverse stable subordinator.

We also contribute towards developing some elements of renewal theory for iterated perturbed random walks on a general branching process tree. We prove counterparts of the classical renewal-theoretic results, namely the elementary renewal theorem, the key renewal theorem, Blackwell's theorem, a strong law of large numbers, a functional limit theorem, a theorem on the asymptotics of the variance of the counting process and other related results. Also, we point out necessary and sufficient conditions for the finiteness of power moments of first-passage times for perturbed random walks.

The results obtained are, for the most part, of a theoretical nature. These lead to a significant progress as far as the theory of general shot noise processes and the theory of iterated perturbed random walks are concerned. Methods, techniques, opinions and ideas, exploited in the present thesis, can be useful for further investigations in various fields of applied probability. To model the random processes that arise in our main results, software in Scala was worked out.

The main results were highlighted in Ukrainian professional publications and international peer-reviewed journals, indexed in scientometric databases, and presented at international conferences. The investigation was conducted within the government-funded project №19BT015-01 «Asymptotic and structural analysis of population dynamics stochastic models» and the NRFU project №2020.02/0014 «Asymptotic regimes of perturbed random walks: on the edge of modern and classical probability».

Keywords: functional limit theorem, general branching process, Hölder continuity, key renewal theorem, perturbed random walk, renewal theory, shot noise

process, strong law of large numbers, weak convergence in the Skorokhod space.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації:

1. Rashytov, B.: Power moments of first passage times for some oscillating perturbed random walks. Theory of Stochastic Processes **23**(1), 93–97 (2018).
2. Iksanov, A., Rashytov, B.: A functional limit theorem for general shot noise processes. Journal of Applied Probability **57**, 280–294 (2020).
3. Іксанов, О., Рашитов, Б.: Функціональна гранична теорема без центрування для загальних процесів дробового ефекту. Український математичний журнал **73**(2), 160-178 (2021).
4. Bohun, V., Iksanov, A., Marynych, A., Rashytov, B.: Renewal theory for iterated perturbed random walks on a general branching process tree: intermediate generations. Journal of Applied Probability **59**(2) (2022).

   Прийнята до друку, препринт доступний за адресою arXiv:2012.03341.
5. Iksanov, A., Rashytov, B., Samoilenko, I.: Renewal theory for iterated perturbed random walks on a general branching process tree: early generations. Journal of Applied Probability (2022+).

   Подана до друку, препринт (2021) доступний за адресою arXiv:2105.02846.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Рашитов, Б.: Функціональна центральна гранична теорема для загальних процесів дробового ефекту. IX Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті» при КПІ ім. І. Сікорського. Збірник матеріалів конференції, ст. 133-137, Київ, Україна (2020).

2. Rashytov B.: Functional limit theorems for general shot noise processes. Chinese-Ukrainian workshop on Probability Theory and Related Topics at the Xidian University. Abstracts, p. 5, Xi'an, China (2020).

3. Рашитов Б.: Аналог елементарної теореми відновлення на ранніх та проміжних рівнях ітерованих збурених випадкових блукань. XIX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2021» при КНУ ім. Т. Шевченка. Збірник матеріалів конференції, ст. 26-27, Київ, Україна (2021).

4. Rashytov B.: Development of renewal theory for the early generations of an iterated perturbed random walk on a general branching process tree. International Conference of Young Mathematicians at the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. Abstracts, p. 89, Kyiv, Ukraine (2021).

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\square$ – завершення доведення

$\mathbb{R}_+$ – невід'ємна півпряма $[0, \infty)$

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$

в.в. – випадкова величина

м.н. – майже напевно

$\xrightarrow{\mathrm{d}}$ – збіжність за розподілом в.в. та випадкових векторів

$\xrightarrow{\mathbb{P}}$ – збіжність за ймовірністю в.в. та випадкових векторів

$\overset{\mathrm{f.d.}}{\Rightarrow}$ – збіжність скінченновимірних розподілів випадкових процесів

$\Rightarrow$ – слабка збіжність випадкових елементів у функціональних просторах

$\overset{\mathrm{d}}{=}$ – рівність розподілів випадкових елементів

$\overset{\mathrm{f.d.}}{=}$ – рівність скінченновимірних розподілів випадкових процесів

$f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, де $x_0 \in [-\infty, \infty]$, означає $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

$x \wedge y = \min(x, y)$

$x \vee y = \max(x, y)$

$x_+ = \max(x, 0)$

$x_- = -\min(x, 0)$

$\circ$ – композиція функцій, $f \circ g(\cdot) = f(g(\cdot))$

δ_x – ймовірнісний розподіл, зосереджений в точці x

$\log$ – натуральний логарифм

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Сьогодні одним із популярних напрямків досліджень в області прикладної математики та, зокрема, в теорії ймовірностей є теорія відновлення. Класична теорія відновлення - це галузь прикладної теорії ймовірностей, що має справу з неспадними стандартними випадковими блуканнями та різними похідними процесами: *процесом відновлення, процесом першого проходження рівня, перестрибом, недострибом та іншими.* Огляд теорії відновлення можна знайти у добре відомих книгах [5] та [62], а також у нещодавніх монографіях [34] та [55].

У даній дисертаційній роботі досліджуються загальні процеси дробового ефекту, що є окремим прикладом випадкових процесів з імміграцією у випадкові моменти часу, гіллясті випадкові блукання та ітеровані збурені випадкові блукання на деревах загальних гіллястих процесів.

Випадкові процеси з імміграцією, що відбувається згідно з потоком відновлення, та збурені випадкові блукання є спорідненими об’єктами, оскільки і ті, і інші є певними функціоналами, що діють на послідовність (ξ_1, η_1), $(\xi_2, \eta_2), \dots$ незалежних та однаково розподілених пар. Тут ξ_1, $\xi_2, \dots$ є випадковими величинами, що набувають дійсних значень, а η_1, $\eta_2, \dots$ є випадковими процесами з траєкторіями, що належать простору Скорохода, у випадку, коли мова йде про випадкові процеси з імміграцією, та є випадковими величинами, що набувають дійсних значень, у випадку, коли мова йде про збурені випадкові блукання.

Невичерпним джерелом процесів з імміграцією у випадкові моменти часу є системи масового обслуговування та різні гіллясті процеси з імміграцією та без. Окремими прикладами є число індивідуумів у k-му поколінні ($k \geq 2$) гіллястого випадкового блукання з позиціями $\leq t$; число обслужених заявок та число зайнятих серверів у системі $GEN/G/\infty$ у момент часу t, де GEN означає, що надходження заявок керується загальним точковим процесом. Останнім часом популярним об'єктом дослідження є системи масового обслуговування, у яких вхідний процес є більш складним, ніж процес відновлення, наприклад, процесом Кокса (також відомим як двічі стохастичний процес Пуассона) [17] або процесом Хоукса [21, 53], а також гіллясті процеси з імміграцією, що керуються не процесом відновлення, а більш складним процесом, наприклад, неоднорідним процесом Пуассона [69] або процесом Кокса [15]. Неповний перелік публікацій, у яких досліджувалися процеси з імміграцією у випадкові моменти часу, містить роботи [20, 66, 67, 68], а також нещодавню статтю [58]. З іншого боку, зазначимо, що результати, отримані у згаданих роботах, не перетинаються з основними результатами дисертаційної роботи.

Даному дослідженню передувала низка робіт [33, 37, 38, 39, 51], у яких досліджувалася слабка збіжність процесів дробового ефекту, побудованих за процесами відновлення. Основною рушійною силою розвинення теорії слабкої збіжності для процесів дробового ефекту, побудованих за процесами відновлення, була затребуваність відповідних результатів для асимптотичного аналізу різних характеристик випадкових регенеративних структур: порядку випадкових перестановок [28], числа нульових блоків та числа ненульових блоків слабких випадкових композицій [3, 43], числа зіткнень коалесцентів з множинними зіткненнями [29], числа зайнятих серверів у системі масового обслуговування $G/G/\infty$ [35], випадкових процесів з імміграцією, що керується процесом відновлення [40, 41]. Розділ 3 монографії [34] містить огляд результатів, отриманих у статтях, згаданих вище, посилання на роботи інших авторів, пов'язані з процесами дробового ефекту, а також детальне обговорення можливих застосувань.

У розділі 1 ми аналізуємо загальні процеси дробового ефекту. Ці процеси є більш складними, ніж процеси дробового ефекту, побудовані за процесами відновлення, оскільки ані незалежність, ані однакова розподіленість ξ_1, $\xi_2, \dots$ не припускається. Вибір загальних процесів дробового ефекту в якості об'єкту дослідження є нашою реакцією на виклики сьогодення. У нещодавніх прикладних публікаціях все частіше з'являються окремі випадки загальних процесів дробового ефекту, у яких вхідний процес є більш складним, ніж процес відновлення. Тому проведений у розділі 1 асимптотичний аналіз процесів дробового ефекту, у яких вхідний процес є довільним локально скінченним точковим процесом, є актуальним.

Збурені випадкові блукання є нетривіальним, але природним узагальненням стандартних випадкових блукань. З одного боку, збурені випадкові блукання є цікавим і складним об'єктом дослідження, з іншого боку, такі блукання є допоміжним інструментом аналізу випадкових рядів, породжених лінійними рекурсіями, граток Бернуллі, систем масового обслуговування $G/G/\infty$ та інших моделей прикладної теорії ймовірностей. Елементи теорії збурених випадкових блукань викладені у монографії [34]. Огляд різних результатів можна знайти у нещодавніх статтях [4, 3, 23, 45, 59, 60], присвячених різним аспектам таких блукань. У розділі 2.4 статті [4] сформульована відкрита проблема, що отримала свій розв'язок у підрозділі 2.1 даної дисертації.

Ітеровані збурені випадкові блукання на деревах загальних гіллястих процесів були визначені зовсім нещодавно у статті [14]. Такі випадкові послідовності є цікавими як самостійний об'єкт дослідження. Крім того, вони є важливими складовими у дослідженні випадкових дерев та послідовностей узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі, породженому процесом ламання палиці. Посилаючись на [14, 42] для більш детальної інформації, ми лише нагадаємо, що згадані послідовності є узагальненням класичної нескінченної схеми зайнятості Карліна [26, 52]. На відміну від схеми Карліна, в якій колекція комірок унікальна, в означенні послідовності існує вкладена ієрархія комірок, а ймовірність потрапляння у комірки визначається ітерованим ламанням палиці. Крім наших статей [13, 48], на яких (за виключенням підрозділу 2.1) базується розділ 2 даної дисертації, нам невідомі роботи, у яких би досліджувалися ітеровані збурені випадкові блукання на деревах загальних гіллястих процесів.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу було виконано у відповідності до плану наукових досліджень кафедри дослідження операцій факультету комп’ютерних наук та кібернетики КНУ ім. Т. Шевченка в межах проєкту «Асимптотичний та структурний аналіз стохастичних моделей динаміки популяцій» (2019-2021, б.т. №19БФ015-01) та проєкту «Асимптотичні режими збурених випадкових блукань: на межі сучасної та класичної теорії ймовірностей» (2020-2022, НФДУ №2020.02/0014). Тематика досліджень роботи відповідає спеціальності «Прикладна математика» галузі знань «Математика та статистика».

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є продовження розвинення теорії загальних процесів дробового ефекту та побудова елементів теорії ітерованих збурених випадкових блукань на деревах загальних гіллястих процесів. *Головним завданням* автора була розробка нових методів, необхідних для розв’язання декількох відкритих проблем, пов’язаних із загальними процесами дробового ефекту, а також знаходження належних підходів, що дозволили б перенести певні елементи теорії відновлення (для стандартних випадкових блукань) на ітеровані збурені випадкові блукання. *Об’єкт дослідження* – загальні процеси дробового ефекту та ітеровані збурені випадкові блукання на деревах загальних гіллястих процесів, *предмет дослідження* – асимптотична поведінка загальних процесів дробового ефекту та аналоги деяких результатів теорії відновлення для ітерованих збурених випадкових блукань.

Методи дослідження. Дослідження асимптотичної поведінки загальних процесів дробового ефекту полягає у доведенні збіжності у функціональному просторі цих процесів до деякого граничного випадкового процесу, а також у вивченні властивостей граничного процесу таких як, наприклад, обмеженість, неперервність траєкторії тощо. Не менш важливим є пошук конкретних прикладів процесів для ілюстрації отриманої збіжності та властивостей.

Дослідження властивостей ітерованих збурених випадкових блукань полягає у пошуку та доведенні аналогів результатів, що справджуються для збурених випадкових блукань та/або ітерованих стандартних випадкових блукань, або їх посиленні. При цьому розв'язання деяких проблем можуть вимагати розвинення нестандартних методів та підходів.

У дисертаційній роботі використовуються методи теорії ймовірностей та суміжних дисциплін, зокрема:

- теорії відновлення;
- теорії випадкових блукань;
- теорії випадкових процесів;
- теорії функцій, що правильно змінюються;
- математичного аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. Наукова новизна даної дисертаційної роботи полягає у встановлені нових результатів для загальних процесів дробового ефекту та збурених випадкових блукань, а також проведенні першого детального дослідження ітерованого збуреного випадкового блукання на дереві загального гіллястого процесу. Серед основних результатів дисертаційної роботи слід виділити такі:

- доведено функціональні граничні теореми (з центруванням та без центрування) для загальних процесів дробового ефекту;
- досліджено неперервність за Гьольдером процесів типу Рімана-Ліувілля;

- вказано умови скінченності моментів часу першого проходження рівня збуреним випадковим блуканням;
- доведено аналоги результатів теорії відновлення для початкових та проміжних рівнів ітерованих збурених випадкових блукань на деревах загальних гіллястих процесів.

Теоретичне і практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають переважно теоретичну цінність. Методи, прийоми, думки та ідеї, що були використанні при доведенні теорем та лем, можуть бути корисними при подальших дослідженнях в області теорії ймовірностей, зокрема в теорії відновлення. Також одержані результати є значним кроком розвинення теорії загальних процесів дробового ефекту та теорії ітерованих збурених випадкових блукань.

Отримані теоретичні результати супроводжуються комп'ютерним моделюванням мовою Scala, що візуалізують досліджувані випадкові процеси. Запропонована програма носить універсальний характер та може бути використана для подальшого дослідження та моделювання випадкових процесів.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану досліджень та постановка задач належить науковому керівникові. Всі результати, що виносяться на захист, належать здобувачеві.

У статті [46], написаній у співавторстві з Іксановим О.М., Іксанову О.М. належать постановка задачі, оформлення фінальної версії статті та внесення редагувань згідно з рецензією.

У статті [47], написаній у співавторстві з Іксановим О.М., Іксанову О.М. належать постановка задачі, формулювання прикладу 2.3 на ст. 171, оформлення фінальної версії статті та внесення редагувань згідно з рецензією.

У статті [13], написаній у співавторстві з Богуном В.А., Іксановим О.М. та Мариничем О.В., Іксанову О.М. належить постановка задачі, Мариничу О.В. належать оформлення проміжних та фінальної версій, Богуну В.А. належать формулювання та доведення тверджень 2.1, 3.1, 3.2, а також суміжні міркування та зауваження.

У статті [48], написаній у співавторстві з Іксановим О.М. та Самойленко І.В., Іксанову О.М. належить постановка задачі, Самойленко І.В. належать оформлення проміжних та фінальної версій.

Апробація результатів дисертаційної роботи. Результати дисертаційної роботи доповідалися на міжнародних конференціях, а саме:

- Результати підрозділу 1.3 на міжнародній конференції "IX Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті» при КПІ ім. І. Сікорського" (28–29 грудня 2020 року);
- Результати підрозділів 1.3 та 1.4 на китайсько-українському воркшопі "Chinese-Ukrainian workshop on Probability Theory and Related Topics" (22 грудня 2020 року);
- Результати підрозділів 2.3 та 2.4 на міжнародній конференції "XIX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2021» при КНУ ім. Т. Шевченка" (15 квітня 2021 року);
- Результати підрозділу 2.4 на міжнародній конференції "International Conference of Young Mathematicians at Institute of Mathematics of NAS of Ukraine" (3-5 червня 2021 року).

Також основні результати дисертаційної роботи були висвітлені у вітчизняних фахових виданнях та міжнародних реферованих журналах, індексованих в наукометричних базах, а саме:

- результати підрозділу 1.3 у статті [46];
- результати підрозділу 1.4 у статті [47];
- результати підрозділу 2.1 у статті [61];
- результати підрозділу 2.3 у статті [13], що була подана до друку у грудні 2020 року, пройшла всі етапи рецензування та прийнята редакцією журналу "Journal of Applied Probability"до публікації у червні 2022 року (том 59, випуск 2);

- результати підрозділу 2.4 у статті [48], що була подана до друку у травні 2021 року та наразі проходить рецензування.

Структура та обсяг дисертаційної роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, огляду літератури, двох розділів, висновків та додатку. Кожен розділ складається з підрозділів, які поділяються на пункти. В кінці розділів міститься висновки до даного розділу. Формули мають власну нумерацію в межах розділу, а теореми, леми, твердження та зауваження мають наскрізну нумерацію. Робота містить 12 рисунків, а список використаних джерел містить 70 позицій та оформлений відповідно до стилю Springer MathPhys Style.

Подяка. Автор дисертації Рашитов Б.С. висловлює щиру вдячність своєму науковому керівникові - доктору фізико-математичних наук, професору Іксанову Олександру Маратовичу - за своєчасну та активну допомогу у плідній роботі над дослідженням, за влучні поради при оформленні статей та їх публікації, за надану в необхідній кількості мотивацію та за достатню підтримку протягом всього часу написання дисертаційної роботи. Також автор висловлює подяку всім колегам з кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики КНУ ім. Т. Шевченка за підтримку під час написання дисертації та спільну роботу в рамках проєкту Національного фонду досліджень України.

Розділ 1

Граничні теореми для загальних процесів дробового ефекту

1.1 Вступ, основні визначення та допоміжні твердження

Позначимо через $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ необов'язково впорядковану послідовність додатних випадкових величин. Визначимо лічильний процес $(N(t))_{t\geq 0}$ так

$$N(t) := \#\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k \leq t\} = \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}}, \quad t \geq 0.$$

Будемо припускати, що $N(t) < \infty$ м.н. для всіх $t \geq 0$.

Нехай $D := D[0,\infty)$ є простором Скорохода дійснозначних неперервних справа функцій, що визначені на $[0,\infty)$ та мають скінченні лівобічні границі у додатних точках. Для функції $h \in D$ визначимо випадковий процес $X := (X(t))_{t\geq 0}$ так

$$X(t) := \sum_{k\geq 0} h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} = \int_{[0,\,t]} h(t-y)\mathrm{d}N(y), \quad t \geq 0.$$

Ми називаємо X *загальним процесом дробового ефекту*, оскільки, крім $N(t) < \infty$ м.н., жодних припущень щодо вхідної послідовності $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ не робиться. Зрозуміло, що $X \in D$ м.н.

Позначимо через $Y_1 := (Y_1(t))_{t\geq 0}$, $Y_2 := (Y_2(t))_{t\geq 0}, \ldots$ незалежні однаково розподілені випадкові процеси з траєкторіями у D. Припустимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ Y_{k+1} не залежить від $(S_0, \ldots, S_k)$. Зокрема, випадок повної незалежності $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ та $(S_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ не виключається. Покладемо

$$Y(t) := \sum_{k \geq 0} Y_{k+1}(t - S_k) \mathbb{1}_{\{S_k \leq t\}}, \quad t \geq 0$$

та назвемо $Y := (Y(t))_{t \geq 0}$ *випадковим процесом з імміграцією у випадкові моменти часу*. Назва пояснюється так: процес Y_k є пов'язаним з k-тим іммігрантом, що прибуває до системи у час S_{k-1} і визначає деяку "характеристику" k-го іммігранту, що залежить від моделі. Наприклад, $Y_k(t - S_{k-1})$ може бути "рівнем здоров'я" k-го іммігранту у час t. Значення $Y(t)$ є сумарною "характеристикою" всіх іммігрантів, що прибули до системи до часу t включно. Припустимо, що функція $g(t) := \mathbb{E}Y_1(t)$ є скінченною для всіх $t \geq 0$ та відмінною від нуля для деяких $t \geq 0$, та що $g \in D$. Для дослідження слабкої збіжності процесу Y, належним чином нормалізованого та центрованого, природно скористатися рівністю

$$Y(t) = \sum_{k \geq 0} (Y_{k+1}(t - S_k) - g(t - S_k)) \mathbb{1}_{\{S_k \leq t\}} + \sum_{k \geq 0} g(t - S_k) \mathbb{1}_{\{S_k \leq t\}}, \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

При фіксованому $t > 0$ перший доданок є границею певного мартингалу, а другий - значенням у момент часу t загального процесу дробового ефекту. Асимптотичний аналіз цих доданків потребує абсолютно різних підходів. Слабка збіжність першого доданку у (1.1) досліджувалася у [22].

В цьому розділі дисертаційної роботи ми доведемо функціональні граничні теореми для загальних процесів дробового ефекту у випадках, коли центрування є необхідним, і у випадках, коли воно не потрібне. Також для кожного отриманого результату ми наведемо приклади використання. Нарешті буде проведене моделювання граничних та допграничних процесів для конкретних прикладів.

Далі ми сформулюємо допоміжні леми, що використовуються для доведення наших результатів. Леми 1 та 2 запозичені з леми 2.3 на с. 159 книги [30] та леми A.5 статті [33] відповідно. Необхідні означення, пов'язані з J_1-топологією, наведені у розділі "Простір Скорохода" Додатку А.

Лема 1. *Відображення композиції* $(f, g) \mapsto f \circ g$ *є* J_1*-неперервним на неперервних функціях* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *та неперервних функціях* $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$*, що не спадають.*

Лема 2. *Нехай* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *у* J_1*-топології на* D*. Припустимо, що при* $n \to \infty$ *скінченні міри* ν_n *слабко збігаються до скінченної неперервної міри* ν *на* $[0, u]$ *для деякого* $u > 0$*. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\,u]} f_n(y)\nu_n(\mathrm{d}y) = \int_{[0,\,u]} f(y)\nu(\mathrm{d}y).$$

Якщо функція f *неперервна у точці* $c \in [0, u]$*, а* $\nu = \delta_c$ *є ймовірнісною мірою, зосередженою у точці* c*, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\,u]} f_n(y)\nu_n(\mathrm{d}y) = f(c).$$

1.2 Неперервність за Гьольдером граничних процесів

Для формулювання функціональних граничних теорем потрібні додаткові позначення. Нехай $V_\alpha := (V_\alpha(u))_{u\ge 0}$ - випадковий процес, що є м.н. локально неперервним за Гьольдером з показником $\alpha > 0$ та задовольняє $V_\alpha(0) = 0$ м.н. Зокрема, для довільного $T > 0$, всіх $0 \le x, y \le T$ та деякої м.н. скінченної випадкової величини M_T

$$|V_\alpha(x) - V_\alpha(y)| \le M_T |x - y|^\alpha. \tag{1.2}$$

Для $\rho > 0$ визначимо випадковий процес $Y_{\alpha,\rho} := (Y_{\alpha,\rho}(u))_{u\ge 0}$ так

$$\begin{aligned} Y_{\alpha,\rho}(u) &:= \rho \int_0^u (u-y)^{\rho-1} V_\alpha(y)\mathrm{d}y, \quad u > 0, \\ Y_{\alpha,\rho}(0) &:= \lim_{u\to+0} Y_{\alpha,\rho}(u), \end{aligned} \tag{1.3}$$

а для $-\alpha < \rho < 0$ – так

$$\begin{aligned} Y_{\alpha,\rho}(u) &:= u^\rho V_\alpha(u) + |\rho| \int_0^u (V_\alpha(u) - V_\alpha(u-y)) y^{\rho-1}\mathrm{d}y, \quad u > 0, \\ Y_{\alpha,\rho}(0) &:= \lim_{u\to+0} Y_{\alpha,\rho}(u). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Нарешті, покладемо $Y_{\alpha,0} = V_\alpha$. Використовуючи (1.2), робимо висновок, що $Y_{\alpha,\rho}(0) = 0$ м.н. для $\rho > -\alpha$.

Далі ми встановимо збіжність інтегралів у (1.3) та (1.4) та м.н. неперервність процесів $Y_{\alpha,\rho}$. Для цього буде зручно визначити процес V_α на всій числовій осі. Покладемо $V_\alpha(x) = 0$ при $x < 0$. З такою домовленістю праву частину формули (1.4) можна подати у еквівалентному вигляді

$$Y_{\alpha,\rho}(u) = |\rho| \int_0^\infty (V_\alpha(u) - V_\alpha(u-y))y^{\rho-1}\mathrm{d}y, \quad u > 0.$$

Крім того, виявляється, що формула (1.2) залишається вірною і для від'ємних x, y. Таким чином, ми стверджуємо, що для довільного $T > 0$, всіх $-\infty < x, y \leq T$ та тієї ж випадкової величини M_T, що і у (1.2),

$$|V_\alpha(x) - V_\alpha(y)| \leq M_T|x-y|^\alpha. \tag{1.5}$$

Ця нерівність тривіально виконується у випадку $x \vee y \leq 0$ та випливає з (1.2) у випадку $x \wedge y \geq 0$. Припустимо тепер, що $x \wedge y \leq 0 < x \vee y$. Тоді

$$|V_\alpha(x) - V_\alpha(y)| = |V_\alpha(x \vee y)| \leq M_T(x \vee y)^\alpha \leq M_T|x-y|^\alpha,$$

де перша нерівність випливає з (1.2) для $y = 0$.

Лема 3. *Нехай $\rho > -\alpha$. Виконуються твердження:*

1) $|Y_{\alpha,\rho}(u)| < \infty$ м.н. для кожного фіксованого $u > 0$;

2) процес $Y_{\alpha,\rho}$ є м.н. локально неперервним за Гьольдером з показником $\min(1,\ \alpha+\rho)$ при $\alpha+\rho \neq 1$ та будь-яким додатним показником, меншим за 1, при $\alpha+\rho = 1$; більш точно, у останньому випадку для будь-якого $T^* > T$ виконується нерівність

$$\sup_{0 \leq u \neq v \leq T} \frac{|Y_{\alpha,\rho}(u) - Y_{\alpha,\rho}(v)|}{|u-v|\log(T^*|u-v|^{-1})} < \infty \quad \text{м.н.}$$

Доведення. Випадок $\rho = 0$ є тривіальним. Зафіксуємо довільне $T > 0$.

1) Для всіх $u \in [0,T]$ маємо з урахуванням (1.2) у випадку $\rho > 0$

$$\begin{aligned} Y_{\alpha,\rho}(u)| &\leq \rho \int_0^u (u-y)^{\rho-1}|V_\alpha(y)|\mathrm{d}y \\ &\leq M_T\rho \int_0^u (u-y)^{\rho-1}y^\alpha \mathrm{d}y = M_T\rho\mathrm{B}(\rho,\alpha+1)u^{\rho+\alpha} < \infty \quad \text{м.н.}, \end{aligned}$$

а у випадку $-\alpha < \rho < 0$ –

$$\begin{aligned} |Y_{\alpha,\rho}(u)| &\leq u^\rho |V_\alpha(u)| + |\rho| \int_0^u |V_\alpha(u) - V_\alpha(u-y))y^{\rho-1}\mathrm{d}y \\ &\leq M_T u^{\rho+\alpha} + |\rho| M_T (\rho+\alpha)^{-1} u^{\rho+\alpha} \\ &= M_T \alpha (\rho+\alpha)^{-1} u^{\rho+\alpha} < \infty \quad \text{м.н.} \end{aligned}$$

2) Внаслідок симетрії достатньо розглянути випадок $0 \leq v < u \leq T$, що і припускається надалі без додаткової згадки.

Припустимо спочатку, що $-\alpha < \rho < 0$. Використовуючи (1.5), а також (1.2), отримуємо для $v > 0$

$$\begin{aligned} & |\rho|^{-1} |Y_{\alpha,\rho}(u) - Y_{\alpha,\rho}(v)| \\ = & \left| \int_0^\infty (V_\alpha(u) - V_\alpha(u-y) - V_\alpha(v) + V_\alpha(v-y))y^{\rho-1}\mathrm{d}y \right| \\ \leq & \int_0^{u-v} |V_\alpha(u) - V_\alpha(u-y)| \, y^{\rho-1}\mathrm{d}y \\ + & \int_0^{u-v} |V_\alpha(v) - V_\alpha(v-y)| \, y^{\rho-1}\mathrm{d}y \\ + & \int_{u-v}^\infty |V_\alpha(u) - V_\alpha(v)| \, y^{\rho-1}\mathrm{d}y \\ + & \int_{u-v}^\infty |V_\alpha(u-y) - V_\alpha(v-y)| \, y^{\rho-1}\mathrm{d}y \\ \leq & 2M_T \left(\int_0^{u-v} y^{\rho-1+\alpha}\mathrm{d}y + (u-v)^\alpha \int_{u-v}^\infty y^{\rho-1}\mathrm{d}y \right) \\ = & 2M_T \alpha (|\rho|(\rho+\alpha))^{-1} (u-v)^{\rho+\alpha} \quad \text{м.н.} \end{aligned}$$

З доведення пункту 1) ми вже знаємо, що аналогічна нерівність виконується і у випадку $v = 0$. Тому твердження пункту 2) виконується у ситуації, що розглядалася.

Нехай $\rho \geq 1$. Використовуючи (1.2), отримуємо

$$\begin{aligned}
& |Y_{\alpha,\rho}(u) - Y_{\alpha,\rho}(v)| \\
= & \left| \rho \int_0^v ((u-y)^{\rho-1} - (v-y)^{\rho-1}) V_\alpha(y) \mathrm{d}y + \rho \int_v^u (u-y)^{\rho-1} V_\alpha(y) \mathrm{d}y \right| \\
\leq & \rho \int_0^v ((u-y)^{\rho-1} - (v-y)^{\rho-1}) |V_\alpha(y)| \,\mathrm{d}y + \rho \int_v^u (u-y)^{\rho-1} |V_\alpha(y)| \,\mathrm{d}y \\
\leq & \rho M_T \int_0^v ((u-y)^{\rho-1} - (v-y)^{\rho-1}) y^\alpha \mathrm{d}y + \rho M_T \int_v^u (u-y)^{\rho-1} y^\alpha \mathrm{d}y \\
= & \rho M_T \int_0^u (u-y)^{\rho-1} y^\alpha \mathrm{d}y - \rho M_T \int_0^v (v-y)^{\rho-1} y^\alpha \mathrm{d}y \\
= & \rho M_T \mathrm{B}(\rho, \alpha+1)(u^{\rho+\alpha} - v^{\rho+\alpha}) \\
\leq & \rho(\rho+\alpha) M_T \mathrm{B}(\rho, \alpha+1) T^{\rho+\alpha-1}(u-v) \quad \text{м.н.},
\end{aligned}$$

де остання нерівність випливає з теореми про середнє для диференційовних функцій.

Нехай тепер $0 < \rho < 1$. У цьому випадку ми використовуємо розклад

$$\begin{aligned}
& |Y_{\alpha,\rho}(u) - Y_{\alpha,\rho}(v)| \\
= & \left| \rho \int_0^u (u-y)^{\rho-1} V_\alpha(y) \mathrm{d}y - \rho \int_0^v (v-y)^{\rho-1} V_\alpha(y) \mathrm{d}y \right| \\
= & \Bigg| \rho \int_0^v (V_\alpha(v) - V_\alpha(v-y))(y^{\rho-1} - (y+u-v)^{\rho-1}) \mathrm{d}y \\
- & \rho \int_0^{u-v} (V_\alpha(v) - V_\alpha(u-y)) y^{\rho-1} \mathrm{d}y + V_\alpha(v)(u^\rho - v^\rho) \Bigg| \\
\leq & I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
& I_1 := \rho \int_0^v |V_\alpha(v) - V_\alpha(v-y)| (y^{\rho-1} - (y+u-v)^{\rho-1}) \mathrm{d}y, \\
& I_2 := \rho \int_0^{u-v} |V_\alpha(v) - V_\alpha(u-y)| y^{\rho-1} \mathrm{d}y, \\
& I_3 := |V_\alpha(v)| (u^\rho - v^\rho).
\end{aligned}$$

Доданок I_1 можна оцінити так

$$\begin{aligned}
I_1 \leq & \rho M_T \int_0^v y^\alpha (y^{\rho-1} - (y+u-v)^{\rho-1}) \mathrm{d}y \\
= & \rho M_T (u-v)^{\alpha+\rho} \int_0^{v/(u-v)} t^\alpha (t^{\rho-1} - (t+1)^{\rho-1}) \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

За допомогою нерівності $x^{\rho-1}-(x+1)^{\rho-1} \leq (1-\rho)x^{\rho-2}$ для $x > 0$ отримаємо у випадку $\alpha+\rho > 1$

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \rho(1-\rho)M_T(u-v)^{\alpha+\rho}\int_0^{v/(u-v)} t^{\alpha+\rho-2}\mathrm{d}t \\ &= \rho(1-\rho)(\alpha+\rho-1)^{-1}M_T v^{\alpha+\rho-1}(u-v) \\ &\leq \rho(1-\rho)(\alpha+\rho-1)^{-1}M_T T^{\alpha+\rho-1}(u-v), \end{aligned}$$

у випадку $0 < \alpha+\rho < 1$

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \rho M_T(u-v)^{\alpha+\rho}\Big(\int_0^1 t^{\alpha}(t^{\rho-1}-(t+1)^{\rho-1})\mathrm{d}t \\ &+ \int_1^\infty t^{\alpha}(t^{\rho-1}-(t+1)^{\rho-1})\mathrm{d}t\Big) \\ &\leq \rho M_T(u-v)^{\alpha+\rho}\left(\int_0^1 t^{\alpha+\rho-1}\mathrm{d}t + (1-\rho)\int_1^\infty t^{\alpha+\rho-2}\mathrm{d}t\right) \\ &= \rho M_T\left(\frac{1}{\alpha+\rho}+\frac{1-\rho}{1-\alpha-\rho}\right)(u-v)^{\alpha+\rho}, \end{aligned}$$

та у випадку $\alpha+\rho = 1$

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \rho M_T(u-v)\int_0^{v/(u-v)}\left(1-\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\alpha}\right)\mathrm{d}t \\ &\leq \rho M_T(u-v)\int_0^{v/(u-v)}\frac{\mathrm{d}t}{t+1} \\ &= \rho M_T(u-v)\log\frac{u}{u-v} \\ &\leq \rho M_T(u-v)\log\frac{T}{u-v}. \end{aligned}$$

Далі

$$I_2 \leq \rho M_T\int_0^{u-v}(u-v-y)^{\alpha}y^{\rho-1}\mathrm{d}y = \rho M_T \mathrm{B}(\rho,\alpha+1)(u-v)^{\alpha+\rho}.$$

У випадку $\alpha+\rho > 1$ використовуємо нерівність $(u-v)^{\alpha+\rho} \leq T^{\alpha+\rho-1}(u-v)$.

Нарешті

$$I_3 \leq M_T v^{\alpha}(u^{\rho}-v^{\rho}) \leq M_T(u^{\alpha+\rho}-v^{\alpha+\rho}).$$

Права частина не перевищує $M_T(u-v)^{\alpha+\rho}$ у випадку $0 < \alpha+\rho \leq 1$, що забезпечується субадитивністю $x \mapsto x^{\alpha+\rho}$ на $[0,\infty)$, та $M_T(\alpha+\rho)T^{\alpha+\rho-1}(u-$

v) у випадку $\alpha + \rho > 1$. Збираючи окремі нерівності разом, отримаємо бажане. Лему 3 доведено. $\square$

У випадку, коли процес V_α є гаусівським ми будемо використовувати позначення V_α^G та відповідно $Y_{\alpha,\rho}^G$ замість $Y_{\alpha,\rho}$. Процес $Y_{\alpha,\rho}^G$ фігурує в якості граничного у підрозділі 1.3. Якщо V_α^G є броунівським рухом (при цьому $\alpha = 1/2 - \varepsilon$ для довільного $\varepsilon \in (0, 1/2)$), процес $Y_{\alpha,\rho}^G$ можна подати у еквівалентній формі як інтеграл Скорохода

$$Y_{\alpha,\rho}^G(u) := \int_{[0,\,u]} (u-y)^\rho \mathrm{d}V_\alpha^G(y), \quad u \geq 0.$$

Так заданий процес називається *процесом Рімана-Ліувілля* або *дробово-інтегровним броунівським рухом* з параметром ρ для $\rho > -1/2$. Оскільки такі процеси декілька разів з'являться у роботі, надамо їм спеціальне позначення R_ρ, тобто

$$R_\rho(u) := \int_{[0,\,u]} (u-y)^\rho \mathrm{d}B(y) = \rho \int_0^u (u-y)^{\rho-1} B(y) \mathrm{d}y, \quad u \geq 0, \tag{1.6}$$

де $B := (B(u))_{u\geq 0}$ є стандартним броунівським рухом

Якщо V_α^G є більш загальним гаусівським процесом, що задовольняє згадані вище умови, процес $Y_{\alpha,\rho}^G$ природно назвати дробово-інтегровним гаусівським процесом. Зазначимо, що для натуральних ρ процес $Y_{\alpha,\rho}^G$ є з точністю до мультиплікативної константи ρ-кратним інтегралом від V_α^G, тобто

$$Y_{\alpha,1}^G(u) = \int_0^u V_\alpha^G(y) \mathrm{d}y, \quad u \geq 0,$$

та для $\rho \geq 2$ $\quad Y_{\alpha,\rho}^G(u) = \rho! \int_0^u \int_0^{u_2} \ldots \int_0^{u_\rho} V_\alpha^G(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}u_\rho \ldots \mathrm{d}u_2, \quad u \geq 0.$

У цьому легко переконатися за допомогою інтегрування частинами.

У випадку, коли процес V_α м.н. не спадає ми будемо використовувати позначення V_α^M та відповідно $Y_{\alpha,\rho}^M$ замість $Y_{\alpha,\rho}$. Процес $Y_{\alpha,\rho}^M$ фігурує в якості граничного у підрозділі 1.4.

Для $\rho > -\alpha$ випадковий процес $Y_{\alpha,\rho}^M$ можна подати у еквівалентній формі

$$Y_{\alpha,\rho}^M(u) := \int_{[0,\,u]} (u-y)^\rho \mathrm{d}V_\alpha^M(y), \quad u \geq 0, \tag{1.7}$$

де інтеграл існує як потраєкторний інтеграл Лебега-Стілтьєса. Дійсно, проінтегрувавши частинами (1.7), отримаємо (1.3) для $\rho > 0$ та (1.4) для $-\alpha < \rho < 0$.

Далі будемо вважати, що простори D та $D\times D$ є наділеними J_1-топологією. Детальна інформація щодо J_1-топології міститься у книгах [10, 49].

1.3 Функціональна гранична теорема з центруванням

1.3.1 Обговорення та основний результат

У цьому підрозділі ми сформулюємо функціональну граничну теорему для належним чином нормалізованого та центрованого загального процесу дробового ефекту X. Встановлене нами твердження дозволить контролювати асимптотичну поведінку другого доданку у (1.1), що разом з результатами [22] призведе до розуміння асимптотики процесу Y.

Теорема 4. *Нехай функція $h \in D$ має обмежену варіацію, не спадає при великих значеннях аргументу та правильно змінюється на ∞ з показником $\rho \geq 0$. Припустимо, що*

$$\left(\frac{N(ut) - b(ut)}{a(t)}\right)_{u\geq 0} \implies \left(V_\alpha^G(u)\right)_{u\geq 0}, \quad t \to \infty, \tag{1.8}$$

у J_1-топології на D, де функція $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ правильно змінюється на нескінченності з додатним показником, а $b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є функцією, що не спадає та є відмінною від тотожного нуля. Тоді

$$\left(\frac{X(ut) - \int_{[0,\,tu]} h(ut-y)\mathrm{d}b(y)}{a(t)h(t)}\right)_{u\geq 0} \implies \left(Y_{\alpha,\rho}^G(u)\right)_{u\geq 0}, \quad t \to \infty,$$

у J_1-топології на D.

Зауваження 5. *Оскільки функція b не спадає, а h є локально обмеженою та майже всюди неперервною функцією внаслідок того, що $h \in D$, то інтеграл $\int_{[0,\,t]} h(t-y)\mathrm{d}b(y)$ існує як інтеграл Рімана-Стілт'єса.*

1.3.2 Доведення теореми 4

Для доведення слабкої збіжності скінченновимірних розподілів нам знадобиться допоміжне твердження.

Лема 6. *Нехай функція* $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to (0, \infty)$ *не спадає за другою координатою та задовольняє* $\lim_{t\to\infty} f(t, x) = x^\beta$ *для всіх* $x > 0$ *та деякого* $\beta \geq 0$. *Для* $t, x \geq 0$ *покладемо*

$$Z(t, x) := \int_{[0,\, x]} V_\alpha^G(x - y)\mathrm{d}_y f(t, y),$$

$$Z(x) := \int_{[0,\, x]} V_\alpha^G(x - y)\mathrm{d}y^\beta \text{ для } \beta > 0 \text{ та } Z(x) := V_\alpha^G(x) \text{ для } \beta = 0.$$

Тоді для будь-яких $u, v > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}Z(t, u)Z(t, v) = \mathbb{E}Z(u)Z(v).$$

Доведення. Зафіксуємо довільні $u, v > 0$. Для кожного $t > 0$ позначимо через $Q_t^{(u)}$ та $Q_t^{(v)}$ незалежні випадкові величини з функціями розподілу

$$\mathbb{P}\{\mathrm{Q_t^{(u)}} \leq \mathrm{y}\} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y < 0, \\ \frac{f(t,y)}{f(t,u)}, & \text{якщо } y \in [0, u], \\ 1, & \text{якщо } y > u \end{cases}$$

$$\text{та} \quad \mathbb{P}\{\mathrm{Q_t^{(v)}} \leq \mathrm{y}\} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y < 0, \\ \frac{f(t,y)}{f(t,v)}, & \text{якщо } y \in [0, v], \\ 1, & \text{якщо } y > v. \end{cases}$$

Також позначимо через $Q^{(u)}$ та $Q^{(v)}$ незалежні випадкові величини з функціями розподілу

$$\mathbb{P}\{\mathrm{Q}^{(\mathrm{u})} \leq \mathrm{y}\} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y < 0, \\ (\frac{y}{u})^{\beta}, & \text{якщо } y \in [0, u], \\ 1, & \text{якщо } y > u \end{cases}$$

$$\text{та} \quad \mathbb{P}\{\mathrm{Q}^{(\mathrm{v})} \leq \mathrm{y}\} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y < 0, \\ (\frac{y}{v})^{\beta}, & \text{якщо } y \in [0, v], \\ 1, & \text{якщо } y > v. \end{cases}$$

Згідно з умовою

$$(Q_t^{(u)}, Q_t^{(v)}) \xrightarrow{\mathrm{d}} (Q^{(u)}, Q^{(v)}) \quad t \to \infty.$$

Визначимо на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ функцію $r(x, y) := \mathbb{E}V_\alpha^G(x)V_\alpha^G(y)$. Враховуючи м.н. неперервність V_α^G, теорему Лебега про мажоровану збіжність та те, що за теоремою 3.2 на стор. 63 в [1] $\mathbb{E}(\sup_{z\in[0,T]} V_\alpha^G(z))^2 < \infty$, маємо неперервність, а, отже, і обмеженість r на $[0, T] \times [0, T]$ для кожного $T > 0$. Тому

$$r(u - Q_t^{(u)}, v - Q_t^{(v)}) \xrightarrow{\mathrm{d}} r(u - Q^{(u)}, v - Q^{(v)}), \quad t \to \infty$$

і

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}r(u - Q_t^{(u)}, v - Q_t^{(v)}) = \mathbb{E}r(u - Q^{(u)}, v - Q^{(v)})$$

за теоремою Лебега про мажоровану збіжність. Далі

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}Z(t,u)Z(t,v) \\ = \ & f(t,u)f(t,v) \int_{[0,\,u]} \int_{[0,\,v]} \mathbb{E}V_\alpha^G(u-y)V_\alpha^G(v-z)\mathrm{d}_y \left(\frac{f(t,y)}{f(t,u)}\right) \mathrm{d}_z \left(\frac{f(t,z)}{f(t,v)}\right) \\ = \ & f(t,u)f(t,v)\mathbb{E}r\left(u - Q_t^{(u)}, v - Q_t^{(v)}\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} (uv)^\beta \mathbb{E}r\left(u - Q^{(u)}, v - Q^{(v)}\right). \end{aligned}$$

Якщо $\beta > 0$, то

$$\begin{aligned}
& (uv)^{\beta}\mathbb{E}r(u-Q^{(u)}, v-Q^{(v)}) \\
= & \int_{[0,\,u]}\int_{[0,\,v]} r(u-y, v-z)\mathrm{d}_y\left(u^{\beta}\mathbb{P}\{\mathrm{Q^{(u)} \le y}\}\right)\mathrm{d}_z\left(v^{\beta}\mathbb{P}\{\mathrm{Q^{(v)} \le z}\}\right) \\
= & \int_{[0,\,u]}\int_{[0,\,v]} r(u-y, v-z)\mathrm{d}y^{\beta}\mathrm{d}z^{\beta} \\
= & \ \mathbb{E}\int_{[0,\,u]} V_{\alpha}^{G}(u-y)\mathrm{d}y^{\beta}\int_{[0,\,v]} V_{\alpha}^{G}(v-z)\mathrm{d}z^{\beta} = \mathbb{E}Z(u)Z(v).
\end{aligned}$$

Якщо $\beta = 0$, то

$$(uv)^{\beta}\mathbb{E}r(u-Q^{(u)}, v-Q^{(v)}) = r(u,v) = \mathbb{E}V_{\alpha}^{G}(u)V_{\alpha}^{G}(v) = \mathbb{E}Z(u)Z(v).$$

Лему 6 доведено. $\square$

Доведення теореми 4.. Згідно з припущенням теореми знайдеться $t_0 > 0$ таке, що $h(t)$ не спадає для $t > t_0$. Оскільки $\lim_{t\to\infty} h(t) = +\infty$, то, збільшуючи за потреби t_0, можемо забезпечити виконання нерівності $h(t) > 0$ для $t > t_0$. Ми спочатку покажемо, що поведінка функції обмеженої варіації h на проміжку $[0, t_0]$ не впливає на слабку збіжність процесу дробового ефекту. Тому без обмеження загальності ми можемо вважати, що $h(0) = 0$, та що h не спадає на $\mathbb{R}^+$.

Проінтегрувавши частинами, отримаємо

$$\begin{aligned}
& X(tu) - \int_{[0,\,tu]}(h(tu-y)\mathrm{d}b(y) \\
= & \int_{[0,\,u]}(h(t(u-y))\mathrm{d}_y(N(ty)-b(ty)) \\
= & \ (h(tu)-h((tu)-))(N(0)-b(0)) \\
+ & \int_{(0,\,u]}(N(ty)-b(ty)))\mathrm{d}_y(-h(t(u-y)))
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Для всіх $T > 0$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sup_{u\in[0,\,T]}|h(tu)-h((tu)-)||N(0)-b(0)|}{a(t)h(t)} \\
\le & \ \frac{h(tT)}{h(t)}\frac{|N(0)-b(0)|}{a(t)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t\to\infty,
\end{aligned}$$

оскільки h правильно змінюється на ∞. Позначимо через $\mathbb{V}_0^{t_0}(h)$ повну варіацію функції h на $[0, t_0]$. За припущенням теореми вона є скінченною. Для всіх $T > 0$

$$\begin{aligned} &\frac{\sup_{u\in[0,\,T]}\int_{[u-t_0/t,\,u)}(N(ty)-b(ty))\mathrm{d}_y(-h(t(u-y)))}{a(t)h(t)} \\ \leq\ &\frac{\sup_{u\in[0,\,T]}|N(tu)-b(tu)|}{a(t)}\frac{\mathbb{V}_0^{t_0}(h)}{h(t)} \overset{\mathbb{P}}{\to} 0 \end{aligned}$$

при $t \to \infty$. Збіжність до нуля обгрунтовується тим, що внаслідок (1.8) перший множник збігається за розподілом до $\sup_{u\in[0,\,T]}|V_\alpha^G(u)|$, а другий тривіально збігається до нуля. Таким чином, як і стверджувалося, надалі ми можемо досліджувати асимптотичну поведінку другого доданку у правій частині (1.9), вважаючи, що $h(0) = 0$, та що h не спадає на $\mathbb{R}^+$.

Теорема Скорохода про зображення гарантує те, що на одному ймовірнісному просторі існують версії $(\hat{N}(t))_{t\geq0}$ та $(\hat{V}_\alpha^G(t))_{t\geq0}$ процесів $(N(t))_{t\geq0}$ та $(V_\alpha^G(t))_{t\geq0}$ такі, що для всіх $T > 0$

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{u\in[0,\,T]}|\hat{V}_\alpha^G(t)(u)-\hat{V}_\alpha^G(u)| = 0 \quad \text{м.н.}, \tag{1.10}$$

де $\hat{V}_\alpha^G(t)(u) := \frac{\hat{N}(tu)-b(tu)}{a(t)}$ для $t > 0$ та $u \geq 0$. Для кожного $t > 0$ покладемо

$$h_t(x) = h(tx)/h(t), \quad x \geq 0,$$

$$X_t(u) := (a(t))^{-1}\int_{(0,\,u]}(N(ty)-b(ty)))\mathrm{d}_y(-h_t(u-y)), \quad u \geq 0$$

та

$$\hat{X}_t^*(u) := \int_{(0,\,u]}\hat{V}_\alpha^G(t)(y)\mathrm{d}_y(-h_t(u-y)), \quad u \geq 0.$$

Внаслідок того, что розподіли процесів $(X_t(u))_{u\geq0}$ та $(\hat{X}_t^*(u))_{u\geq0}$ є однаковими, залишається перевірити виконання двох співвідношень

$$\lim_{t\to\infty}\int_{(0,\,u]}(\hat{V}_\alpha^G(t)(y)-\hat{V}_\alpha^G(y))\mathrm{d}_y(-h_t(u-y)) = 0 \quad \text{м.н.} \tag{1.11}$$

та

$$\left(\int_{(0,\,u]}V_\alpha^G(y)\mathrm{d}(-h_t(u-y))\right)_{u\geq0} \implies \left(Y_{\alpha,\rho}^G(u)\right)_{u\geq0}, \quad t\to\infty, \tag{1.12}$$

у J_1-топології на D.

З урахуванням (1.10) та монотонності h_t маємо для всіх $T > 0$ при $t \to \infty$

$$\begin{aligned}
&\sup_{u\in[0,\,T]} \left| \int_{(0,\,u]} \left(\hat{V}_\alpha^G(t)(u) - \hat{V}_\alpha^G(u) \right) \mathrm{d}_y(-h_t(u-y)) \right| \\
\leq\ &\sup_{u\in[0,\,T]} \left| \hat{V}_\alpha^G(t)(u) - \hat{V}_\alpha^G(u) \right| h_t(T) \longrightarrow 0 \quad \text{м.н.},
\end{aligned}$$

що доводить (1.11).

Оскільки V_α^G - гаусівський процес, то збіжність скінченновимірних розподілів в (1.12), що є еквівалентною збіжності коваріацій, випливає з леми 6. Щоб застосувати лему, ми використовуємо рівність

$$Y_{\alpha,\rho}^G(u) = \int_{(0,\,u]} V_\alpha^G(y)\mathrm{d}_y(-(u-y)^\rho)$$

для $\rho > 0$ та $Y_{\alpha,\rho}^G(u) = V_\alpha^G(u)$ для $\rho = 0$. Доведемо щільність на $D[0,T]$ для будь-якого $T > 0$ для процесу

$$\hat{X}_t(u) := \int_{(0,\,u]} V_\alpha^G(y)\mathrm{d}_y(-h_t(u-y)) = \int_{[0,\,u)} V_\alpha^G(u-y)\mathrm{d}_y h_t(y), \quad u \geq 0.$$

За теоремою 13.2 в [10] достатньо показати, що для будь-яких $r_1, r_2 > 0$ існують $t_0, \delta > 0$ такі, що для всіх $t \geq t_0$

$$\mathbb{P}\{ \sup_{0\leq u,v\leq T, |u-v|\leq\delta} |\hat{X}_t(u) - \hat{X}_t(v)| > r_1 \} \leq r_2. \tag{1.13}$$

Покладемо $l := \max(u,v)$. Нагадавши, що згідно з домовленістю $V_\alpha^G(s) = 0$ для $s < 0$, маємо для $0 \leq u, v \leq T$ and $|u-v| \leq \delta$

$$\begin{aligned}
|\hat{X}_t(u) - \hat{X}_t(v)| \ &= \ \left| \int_{[0,\,l)} (V_\alpha^G(u-y) - V_\alpha^G(v-y))\mathrm{d}_y h_t(y) \right| \\
&\leq \ M_T|u-v|^\alpha h_t(T) \leq M_T|u-v|^\alpha \lambda
\end{aligned}$$

для достатньо великих t та додатної константи λ, існування якої випливає з співвідношення $\lim_{t\to\infty} h_t(T) = T^\rho < \infty$. Зменшуючи, у разі необхідності, δ, забезпечуємо виконання нерівності (1.13) для будь-яких додатних r_1 та r_2. Теорему 4 доведено. $\square$

1.3.3 Приклади використання

Ми наведемо п'ять прикладів конкретних вхідних послідовностей $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, які задовольняють граничне співвідношення (1.8) з чотирма різними гаусівськими процесами V_α^G.

У випадку, коли послідовність $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ м.н. не спадає, лічильний процес $(N(t))_{t\geq 0}$ збігається з узагальненою оберненою функцією для (S_k), тобто

$$N(t) = \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > t\} \quad \text{м.н.}, \quad t \geq 0. \tag{1.14}$$

Внаслідок цього, якщо справедлива функціональна гранична теорема для $S_{[ut]}$ у J_1-топології на D, та граничний процес є м.н. неперервним, то відповідна функціональна гранична теорема для $N(ut)$ у J_1-топології на D є простим наслідком. Детальне обговорення цього факту наведене, наприклад, у [32]. Якщо послідовність $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ не є монотонною (як, наприклад, у пункті 2 нижче), то рівність (1.14) не виконується, і доведення функціональної граничної теореми для $N(ut)$ у кожному окремому випадку потребує додаткових міркувань.

1. Стандартне затримане випадкове блукання. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ є незалежними та однаково розподіленими невід'ємними випадковими величинами, що не залежать від випадкової величини S_0. Випадок $S_0 = 0$ м.н. не виключається. Випадкова послідовність $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, що при $k \in \mathbb{N}$ визначається рівністю $S_k := S_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_k$, називається *затриманим стандартним випадковим блуканням*. У випадку $S_0 = 0$ м.н. використовується термін *затримане в нулі стандартне випадкове блукання*. Позначимо через $(N_0(t))_{t\geq 0}$ лічильний процес для затриманого в нулі блукання. Добре відомо (див., наприклад, теорему 1b(i) [11]), що

а) за умови $\sigma^2 := \operatorname{Var}\xi_1 \in (0,\infty)$

$$\left(\frac{N_0(ut) - \mu^{-1}ut}{(\sigma^2\mu^{-3}t)^{1/2}}\right)_{u\geq 0} \implies (B(u))_{u\geq 0}, \quad t \to \infty, \tag{1.15}$$

у J_1-топології на D, де $\mu := \mathbb{E}\xi_1 < \infty$, а $(B(u))_{u\geq 0}$ є стандартним броунівським рухом (отже, співвідношення (1.8) виконується з $b(t) = \mu^{-1}t$ та $a(t) = (\sigma^2\mu^{-3}t)^{1/2}$);

б) за умов

$$\sigma^2 = \infty \text{ та } \int_{[0,\,x]} y^2 \mathbb{P}\{\xi_1 \in \mathrm{d}y\} \sim L(x), \quad x \to \infty \tag{1.16}$$

для деякої функції L, що повільно змінюється на ∞

$$\left(\frac{N_0(ut) - \mu^{-1}ut}{\mu^{-3/2}c(t)}\right)_{u \geq 0} \implies (B(u))_{u \geq 0}, \quad t \to \infty, \tag{1.17}$$

у J_1-топології на D, де c є додатною вимірною функцією такою, що $\lim_{t\to\infty} c(t)^{-2} t L(c(t)) = 1$ (отже, співвідношення (1.8) виконується з $b(t) = \mu^{-1}t$ та $a(t) = \mu^{-3/2}c(t)$; оскільки функція $c(t)$ асимптотично обернена до $t^2/L(t)$, то згідно з твердженням 1.5.15 [12] вона, а, отже, і $a(t)$ правильно змінюються на ∞ з показником $1/2$). Лічильний процес $(N(t))_{t\geq 0}$ для затриманого випадкового блукання задовольняє такі ж граничні співвідношення, що забезпечується співвідношенням: для всіх $u \in [0, T]$

$$a(t)^{-1} \sup_{u\in[0,\,T]} (N(tu) - N_0(tu)) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t \to \infty,$$

де в залежності від випадку $a(t) = (\sigma^2\mu^{-3}t)^{1/2}$ або $a(t) = \mu^{-3/2}c(t)$, а $(N_0(t))_{t\in\mathbb{R}}$ є лічильним процесом для відповідного затриманого в нулі блукання (звичайно, $N_0(t) = 0$ для $t < 0$). Останнє випливає з формули $N(t) = N_0(t - S_0)$, $t \geq 0$, встановленого у лемі A.1 [33] співвідношення

$$a(t)^{-1} \sup_{u\in[0,\,T]} (N_0(ut) - N_0(ut - h)) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t \to \infty,$$

що виконується для будь-яких додатних h та T, та того факту, що S_0 не залежить від $(N_0(t))_{t\in\mathbb{R}}$. Отже, згідно з теоремою 4 і для затриманого, і для затриманого в нулі блукання

$$\left(\frac{X(ut) - \mu^{-1}\int_0^{ut} h(y)\mathrm{d}y}{(\sigma^2\mu^{-3}t)^{1/2}h(t)}\right)_{u\geq 0} \implies (R_\rho(u))_{u\geq 0}, \quad t \to \infty,$$

у J_1-топології на D, якщо $\sigma^2 \in (0, \infty)$ (у випадку $\rho = 0$ граничний процес $R_0 = B$), та

$$\left(\frac{X(ut) - \mu^{-1}\int_0^{ut} h(y)\mathrm{d}y}{\mu^{-3/2}c(t)h(t)}\right)_{u\geq 0} \implies (R_\rho(u))_{u\geq 0}, \quad t \to \infty,$$

у J_1-топології на D за умов (1.16). При цьому в обох випадках граничним процесом є дробово-інтегровний броунівський рух з параметром ρ. У випадку затриманого в нулі блукання останній результат може бути знайдений у теоремі 1.1 (A1, A2) [33].

2. Збурене випадкове блукання. Нехай (ξ_1, η_1), $(\xi_2, \eta_2) \ldots$ є незалежними та однаково розподіленими випадковими векторами з невід'ємними координатами. Покладемо

$$S_1 := \eta_1, \quad S_n := \xi_1 + \ldots + \xi_{n-1} + \eta_n, \quad n \geq 2.$$

Так визначена послідовність $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ називається *збуреним випадковим блуканням*. Різноманітні властивості збурених випадкових блукань обговорюються у монографії [34].

Припустимо, що $\sigma^2 = \operatorname{Var} \xi_1 \in (0, \infty)$ та $\mathbb{E}\eta^a < \infty$ для деякого $a > 0$, та покладемо $G(x) := \mathbb{P}\{\eta_1 \leq x\}$ для $x \in \mathbb{R}$. Згідно з теоремою 3.2 у [3]

$$\left(\frac{N(ut) - \mu^{-1}\int_0^{ut} G(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}t}}\right)_{u\geq 0} \implies (B(u))_{u\geq 0}, \quad t \to \infty,$$

у J_1-топології на D, де $\mu = \mathbb{E}\xi_1 < \infty$. Тому за теоремою 4

$$\left(\frac{X(ut) - \mu^{-1}\int_0^{ut} h(y)G(y)\mathrm{d}y}{(\sigma^2\mu^{-3}t)^{1/2}h(t)}\right)_{u\geq 0} \implies (R_\rho(u))_{u\geq 0}, \quad t \to \infty,$$

у J_1-топології на D.

3. Випадкове блукання з тривалою пам'яттю. Нехай ξ_1, $\xi_2, \ldots$ є незалежними та однаково розподіленими додатними випадковими величинами зі скінченним середнім, що не залежать від випадкових величин θ_1, $\theta_2, \ldots$, що утворюють центровану стаціонарну гаусівську послідовність з $\mathbb{E}\theta_1\theta_{k+1} \sim k^{2d-1}\ell(k)$ при $k \to \infty$ для деякого $d \in (0, 1/2)$. Покладемо $S_0 := 0$ та

$$S_n - S_{n-1} = \xi_n e^{\theta_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Нагадаємо, що дробовий броунівський рух з індексом Хюрста $H \in (0, 1)$ – це центрований гаусівський процес $B_H := (B_H(u))_{u\geq 0}$ з коваріацією

$$\mathbb{E}B_H(u)B_H(v) = 2^{-1}(u^{2H} + v^{2H} - (u - v)^{2H})$$

для $u, v \geq 0$. Цей процес має стаціонарні прирости та є самоподібним з параметром H. Тому для довільного $p > 0$

$$\mathbb{E}|B_H(u) - B_H(v)|^p = (u-v)^{Hp}\mathbb{E}|B_H(1)|^p, \quad u, v \geq 0.$$

Згідно з достатніми умовами Колмогорова-Ченцова існує версія B_H (яку ми також будемо позначати B_H), що є м.н. неперервною за Гьольдером з показником, меншим за $H - 1/p$ для довільного $p > 0$, і, отже, за H.

Згідно з прикладом 4.25 на с. 357 книги [6]

$$\left(\frac{N(ut) - m_1^{-1}ut}{(d(2d+1))^{-1/2}m_1^{-3/2-d}m_2 t^{d+1/2}(\ell(t))^{1/2}}\right)_{u\geq 0} \implies \big(B_{d+1/2}(u)\big)_{u\geq 0}, \quad t \to \infty$$

у J_1-топології на D, де $m_1 := \mathbb{E}S_1 = \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}e^{\theta_1}$ та $m_2 := \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\theta_1 e^{\theta_1}$. Отже, за теоремою 4

$$\left(\frac{X(ut) - m_1^{-1}\int_0^{ut} h(y)\mathrm{d}y}{(d(2d+1))^{-1/2}m_1^{-3/2-d}m_2 t^{d+1/2}(\ell(t))^{1/2}h(t)}\right)_{u\geq 0}$$
$$\implies \left(\rho\int_0^u (u-y)^{\rho-1}B_{d+1/2}(y)\mathrm{d}y\right)_{u\geq 0}, \quad t \to \infty,$$

у J_1-топології на D, якщо $\rho > 0$. Якщо ж $\rho = 0$, то граничним процесом є $B_{d+1/2}$.

4. Лічильний процес у гіллястому випадковому блуканні. Припустимо, що випадкові величини ξ_k, визначені у попередньому пункті, є м.н. додатними. Нехай $(N'(t))_{t\geq 0} := (N_0(t) - 1)_{t\geq 0}$ є відповідним процесом відновлення. Для деякого натурального $k \geq 2$ візьмемо в якості $N(t)$ число індивідуумів k-го покоління з позиціями $\leq t$ у гіллястому випадковому блуканні, у якому індивідууми першого покоління розташовані у точках S_1, $S_2, \ldots$ (більш детальне викладення можна знайти у розділі 1.2 [36]).

Припустимо, що $\sigma^2 = \operatorname{Var}\xi_1 \in (0, \infty)$. В якості наслідку до теореми 1.3 у [36] отримуємо

$$\left(\frac{N(ut) - (ut)^k/(k!\mu^k)}{((k-1)!)^{-1}\sqrt{\sigma^2\mu^{-2k-1}t^{2k-1}}}\right)_{u\geq 0} \implies (R_{k-1}(u))_{u\geq 0}, \quad t \to \infty,$$

у J_1-топології на D, де $\mu = \mathbb{E}\xi_1 < \infty$. Звичайно, при $k = 1$ це співвідношення також виконується і, як і має бути, зводиться до (1.15). З леми 3 випливає, що процес R_{k-1} є м.н. локально неперервним за Гьольдером з будь-яким додатним показником, меншим за $k - 1/2$. Таким чином, застосовна теорема 4, згідно з якою у J_1-топології на D

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{X(ut) - ((k-1)!\mu^k)^{-1}\int_0^{ut} h(ut-y)y^{k-1}\mathrm{d}y}{((k-1)!)^{-1}\sqrt{\sigma^2\mu^{-2k-1}t^{2k-1}}h(t)}\right)_{u\geq 0} \\
\Longrightarrow\ &\left(\rho\int_0^u (u-y)^{\rho-1}R_{k-1}(y)\mathrm{d}y\right)_{u\geq 0} \\
=\ &((k-1)\mathrm{B}(k-1,\rho+1)R_{\rho+k-1}(u))_{u\geq 0}, \quad t\to\infty,
\end{aligned}$$

де $\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$ є бета функцією. Остання рівність встановлюється так: для $u > 0$

$$\begin{aligned}
&\rho\int_0^u (u-y)^{\rho-1}R_{k-1}(y)\mathrm{d}y \\
=\ &\rho\int_0^u (u-y)^{\rho-1}(k-1)\int_0^y (y-x)^{k-2}B(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=\ &\rho(k-1)\int_0^u B(x)\int_x^u (u-y)^{\rho-1}(y-x)^{k-2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
=\ &\rho(k-1)\int_0^u B(x)\int_0^{u-x}(u-x-y)^{\rho-1}y^{k-2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
=\ &\rho(k-1)\mathrm{B}(k-1,\rho)\int_0^u (u-x)^{\rho+k-2}B(x)\mathrm{d}x \\
=\ &\frac{\rho(k-1)\mathrm{B}(k-1,\rho)}{\rho+k-1}R_{\rho+k-1}(u) \\
=\ &(k-1)\mathrm{B}(k-1,\rho+1)R_{\rho+k-1}(u).
\end{aligned}$$

5. Неоднорідний процес Пуассона. Нехай $(N(t))_{t\geq 0}$ є неоднорідним процесом Пуассона з $\mathbb{E}N(t) = m(t)$ для деякої функції $m(t)$, що не спадає та задовольняє

$$m(t)\ \sim\ ct^w, \quad t\to\infty \tag{1.18}$$

у J_1-топології на D, де $c, w > 0$. Без обмеження загальності можемо ототожнити $(N(t))_{t\geq 0}$ з процесом $(N^*(m(t)))_{t\geq 0}$, де $(N^*(t))_{t\geq 0}$ є однорідним процесом Пуассона з $\mathbb{E}N^*(t) = t$, $t \geq 0$. Згідно з (1.15)

$$\left(\frac{N^*(ut)-ut}{t^{1/2}}\right)_{u\geq 0} \Longrightarrow\ (B(u))_{u\geq 0}, \quad t\to\infty. \tag{1.19}$$

Теорема Діні разом з (1.18) гарантують виконання співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{u\in[0,T]} \left| \frac{m(tu)}{ct^w} - u^w \right| = 0 \tag{1.20}$$

для всіх $T > 0$. Лема 1 у поєднанні з (1.19), (1.20) та теоремою про неперервне відображення гарантує збіжність

$$\left(\frac{N(ut) - m(ut)}{(ct^w)^{1/2}} \right)_{u\geq 0} \implies (B(u^w))_{u\geq 0}, \quad t\to\infty \tag{1.21}$$

у J_1-топології на D. Таким чином, граничним процесом є броунівський рух із зміненим часом. Застосування теореми 4 призводить до висновку

$$\left(\frac{X(ut) - \mu^{-1}\int_0^{ut} h(y)\mathrm{d}m(y)}{(ct^w)^{1/2}h(t)} \right)_{u\geq 0}$$
$$\implies \left(\rho \int_0^u (u-y)^{\rho-1} B(y^w)\mathrm{d}y \right)_{u\geq 0}, \quad t\to\infty$$

у J_1-топології на D, у випадку $\rho > 0$. Якщо ж $\rho = 0$, то граничним процесом є $B(u^w)$.

1.3.4 Моделювання

У цьому підрозділі ми проведемо моделювання граничних та допграничних процесів, що фігурують у прикладі 1(a). Спочатку ми промоделюємо процес дробового ефекту X у випадку, коли вхідна послідовність є стандартним випадковим блуканням. Далі ми візуалізуємо стандартний броунівський рух B та побудований за ним процесс R_ρ. Нарешті на одному малюнку ми побудуємо графіки допграничного та граничного процесів при конкретних значеннях параметрів.

Нехай функція відгуку $h(t)$ дорівнює $t^{0.1}$. Тоді процес дробового ефекту задається так

$$X(t) = \sum_{k\geq 0} (t - S_k)^{0.1} \mathbb{1}_{\{S_k \leq t\}},$$

де в якості послідовності $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ми візьмемо стандартне випадкове блукання. Далі на Рисунку 1.1 та Рисунку 1.2 ми побудуємо графіки процесу $X(tu)$ на проміжку $u\in[0,1]$ при $t = 10^3$ для випадкових блукань з кроками, що мають розподіли $\mathrm{U}(0, 0.5)$ та $\mathrm{U}(0,1)$, $\mathrm{Exp}(1)$ та $\mathrm{Exp}(10)$ відповідно.

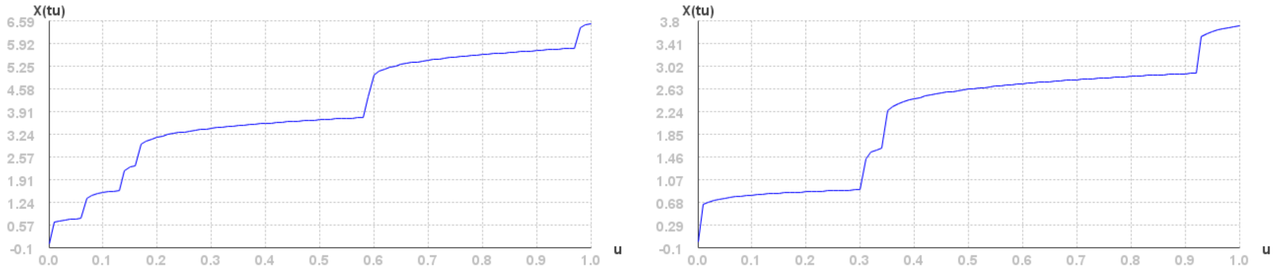

Рис. 1.1: Процеси дробового ефекту: випадок рівномірного розподілу.
Зліва: $\xi \sim \mathrm{U}(0, 0.5)$, справа: $\xi \sim \mathrm{U}(0, 1)$

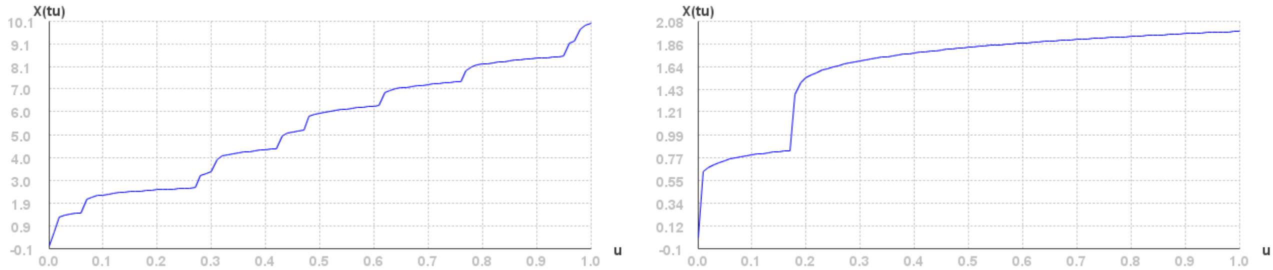

Рис. 1.2: Процеси дробового ефекту: випадок експоненційного розподілу.
Зліва: $\xi \sim \mathrm{Exp}(10)$, справа: $\xi \sim \mathrm{Exp}(1)$

Помітимо, що траєкторії процесів у лівій частинах мають більше розривів, ніж траєкторії у правих частинах. Цей факт пояснюється тим, що кроки випадкового блукання з розподілами $\mathrm{U}(0, 0.5)$ та $\mathrm{Exp}(10)$ відбуваються частіше, ніж кроки з розподілами $\mathrm{U}(0, 1)$ та $\mathrm{Exp}(1)$.

Тепер побудуємо стандартний броунівський рух B та побудований за ним процесс R_ρ при різних значеннях параметру ρ. Для моделювання броунівського руху використаємо апроксимуючу формулу (див., наприклад, нещодавню статтю [18]), що випливає з теореми Карунена-Лоева,

$$B(u) \approx \sqrt{2} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \frac{\sin((i + 1/2)\pi u)}{(i + 1/2)\pi},$$

де $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ – набір незалежних випадкових величин, що мають стандартний нормальний розподіл.

Нагадаємо, що процес R_ρ має вигляд

$$R_\rho(u) = \rho \int_0^u (u - y)^{\rho - 1} B(y) \mathrm{d}y, \quad u > 0.$$

На Рисунку 1.3 ми побудуємо графіки процесів $B(u)$ та $R_\rho(u)$ на проміжку $u \in [0,1]$ при $\rho = 0.1$.

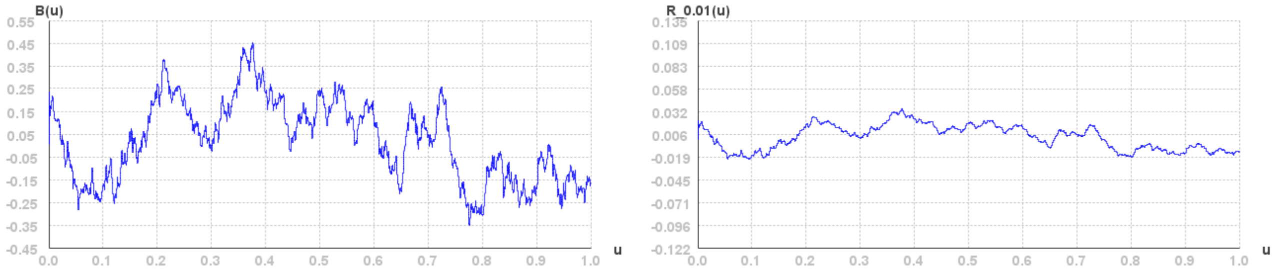

Рис. 1.3: Процеси R_ρ. Випадок $\rho = 0.1$.
Зліва: стандартний броунівський рух B, справа: процес $R_{0.1}$ побудований за допомогою B

Можна помітити, що траєкторія процесу $R_{0.1}$ є більш “гладкою“ версією траєкторії процесу B. На Рисунку 1.4 бачимо, що при збільшенні параметра ρ траєкторії процесів R_ρ наближаються до нуля. Це пояснюється тим, що підінтегральний вираз на проміжку $u \in [0,1]$ зменшується при збільшенні ρ.

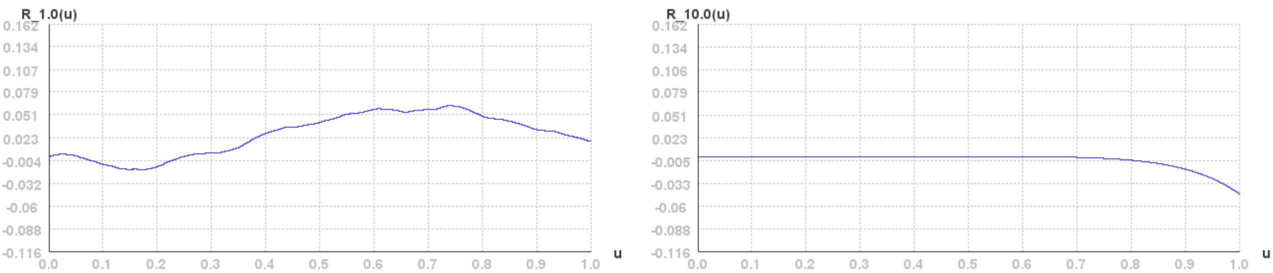

Рис. 1.4: Процеси R_ρ.
Зліва: випадок $\rho = 1$, справа: випадок $\rho = 10$

З іншого боку, якщо ми обмежимося розглядом великих u, то при збільшенні ρ підінтегральний вираз збільшується. У цьому можна переконатися за допомогою Рисунку 1.5, де процес R_{10} побудований на проміжку $u \in [0,10]$.

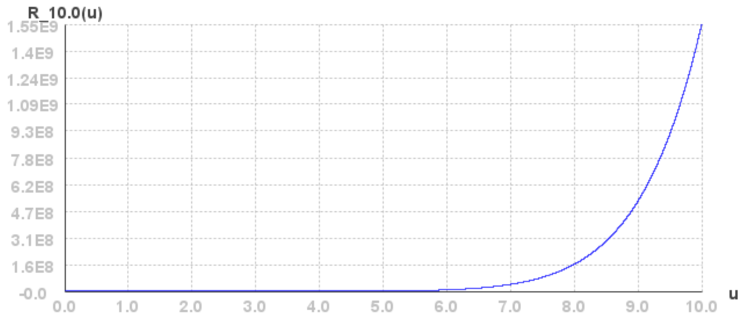

Рис. 1.5: Процеси R_ρ. Випадок $\rho = 10$ та $u \in [0, 10]$

У цьому випадку значення процесу $R_{10}(u)$ прямує до ∞ при збільшенні u.

Тепер перейдемо до моделювання дограничного та граничного процесів у прикладі 1(a). Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин, що мають рівномірний розподіл на $[0, 1]$. Тоді

$$\mu = 1/2 < \infty \quad \text{та} \quad \sigma = 1/12 \in (0, \infty),$$

$$b(t) = 2t \quad \text{та} \quad a(t) = \sqrt{2t/3}.$$

Покладемо $\rho = 1$ та $h(t) = t$. Тоді дограничний процес набуває вигляду

$$X^*(tu) := \frac{X(tu) - (tu)^2}{\sqrt{2/3}t^{3/2}}, \quad u \in [0, 1].$$

На Рисунку 1.6 ми покажемо дві візуалізації траєкторій процесів $R_1(u)$ та $X^*(tu)$ на проміжку $u \in [0, 1]$ при $t = 10^3$.

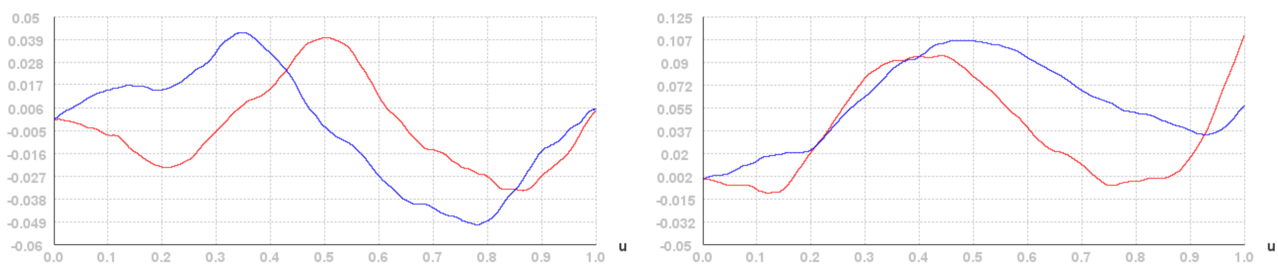

Рис. 1.6: Траєкторії процесів, що фігурують у прикладі 1(a).
Синій колір: граничний процес $R_1(u)$, червоний колір: дограничний процес $X^*(tu)$

1.4 Функціональна гранична теорема без центрування

1.4.1 Обговорення та основний результат

Ми знайдемо достатні умови, сформульовані у термінах функції відгуку h та лічильного процесу N, за яких належним чином нормалізований (без центрування) загальний процес дробового ефекту задовольняє функціональну граничну теорему у просторі Скорохода. Також в якості ілюстрації ми вкажемо конкретні лічильні процеси, для яких виконуються вищезгадані достатні умови.

Позначимо через $D(0, \infty)$ простір Скорохода дійснозначних неперервних справа функцій, що визначені на $(0, \infty)$ та мають скінченні лівобічні границі у додатних точках.

Теорема 7. *Нехай $\alpha, \beta > 0$, а невід'ємна функція $h \in D$ є монотонною та правильно змінюється на ∞ з показником $\rho > -\min(\alpha, \beta)$. Припустимо, що*

$$(a(t)N(ut))_{u\geq 0} \implies \left(V_\alpha^M(u)\right)_{u\geq 0}, \quad t \to \infty \tag{1.22}$$

у J_1-топології на D, де функція $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ не зростає та правильно змінюється на нескінченності з показником $-\beta$, та що для довільних $q > 0$ та довільних $0 < a < b < \infty$

$$t^{-q} \sup_{u\in[a,\,b]} (N(ut) - N(ut-1)) \overset{\mathbb{P}}{\to} 0, \quad t \to \infty. \tag{1.23}$$

Якщо h не спадає, то

$$\left(\frac{a(t)}{h(t)}X(ut)\right)_{u\geq 0} \implies \left(Y_{\alpha,\rho}^M(u)\right)_{u\geq 0}, \quad t \to \infty \tag{1.24}$$

у J_1-топології на D,.

Якщо h не зростає, то припустимо додатково, що для всіх $x > 0$, $t \geq 1$ та $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}\{a(t)(N((k+1)t) - N(kt)) > x\} \leq f(x) \tag{1.25}$$

для невід'ємної функції f, що не зростає та задовольняє

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{j\geq 1} 2^j f(x2^{jc}) = 0$$

для довільних $c > 0$. *Тоді граничне співвідношення* (1.24) *виконується у просторі* $D(0, \infty)$.

Зауваження 8. *Оскільки для кожного* $t > 0$ *випадкова функція* $u \mapsto N(tu)$ *не спадає м.н., а процес* V_α^M *є м.н. неперервним, то згідно з зауваженням 2.1 статті [70] функціональна збіжність* (1.22) *є еквівалентною слабкій збіжності скінченновимірних розподілів.*

1.4.2 Доведення теореми 7

Для $t, T > 0$ введемо позначення

$$A_t := \Big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le v < u \le T, u - v \ge 1/t\Big\}.$$

Лема 9. *Нехай функція* a *задовольняє припущення теореми 7 та виконується умова* (1.25). *Тоді для довільного* $\delta \in (0, \beta)$

$$\lim_{x\to\infty} \limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\Big\{\sup_{(u,v)\in A_t} \frac{a(t)(N(ut) - N(vt))}{(u-v)^{\beta-\delta}} > x\Big\} = 0.$$

Доведення. Оскільки функція a правильно змінюється за припущенням, лему достатньо довести лише для випадку $T = 1$. Використовуючи те, що N не спадає м.н., запишемо

$$\begin{aligned}
&\sup_{(u,v)\in A_t} \frac{a(t)(N(ut) - N(vt))}{(u-v)^{\beta-\delta}} \\
\le\ & \sup_{1/t\le h\le 1}\ \sup_{0\le u\le 1} \frac{a(t)(N(ut) - N((u-h)t))}{h^{\beta-\delta}} \\
\le\ & \sup_{j=1,\dots,\lceil\log_2 t\rceil}\ \sup_{2^{-j}\le h\le 2^{-j+1}}\ \sup_{0\le u\le 1} \frac{a(t)(N(ut) - N((u-h)t))}{h^{\beta-\delta}} \\
\le\ & \sup_{j=1,\dots,\lceil\log_2 t\rceil}\ \sup_{2^{-j}\le h\le 2^{-j+1}}\ \sup_{k=1,\dots,2^{j-1}} \\
& \qquad \sup_{(k-1)2^{-j+1}\le u\le k2^{-j+1}} \frac{a(t)(N(ut) - N((u-h)t))}{h^{\beta-\delta}} \\
\le\ & \sup_{j=1,\dots,\lceil\log_2 t\rceil}\ \sup_{k=1,\dots,2^{j-1}} \frac{a(t)(N(tk2^{-j+1}) - N(t(k-2)2^{-j+1}))}{2^{-j(\beta-\delta)}}.
\end{aligned}$$

За нерівністю Буля

$$\mathbb{P}\Big\{\sup_{(u,v)\in A_t} \frac{a(t)(N(ut) - N(vt))}{(u-v)^{\beta-\delta}} > x\Big\}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\lceil \log_2 t \rceil} \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \mathbb{P}\Big\{ \frac{a(t)(N(tk2^{-j+1}) - N(t(k-2)2^{-j+1}))}{2^{-j(\beta-\delta)}} > x \Big\}.$$

З урахуванням умови (1.25)

$$\mathbb{P}\Big\{ \frac{a(t)(N(tk2^{-j+1}) - N(t(k-2)2^{-j+1}))}{2^{-j(\beta-\delta)}} > x \Big\}$$
$$\leq \mathbb{P}\Big\{ a(t2^{-j+1})(N(tk2^{-j+1}) - N(t(k-1)2^{-j+1})) > \frac{a(t2^{-j+1})}{a(t)} 2^{-j(\beta-\delta)-1} x \Big\}$$
$$+ \mathbb{P}\Big\{ a(t2^{-j+1})(N(t(k-1)2^{-j+1}) - N(t(k-2)2^{-j+1})) > \frac{a(t2^{-j+1})}{a(t)} 2^{-j(\beta-\delta)-1} x \Big\}$$
$$\leq 2f\Big(\frac{a(t2^{-j+1})}{a(t)} 2^{-j(\beta-\delta)-1} x \Big).$$

Згідно з лемою A.5 роботи [38]

$$a(t2^{-j+1})/a(t) \geq c2^{(j-1)(\beta-\delta/2)}$$

для деякого $c > 0$, всіх $t > 0$ та всіх $j = 1, \ldots, \lceil \log_2 t \rceil$. Тому

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{(u,v)\in A_t} \frac{a(t)(N(ut) - N(vt))}{(u-v)^{\beta-\delta}} > x \right\}$$
$$\leq \sum_{j=1}^{\lceil \log_2 t \rceil + 1} 2^j f(Cx2^{j\delta/2}) \leq \sum_{j\geq 1} 2^j f(Cx2^{j\delta/2}) \ \to \ 0$$

при $x \to \infty$, де $C := c2^{\delta/2-\beta-1}$. Доведення леми 9 завершено. □

Доведення теореми 7. ВИПАДОК, КОЛИ h НЕ СПАДАЄ, у якому необхідно $\rho \geq 0$. Випадковий процес X не спадає м.н., а випадковий процес $Y_{\alpha,\rho}^{M}$ є м.н. неперервним згідно з лемою 3. Тому згідно з зауваженням 2.1 роботи [70], що вже згадувалося, для доведення функціональної збіжності у D достатньо встановити слабку збіжність скінченновимірних розподілів.

Надалі вважаємо, що $h(t) = 0$ для $t < 0$. Для кожного $t > 0$ покладемо

$$V^{(t)}(u) := a(t)N(tu) \quad \text{та} \quad h_t(u) := h(tu)/h(t), \quad u \geq 0.$$

Використовуючи інтегрування частинами, запишемо для $t>0, u\geq 0$

$$\begin{aligned}\frac{a(t)}{h(t)}X(ut) &= \frac{a(t)}{h(t)}\int_{[0,\,u]} h(t(u-y))\mathrm{d}_y N(ty)\\ &= a(t)N(0)\frac{h(tu)-h((tu)-)}{h(t)}+\int_{(0,\,u]} V^{(t)}(y)\mathrm{d}_y(-h_t(u-y)).\end{aligned}$$

Для кожного $t>0$ випадковий процес $X_t^* := (X_t^*(u))_{u\geq 0}$, визначений рівністю

$$X_t^*(u) := \int_{(0,\,u]} V^{(t)}(y)\mathrm{d}_y(-h_t(u-y)), \quad u\geq 0,$$

має траєкторії, що не спадають м.н. Зауважимо, що для $u>0$

$$a(t)N(0)\frac{h(tu)-h((tu)-)}{h(t)} \leq a(t)N(0)\frac{h(tu)}{h(t)} \overset{\mathbb{P}}{\to} 0, \quad t\to\infty,$$

оскільки h правильно змінюється на ∞. При $u=0$ останнє граничне співвідношення забезпечується припущенням $\rho > -\beta$, що гарантує $\lim_{t\to\infty} a(t)/h(t) = 0$. Отже, достатньо довести граничну теорему для X_t^* (замість X).

Зафіксуємо довільне $n\in\mathbb{N}$. Оскільки $X_t^*(0) = Y_{\alpha,\rho}^M(0) = 0$ м.н., достатньо показати, що для довільних $0<u_1<\ldots<u_n<\infty$ та довільних $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\geq 0$

$$\alpha_1 X_t^*(u_1)+\ldots+\alpha_n X_t^*(u_n) \overset{\mathrm{d}}{\to} \alpha_1 Y_{\alpha,\rho}^M(u_1)+\ldots+\alpha_n Y_{\alpha,\rho}^M(u_n), \quad t\to\infty.$$

Для $w>0$ та $t>0$ визначимо міри $\nu_{t,w}$ та ν_w на $[0,w]$ так

$$\nu_{t,w}(c,d] := \frac{h(t(w-c))-h(t(w-d))}{h(t)}, \quad 0\leq c<d\leq w,$$

$$\nu_w(c,d] := (w-c)^\rho-(w-d)^\rho, \quad 0\leq c<d\leq w.$$

При цьому

$$\begin{aligned}&\alpha_1 X_t^*(u_1)+\ldots+\alpha_n X_t^*(u_n)\\ =\ &\alpha_1\int_{(0,\,u_1]} V^{(t)}(y)\nu_{t,u_1}(\mathrm{d}y)+\ldots+\alpha_n\int_{(0,\,u_n]} V^{(t)}(y)\nu_{t,u_n}(\mathrm{d}y).\end{aligned}$$

Припустимо, що $\rho>0$. Використовуючи (1.22) разом з теоремою Скорохода, що гарантує існування версій, збіжних у D м.н., а також те, що $\nu_{t,w} \overset{\mathrm{d}}{\to} \nu_w$

при $t \to \infty$, отримуємо

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 X_t^*(u_1) + \ldots + \alpha_n X_t^*(u_n) \\
\stackrel{\mathrm{d}}{\to} \; & \alpha_1 \int_{(0,\, u_1]} V_\alpha^M(y) \nu_{u_1}(\mathrm{d}y) + \ldots + \alpha_n \int_{(0,\, u_n]} V_\alpha^M(y) \nu_{u_n}(\mathrm{d}y) \\
= \; & \alpha_1 Y_{\alpha,\rho}^M(u_1) + \ldots + \alpha_n Y_{\alpha,\rho}^M(u_n)
\end{aligned}$$

за допомогою першої частини леми 2. У випадку $\rho = 0$ $\nu_{t,w} \stackrel{\mathrm{d}}{\to} \delta_w$ при $t \to \infty$, де δ_w позначає розподіл, вироджений у точці w. Міркування, аналогічні до попередніх, а також залучення другої частини леми 2 дозволяють стверджувати, що

$$\begin{aligned}
\alpha_1 X_t^*(u_1) + \ldots + \alpha_n X_t^*(u_n) \;\; & \stackrel{\mathrm{d}}{\to} \;\; \alpha_1 V_\alpha^M(u_1) + \ldots + \alpha_n V_\alpha^M(u_n) \\
& = \;\; \alpha_1 Y_{\alpha,\,0}^M(u_1) + \ldots + \alpha_n Y_{\alpha,\,0}^M(u_n).
\end{aligned}$$

Випадок, коли h не зростає, у якому необхідно $\rho \leq 0$. Для $\varepsilon \in (0, 1)$ покладемо

$$I_\varepsilon(u, t) := \frac{a(t)}{h(t)} \sum_{k \geq 0} h(ut - S_k) \mathbb{1}_{\{S_k \leq \varepsilon ut\}}, \quad u \geq 0,\; t > 0,$$

$$I_\varepsilon^*(u) := \int_{[0,\, \varepsilon u]} (u - y)^\rho \mathrm{d}V_\alpha^M(y), \quad u \geq 0$$

та запишемо

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon(u, t) \;\; & = \;\; a(t) \sum_{k \geq 0} \Big(\frac{h(ut - S_k)}{h(t)} - (u - t^{-1} S_k)^\rho \Big) \mathbb{1}_{\{S_k \leq \varepsilon ut\}} \\
& + \;\; a(t) \sum_{k \geq 0} (u - t^{-1} S_k)^\rho \mathbb{1}_{\{S_k \leq \varepsilon ut\}} \\
& =: \;\; I_{\varepsilon,1}(u, t) + I_{\varepsilon,2}(u, t).
\end{aligned}$$

Покажемо, що

$$\big(I_{\varepsilon,1}(u, t)\big)_{u \geq 0} \implies \big(\Psi(u)\big)_{u \geq 0}, \quad t \to \infty \tag{1.26}$$

у J_1-топології на $D(0, \infty)$, де $\Psi(s) = 0$ при $s \geq 0$, та

$$\big(I_{\varepsilon,2}(u, t)\big)_{u \geq 0} \implies \big(I_\varepsilon^*(u)\big)_{u \geq 0}, \quad t \to \infty \tag{1.27}$$

у J_1-топології на $D(0,\infty)$ і, отже,

$$\left(I_\varepsilon(u,t)\right)_{u\geq 0} = \left(I_{\varepsilon,1}(u,t) + I_{\varepsilon,2}(u,t)\right)_{u\geq 0} \implies \left(I_\varepsilon^*(u)\right)_{u\geq 0}, \quad t\to\infty$$

у J_1-топології на $D(0,\infty)$.

Для додатних та скінченних чисел $a<b$ та $t>0$

$$\sup_{a\leq u\leq b} |I_{\varepsilon,1}(u,t)| \leq \sup_{(1-\varepsilon)a\leq y\leq b} \left|\frac{h(ty)}{h(t)} - y^\rho\right| a(t)N(\varepsilon bt) \quad \text{м.н.}$$

Формула (1.22) гарантує виконання співвідношення $a(t)N(\varepsilon bt) \xrightarrow{\mathrm{d}} V_\alpha^M(\varepsilon b)$ при $t\to\infty$. Отже, згідно з теоремою про рівномірну збіжність для функцій, що правильно змінюються (теорема 1.5.2 [12]), права частина останньої центрованої нерівності збігається до 0 за ймовірністю при $t\to\infty$, що доводить (1.26). Співвідношення (1.27) випливає з леми А.2 статті [38], що є детермінованим результатом. Щоб ним скористатися, достатньо стандартних міркувань: слабка збіжність (1.22) та факт, що граничний процес у (1.22) є м.н. неперервним, гарантують згідно з теоремою Скорохода існування версій процесів у (1.22), що збігаються локально рівномірно з ймовірністю один.

Тепер покажемо, що для будь-якого фіксованого $u\geq 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 1-} I_\varepsilon^*(u) = Y_{\alpha,\rho}^M(u) \quad \text{м.н.} \tag{1.28}$$

Дійсно,

$$0 \leq \int_{[0,\,u]} (u-y)^\rho \mathrm{d}V_\alpha^M(y) - \int_{[0,\,\varepsilon u]} (u-y)^\rho \mathrm{d}V_\alpha^M(y) = \int_{(\varepsilon u,\,u]} (u-y)^\rho \mathrm{d}V_\alpha^M(y).$$

Враховуючи м.н. скінченність $Y_{\alpha,\rho}^M(u)$ для всіх $u\geq 0$, права частина збігається до 0 м.н. при $\varepsilon\to 1-$ за теоремою Лебега про мажоровану збіжність. Отже, (1.28) виконується.

Згідно з теоремою 3.2 книги [10], враховуючи (1.28), для отримання (1.24) достатньо довести, що для довільних $\theta>0$ та довільних $0<a<b<\infty$

$$\lim_{\varepsilon\to 1-} \limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\Big\{ \sup_{u\in[a,\,b]} \Big(\frac{a(t)}{h(t)} X(ut) - I_\varepsilon(u,t)\Big) > \theta \Big\} = 0,$$

або у розгорнутому вигляді, що

$$\lim_{\varepsilon\to 1-}\limsup_{t\to\infty}\mathbb{P}\Big\{\frac{a(t)}{h(t)}\sup_{u\in[a,\,b]}\sum_{k\geq 0}h(ut-S_k)\mathbb{1}_{\{\varepsilon ut<S_k\leq ut\}}>\theta\Big\}=0.$$

Зафіксуємо $\Delta\in(0,(\beta+\rho)/2)$. За нерівністю Поттера для функцій, що правильно змінюються на ∞ (теорема 1.5.6 [12]), існує $c>1$ таке, що

$$\frac{h(t(u-y))}{h(t)}\leq 2(u-y)^{\rho-\Delta}$$

для всіх додатних t, u та y, що задовольняють $t(u-y)\geq c$ та $u-y\leq 1$. Тому для достатньо великих t, $u\in[a,b]$ та $\varepsilon>0$, що задовольняють $(1-\varepsilon)b\leq 1$,

$$\begin{aligned}
&\frac{a(t)}{h(t)}\sum_{k\geq 0}h(ut-S_k)\mathbb{1}_{\{\varepsilon ut<S_k\leq ut\}}\\
=\ &\frac{a(t)}{h(t)}\int_{(\varepsilon u,\,u-c/t]}h(t(u-y))\mathrm{d}_yN(ty)\\
+\ &\frac{a(t)}{h(t)}\int_{(u-c/t,\,u]}h(t(u-y))\mathrm{d}_yN(ty)\\
\leq\ &2a(t)\int_{(\varepsilon u,\,u-c/t]}(u-y)^{\rho-\Delta}\mathrm{d}_yN(ty)\\
+\ &\frac{a(t)}{h(t)}h(0)(N(tu)-N(tu-c))\\
=\ &2(-\rho+\Delta)\int_{\varepsilon u}^{u-c/t}a(t)(N(tu)-N(ty))(u-y)^{\rho-\Delta-1}\mathrm{d}y\\
+\ &2u^{\rho-\Delta}(1-\varepsilon)^{\rho-\Delta}a(t)(N(tu)-N(\varepsilon tu))\\
+\ &\Big(\frac{a(t)}{h(t)}h(0)-2c^{\rho-\Delta}t^{-\rho+\Delta}a(t)\Big)(N(tu)-N(tu-c))\\
=:\ &I_1(u,t)+I_2(u,t)+I_3(u,t).
\end{aligned}$$

Маємо

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}\{2(1-\varepsilon)^{\rho-\Delta}\sup_{u\in[a,\,b]}u^{\rho-\Delta}a(t)(N(tu)-N(\varepsilon tu))>\theta\}\\
=\ &\mathbb{P}\{2(1-\varepsilon)^{\rho-\Delta}\sup_{u\in[a,\,b]}u^{\rho-\Delta}(V_\alpha^M(u)-V_\alpha^M(\varepsilon u))>\theta\}\\
\leq\ &\mathbb{P}\{2(1-\varepsilon)^{\alpha+\rho-\Delta}b^{\alpha+\rho-\Delta}M_b>\theta\},
\end{aligned}$$

де рівність є наслідком (1.22) та теореми про неперервне відображення з урахуванням того, що супремум функціонал є неперервним у J_1-топології, а нерівність випливає з (1.2). Хоча важко собі уявити, що розподіл

$$\sup_{u\in[a,\,b]} u^{\rho-\Delta}(V_\alpha^M(u) - V_\alpha^M(\varepsilon u))$$

може мати дискретну компоненту, зазначимо, що, якщо це так, то останні центровані формули виконуються для θ, що є точками неперервності розподілу $\sup_{u\in[a,\,b]} u^{\rho-\Delta}(V_\alpha^M(u)-V_\alpha^M(\varepsilon u))$, і, як наслідок, для всіх $\theta > 0$. Нарешті, оскільки $\beta + \rho - \Delta > 0$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 1-} \limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\{\sup_{u\in[a,\,b]} I_2(u,t) > \theta\} = 0.$$

Далі внаслідок (1.23) та того, що функції $t \mapsto a(t)/h(t)$ та $t \mapsto t^{-\rho+\Delta}a(t)$ правильно змінюються на ∞ з від'ємними показниками $-\beta-\rho$ та $-\beta-\rho+\Delta$ відповідно, маємо

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\{\sup_{u\in[a,\,b]} I_3(u,t) > \theta\} = 0.$$

Для завершення доведення достатньо встановити, що для довільних $\theta > 0$ та довільних $T > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 1-} \limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\Big\{\sup_{u\in[0,\,T]} \int_{\varepsilon u}^{u-c/t} a(t)(N(tu) \\ -N(ty))(u-y)^{\rho-\Delta-1}\mathrm{d}y > \theta\Big\} = 0. \qquad (1.29)$$

Для $0 < \delta < \beta + \rho - \Delta$ та $x > 0$ запишемо, використовуючи позначення A_t, введене у лемі 9,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big\{\sup_{u\in[0,T]}\int_{\varepsilon u}^{u-c/t} a(t)(N(tu)-N(ty))(u-y)^{\rho-\Delta-1}\mathrm{d}y>\theta\Big\}\\
=\ &\mathbb{P}\Big\{\cdots,\sup_{(u,v)\in A_t}\frac{a(t)(N(ut)-N(vt))}{(u-v)^{\beta-\delta}}>x\Big\}\\
+\ &\mathbb{P}\Big\{\cdots,\sup_{(u,v)\in A_t}\frac{a(t)(N(ut)-N(vt))}{(u-v)^{\beta-\delta}}\le x\Big\}\\
\le\ &\mathbb{P}\Big\{\sup_{(u,v)\in A_t}\frac{a(t)(N(ut)-N(vt))}{(u-v)^{\beta-\delta}}>x\Big\}\\
+\ &\mathbb{P}\Big\{\sup_{u\in[0,T]}\int_{\varepsilon u}^{u}(u-y)^{\beta+\rho-\Delta-\delta-1}\mathrm{d}y>\theta/x\Big\}\\
=\ &\mathbb{P}\Big\{\sup_{(u,v)\in A_t}\frac{a(t)(N(ut)-N(vt))}{(u-v)^{\beta-\delta}}>x\Big\}\\
+\ &\mathbb{P}\Big\{\int_0^{(1-\varepsilon)T} y^{\beta+\rho-\Delta-\delta-1}\mathrm{d}y>\theta/x\Big\}.
\end{aligned}$$

При $\varepsilon\to 1-$ другий доданок прямує до 0. Тому з урахуванням леми 9 та того, що ліва частина не залежить від x, співвідношення (1.29) виконується. Теорему 7 доведено. □

1.4.3 Приклади використання

1. Стандартне випадкове блукання. Нехай $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ є стандартним випадковим блуканням з кроками, що є незалежними копіями додатної випадкової величини ξ.

Позначимо через $N=(N(t))_{t\ge0}$ лічильний процес для стандартного випадкового блукання. Згідно з лемою А.1 статті [33] так визначений процес задовольняє співвідношення (1.23). Припустимо, що $\mathbb{P}\{\xi>t\}\sim t^{-\beta}\ell(t)$ при $t\to\infty$ для деякого $\beta\in(0,1)$ та функції ℓ, що повільно змінюється на ∞. Скориставшися теоремою 3.2 статті [54] (де встановлено слабку збіжність скінченновимірних розподілів) та зауваженням 2.1 роботи [70], робимо висновок

$$(\mathbb{P}\{\xi>t\}N(ut))_{u\ge0}\implies(W_\beta(u))_{u\ge0},\quad t\to\infty$$

у J_1-топології на D, де $W_\beta:=(W_\beta(u))_{u\ge0}$ – обернений β-стійкий субординатор. Це означає, що

$$W_\beta(u) := \inf\{s \geq 0 : D_\beta(s) > u\}, \quad u \geq 0,$$

де $(D_\beta(t))_{t\geq 0}$ є β-стійким субординатором з $-\log \mathbb{E}e^{-sD_\beta(1)} = \Gamma(1-\beta)s^\beta, s \geq 0$, а $\Gamma(\cdot)$ є гамма функцією. Згідно з лемою 3.4 роботи [57] процес W_β є м.н. локально неперервним за Гьольдером з показником меньшим за β. Отже, $V_\alpha^M = W_\beta$ задовольняє умову (1.2) з $\alpha < \beta$. Використовуючи субадитивність за розподілом N та нерівність Маркова, запишемо для всіх $x > 0$, $t \geq 1$ та $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{a(t)(N((k+1)t) - N(kt)) > x\} &\leq \mathbb{P}\{a(t)N(t) > x\} \\ &\leq e^{-x}\mathbb{E}e^{a(t)N(t)} \leq Ce^{-x} =: f(x),\end{aligned}$$

де константа $C := \sup_{t\geq 1} \mathbb{E}e^{a(t)N(t)}$ є скінченною за лемою A.4 статті [38]. Далі для $c > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{j\geq 1} 2^j f(x2^{jc}) = C \lim_{x\to\infty} \sum_{j\geq 1} 2^j e^{-x2^{jc}} = 0,$$

оскільки останній ряд збігається рівномірно по $x \geq 1$. Отже, умова (1.25) виконується.

Тому, використовуючи теорему 7 з $a(t) = \mathbb{P}\{\xi > t\}$, $V_\alpha^M = W_\beta$ та h, що задовольняє умови теореми, отримаємо

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{h(t)} X(ut)\right)_{u\geq 0} &\implies \left(\int_{[0,\,u]} (u-y)^\rho \mathrm{d}W_\beta(y)\right)_{u\geq 0} \\ &=: \left(Y_{\beta,\rho}^S(u)\right)_{u\geq 0}, \quad t \to \infty\end{aligned}$$

у J_1-топології на D, якщо h не спадає, та на $D(0,\infty)$, якщо h не зростає. Процес $Y_{\beta,\rho}^S = (Y_{\beta,\rho}^S(u))_{u\geq 0}$ будемо називати дробово-інтегровним оберненим стійким субординатором. Останнє граничне співвідношення було встановлене у теоремі 2.1 роботи [38].

2. Процес відновлення зі зміненим часом.

2.1. Нехай $\alpha \in (0, 1]$, а послідовність $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ задається так

$$S_0 := 0, \quad S_k := ((\xi_1 + \ldots + \xi_k)/\eta)^{1/\alpha}, \quad k \in \mathbb{N},$$

де η є додатною випадковою величиною, що не залежить від невід'ємних незалежних та однаково розподілених випадкових величин ξ_1, $\xi_2, \ldots$ При цьому $N(t) = N^*(t^\alpha \eta)$ для $t \geq 0$, де $(N^*(t))_{t\geq 0}$ є лічильним процесом для затриманого в нулі стандартного випадкового блукання зі стрибками ξ_k.

Надалі припускаємо, що $\mu := \mathbb{E}\xi_1 < \infty$, та що $\mathbb{E}e^{s\eta} < \infty$ для деякого s у правому околі нуля. За посиленим законом великих чисел для процесів відновлення разом з лемою Діні

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{u\in[0,T]} \left| t^{-\alpha} N(ut) - \mu^{-1}\eta u^\alpha \right| = 0 \quad \text{м.н.}$$

для всіх $T > 0$. Отже, виконується співвідношення (1.22) з $a(t) = t^{-\alpha}$ та $V_\alpha^M(u) = \mu^{-1}\eta u^\alpha$ для $u \geq 0$. Внаслідок субадитивності функції $x \mapsto x^\alpha$ на $[0, \infty)$ випадковий процес V_α^M є м.н. локально неперервним за Гьольдером з показником α. Зокрема, нерівність (1.2) виконується з $M_T = \mu^{-1}\eta$. Для довільних $q > 0$, $0 < a < b < \infty$ та великих t запишемо

$$\begin{aligned}
& t^{-q} \sup_{u\in[a,b]} (N(ut) - N(ut-1)) \\
= \;& t^{-q} \sup_{u\in[a,b]} (N^*((ut)^\alpha \eta) - N^*((ut-1)^\alpha \eta)) \\
\leq \;& t^{-q} \sup_{u\in[a,b]} (N^*((u\eta^{1/\alpha} t)^\alpha) - N^*((u\eta^{1/\alpha} t)^\alpha - \eta)).
\end{aligned}$$

Згідно з лемою А.1 статті [33] для довільного $x > 0$

$$t^{-q} \sup_{u\in[a,b]} (N^*((uxt)^\alpha) - N^*((uxt)^\alpha - x^\alpha)) \overset{\mathbb{P}}{\to} 0, \quad t \to \infty.$$

Тому за теоремою Лебега про мажоровану збіжність співвідношення (1.23) виконується для процесу $(N(t))_{t\geq 0}$, визначеного у цьому пункті.

Використовуючи субадитивність за розподілом N^* та субадитивність $x \mapsto x^\alpha$ на $[0, \infty)$, запишемо для всіх $x > 0$, $t \geq 1$ та $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\{a(t)(N((k+1)t) - N(kt)) > x\} \\
= \;& \mathbb{P}\{a(t)(N^*(((k+1)t)^\alpha \eta) - N^*((kt)^\alpha \eta)) > x\} \\
\leq \;& \mathbb{P}\{a(t) N^*(\eta t^\alpha ((k+1)^\alpha - k^\alpha)) > x\} \\
\leq \;& \mathbb{P}\{a(t) N^*(\eta t^\alpha) > x\}.
\end{aligned}$$

Нехай $\sqrt{x}t^\alpha > 1$. Субадитивність за розподілом N^* гарантує, що для довільних $n \in \mathbb{N}$ та $y > 0$

$$\mathbb{P}\{N^*(n) > y\} \leq \mathbb{P}\{N_1^*(1) + \ldots + N_n^*(1) > y\}, \tag{1.30}$$

де $N_1^*(1)$, $N_2^*(1), \ldots$ є незалежними копіями $N^*(1)$. Як наслідок, для довільних $s \in (0, -\log \mathbb{P}\{\xi_1 = 0\})$ ($-\log 0$ інтерпретується як $+\infty$)

$$\mathbb{E}e^{sN^*(n)/n} \leq \mathbb{E}e^{s(N_1^*(1)+\ldots+N_n^*(1))/n} = \mathbb{E}e^{sN^*(1)} < \infty,$$

при цьому скінченність забезпечується теоремою 2.1(c) роботи [44]. Для довільного $r > 1$ знайдеться число $n \in \mathbb{N}$ таке, що $r \in (n-1, n]$. Оскільки процес N^* не спадає м.н., то

$$N^*(r)/r \leq N^*(n)/(n-1) \leq 2N^*(n)/n \quad \text{м.н.},$$

і, отже, $\mathbb{E}e^{vN^*(r)/r} \leq \mathbb{E}e^{2vN^*(1)} < \infty$ для $v \in (0, -\log \mathbb{P}\{\xi_1 = 0\}/2)$. За нерівністю Маркова

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{a(t)N^*(\eta t^\alpha) > x\} \\
= \ &\mathbb{P}\{a(t)N^*(\eta t^\alpha) > x,\, \eta > \sqrt{x}\} + \mathbb{P}\{a(t)N^*(\eta t^\alpha) > x,\, \eta \leq \sqrt{x}\} \\
\leq \ &\mathbb{P}\{\eta > \sqrt{x}\} + \mathbb{P}\{N^*(\sqrt{x}t^\alpha)/(\sqrt{x}t^\alpha) > \sqrt{x}\} \\
\leq \ &\mathbb{E}e^{s\eta}e^{-s\sqrt{x}} + \mathbb{E}e^{vN^*(\sqrt{x}t^\alpha)/(\sqrt{x}t^\alpha)}e^{-v\sqrt{x}} \\
\leq \ &C_1e^{-s\sqrt{x}} + C_2e^{-v\sqrt{x}} =: f_1(x),
\end{aligned}$$

де $C_1 := \mathbb{E}e^{s\eta} < \infty$ та $C_2 := \mathbb{E}e^{2vN^*(1)} < \infty$. Таким чином, для $c > 0$

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{j\geq 1} 2^j f_1(x2^{jc}) = C_1 \lim_{x\to\infty}\sum_{j\geq 1} 2^j e^{-s\sqrt{x}2^{jc/2}} + C_2 \lim_{x\to\infty}\sum_{j\geq 1} 2^j e^{-v\sqrt{x}2^{jc/2}} = 0,$$

оскільки ряди збігаються рівномірно по $x \geq 1$.

Нехай $\sqrt{x}t^\alpha \leq 1$. За нерівністю Маркова при $t \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{a(t)N^*(\eta t^\alpha) > x\} \\
\leq \ &\mathbb{P}\{\eta > \sqrt{x}\} + \mathbb{P}\{N^*(\sqrt{x}t^\alpha) > xt^\alpha\} \\
\leq \ &\mathbb{P}\{\eta > \sqrt{x}\} + \mathbb{P}\{N^*(1) > x\} \leq C_1e^{-s\sqrt{x}} + C_3e^{-vx} =: f_2(x),
\end{aligned}$$

де $C_3 := \mathbb{E}e^{vN^*(1)} < \infty$. Отже, для $c > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{j\geq 1} 2^j f_2(x2^{jc}) = 0.$$

Таким чином, ми перевірили, що умова (1.25) виконується з $f := f_1 + f_2$.

За теоремою 7 з $a(t) = t^{-\alpha}$, $V_\alpha^M(u) = \mu^{-1}\eta u^\alpha$, $u \geq 0$ та функцією h, що задовольняє умови теореми,

$$\left(\frac{1}{t^\alpha h(t)} X(ut)\right)_{u\geq 0} \implies \left(\mu^{-1}\alpha \mathrm{B}(\alpha, \rho+1)\eta u^{\alpha+\rho}\right)_{u\geq 0}, \quad t\to\infty,$$

де $\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$ є бета функцією, у J_1-топології на D, якщо h не спадає, та на $D(0,\infty)$, якщо h не зростає.

2.2. Нехай тепер $\eta_1, \eta_2, \ldots$ є незалежними копіями η, що не залежать від ξ_1, $\xi_2, \ldots$ Для $\tau \in (0,1]$ покладемо

$$S_0^* = T_0 := 0, \quad S_n^* := \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad T_n := \eta_1 + \ldots + \eta_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$S_0 := 0, \quad S_n := T_{\lfloor (S_n^*)^{1/\tau} \rfloor}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.31}$$

При цьому $N(t) = N^*(N_1^\tau(t))$ для $t \in \mathbb{R}$, де $N_1(t) := \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}$, $t \in \mathbb{R}$ (зрозуміло, що $N_1(t) = 0$ для $t \leq 0$). Дійсно, використовуючи позначення $\lfloor x \rfloor$ для цілої частини $x \in \mathbb{R}$, маємо

$$\begin{aligned} &\left\{T_{\lfloor (S_n^*)^{1/\tau}\rfloor} \leq t\right\} = \left\{N_1(t) + 1 > \lfloor (S_n^*)^{1/\tau} \rfloor\right\} \\ = \ &\left\{N_1(t) \geq (S_n^*)^{1/\tau}\right\} = \{S_n^* \leq N_1^\tau(t)\}, \end{aligned}$$

і, отже, $N(t) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}} = \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{\{S_n^* \leq N_1^\tau(t)\}} = N^*(N_1^\tau(t))$. Зазначимо, що за умови, що ξ_1 має показниковий розподіл, так визначений процес $(N(t))_{t\geq 0}$ є окремим прикладом процесу Кокса (інша назва-двічі стохастичний процес Пуассона).

Припустимо, як і раніше, що $\mu = \mathbb{E}\xi_1 \in (0,\infty)$, а також, що $\mathbb{P}\{\eta_1 > t\} \sim t^{-\gamma}\ell(t)$ при $t \to \infty$ для $\gamma \in (0,1)$ та ℓ, що повільно змінюється на ∞. Тоді

$$((\mathbb{P}\{\eta_1 > t\})^\tau N_1^\tau(ut))_{u\geq 0} \implies \left(W_\gamma^\tau(u)\right)_{u\geq 0}, \quad t \to \infty$$

у J_1-топології на D, де W_γ – обернений γ-стійкий субординатор (див. пункт, присвячений стандартним випадковим блуканням). Використовуючи посилений закон великих чисел для N^* та лему 1, отримуємо

$$((\mathbb{P}\{\eta_1 > t\})^\tau N^*(N_1^\tau(ut)))_{u\geq 0} \implies \left(\mu^{-1}W_\gamma^\tau(u)\right)_{u\geq 0}, \quad t\to\infty$$

у J_1-топології на D. Таким чином, співвідношення (1.22) виконується з $\beta = \gamma\tau$, $a(t) = (\mathbb{P}\{\eta_1 > t\})^\tau$ та $V_\alpha^M = \mu^{-1}W_\gamma^\tau$.

Покажемо, що в якості α можна взяти додатне число, менше за $\gamma\tau$. Для довільного $T > 0$ та довільних $0 \leq x, y \leq T$, враховуючи субадитивність $x \to x^\tau$ на $[0,\infty)$, запишемо

$$\left|W_\gamma^\tau(x) - W_\gamma^\tau(y)\right| \leq \left|W_\gamma(x) - W_\gamma(y)\right|^\tau \leq M_T^\tau |x-y|^{\alpha_1\tau},$$

де $\alpha_1 \in (0,\gamma)$. Умови (1.23) та (1.25) виконуються для $(N(t))_{t\geq 0}$ за лемами 10 та 11 відповідно.

За теоремою 7 з з $\beta = \gamma\tau$, $a(t) = (\mathbb{P}\{\eta_1 > t\})^\tau$, $V_\alpha^M = \mu^{-1}W_\gamma^\tau$ та функцією h, що задовольняє умови теореми,

$$\left(\frac{(\mathbb{P}\{\eta_1 > t\})^\tau}{h(t)} X(ut)\right)_{u\geq 0} \implies \left(\mu^{-1}\int_{[0,\,u]} (u-y)^\rho \mathrm{d}W_\gamma^\tau(y)\right)_{u\geq 0}, \quad t\to\infty$$

у J_1-топології на D, якщо h не спадає, та на $D(0,\infty)$, якщо h не зростає.

2.3. У цьому прикладі вважаємо, що точки $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задаються (1.31) з $\tau = 1$, при цьому величини ξ_1 та η_1 можуть бути залежними. Припустимо, що $\mathbb{P}\{\xi_1 > x\} \sim c_1 x^{-\rho_1}$ та $\mathbb{P}\{\eta_1 > x\} \sim c_2 x^{-\rho_2}$ при $x\to\infty$ для додатних c_1, c_2 та $\rho_1, \rho_2 \in (0,1)$. Зокрема, це означає, що для $x_1, x_2 > 0$

$$\lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\{\xi_1 > (c_1 t)^{1/\rho_1} x_1\} = x_1^{-\rho_1} \quad \text{та} \quad \lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\{\eta_1 > (c_2 t)^{1/\rho_2} x_2\} = x_2^{-\rho_2}.$$

Для контролю асимптотики спільного розподілу ξ_1 та η_1 припустимо, що для $x_1, x_2 > 0$ існує границя

$$f(x_1,x_2) := \lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\{\xi_1 > (c_1 t)^{1/\rho_1} x_1, \eta_1 > (c_2 t)^{1/\rho_2} x_2\},$$

і, отже, існує міра ν, визначена на множині $\mathbb{K} := [0,\infty]^2 \backslash \{(0,0)\}$, що задається так

$$\nu\{(u,v)\in\mathbb{K} : u > x_1 \text{ або } v > x_2\} = x_1^{-\rho_1} + x_2^{-\rho_2} - f(x_1,x_2), \quad x_1, x_2 > 0.$$

Міра ν (і, отже, функція f) не може бути довільною: ми припускаємо, що вона задовольняє

$$\int_{|\mathbf{x}|\neq 0} (|\mathbf{x}| \wedge 1)\nu(\mathrm{d}\mathbf{x}) < \infty, \tag{1.32}$$

де $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ для $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Позначимо через $\mathcal{M} := \sum_k \delta_{(t_k, \mathbf{j}_k)}$ пуассонівську випадкову міру на $[0,\infty)\times \mathbb{K}$ з мірою інтенсивності $\mathrm{LEB} \otimes \nu$. Тут $\delta_{(t,\mathbf{x})}$ є ймовірнісною мірою, зосередженою у точці $(t,\mathbf{x}) \in [0,\infty) \times \mathbb{K}$, а LEB позначає міру Лебега на $[0,\infty)$. Покладемо

$$\mathbf{L}(t) := (L_1(t), L_2(t)) = \sum_{k: t_k \leq t} \mathbf{j}_k, \quad t > 0.$$

Умова (1.32) гарантує збіжність останнього ряду з ймовірністю один. Випадковий процес $\mathbf{L}$ є двовимірним процесом Леві з мірою Леві ν. Його координати L_1 та L_2 є (залежними, окрім випадку, коли $f \equiv 0$) стійкими субординаторами без зносу з параметрами ρ_1 та ρ_2 відповідно. Позначимо через $L_1^{\leftarrow}$ та $L_2^{\leftarrow}$ відповідні обернені ρ_1 та ρ_2-стійкі субординатори. Згідно з лемою 6.1 на с. 174 книги [63]

$$t\mathbb{P}\Big\{\Big(\frac{\xi_1}{(c_1 t)^{1/\rho_1}}, \frac{\eta_1}{(c_2 t)^{1/\rho_2}}\Big) \in \cdot\Big\} \overset{v}{\to} \nu(\cdot), \quad t \to \infty,$$

де $\overset{v}{\to}$ позначає грубу (vague) збіжність на множині локально скінченних мір на $\mathbb{K}$. Тому за теоремою 4 статті [64]

$$\left(\left(\frac{\sum_{k=1}^{[ut]} \xi_k}{(c_1 t)^{1/\rho_1}}, \frac{\sum_{j=1}^{[ut]} \eta_j}{(c_2 t)^{1/\rho_2}}\right)\right)_{u\geq 0} \Rightarrow (\mathbf{L}(u))_{u\geq 0}, \quad t \to \infty \tag{1.33}$$

у J_1-топології на $D \times D$. Покажемо, що звідси випливає співвідношення

$$\left(\left(\frac{N^*(ut)}{c_1^{-1} t^{\rho_1}}, \frac{N_1(ut)}{c_2^{-1} t^{\rho_2}}\right)\right)_{u\geq 0} \Rightarrow ((L_1^{\leftarrow}(u), L_2^{\leftarrow}(u)))_{u\geq 0}, \quad t \to \infty \tag{1.34}$$

у продакт J_1-топології на $D \times D$. Дійсно, слабка збіжність скінченновимірних розподілів у (1.34) є еквівалентною слабкій збіжності скінченновимірних розподілів у (1.33). Щільність розподілів координат у лівій частині (1.34) випливає з зауваження 2.1 роботи [70] з урахуванням того, що координати є випадковими процесами, що м.н. не спадають, та того, що граничні процеси $L_1^{\leftarrow}$ та $L_2^{\leftarrow}$ є м.н. неперервними. Застосовуючи лему 1 до (1.34), отримуємо

$$t^{-\rho_1\rho_2}\left(N^*(N_1(ut))\right)_{u\ge 0} \implies c_1^{-1}c_2^{-\rho_2}\left(L_1^{\leftarrow}(L_2^{\leftarrow}(u))\right)_{u\ge 0}, \quad t\to\infty$$

у J_1-топології на D. Отже, виконується співвідношення (1.22) з $\beta = \rho_1\rho_2$, $a(t) = t^{-\rho_1\rho_2}$ та $V_\alpha^M(u) = c_1^{-1}c_2^{-\rho_2}L_1^{\leftarrow}(L_2^{\leftarrow}(u))$ для $u \ge 0$.

При перевірці інших умов теореми 7 будемо вважати, що величини ξ_1 та η_1 є незалежними. Покажемо, що в якості α можна взяти додатне число, менше за $\rho_1\rho_2$. Для довільного $\alpha_i \in (0,\rho_i)$, довільного $T > 0$, всіх $0 \le x, y \le T$ та деяких м.н. скінченних додатних випадкових величин $M_T^{(i)}$ (що залежать від α_i) виконується $\left|L_i^{\leftarrow}(x) - L_i^{\leftarrow}(y)\right| \le M_T^{(i)}|x-y|^{\alpha_i}$, $i=1,2$. Тому для таких же x та y

$$\begin{aligned}\left|L_1^{\leftarrow}(L_2^{\leftarrow}(x)) - L_1^{\leftarrow}(L_2^{\leftarrow}(y))\right| &\le M^{(1)}_{L_2^{\leftarrow}(T)}\left|L_2^{\leftarrow}(x) - L_2^{\leftarrow}(y)\right|^{\alpha_1}\\ &\le M^{(1)}_{L_2^{\leftarrow}(T)}(M_T^{(2)})^{\alpha_1}|x-y|^{\alpha_1\alpha_2}.\end{aligned}$$

Внаслідок незалежності $L_1^{\leftarrow}$ та $L_2^{\leftarrow}$ та самоподібності $L_1^{\leftarrow}$ з показником ρ_1 випадкова величина $M^{(1)}_{L_2^{\leftarrow}(T)}$ має той самий розподіл, що і $M_1^{(1)}(L_2^{\leftarrow}(T))^{\rho_1-\alpha_1}$, і, отже, є м.н. скінченною.

Умови (1.23) та (1.25) виконуються для $(N(t))_{t\ge 0}$ за лемами 10 та 11 відповідно. Таким чином, за теоремою 7 з $\beta = \rho_1\rho_2$, $a(t) = t^{-\rho_1\rho_2}$, $V_\alpha^M(u) = c_1^{-1}c_2^{-\rho_2}L_1^{\leftarrow}(L_2^{\leftarrow}(u))$ для $u \ge 0$ та функцією h, що задовольняє умови теореми,

$$\left(\frac{t^{-\rho_1\rho_2}}{h(t)}X(ut)\right)_{u\ge 0} \implies c_1^{-1}c_2^{-\rho_2}\left(\int_{[0,\,u]}(u-y)^\rho \mathrm{d}L_1^{\leftarrow}(L_2^{\leftarrow}(y))\right)_{u\ge 0}, \quad t\to\infty$$

у J_1-топології на D, якщо h не спадає, та на $D(0,\infty)$, якщо h не зростає.

1.4.4 Допоміжні твердження

Лема 10. *За умов пунктів 2.2 та 2.3 підрозділу 1.4.3 випадкові процеси* $(N(t))_{t\ge 0}$ *задовольняють умову* (1.23).

Доведення. Міркування, наведені нижче, застосовні як для процесу $(N(t))_{t\ge 0}$, що фігурує у пункті 2.2, так і для процесу, що фігурує у пункті 2.3. Принциповим припущенням є незалежність ξ_1 та η_1 і, як наслідок, незалежність N^* та N_1.

Для довільних $0 < a < b < \infty$ та $t > 0$ виконується нерівність

$$\sup_{u \in [at,\, bt]} (N^*(N_1^\tau(u)) - N^*(N_1^\tau(u-1))) \leq \max\{R(t), Z(t)\} \leq R(t) + Z(t),$$

де

$$\begin{aligned} R(t) &:= \sup_{at \leq T_k \leq bt} (N^*(N_1^\tau(T_k)) - N^*(N_1^\tau(T_k - 1))) \\ &\leq \sup_{k \leq N_1(bt)} (N^*(N_1^\tau(T_k)) - N^*(N_1^\tau(T_k - 1))) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} Z(t) &:= \sup_{at \leq T_k \leq bt} (N^*(N_1^\tau(T_k + 1)) - N^*(N_1^\tau(T_k))) \\ &\leq \sup_{k \leq N_1(bt)} (N^*(N_1^\tau(T_k + 1)) - N^*(N_1^\tau(T_k))). \end{aligned}$$

Припущення $\mathbb{E}\eta = \infty$ разом зі слабким законом великих чисел гарантує, що для довільного $\delta > 0$

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}\{N_1(bt) > \delta t\} = 0.$$

Виберемо $a \in (0, -\log \mathbb{P}\{\xi = 0\})$ та зазначимо, що $c := \mathbb{E}e^{aN^*(1)} < \infty$ за теоремою 2.1 (c) статті [44]. Далі, використовуючи (1.30), маємо для кожного $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}e^{aN^*(n)} \leq c^n$. Тому, оскільки N^* та N_1 є незалежними,

$$\mathbb{E}e^{aN^*(1+N_1(1))} \leq \mathbb{E}c^{1+N_1(1)} < \infty,$$

при цьому скінченність забезпечується теоремою 2.1 (b) [44] (нагадаємо, що за припущенням $\eta > 0$ м.н.). Аналогічно

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{aN^*(N_1(1))} &= \mathbb{E}e^{aN^*(N_1(1))}\mathbb{1}_{\{N_1(1) \geq 1\}} + \mathbb{E}e^{aN^*(N_1(1))}\mathbb{1}_{\{N_1(1) = 0\}} \\ &\leq \mathbb{E}c^{N_1(1)} + \mathbb{E}e^{aN^*(0)} < \infty. \end{aligned}$$

Використовуючи незалежність N^* та N_1, субадитивність за розподілом та монотонність N^*, субадитивність $x \to x^\tau$ на $[0, \infty)$ та нерівність Маркова, маємо для довільних додатних q, ε та δ

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\{R(t) > \varepsilon t^q\} \\
= \ & \mathbb{P}\{R(t) > \varepsilon t^q,\, N_1(bt) > \delta t\} + \mathbb{P}\{R(t) > \varepsilon t^q,\, N_1(bt) \le \delta t\} \\
\le \ & \mathbb{P}\{N_1(bt) > \delta t\} + \mathbb{P}\{\sup_{k \le \lfloor \delta t \rfloor} (N^*(N_1^\tau(T_k)) - N^*(N_1^\tau(T_k - 1))) > \varepsilon t^q\} \\
\le \ & \mathbb{P}\{N_1(bt) > \delta t\} + \sum_{k=0}^{\lfloor \delta t \rfloor} \mathbb{P}\big\{N^*((N_1(T_k) - N_1(T_k - 1))^\tau) > \varepsilon t^q\big\} \\
= \ & \mathbb{P}\{N_1(bt) > \delta t\} + \sum_{k=0}^{\lfloor \delta t \rfloor} \mathbb{P}\Big\{N^*\Big(\Big(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{1}_{\{T_k - T_i < 1\}}\Big)^\tau\Big) > \varepsilon t^q\Big\} \\
= \ & \mathbb{P}\{N_1(bt) > \delta t\} + \sum_{k=0}^{\lfloor \delta t \rfloor} \mathbb{P}\Big\{N^*\Big(\Big(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{1}_{\{T_i < 1\}}\Big)^\tau\Big) > \varepsilon t^q\Big\} \\
\le \ & \mathbb{P}\{N_1(bt) > \delta t\} + \sum_{k=0}^{\lfloor \delta t \rfloor} \mathbb{P}\big\{N^*((1 + N_1(1))^\tau) > \varepsilon t^q\big\} \\
\le \ & \mathbb{P}\{N_1(bt) > \delta t\} + (\delta t + 1) e^{-a\varepsilon t^q} \mathbb{E} e^{aN^*(1 + N_1(1))}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}\{R(t) > \varepsilon t^q\} = 0.$$

Міркуючи аналогічно, отримуємо для довільних додатних q, ε та δ

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{Z(t) > \varepsilon t^q\} \\
= \ &\mathbb{P}\{Z(t) > \varepsilon t^q,\, N_1(bt) > \delta t\} + \mathbb{P}\{Z(t) > \varepsilon t^q,\, N_1(bt) \le \delta t\} \\
\le \ &\mathbb{P}\{N_1(bt) > \delta t\} + \mathbb{P}\{\sup_{k\le\delta t}(N^*(N_1^\tau(T_k+1)) - N^*(N_1^\tau(T_k))) > \varepsilon t^q\} \\
\le \ &\mathbb{P}\{N_1(bt) > \delta t\} + \sum_{k=0}^{\lfloor\delta t\rfloor}\mathbb{P}\{N^*((N_1(T_k+1) + N_1(T_k))^\tau) > \varepsilon t^q\} \\
= \ &\mathbb{P}\{N_1(bt) > \delta t\} + \sum_{k=0}^{\lfloor\delta t\rfloor}\mathbb{P}\Big\{N^*\Big(\Big(\sum_{i\ge1}\mathbb{1}_{\{T_k<T_{k+i}\le T_k+1\}}\Big)^\tau\Big) > \varepsilon t^q\Big\} \\
= \ &\mathbb{P}\{N_1(bt) > \delta t\} + \sum_{k=0}^{\lfloor\delta t\rfloor}\mathbb{P}\Big\{N^*\Big(\Big(\sum_{i\ge1}\mathbb{1}_{\{T_{k+i}-T_k\le 1\}}\Big)^\tau\Big) > \varepsilon t^q\Big\} \\
= \ &\mathbb{P}\{N_1(bt) > \delta t\} + \sum_{k=0}^{\lfloor\delta t\rfloor}\mathbb{P}\{N^*(N_1^\tau(1)) > \varepsilon t^q\} \\
\le \ &\mathbb{P}\{N_1(bt) > \delta t\} + (\delta t+1)e^{-a\varepsilon t^q}\mathbb{E}e^{aN^*(N_1(1))}.
\end{aligned}$$

Звідси випливає виконання співвідношення

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}\{Z(t) > \varepsilon t^q\} = 0.$$

Таким чином, процеси $(N(t))_{t\ge0}$ дійсно задовольняють умову (1.23). Лему 10 доведено. □

Лема 11. *За умов пунктів 2.2 та 2.3 підрозділу 1.4.3 випадкові процеси* $(N(t))_{t\ge0}$ *задовольняють умову* (1.25)

Доведення. Перший крок доведення, наведеного нижче, буде розбитий на дві частини, що відповідають припущенням пунктів 2.2 та 2.3 відповідно, а другий крок буде спільним.

Крок 1, метою якого є встановлення обмеженості певних експоненційних моментів, що будуть визначені нижче.

Нехай виконані припущення розділу 2.2. Нагадаємо, що $a(t) = (\mathbb{P}\{\eta_1 > t\})^\tau$, та що $\phi(s) := \mathbb{E}e^{sN^*(1)} < \infty$ для $s \in (0, -\log\mathbb{P}\{\xi = 0\})$ (див. теорему

2.1 (c) [44]). Зокрема, $\mathbb{E}N^*(1)<\infty$. Внаслідок $\log\phi(s)\sim\phi(s)-1\sim\mathbb{E}N^*(1)s$ при $s\to 0+$, для вибраного $\varepsilon>0$ знайдеться значення $s_0>0$ таке, що $\log\phi(s)\le(\mathbb{E}N^*(1)+\varepsilon)s$ для всіх $s\in(0,s_0]$. Виберемо будь-яке $b>0$, що задовольняє $ba(1)\le s_0$, та покажемо, що $C^*:=\sup_{t\ge 1}\mathbb{E}e^{ba(t)N^*(M_1^\tau(t))}<\infty$, де $M_1(t):=N_1(t)+1$ для $t\ge 0$.

Скориставшися (1.30), маємо для $t\ge 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{ba(t)N^*(M_1^\tau(t))}\mid M_1(t)] &\le \mathbb{E}[e^{ba(t)(N_1^*(1)+\ldots+N^*_{\lceil M_1^\tau(t)\rceil}(1))}\mid M_1(t)]\\ &= e^{\log\phi(ba(t))\lceil M_1^\tau(t)\rceil}.\end{aligned}$$

Тому для $\varepsilon>0$, вибраного вище, та довільного $t\ge 1$

$$\mathbb{E}[e^{ba(t)N^*(\lceil M_1^\tau(t)\rceil)}\mid M_1(t)]\le e^{(\mathbb{E}N^*(1)+\varepsilon)ba(t)\lceil M_1^\tau(t)\rceil}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned}&\sup_{t\ge 1}\mathbb{E}e^{(\mathbb{E}N^*(1)+\varepsilon)ba(t)\lceil M_1^\tau(t)\rceil}\mathbb{1}_{\{a(t)\lceil M_1^\tau(t)\rceil>1\}}\\ \le\ &\mathbb{E}e^{(\mathbb{E}N^*(1)+\varepsilon)ba(1)}\sup_{t\ge 1}\mathbb{E}e^{(\mathbb{E}N^*(1)+\varepsilon)b\mathbb{P}\{\eta_1>t\}M_1(t)}<\infty,\end{aligned}$$

де скінченність забезпечується лемою А.4 статті [38], то $C^*<\infty$.

Нехай виконані припущення розділу 2.3. Нагадаємо, що $a(t)=t^{-\rho_1\rho_2}$. Покладемо $\psi(s):=\mathbb{E}e^{-s\xi}$ та $\varphi(s):=\mathbb{E}e^{-s\eta}$ для $s\ge 0$. Маємо $\mathbb{E}[e^{-sS_n}|S_n^*]=\varphi^{\lfloor S_n^*\rfloor}(s)\le\varphi^{S_n^*-1}(s)$ і, отже, $\mathbb{E}e^{-sS_n}\le\psi^n(-\log\varphi(s))/\varphi(s)$. У цьому випадку виберемо будь-яке $b\in(0,-\log\mathbb{P}\{\xi=0\}/2)$ та покажемо, що $C^*:=\sup_{t\ge 1}\mathbb{E}e^{ba(t)N^*(M_1(t))}<\infty$.

Для додатних s, що задовольняють $e^{2ba(t)}\psi(-\log\varphi(s))<1$, отримуємо із застосуванням нерівності Маркова

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{2ba(t)N(t)}-1 &= (1-e^{-2ba(t)})\sum_{k\ge 1}e^{2ba(t)k}\mathbb{P}\{N(t)\ge k\}\\ &= (1-e^{-2ba(t)})\sum_{k\ge 1}e^{2ba(t)k}\mathbb{P}\{S_{k-1}\le t\}\\ &\le e^{st}(e^{2ba(t)}-1)\sum_{k\ge 0}e^{2ba(t)k}\psi^k(-\log\varphi(s))\\ &= \frac{e^{st}(e^{2ba(t)}-1)}{1-e^{2ba(t)}\psi(-\log\varphi(s))}.\end{aligned}$$

Згідно з наслідком 8.1.7 [12] $1-\psi(s)\ \sim\ c_1\Gamma(1-\rho_1)s^{\rho_1}$ та $-\log\varphi(s)\ \sim\ 1-\varphi(s)\sim c_2\Gamma(1-\rho_2)s^{\rho_2}$ при $s\to 0+$. Тому для будь-якого $\kappa>0$

$$1-\psi(-\log\varphi(\kappa t^{-1}))\ \sim\ c_1\Gamma(1-\rho_1)(c_2\Gamma(1-\rho_2)\kappa^{\rho_2})^{\rho_1}t^{-\rho_1\rho_2},\quad t\to\infty.$$

Отже, при $t\to\infty$

$$\frac{1-e^{-2ba(t)}}{1-\psi(-\log\varphi(ct^{-1}))}\ \sim\ \frac{2b}{c_1\Gamma(1-\rho_1)(c_2\Gamma(1-\rho_2)\kappa^{\rho_2})^{\rho_1}}:=A.$$

Виберемо значення κ таким, що $A<1$. Тоді нерівність $e^{2ba(t)}\psi(-\log\varphi(s))<1$ виконується для $s=\kappa t^{-1}$ при достатньо великих t, і

$$\mathbb{E}e^{2ba(t)N(t)}-1\le\frac{e^{\kappa}(e^{2ba(t)}-1)}{1-e^{2ba(t)}\psi(-\log\varphi(\kappa t^{-1}))}\ \to\ \frac{e^{\kappa}A}{1-A},\quad t\to\infty.$$

Таким чином, ми встановили скінченність $\sup_{t\ge1}\mathbb{E}e^{2ba(t)N(t)}<\infty$. Далі, використовуючи субадитивність за розподілом N^* та нерівність Гьольдера, запишемо для $t\ge 1$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}e^{ba(t)N^*(M_1(t))}\le\mathbb{E}e^{ba(t)(N^*(1)+N^*(N_1(t)))}\\ \le\ &\Big(\mathbb{E}e^{2ba(t)N^*(1)}\mathbb{E}e^{2ba(t)N^*(N_1(t))}\Big)^{1/2}\le\Big(\mathbb{E}e^{2bN^*(1)}\mathbb{E}e^{2ba(t)N(t)}\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Отже, $C^*<\infty$, оскільки наш вибір b гарантує скінченність $\mathbb{E}e^{2bN^*(1)}$.

Крок 2, на якому завершується доведення. За виконання припущень розділу 2.3 вважаємо, що $\tau=1$. Використовуючи незалежність N^* та N_1, субадитивність за розподілом N^*, субадитивність $x\to x^\tau$ на $[0,\infty)$ та те, що $t\to N^*(t)$ не спадає м.н., запишемо для $x>0$, $t\ge 1$ та $k\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{a(t)(N^*(N_1^\tau((k+1)t))-N^*(N_1^\tau(kt)))>x\mid(N_1(s))_{s\ge0}\}\\ \le\ &\mathbb{P}\{a(t)N^*(N_1^\tau((k+1)t)-N_1^\tau(kt))>x\mid(N_1(s))_{s\ge0}\}\\ \le\ &\mathbb{P}\{a(t)N^*((N_1((k+1)t)-N_1(kt))^\tau)>x\mid(N_1(s))_{s\ge0}\}.\end{aligned}$$

Далі, використовуючи незалежність N^* та N_1, субадитивність за розподілом

$(M_1(t))_{t\geq 0}$, те, що $t \to N^*(t)$ не спадає м.н., та нерівність Маркова,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\{a(t)(N^*(N_1^\tau((k+1)t)) - N^*(N_1^\tau(kt))) > x\} \\
\leq \; & \mathbb{P}\{a(t)N^*((N_1((k+1)t) - N_1(kt))^\tau) > x\} \\
= \; & \mathbb{E}\mathbb{P}\{a(t)N^*((N_1((k+1)t) - N_1(kt))^\tau) > x \mid (N^*(s))_{s\geq 0}\} \\
\leq \; & \mathbb{P}\{a(t)N^*(M_1^\tau(t)) > x\} \leq C^* e^{-bx} = f(x).
\end{aligned}$$

При цьому для $c > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{j\geq 1} 2^j f(x2^{jc}) = C^* \lim_{x\to\infty} \sum_{j\geq 1} 2^j e^{-bx2^{jc}} = 0,$$

оскільки останній ряд збігається рівномірно по $x \geq 1$. Таким чином, процеси $(N(t))_{t\geq 0}$ дійсно задовольняють умову (1.25). Лему 11 доведено. $\square$

1.4.5 Моделювання

У цьому підрозділі ми проведемо моделювання граничних та дограничних процесів, що фігурують у прикладі 1 підрозділу 1.4.3. Спочатку ми змоделюємо α-стійкий субординатор D_α та побудуємо за ним дробово-інтегровний обернений стійкий субординатор $Y_{\alpha,\rho}^S$. Далі на одному малюнку ми зобразимо графіки дограничного та граничного процесів при конкретних значеннях параметрів.

Наведене нижче інтегральне зображення процесу $Y_{\alpha,\rho}^S$ може бути знайдене у доведенні теореми 2.8 роботи [38]:

$$Y_{\alpha,\rho}^S(u) = \int_0^\infty (u - D_\alpha(y))^\rho \mathbb{1}_{\{D_\alpha(y)\leq u\}} \mathrm{d}y, \quad u \geq 0.$$

Для моделювання D_α використаємо зображення Іто, що запозичене з твердження 1.3 книги [7]:

$$D_\alpha(u) := \sum_{k: t_k \leq u} j_k, \quad u \geq 0,$$

де $\sum_k \delta_{(t_k, j_k)}$ – пуассонівська випадкова міра на $[0,\infty) \times (0,\infty)$ з мірою інтенсивності $\mathrm{LEB} \otimes \nu$. Міра ν визначається так

$$\nu([x,\infty)) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-(\alpha+1)}, \quad x \geq 0,$$

де $\Gamma(\cdot)$ позначає гамма-функцію.

Використовуючи вищезгадані зображення, на Рисунку 1.7 побудуємо графіки процесів $D_\alpha(u)$ та $Y^S_{\alpha,\rho}(u)$ на проміжку $u \in [0,1]$ при $\alpha = \rho = 0.5$.

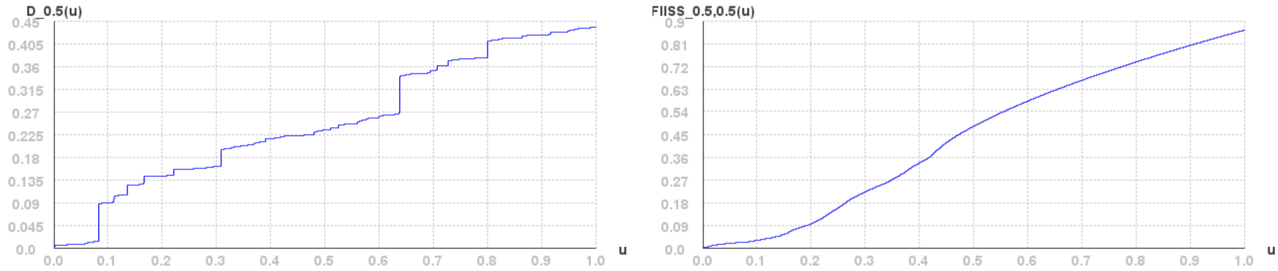

Рис. 1.7: Дробово-інтегровний обернений стійкий субординатор.
Зліва: стійкий субординатор $D_{0.5}$, справа: процес $Y^S_{0.5,0.5}$

Далі для вже одержаної реалізації процесу $D_{0.5}$ побудуємо траєкторії процесів $Y^S_{0.5,-0.5}(u)$ та $Y^S_{0.5,-1.0}(u)$ при $u \in [0,1]$ на Рисунку 1.8.

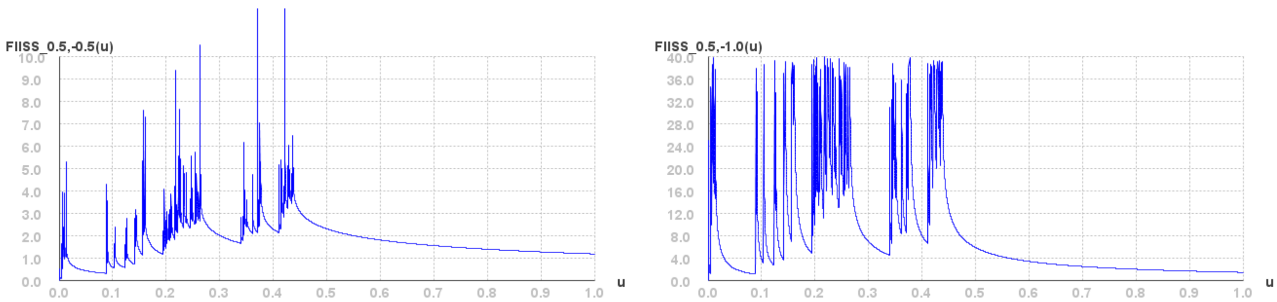

Рис. 1.8: Дробово-інтегровний обернений стійкий субординатор.
Зліва: випадок $\rho = -0.5$, справа: випадок $\rho = -1.0$

Тепер перейдемо до моделювання дограничного та граничного процесів у прикладі 1. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots -$ послідовність незалежних випадкових величин, що мають розподіл Парето з коефіцієнтом масштабу 1 та параметром форми 0.5. Тоді

$$a(t) = \mathbb{P}\{\xi > t\} = t^{-0.5},$$

отже $\beta = 0.5$. Виберемо $\rho = 0.25$ або $\rho = -0.25$, та $h(t) = t^{0.25}$ або $h(t) = t^{-0.25}$ відповідно. Тоді дограничний процес набуває вигляду

$$X^*(tu) := t^{-0.5\pm0.25} X(tu), \quad u \in [0,1].$$

На Рисунку 1.9 ми продемонструємо траєкторії процесів $X^*(tu)$, $Y^S_{0.5,0.25}(u)$ та $Y^S_{0.5,-0.25}(u)$ на проміжку $u \in [0,1]$ при $t = 10^3$.

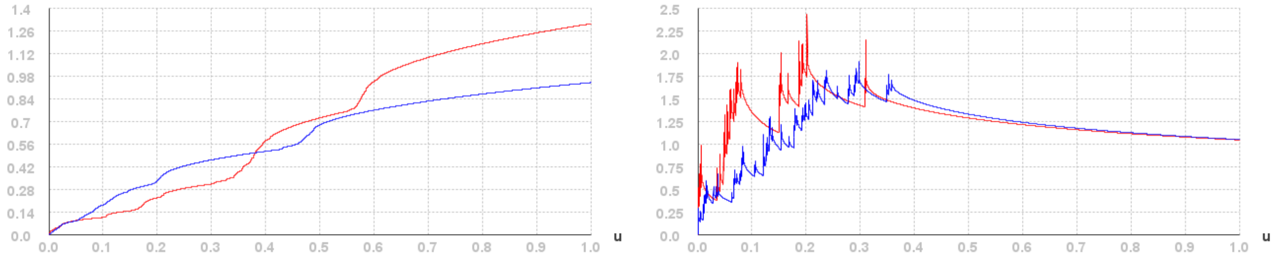

Рис. 1.9: Траєкторії процесів, що фігурують у прикладі 1.
Синій колір: граничний процес $Y^S_{0.5,\rho}(u)$ для $\rho = 0.25$ та $\rho = -0.25$,
червоний колір: дограничний процес $X^*(tu)$

1.5 Висновки до розділу 1

У цьому розділі дисертаційної роботи досліджено слабку збіжність у просторі Скорохода загальних процесів дробового ефекту. Зокрема, отримано такі результати.

- Доведено функціональні граничні теореми для належним чином нормалізованого загального процесу дробового ефекту у випадках, коли центрування є необхідним, та коли центрування не потрібне.

- Встановлено неперервність за Гьольдером граничних процесів.

- Наведено приклади застосування доведених теорем до конкретних лічильних процесів.

- Проведено моделювання граничних та дограничних процесів, що розглядаються у прикладах застосування основних результатів.

Розділ 2

Елементи теорії відновлення для ітерованих збурених випадкових блукань на деревах загальних гіллястих процесів

2.1 Час першого проходження рівня збуреним випадковим блуканням

2.1.1 Обговорення та основні результати

Нехай $(\xi_i, \eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ є незалежними копіями $\mathbb{R}^2$-значного випадкового вектору (ξ, η) з довільною залежністю компонент. Як і раніше, $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ позначає затримане в нулі стандартне випадкове блукання з кроками ξ_i для $i \in \mathbb{N}$, тобто $S_0 = 0$ та $S_i = \xi_1 + \ldots + \xi_i$ для $i \in \mathbb{N}$. Покладемо

$$T_i := S_{i-1} + \eta_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Послідовність $T := (T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ будемо називати *збуреним випадковим блуканням*. Для $x \in \mathbb{R}$ визначимо *час першого проходження* рівня x

$$\tau(x) := \inf\{n \in \mathbb{N} : T_n > x\}.$$

Автори статті [4] формулюють відкриту проблему: знайти умови, за яких степеневі моменти випадкової величини $\tau(x)$ є скінченними. Даний підрозділ присвячений розв'язанню цієї задачі. Ми встановимо умови скінченності

$\mathbb{E}(\tau(x))^p < \infty$ для $p > 0$ за припущень

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty \quad \text{м.н. та} \quad \int_{(1,\infty)} \frac{y}{\mathbb{E}(\xi^- \wedge y)} \mathrm{d}\mathbb{P}\{\eta \le y\} = \infty. \tag{2.1}$$

Незважаючи на те, що S_n прямує до $-\infty$, збурене випадкове блукання осцилює (див. теорему 2.1 статті [4]) через наявність окремих, дуже великих елементів збурюючої послідовності $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Покладемо $\mu^\pm := \mathbb{E}\xi_\pm := \mathbb{E}\max(\pm\xi, 0)$ та, якщо $\mu^+ \wedge \mu^- < \infty$, $\mu := \mathbb{E}\xi = \mu^+ - \mu^-$. Зауважимо, що $\mu \in [-\infty, 0)$ згідно з першою умовою в (2.1).

Теорема 12. *Нехай $p > 0$ та $x \in \mathbb{R}$. Припустимо, що $\mu \in [-\infty, 0)$, $\lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\{\eta > t\} = s \in [0, \infty]$, та хоча б один параметр s або μ є скінченним. Якщо $s = 0$, то припустимо додатково, що виконується друга умова в* (2.1). *Тоді*

(a) $\mathbb{E}(\tau(x))^p = \infty$, якщо $s < -\mu p$;

(б) $\mathbb{E}(\tau(x))^p < \infty$, якщо $s > -\mu p$ та $\mathbb{E}\xi_-^{rp+1} < \infty$ для деякого $r > s/(s + \mu p)$ (де $s/(s + \mu p) = 1$ для $s = \infty$).

Обговоримо стратегію доведення. Скінченість моментів $\tau(x)$ визначається розподілом хвоста η та поведінкою в середньому випадкового блукання $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. За умови $\mu > -\infty$ спочатку здається природним замінити S_n на $n\mu$, а потім застосувати лему 13, що наведено нижче. У такий спосіб можна вгадати очікуваний результат у загальній постановці, що розглядається у теоремі 12. На другому кроці потрібно з'ясувати, що ми втрачаємо при заміні S_n на $n\mu$. Наше припущення $\mathbb{E}\xi_-^{rp+1} < \infty$ забезпечує можливість такої заміни. Проте, ми не знаємо, чи справді ця умова необхідна, та що станеться, якщо $s > -\mu p$ та $\mathbb{E}\xi_-^q = \infty$ для $q > 1$ досить близького до 1.

Проблема скінченності $\mathbb{E}(\tau(x))^p < \infty$ є відносно простою за умови, що розподіл ξ є виродженим у точці $-c$ для деякого $c > 0$. Вона розв'язана у лемі 13, що належить іншим авторам. Дійсно, при доведенні теореми 12 буде показано, що збіжність ряду $\sum_{n\ge1} n^{p-1}\mathbb{P}\{\max_{1\le k\le n}(-c(k-1) + \eta_k) \le x\}$ є еквівалентною нерівності $\mathbb{E}(\tau(x))^p < \infty$, де $\tau(x) = \inf\{n \in \mathbb{N} : -c(n-1) + \eta_n > x\}$ для $x \in \mathbb{R}$. Для того щоб довести теорему 12 у повному обсязі, ми маємо подолати ускладнення, породжені випадковістю ξ та можливою залежністю ξ та η.

Лема 13. *Нехай* $p > 0$, $c > 0$ *та* $x \in \mathbb{R}$. *Припустимо, що* $\lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\{\eta > t\} = s \in [0,\infty]$ *та у випадку* $s = 0$, *що* $\mathbb{E}\eta^+ = \infty$. *Тоді ряд*

$$\sum_{n\geq 1} n^{p-1}\mathbb{P}\{\max_{1\leq k\leq n}(-c(k-1)+\eta_k) \leq x\}$$

збігається за умови $s > cp$ *та розбігається за умови* $s < cp$.

Доведення можна знайти на с. 34 роботи [4].

Лема 14. *Нехай* σ *є моментом зупинки для послідовності* $(\xi_k, \eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *зі скінченним середнім. Припустимо, що* $\lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\{\eta > t\} = s \in [0,\infty]$. *Тоді*

$$\lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\{\max_{1\leq i\leq \sigma}(S_{i-1}+\eta_i) > t\} = s\mathbb{E}\sigma,$$

де права частина дорівнює 0, *якщо* $s = 0$, *та* ∞, *якщо* $s = \infty$.

Доведення можна знайти у лемі 5.1 статті [2].

2.1.2 Доведення теореми 12

Доведення (a). Припускаючи, що $s < -\mu p$, ми доведемо, що $\mathbb{E}(\tau(x))^p = \infty$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Останнє є еквівалентним рівності

$$\sum_{n\geq 1} n^{p-1}\mathbb{P}\{\max_{1\leq k\leq n}(S_{k-1}+\eta_k) \leq x\} = \infty$$

внаслідок

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tau(x))^p &= \int_{[0,\infty)} y^p \mathrm{d}\mathbb{P}\{\tau(x) \leq y\} = p\int_0^\infty y^{p-1}\mathbb{P}\{\tau(x) > y\}\mathrm{d}y \\
&\geq p\sum_{n\geq 2}\min((n-1)^{p-1}, n^{p-1})\mathbb{P}\{\tau(x) > n\} \\
&= p\sum_{n\geq 2}\min((n-1)^{p-1}, n^{p-1})\mathbb{P}\{\max_{1\leq k\leq n}(S_{k-1}+\eta_k) \leq x\}
\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tau(x))^p &= p\int_0^\infty y^{p-1}\mathbb{P}\{\tau(x) > y\}\mathrm{d}y \\
&\leq p\Big(1+\sum_{n\geq 1}\max((n+1)^{p-1}, n^{p-1})\mathbb{P}\{\max_{1\leq k\leq n}(S_{k-1}+\eta_k) \leq x\}\Big).
\end{aligned}$$

Для $c > 0$ покладемо

$$\kappa_0(c) := 0, \quad \kappa_n(c) := \inf\{j > \kappa_{n-1}(c) : S_j < S_{\kappa_{n-1}(c)} - c\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

та $\kappa(c) := \kappa_1(c)$. Покладемо

$$(\xi_n^*, \eta_n^*) := \big(S_{\kappa_n(c)} - S_{\kappa_{n-1}(c)}, \max_{\kappa_{n-1}(c)+1 \le i \le \kappa_n(c)} (S_{i-1} - S_{\kappa_{n-1}(c)} + \eta_i)\big), \quad n \in \mathbb{N}$$

та зауважимо, що так визначені випадкові вектори є незалежними копіями

$$(S_{\kappa(c)}, \max_{1 \le i \le \kappa(c)} (S_{i-1} + \eta_i)).$$

Крім того,

$$\max_{1 \le i \le \kappa_n(c)} (S_{i-1} + \eta_i) = \max_{1 \le j \le n} (S_{j-1}^* + \eta_j^*) \le \max_{1 \le j \le n} (-c(j-1) + \eta_j^*), \qquad (2.2)$$

де $S_0^* := 0$ та $S_n^* := \xi_1^* + \ldots + \xi_n^* = S_{\kappa_n(c)}$ для $n \in \mathbb{N}$.

Отже, використовуючи нерівності $\kappa_n(c) \ge n$ м.н. для $n \in \mathbb{N}$ та (2.2), отримуємо

$$\begin{aligned}\sum_{n \ge 1} n^{p-1} \mathbb{P}\{\max_{1 \le i \le n} (S_{i-1} + \eta_i) \le x\} &\ge \sum_{n \ge 1} n^{p-1} \mathbb{P}\{\max_{1 \le i \le \kappa_n(c)} (S_{i-1} + \eta_i) \le x\} \\ &\ge \sum_{n \ge 1} n^{p-1} \mathbb{P}\{\max_{1 \le j \le n} (-c(j-1) + \eta_j^*) \le x\}.\end{aligned}$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ м.н., робимо висновок, що $\mathbb{E}\kappa(c) < \infty$. Таким чином, за лемою 14

$$\lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\{\eta_1^* > t\} = \lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\{\max_{1 \le i \le \kappa(c)} (S_{i-1} + \eta_i) > t\} = s\mathbb{E}\kappa(c) < \infty.$$

Згідно з лемою 13 останній ряд розбігається, якщо ми знайдемо c таке, що $s\mathbb{E}\kappa(c) < cp$. Якщо $s = 0$, то ця нерівність виконується для будь-якого $c > 0$. Якщо $s \in (0, \infty)$, то нерівність виконується при достатньо великих c, оскільки за елементарною теоремою відновлення $\lim_{c\to\infty} c^{-1}\mathbb{E}\kappa(c) = (-\mu)^{-1}$ за умови $\mu > -\infty$ та $= 0$ за умови $\mu = -\infty$. Це завершує доведення пункту (а).

Доведення (б). Тепер припустимо, що $s \in (-\mu p, \infty)$ (величина μ має бути скінченною) та $\mathbb{E}\xi_-^{rp+1} < \infty$ для деякого $r > s/(s + \mu p)$. Виберемо $\delta_1 \in (0, s)$

та $\delta_2 > 0$ такі, що $r > (s-\delta_1)/(s-\delta_1+(\mu-\delta_2)p)$. Для полегшення позначень ми будемо писати $\hat{\mu}$ замість $-\mu+\delta_2$ та ν замість $s-\delta_1$. Зокрема, остання нерівність перетворюється на таку

$$r > \nu/(\nu - \hat{\mu}p). \tag{2.3}$$

Покладемо

$$N := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n + \hat{\mu}n \le 0\}.$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty}(S_n+\hat{\mu}n) = \lim_{n\to\infty}((S_n-\mu n)+\delta_2 n) = +\infty$ м.н., робимо висновок, що $N < \infty$ м.н. Крім того, $\mathbb{E}\xi_-^{rp+1} < \infty$ тягне за собою $\mathbb{E}N^{rp} < \infty$ за теоремою 1 статті [50]. Беручи до уваги те, що

$$\max_{0\le i\le n-1}(S_i+\eta_{i+1}) \ge \max_{N+1\le i\le n-1}(S_i+\eta_{i+1}) \ge \max_{[n^{1/r}]\le i\le n-1}(-\hat{\mu}i+\eta_{i+1})$$

на події $\{N \le [n^{1/r}]-1\}$ (помітимо, що $r > 1$), робимо висновок

$$\begin{aligned}
& \sum_{n\ge1} n^{p-1}\mathbb{P}\{\max_{0\le i\le n-1}(S_i+\eta_{i+1}) \le x\} \\
= & \sum_{n\ge1} n^{p-1}\mathbb{P}\{\max_{0\le i\le n-1}(S_i+\eta_{i+1}) \le x, N \le [n^{1/r}]-1\} \\
+ & \sum_{n\ge1} n^{p-1}\mathbb{P}\{\max_{0\le i\le n-1}(S_i+\eta_{i+1}) \le x, N > [n^{1/r}]-1\} \\
\le & \sum_{n\ge1} n^{p-1}\mathbb{P}\{\max_{[n^{1/r}]\le i\le n-1}(-\hat{\mu}i+\eta_{i+1}) \le x\} \\
+ & \sum_{n\ge1} n^{p-1}\mathbb{P}\{N > [n^{1/r}]-1\}.
\end{aligned}$$

Останній ряд збігається внаслідок

$$\begin{aligned}
\infty > \mathbb{E}N^{rp} &= \int_{[0,\infty)} y^p \mathrm{d}\mathbb{P}\{N^r \le y\} = p\int_0^\infty y^{p-1}\mathbb{P}\{N^r > y\}\mathrm{d}y \\
&= p\int_0^\infty y^{p-1}\mathbb{P}\{N > y^{1/r}\}\mathrm{d}y \ge p\sum_{n\ge1} n^{p-1}\mathbb{P}\{N > n^{1/r}\}.
\end{aligned}$$

Як і раніше, позначимо через $G(x)$ функцію розподілу η. Зафіксуємо $x \in \mathbb{R}$. З припущення $\lim_{t\to\infty} t(1-G(t)) = s \in (0,\infty)$ випливає нерівність

$$\hat{\mu}i(1-G(x+\hat{\mu}i)) \ge \nu \tag{2.4}$$

і, отже,

$$G(x+\hat\mu i) \le 1-\nu/(\hat\mu i) \le C(1-i^{-1})^{\nu/\hat\mu}$$

для всіх достатньо великих i ($i \ge n_0$) та належної сталої $C > 1$, якщо $\nu/\hat\mu \in (0,1)$, та $C = 1$, якщо $\nu/\hat\mu \ge 1$. Отже,

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge n_0} n^{p-1}\mathbb{P}\{\max_{[n^{1/r}]\le i\le n-1}(-\hat\mu i+\eta_{i+1})\le x\} &= \sum_{n\ge n_0} n^{p-1}\prod_{i=[n^{1/r}]}^{n-1} G(x+\hat\mu i)\\ &\le C\sum_{n\ge n_0} n^{p-1}\prod_{i=[n^{1/r}]}^{n-1}(1-i^{-1})^{\nu/\hat\mu}\\ &= C\sum_{n\ge n_0} n^{p-1}\Big(\frac{[n^{1/r}]-1}{n-1}\Big)^{\nu/\hat\mu}.\end{aligned}$$

Оскільки $n^{p-1}\Big(\frac{[n^{1/r}]-1}{n-1}\Big)^{\nu/\hat\mu} \sim n^{-((1-1/r)\nu/\hat\mu)+p-1}$ при $n\to\infty$, та показник степеня $-((1-1/r)\nu/\hat\mu)+p-1$ менше за -1 з огляду на (2.3), то останній ряд збігається. Це завершує доведення пункту (б) у випадку $s<\infty$.

Якщо $\lim_{t\to\infty} t(1-G(t)) = \infty$, ми спочатку покладемо $\hat\mu = -\mu+\delta_2$ для будь-якого $\delta_2 > 0$, а потім виберемо ν в (2.4) досить великим, щоб забезпечити $(1-1/r)\nu/\hat\mu > p$. Доведення теореми 12 завершено.

2.2 Ітеровані збурені випадкові блукання.

2.2.1 Основні визначення та допоміжні твердження

Як і в попередньому підрозділі, позначимо через $(S_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ затримане в нулі стандартне випадкове блукання з кроками $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$, що є незалежними копіями випадкової величини ξ, а через $T := (T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ збурене випадкове блукання зі збуреннями $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$, що є незалежними копіями випадкової величини η.

Припустимо, що ξ та η м.н. додатні. Покладемо $N(t) := \sum_{i\ge1}\mathbb{1}_{\{T_i\le t\}}$ та $V(t) := \mathbb{E}N(t)$ для $t\ge 0$. Зрозуміло, що

$$V(t) = \mathbb{E}U((t-\eta)^+) = (U*G)(t) = \int_{[0,\,t]} U(t-y)\mathrm{d}G(y), \quad t\ge 0, \tag{2.5}$$

де для $t \geq 0$ $U(t) := \sum_{i\geq 0} \mathbb{P}\{S_i \leq t\}$ є функцією відновлення та $G(t) = \mathbb{P}\{\eta \leq t\}$.

Наведемо конструкцію загального гіллястого процесу у окремому випадку, коли він породжується збуреним випадковим блуканням T. У момент часу 0 є початковий предок деякої популяції. У моменти часу, що задаються послідовними елементами послідовності T, початковий предок народжує потомство (індивідуумів першого покоління). Індивідууми першого покоління народжують індивідуумів другого покоління, при цьому різниці між моментами народження індивідуумів другого покоління та моментами народження їхньої матері є незалежними копіями T, та для різних матерів ці копії незалежні. Індивідууми другого покоління народжують індивідуумів третього покоління, і так далі. Всі індивідууми діють незалежно один від одного.

Для $t \geq 0$ та $j \in \mathbb{N}$ позначимо через $N_j(t)$ кількість індивідуумів у j-ому поколінні з моментами народження $\leq t$, покладемо $V_j(t) := \mathbb{E}N_j(t)$ та $V_j(t) := 0$ для $t < 0$. Тоді

$$\begin{aligned} N_j(t) &= \sum_{r\geq 1} N_{j-1}^{(r)}(t - T_r)\mathbb{1}_{\{T_r \leq t\}} \\ &= \sum_{k\geq 1} N_{1,j}^{(k)}(t - T_k^{(j-1)})\mathbb{1}_{\{T_k^{(j-1)} \leq t\}}, \quad j \geq 2, \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

де $N_{j-1}^{(r)}(t)$ є кількістю нащадків у j-ому поколінні з моментами народження в інтервалі $[T_r, t + T_r]$ індивідуума першого покоління з моментом народження T_r; $T^{(j-1)} := (T_k^{(j-1)})_{k\geq 1}$ є деякою послідовністю, членами якої є моменти народження всіх індивідуумів у $(j-1)$-ому поколінні; $N_{1,j}^{(k)}(t)$ є кількістю нащадків у j-ому поколінні з моментами народження в інтервалі $[T_k^{(j-1)}, t + T_k^{(j-1)}]$ індивідуума $(j-1)$-го покоління з моментом народження $T_k^{(j-1)}$. Згідно з властивістю гіллястих процесів $(N_{j-1}^{(1)}(t))_{t\geq 0}$, $(N_{j-1}^{(2)}(t))_{t\geq 0}, \ldots$ є незалежними копіями N_{j-1}, що не залежать від T, та $(N_{1,j}^{(1)}(t))_{t\geq 0}$, $(N_{1,j}^{(2)}(t))_{t\geq 0}, \ldots$ є незалежними копіями $(N(t))_{t\geq 0}$, що також не залежать від $T^{(j-1)}$. Надалі будемо писати N замість N_1 та V замість V_1.

Переходячи у (2.6) до математичних сподівань, робимо висновок, що для $j \geq 2$ та $t \geq 0$

$$\begin{aligned} V_j(t) &= V^{*(j)}(t) = (V_{j-1} * V)(t) \\ &= \int_{[0,\,t]} V_{j-1}(t-y)\mathrm{d}V(y) = \int_{[0,\,t]} V(t-y)\mathrm{d}V_{j-1}(y), \end{aligned} \tag{2.7}$$

де $V^{*(j)}$ є j-кратною згорткою V з собою. Послідовність $\mathcal{T} := (T^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ будемо називати *ітерованим глобально збуреним випадковим блуканням на деревах загальних гіллястих процесів*. Зауважимо, що N_j, $j \geq 2$ є окремим випадком випадкового процесу з імміграцією у випадкові моменти часу, див. підрозділ 1.1.

Для кожного цілого $j \geq 2$ послідовність $T^{(j)}$ та процес N_j є природними узагальненнями збуреного випадкового блукання T та лічильного процесу $(N(t))_{t\geq 0}$. Цікаво дослідити, наскільки $T^{(j)}$ та N_j успадковують властивості T та $N(t)$. успадковують $T^{(j)}$ та N_j.

Послідовність $(T^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ є окремим випадком гіллястого випадкового блукання, у якому точковий процес першого покоління є лічильним процесом $(N(t))_{t\geq 0}$ збуреного випадкового блукання. З іншого боку, для $j \in \mathbb{N}$ $T^{(j)}$ можна інтерпретувати як послідовність моментів народження у j-ому поколінні загального гіллястого процесу. Отже, отримані результати сприяють кращому розумінню того, як відбуваються народження у певному поколінні. Маючи справжній інтерес для теорії загальних гіллястих процесів, ця інформація також проливає світло на організацію рівнів (множини вершин, які розташовані на однаковій відстані від кореня) деяких випадкових дерев (наприклад, випадкових рекурсивних дерев або бінарних дерев пошуку), що можуть бути побудовані як родові дерева загальних гіллястих процесів, зупинені у належні випадкові моменти часу. Більш детальну інформацію та приклади випадкових дерев, що можуть бути вкладені у дерева загальних гіллястих процесів, можна знайти у статті [31]

Наведемо класифікацію поколінь. Будемо називати j-е покоління *початковим*, *проміжним* або *пізнім* залежно від того, чи j є фіксованим,

$j = j(t) \to \infty$ та $j(t) = o(t)$ при $t \to \infty$ або $j = j(t)$ має порядок t. Покладемо для $t > 0$

$$H(t) := \inf\{j \in \mathbb{N} : N_j(t) = 0\}$$

та зазначимо, що $N_j(t) = 0$ м.н. для всіх $j \geq H(t)$. Величину $H(t)$ будемо називати *висотою дерева урізаного загального гіллястого процесу*, що породжений збуреним випадковим блуканням T та обмежений інтервалом $[0, t]$. Наведений нижче результат був встановлений у твердженні 2.1 роботи [13] та має принципове значення для нашої класифікації поколінь.

Твердження 15. *Для кожного $t \geq 0$ $H(t) < \infty$ м.н. Крім того,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{\gamma} \in (0, \infty) \quad \text{м.н.},$$

де $\gamma := \sup\{z > 0 : \mu(z) < 1\}$ та $\mu(z) := \inf_{s>0}(e^{zs}\frac{\mathbb{E}e^{-s\eta}}{1-\mathbb{E}e^{-s\xi}})$ для $z > 0$.

Згідно з твердженням 15 інших (крім початкового, проміжного та пізнього) поколінь немає. Поки припустимо, що j є пізнім поколінням, а T є набором випадкових точок, що не обов'язково є збуреним випадковим блуканням. Тим не менше, ми зберігаємо позначення N_j та V_j. У цьому випадку асимптотична поведінка V_j та N_j відома. Наприклад, вишуканий аналог ключової теореми відновлення для V_j, який включає як версію елементарної теореми відновлення, так і версію теореми Блекуелла, можна знайти у теоремі A роботи [8]. Збіжність N_j з ймовірністю один обговорюється у теоремі B тієї ж статті та теоремі 4 роботи [9]. Посилений закон великих чисел для $N_j(bj)$ для відповідного $b > 0$ дається у формулі (1.1) статті [8]. З цих та інших подібних результатів випливає, що N_j забуває, що відбувається в ранній історії та, зокрема, у 1-ому поколінні. Поведінка N_j, що є універсальною для широкого класу вхідних процесів (відповідальних за 1-е покоління), керується відомими граничними теоремами для загальних гіллястих процесів такими, як теорема про збіжність мартингалів Біггінса, теорема про великі відхилення тощо.

Можна очікувати, що поведінка ітерованих збурених випадкових блукань у початкових та проміжних поколіннях суттєво відрізняється від поведінки у пізніх поколіннях. Якщо j є не пізнім поколінням, то процес N_j здебільшого повинен успадковувати властивості N, можливо у модифікованому вигляді. Ці очікування будуть підтверджені нижче.

В цьому розділі дисертаційної роботи ми сформулюємо та доведемо аналоги класичних результатів теорії відновлення та подамо результати моделювання.

2.2.2 Моделювання

У цьому підрозділі ми проведемо моделювання ітерованих збурених випадкових блукань на деревах загальних гіллястих процесів, а також відповідних лічильних процесів.

Нехай випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на $[0, 1]$, а випадкова величина η – розподіл Парето з коефіцієнтом масштабу 1 та параметром форми 0.5. Зауважимо, що при таких параметрах $\mathbb{E}\eta = \infty$. На Рисунку 2.1 для вибраних розподілів випадкових величин ξ та η ми зобразимо реалізації послідовностей $T^{(1)} := T$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$ та $T^{(4)}$. Також ми з'єднаємо лінією кожного індивідуума (крім початкового предка) зі своєю матір'ю, при цьому обмежимося двома нащадками для кожної матері.

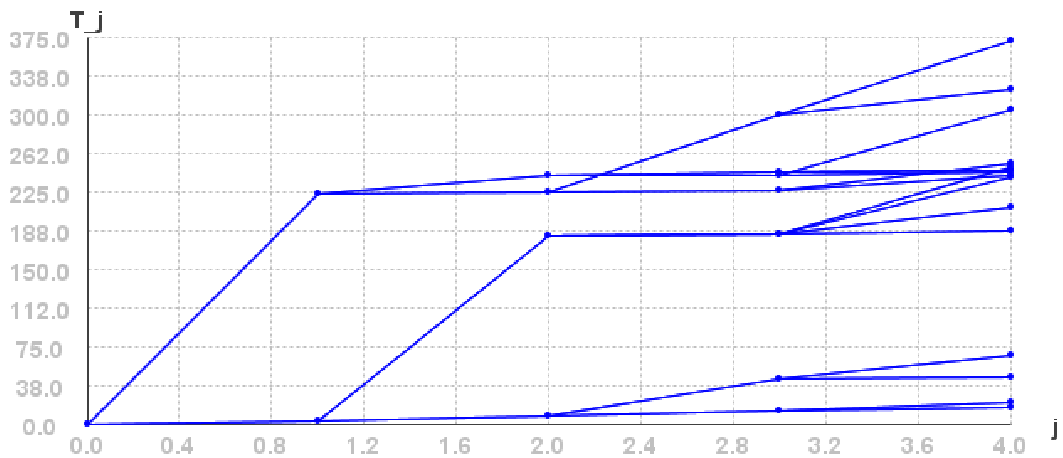

Рис. 2.1: Ітеровані глобально збурені випадкові блукання
на деревах загальних гіллястих процесів: випадок великих збурень

Тепер нехай випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром 1, а випадкова величина η – рівномірний розподіл на $[0, 1]$. На Рисунку 2.2 зобразимо реалізації послідовностей $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$ та $T^{(4)}$. Як і раніше, з'єднаємо лінією кожного індивідуума зі своєю матір'ю, але тепер обмежимося чотирма нащадками для кожної матері.

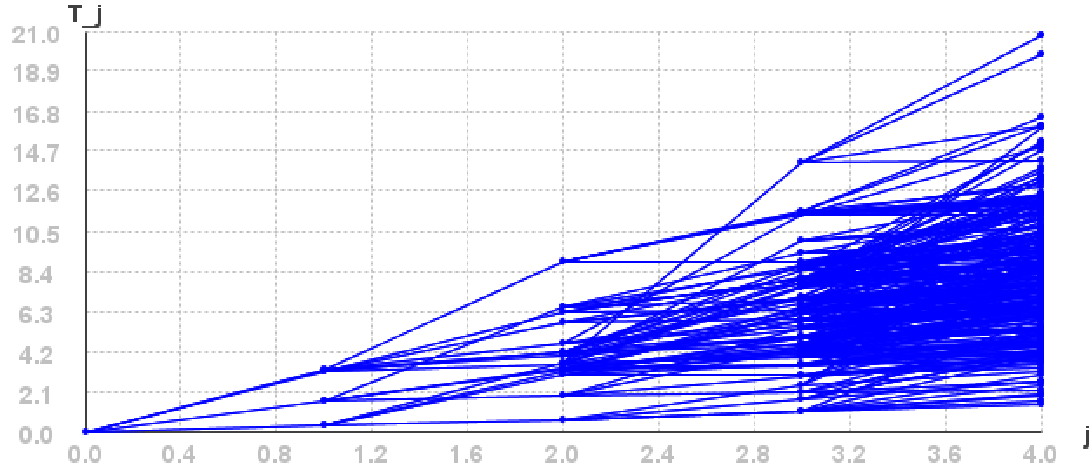

Рис. 2.2: Ітеровані глобально збурені випадкові блукання
на деревах загальних гіллястих процесів: випадок малих збурень

Як бачимо, у другому випадку реалізації ітерованих збурених випадкових блукань є "більш рівномірними", ніж у першому. Використовуючи останню реалізацію, на Рисунку 2.3 ми побудуємо лічильні процеси $N_2(t)$ та $N_4(t)$.

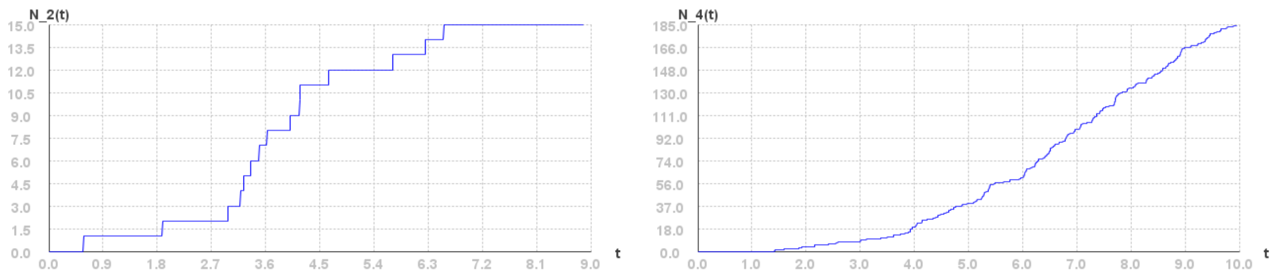

Рис. 2.3: Ітеровані збурені випадкові блукання: лічильні процеси.
Зліва: $N_2(t)$, справа: $N_4(t)$

2.3 Проміжні рівні

2.3.1 Обговорення та основні результати

Найпростіший результат теорії відновлення, який називається елементарною теоремою відновлення, стверджує, що

$$U(t)=\sum_{i\geq 0}\mathbb{P}\{S_i\leq t\}\ \sim\ \frac{t}{\mu},\quad t\to\infty,$$

де $\mu:=\mathbb{E}\xi\in(0,\,\infty)$.

З (2.5) випливає, що без будь-яких припущень щодо η,

$$V(t)\ \sim\ \frac{t}{\mu},\quad t\to\infty, \tag{2.8}$$

що є аналогом елементарної теореми відновлення для збуреного випадкового блукання.

Далі ми наведемо декілька результатів щодо поведінки першого порядку ступеней згортки V_j функції V. Перший результат – теорема 16 – стосується початкових «початкових проміжних» поколінь, що задовольняють $j=j(t)\to\infty$ та $j(t)=o(t^{1/2})$ при $t\to\infty$.

Теорема 16. *Припустимо, що $\mu=\mathbb{E}\xi\in(0,\infty)$, та, що для деякого $r\in(1,\,2]$ або (а) $\mathbb{E}\xi^r<\infty$ або (б) $\mathbb{P}\{\xi>t\}\ \sim\ t^{-r}$, а також, що $\mathbb{E}(\eta\wedge t)=O(t^{2-r})$ при $t\to\infty$. Тоді для будь-якої цілочисельної функції $j=j(t)$, що задовольняє $j(t)=o(t^{(r-1)/2})$ при $t\to\infty$,*

$$V_j(t)\ \sim\ \frac{t^j}{\mu^j j!},\quad t\to\infty. \tag{2.9}$$

Зауваження 17. *Умова $\mathbb{E}\eta^{r-1}<\infty$ є достатньою для $\mathbb{E}(\eta\wedge t)=O(t^{2-r})$, $t\to\infty$. Це випливає з*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta\wedge t)\ &=\ \int_0^t\mathbb{P}\{\eta>y\}\mathrm{d}y\leq\int_0^t\Big(\frac{t}{y}\Big)^{2-r}\mathbb{P}\{\eta>y\}\mathrm{d}y\\ &=\ t^{2-r}\int_0^\infty y^{r-2}\mathbb{P}\{\eta>y\}\mathrm{d}y=(r-1)^{-1}\mathbb{E}\eta^{r-1}t^{2-r}.\end{aligned}$$

Застосовуючи теорему 16 для $r=2$, отримуємо такий наслідок, який вже був доведений іншим методом у формулі (4.6) статті [14].

Наслідок 18. *Припустимо, що* $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ *та* $\mathbb{E}\eta < \infty$. *Тоді відношення* (2.9) *виконується для будь-якої цілочисельної функції* $j = j(t)$, *що задовольняє* $j(t) = o(t^{1/2})$ *при* $t \to \infty$.

З наступного результата випливає, що асимптотична поведінка ступенів згортки V_j зазнає фазового переходу у поколіннях j, що задовольняють $j = j(t) \sim \text{const } \cdot t^{1/2}$ при $t \to \infty$. Для обговорення цієї ситуації подальші припущення щодо моментів та гладкості здаються необхідними. Зокрема, ми припускаємо, що розподіл ξ є розподілом абсолютно неперервного типу. Це означає, що деяка ступінь згортки функції розподілу $t \mapsto \mathbb{P}\{\xi \leq t\}$ має абсолютно неперервну складову.

Теорема 19. *Припустимо, що* ξ *має розподіл абсолютно неперервного типу,* $\mathbb{E}\xi^3 < \infty$ *та* $\mathbb{E}\eta^2 < \infty$. *Тоді для будь-якої цілочисельної функції* $j = j(t)$, *що задовольняє* $j(t) = o(t^{2/3})$ *при* $t \to \infty$,

$$V_j(t) \ \sim \ \frac{t^j}{\mu^j j!} \exp\left(\frac{\gamma_0 \mu j^2}{t}\right), \quad t \to \infty,$$

де

$$\gamma_0 := \int_{[0,\infty)} \mathrm{d}(V(y) - \mu^{-1}y) = \lim_{t\to\infty}(V(t) - \mu^{-1}t) = \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2} - \frac{\mathbb{E}\eta}{\mu} \qquad (2.10)$$

може бути додатним, від'ємним або нульовим.

Зауваження 20. *Припустимо, що* $(\xi, \eta) = (|\log W|, |\log(1 - W)|)$, *де* W *є випадковою величиною, що має рівномірний розподіл на* $[0, 1]$. *Тоді*

$$V(t) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}\{S_{i-1} + \eta_i \leq t\} = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}\{S_i \leq t\} = U(t) - 1 = t, \quad t \geq 0,$$

де остання рівність випливає з $U(t) = t + 1$ *для* $t \geq 0$ *(див. с. 211 [62]). Отже,* $V(t) = t$ *для* $t \geq 0$ *та*

$$V_j(t) = \int_0^t V_{j-1}(y)\mathrm{d}y = \frac{t^j}{j!}, \quad j \geq 2, \ \ t \geq 0,$$

де остання рівність випливає з індукції. Це відповідає асимптотиці, яку надає теорема 19 для $\gamma_0 = 0$ *та* $\mu = 1$.

У теорії відновлення ключова теорема відновлення зазвичай отримується як наслідок теореми Блекуелла. Ми вчинимо інакше: спочатку доведемо аналог ключової теореми відновлення (теорема 22), а потім отримаємо аналог теореми Блекуелла (наслідок 23) як наслідок.

Спочатку нагадаємо означення арифметичного випадкового блукання.

Означення 21. *Випадкове блукання називається арифметичним або гратчастим, якщо носій розподілу кроку випадкового блукання ξ зосереджений на множині $(dn)_{n\in\mathbb{N}_0}$ для деякого $d > 0$. Величина d називається кроком розподілу ξ. Якщо d є максимальним кроком, то випадкове блукання називають d-арифметичним. Випадкове блукання називається неарифметичним або негратчастим, якшо воно не є d-арифметичним для жодного $d > 0$.*

Теорема 22. *Нехай $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – безпосередньо інтегровна за Ріманом функція на $[0,\infty)$. Припустимо, що хоча б одна з умов (а) або (б) виконується:*

(а) розподіл ξ є негратчастим, виконуються умови теореми 16 для деякого $r \in (1,\, 2]$ та $j(t) = o(t^{(r-1)/2})$ при $t \to \infty$;

(б) виконуються умови теореми 19 та $j(t) = o(t^{2/3})$ при $t \to \infty$.

Тоді

$$(f * V_j)(t) = \int_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}V_j(y) \ \sim\ \Big(\frac{1}{\mu}\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y\Big)V_{j-1}(t), \quad t \to \infty, \tag{2.11}$$

де $\mu < \infty$, та у правій частині $V_{j-1}(t)$ можна замінити на $t^{j-1}/(\mu^{j-1}(j-1)!)$ у випадку (а), або на $t^{j-1}/(\mu^{j-1}(j-1)!)\exp\left(\gamma_0\mu j^2/t\right)$ у випадку (б).

Покладаючи $f(y) = \mathbb{1}_{[0,\,h)}(y)$ у теоремі 22, ми отримуємо таке.

Наслідок 23. *Нехай $h > 0$ є фіксованим. За умов теореми 22*

$$V_j(t+h) - V_j(t) \ \sim\ \frac{h}{\mu}V_{j-1}(t), \quad t \to \infty.$$

2.3.2 Допоміжні твердження

Нагадаємо, що U позначає функцію відновлення для $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
При $\mu := \mathbb{E}\xi < \infty$ та $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ виконується

$$0 \le U(t) - \mu^{-1}t \le c_U, \quad t \ge 0, \tag{2.12}$$

де $c_U := \mu^{-2}\mathbb{E}\xi^2$. Права частина нерівності називається *нерівністю Лордена*. Ліва частина нерівності у (2.12) є наслідком тотожності Уолда $t \le \mathbb{E}S_{\nu(t)} = \mu U(t)$, де $\nu(t) := \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > t\}$ для $t \ge 0$.

За умови, що ξ має негратчастий розподіл, доведення можна знайти у [16]. Крім того, за цих умов

$$\lim_{t\to\infty} \big(U(t) - \mu^{-1}t\big) = \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2}. \tag{2.13}$$

Нехай S_0^* є випадковою величиною з розподілом

$$\mathbb{P}\{S_0^* \in \mathrm{d}x\} = \mu^{-1}\mathbb{P}\{\xi > x\}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\mathrm{d}x.$$

Формула (2) останньої цитованої статті, а саме

$$\mathbb{E}U(t - S_0^*) = \mu^{-1}t, \quad t \ge 0$$

виконується також у гратчастому випадку. Таким чином, міркування, наведені у [16], доводять праву нерівність у (2.12) також і для гратчастих розподілів.

Оскільки $V(t) \le U(t)$ для $t \ge 0$, робимо висновок, що

$$V(t) - \mu^{-1}t \le c_U, \quad t \ge 0. \tag{2.14}$$

З іншого боку, припускаючи $\mathbb{E}\eta < \infty$ (тоді умова $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ не потрібна),

$$\begin{aligned} V(t) - \mu^{-1}t &= \int_{[0,\,t]} (U(t-y) - \mu^{-1}(t-y))\mathrm{d}G(y) \\ &- \mu^{-1}\int_0^t (1 - G(y))\mathrm{d}y \ge -\mu^{-1}\int_0^t (1-G(y))\mathrm{d}y \ge -\mu^{-1}\mathbb{E}\eta. \end{aligned}$$

Таким чином, ми показали, що за умов $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ та $\mathbb{E}\eta < \infty$,

$$|V(t) - \mu^{-1}t| \le c_V, \quad t \ge 0, \tag{2.15}$$

де $c_V = \max(c_U, \mu^{-1}\mathbb{E}\eta)$.

Припускаючи $\mathbb{E}\eta^a < \infty$ для деякого $a \in (0,1)$, з чого зокрема випливає $\lim_{t\to\infty} t^a \mathbb{P}\{\eta > t\} = 0$, робимо висновок, що

$$V(t) - \mu^{-1}t \geq -\mu^{-1}\int_0^t (1 - G(y))\mathrm{d}y \geq -c_1 - c_2 t^{1-a}, \quad t \geq 0.$$

Отже, для відповідних додатних c_1 та c_2

$$-c_1 - c_2 t^{1-a} \leq V(t) - \mu^{-1}t \leq c_V, \quad t \geq 0. \tag{2.16}$$

Нерівність 2.16 буде корисною в підрозділі 2.4.2.

Далі ми доведемо аналоги декількох стандартних результатів теорії відновлення для збурених випадкових блукань. Почнемо з того, що

$$V(x+y) - V(x) \leq U(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

Дійсно, для $x, y \geq 0$,

$$\begin{aligned} & V(x+y) - V(x) \\ = \;& \mathbb{E}(U(x+y-\eta) - U(x-\eta))\mathbb{1}_{\{\eta \leq x\}} \\ & + \mathbb{E}U(x+y-\eta)\mathbb{1}_{\{x < \eta \leq x+y\}} \\ \leq \;& U(y)(\mathbb{P}\{\eta \leq x\} + \mathbb{P}\{x < \eta \leq x+y\}) \leq U(y), \end{aligned} \tag{2.18}$$

де ми скористалися субадитивністю та монотонністю U для передостанньої нерівності. Якщо $x, y < 0$, то обидві частини (2.17) дорівнюють нулю. Нарешті, використовуючи монотонність V, маємо: якщо $x < 0$ та $y \geq 0$, то $V(x+y) - V(x) = V(x+y) \leq V(y) \leq U(y)$; та якщо $x \geq 0$ та $y < 0$, то $V(x+y) - V(x) \leq 0 = U(y)$.

Леми 24 та 25 є аналогами теореми Блекуелла та ключової теореми відновлення відповідно. Зауважимо, що присутність η_k не має ніякого значення, і результати мають той самий вигляд, що і для функцій відновлення.

Лема 24. *Нехай $h > 0$ будь-яке фіксоване число.*
(a) Припустимо, що розподіл ξ є негратчастим та $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$. Тоді

$$\lim_{t\to\infty}(V(t+h) - V(t)) = \mu^{-1}h.$$

(б) Припустимо, що $\mu = \infty$ (умова щодо негратчастості розподілу ξ не потрібна). Тоді

$$\lim_{t\to\infty}(V(t+h) - V(t)) = 0. \tag{2.19}$$

Доведення. (а) Згідно з теоремою Блекуелла

$$\lim_{t\to\infty}(U(t+h) - U(t)) = \mu^{-1}h. \tag{2.20}$$

З огляду на (2.20), $\lim_{t\to\infty}(U(t+h-\eta) - U(t-\eta))\mathbb{1}_{\{\eta\le t-t^{1/2}\}} = \mu^{-1}h$ м.н. Звертаючись до (2.17), робимо висновок, що згідно з теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}(U(t+h-\eta) - U(t-\eta))\mathbb{1}_{\{\eta\le t-t^{1/2}\}} = \mu^{-1}h.$$

Вдруге звертаючись до (2.17), маємо

$$\mathbb{E}(U(t+h-\eta) - U(t-\eta))\mathbb{1}_{\{t-t^{1/2}<\eta\le t\}} \le U(h)\mathbb{P}\{t - t^{1/2} < \eta \le t\},$$

та права частина збігається до 0 при $t\to\infty$. Нарешті, використовуючи монотонність,

$$\mathbb{E}U(t+h-\eta)\mathbb{1}_{\{t<\eta\le t+h\}} \le U(h)\mathbb{P}\{t<\eta\le t+h\},$$

та права частина збігається до 0 при $t\to\infty$. Застосування першої рівності в (2.18) з $x = t$ та $y = h$ завершує доведення пункту (а).
(б) Якщо розподіл ξ є негратчастим, то згідно з теоремою Блекуелла

$$\lim_{t\to\infty}(U(t+h) - U(t)) = 0. \tag{2.21}$$

Якщо розподіл ξ є d-гратчастим, то згідно з теоремою Блекуелла (2.21) виконується при $h = jd$, $j\in\mathbb{N}$. Проте, використовуючи монотонність U, ми можемо гарантувати, що (2.21) виконується для будь-якого фіксованого $h > 0$ як у негратчастому, так і в гратчастому випадках. Повторюючи тепер дослівно доведення пункту (а), отримаємо (2.19). $\square$

Лема 25. *Нехай $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ безпосередньо інтегровна за Ріманом функція на $\mathbb{R}$.*

(а) Припустимо, що $\mu < \infty$, та розподіл ξ є негратчастим. Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \int_{[0,\,\infty)} f(t-y)\mathrm{d}V(y) = \mu^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{d}y.$$

(б) Припустимо, що $\mu = \infty$ (умова щодо негратчастості розподілу ξ не потрібна). Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \int_{[0,\,\infty)} f(t-y)\mathrm{d}V(y) = 0.$$

Якщо f є безпосередньо інтегровною за Ріманом функцією на $[0,\infty)$ або $(-\infty,0]$, то границі інтегрування $[0,\,\infty)$ та $\mathbb{R}$ слід замінити на $[0,\,t]$ та $[0,\infty)$ або $[t,\infty)$ та $(-\infty,0]$ відповідно.

Доведення. (а) Ми доведемо лему, припускаючи, що f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$. Це є еквівалентним безпосередній інтегровності за Ріманом функцій f^+ та f^- (невід'ємної та недодатної складових f) на $\mathbb{R}$. Таким чином, можемо припустити, що $f \geq 0$ на $\mathbb{R}$. Достатньо показати, що

$$\lim_{t\to\infty} \int_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}V(y) = \mu^{-1} \int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y$$

та

$$\lim_{t\to\infty} \int_{(t,\,\infty)} f(t-y)\mathrm{d}V(y) = \mu^{-1} \int_{-\infty}^0 f(y)\mathrm{d}y.$$

Доведення першого співвідношення (із заміною V на U) можна знайти на с. 241–242 книги [62]. Ми перевіримо тільки друге граничне співвідношення, дотримуючись вищезгаданого доведення Резніка.

Розіб'ємно доведення на три кроки, послідовно ускладнюючи структуру f.

Крок 1. Спочатку припустимо, що

$$f(t) = \mathbb{1}_{[(n-1)h,\,nh)}(t), \quad t < 0$$

для фіксованого недодатного цілого n та $h > 0$. Тоді $f(t-y) = 1$ тоді й лише тоді, коли $y \in (t-nh,\, t-(n-1)h]$, що тягне за собою

$$\int_{(t,\,\infty)} f(t-y)\mathrm{d}V(y) = V(t-(n-1)h) - V(t-nh).$$

Згідно з лемою 24(a) остання різниця прямує до $\mu^{-1}h$ при $t \to \infty$, тим самим доводячи, що

$$\lim_{t\to\infty} \int_{(t,\,\infty)} f(t-y)\mathrm{d}V(y) = \mu^{-1}h = \mu^{-1}\int_{-\infty}^{0} f(y)\mathrm{d}y.$$

Крок 2. Тепер припустимо, що

$$f(t) = \sum_{n\le 0} c_n \mathbb{1}_{[(n-1)h,\,nh)}(t), \quad t<0,$$

де $\big(c_n\big)_{n\le 0}$ є послідовністю невід'ємних чисел, що задовольняє $\sum_{n\le 0} c_n < \infty$. Міркуючи як у попередньому пункті, робимо висновок

$$\int_{(t,\,\infty)} f(t-y)\mathrm{d}V(y) = \sum_{n\le 0} c_n\big(V(t-(n-1)h) - V(t-nh)\big).$$

Лема 24(a) у поєднанні з нерівністю (2.17) обгрунтовує застосування теореми Лебега про мажоровану збіжність. В результаті отримаємо

$$\lim_{t\to\infty} \int_{(t,\,\infty)} f(t-y)\mathrm{d}V(y) = \mu^{-1}h\sum_{n\le 0} c_n = \mu^{-1}\int_{-\infty}^{0} f(y)\mathrm{d}y.$$

Крок 3. Нехай тепер f – довільна невід'ємна безпосередньо інтегровна за Ріманом функція на $\mathbb{R}$ (насправді, для цього доведення достатньо безпосередньої інтегровності на $(-\infty, 0)$). Для всіх $h>0$ покладемо

$$\overline{f}_h(t) := \sum_{n\le 0} \sup_{(n-1)h\le y<nh} f(y)\mathbb{1}_{[(n-1)h,\,nh)}(t), \quad t<0$$

та

$$\underline{f}_h(t) := \sum_{n\le 0} \inf_{(n-1)h\le y<nh} f(y)\mathbb{1}_{[(n-1)h,\,nh)}(t), \;\; t<0.$$

Згідно з означенням безпосередньої інтегровності за Ріманом

$$\sum_{n\le 0} \sup_{(n-1)h\le y<nh} f(y) < \infty \quad \text{та} \quad \sum_{n\le 0} \inf_{(n-1)h\le y<nh} f(y) < \infty$$

для всіх $h>0$. Таким чином, функції $\overline{f}_h$ та $\overline{f}_h$ мають таку саму структуру, як функції, описані на Кроці 2. Відповідно до результату Кроку 2

$$\lim_{t\to\infty} \int_{(t,\,\infty)} \overline{f}_h(t-y)\mathrm{d}V(y) = \mu^{-1}h\sum_{n\le 0} \sup_{(n-1)h\le y<nh} f(y) =: \mu^{-1}\overline{\sigma}(h)$$

та

$$\lim_{t\to\infty}\int_{(t,\,\infty)}\underline{f}_h(t-y)\mathrm{d}V(y)=\mu^{-1}h\sum_{n\le 0}\inf_{(n-1)h\le y<nh}f(y)=:\mu^{-1}\underline{\sigma}(h)$$

для всіх $h>0$. Оскільки для кожного $h>0$

$$\underline{f}_h(t)\le f(t)\le \overline{f}_h(t),\quad t<0,$$

то

$$\begin{aligned}\mu^{-1}\underline{\sigma}(h) &= \liminf_{t\to\infty}\int_{(t,\,\infty)}\underline{f}_h(t-y)\mathrm{d}V(y)\le\liminf_{t\to\infty}\int_{(t,\,\infty)}f(t-y)\mathrm{d}V(y)\\ &\le \limsup_{t\to\infty}\int_{(t,\,\infty)}f(t-y)\mathrm{d}V(y)\le\limsup_{t\to\infty}\int_{(t,\,\infty)}\overline{f}_h(t-y)\mathrm{d}V(y)\\ &= \mu^{-1}\overline{\sigma}(h).\end{aligned}$$

За означенням безпосередньої інтегровності за Ріманом $\lim_{h\to 0+}\big(\overline{\sigma}(h)-\underline{\sigma}(h)\big)=0$. Також відомо, що $\lim_{h\to 0+}\overline{\sigma}(h)=\int_{-\infty}^{0}f(y)\mathrm{d}y$. Тому для завершення доведення пункту (а) спрямуємо $h\to 0+$ в останньому ланцюжку нерівностей.

(б) Використовуючи пункт (б) леми 24 замість пункту (а) та повторюючи попереднє доведення, отримаємо бажане. □

У деяких ситуаціях достатньо знати, що дограничні функції у лемі 25 є обмеженими. Обгрунтування цього факту міститься у спрощеній версії леми 25, що ми запозичили з леми 9.1 статті [42].

Лема 26. *Нехай $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ безпосередньо інтегровна за Ріманом функція на $\mathbb{R}$. Тоді для деякого $r>0$ та всіх $x\in\mathbb{R}$*

$$\int_{[0,\,\infty)}f(x-y)\mathrm{d}V(y)\le r. \tag{2.22}$$

Якщо f є безпосередньо інтегровною за Ріманом функцією на $[0,\infty)$ або $(-\infty,0]$, то границю інтегрування $[0,\,\infty)$ слід замінити на $[0,\,x]$ або $[x,\infty)$. При цьому нерівність (2.22) виконується для всіх $x\ge 0$ або всіх $x\le 0$ відповідно.

2.3.3 Доведення основних результатів

2.3.3.1 Доведення теорем 16 та 19

Припустимо, що неспадна функція f зростає на нескінченності як лінійна функція, тобто $f(t) \ \sim \ a \cdot t$ при $t \to \infty$ для деякого $a > 0$. Тоді для кожного фіксованого $j \in \mathbb{N}$
$$f^{*(j)}(t) \ \sim \ \frac{a^j t^j}{j!}, \quad t \to \infty.$$
Шляхом додавання різних умов щодо поведінки різниці $f(t) - at$ у статті [13] цю асимптотику було поширено на випадок, коли $j = j(t)$ розбігається на нескінченність при $t \to \infty$.

Твердження 27 та 29 були запозичені з тверджень 3.1 та 3.2 [13] відповідно. Ми будемо використовувати їх при доведенні основних результатів, тому наведемо їх для зручності. Доведення цих тверджень можна знайти у вищезгаданій статті.

Твердження 27. *Нехай $f : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty)$ – неспадна неперервна справа функція, що дорівнює нулеві на від'ємній півосі та для деякого $a > 0$ та $\alpha \in [0, 1)$ задовольняє*
$$f(t) = at + O(t^\alpha), \quad t \to \infty. \tag{2.23}$$
Тоді для довільної цілочисельної функції $j = j(t)$ такої, що $j(t) = o(t^{(1-\alpha)/2})$ при $t \to \infty$,
$$f_j(t) := f^{*(j)}(t) \ \sim \ \frac{a^j t^j}{j!}, \quad t \to \infty.$$
Наслідок 28 (Елементарна теорема відновлення для ітерованих стандартних випадкових блукань)**.** *Нехай $(S_k)_{k\geq 0}$ – затримане в нулі стандартне випадкове блукання з кроком ξ таким, що виконується будь-яка з умов: для деякого $r \in (1, 2]$ або (а) $\mathbb{E}\xi^r < \infty$ або (б) $\mathbb{P}\{\xi > t\} \ \sim \ t^{-r}$ при $t \to \infty$. Тоді для кожної цілочисельної функції $j = j(t)$ такої, що $j(t) = o(t^{(r-1)/2})$,*
$$U_j(t) \ = \ U^{*(j)}(t) \ \sim \ \frac{t^j}{\mu^j j!}, \quad t \to \infty,$$
де U є функцією відновлення.

Доведення. Згідно з твердженням 27 достатньо показати, що за припущень наслідку функція відновлення U задовольняє

$$U(t) = \frac{t}{\mu} + O(t^{2-r}), \quad t \to \infty. \tag{2.24}$$

У випадку (б) це випливає з теореми 2.2 статті [56]. У випадку (а) це є наслідком зображення

$$U(t) - \frac{t}{\mu} = \int_{[0,\,t]} z(t-y)\mathrm{d}U(y), \quad t \geq 0,$$

де $z(t) := \mu^{-1}\int_t^\infty \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y$. Дійсно,

$$\begin{aligned} \int_{[0,\,t]} z(t-y)\mathrm{d}U(y) &= U(t) - U(0)z(t) - \mu^{-1}\int_0^t U(t-y)\mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y \\ &\leq \ \mu^{-1}\int_0^t (U(t) - U(t-y))\mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y + \mu^{-1}U(t)\int_t^\infty \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Другий доданок правої частини є $O(t^{2-r})$, оскільки $U(t) = O(t)$ та

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ \int_t^\infty \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y \leq t^{1-r}\int_t^\infty y^{r-1}\mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y \\ &\leq \ t^{1-r}\int_0^\infty y^{r-1}\mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y = O(t^{1-r}), \end{aligned}$$

де останній інтеграл збігається з огляду на $\mathbb{E}\xi^r < \infty$. Перший доданок є $O(t^{2-r})$, оскільки з субадитивності U випливає

$$\begin{aligned} \int_0^t (U(t) - U(t-y))\mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y \ &\leq \ \int_0^t U(y)\mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y \\ &= \ O\left(\int_0^t y\mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y\right). \end{aligned}$$

Залишається зазначити, що

$$\int_0^t y\mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y \leq t^{2-r}\int_0^t y^{r-1}\mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y \leq t^{2-r}\int_0^\infty y^{r-1}\mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y.$$

□

Доведення теореми 16. Згідно з твердженням 27 достатньо перевірити, що за умов теореми 16

$$V(t) = \frac{t}{\mu} + O(t^{2-r}), \quad t \to \infty.$$

Маємо

$$
\begin{aligned}
V(t) &= \int_{[0,\,t]} U(t-y)\mathrm{d}G(y) \\
&= \int_{[0,\,t]} \left(U(t-y) - \frac{t-y}{\mu} \right) \mathrm{d}G(y) + \frac{1}{\mu} \int_{[0,\,t]} (t-y)\mathrm{d}G(y),
\end{aligned}
$$

де G є функцією розподілу випадкової величини η. З огляду на (2.24) перший доданок дорівнює $O(t^{2-r})$ при $t \to \infty$. Другий доданок можна подати так

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu} \int_{[0,\,t]} (t-y)\mathrm{d}G(y) = \frac{1}{\mu} \int_0^t G(y)\mathrm{d}y \\
= \ &\frac{t}{\mu} - \frac{1}{\mu} \int_0^t (1 - G(y))\mathrm{d}y = \frac{t}{\mu} - \mu^{-1}\mathbb{E}(\eta \wedge t),
\end{aligned}
$$

що завершує доведення. □

За додаткових припущень, накладених на різницю $f(t) - at$ у твердженні 29 встановлено асимптотику степенів згортки $f^{*(j)}(t)$ для функцій $j = j(t)$, що можуть зростати швидше за $t^{1/2}$.

Твердження 29. *Нехай $f : \mathbb{R} \mapsto [0,\,\infty)$ – неспадна неперервна справа функція, що дорівнює нулеві на від'ємній півосі. Припустимо, що функція ε визначена так*

$$
\varepsilon(t) := f(t) - a \cdot t, \quad t \geq 0, \tag{2.25}
$$

для деякого $a > 0$ та задовольняє

$$
\int_{[0,\,\infty)} y|\mathrm{d}\varepsilon(y)| < \infty. \tag{2.26}
$$

Тоді для довільної цілочисельної функції $j = j(t)$ такої, що $j(t) = o(t^{2/3})$ при $t \to \infty$,

$$
f_j(t) := f^{*(j)}(t) \ \sim \ \frac{a^j t^j}{j!} \exp\left(\frac{\gamma_0 j^2}{at}\right), \quad t \to \infty, \tag{2.27}
$$

де $\gamma_0 := \int_{[0,\,\infty)} \mathrm{d}\varepsilon(y) = \lim_{t\to\infty}(f(t) - at)$.

Доведення теореми 19. Маємо показати, що за умов теореми 19 функція V задовольняє припущення твердження 29. Таким чином, потрібно перевірити, що

$$
\int_{[0,\,\infty)} y|\mathrm{d}(V(y) - \mu^{-1}y)| < \infty.
$$

Нагадаємо, що $V = U * G$ та позначимо через Id тотожню функцію. Тоді

$$V - \mu^{-1}\mathrm{Id} = (U - \mu^{-1}\mathrm{Id}) * G - \mu^{-1}(\mathrm{Id} * (1 - G)).$$

Використовуючи інтегрування частинами,

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\,\infty)} y|\mathrm{d}(V(y) - \mu^{-1}y)| \\
= &\; -\int_{[0,\,\infty)} y\mathrm{d}\mathcal{V}_{[y,\,\infty)}(V - \mu^{-1}\mathrm{Id}) = \int_{[0,\,\infty)} \mathcal{V}_{[y,\,\infty)}(V - \mu^{-1}\mathrm{Id})\mathrm{d}y \\
\le &\; \int_{[0,\,\infty)} \mathcal{V}_{[y,\,\infty)}(U - \mu^{-1}\mathrm{Id})\mathrm{d}y + \mu^{-1}\int_{[0,\,\infty)} \mathcal{V}_{[y,\,\infty)}(\mathrm{Id} * (1 - G))\mathrm{d}y \\
= &\; \int_{[0,\,\infty)} y|\mathrm{d}(U(y) - \mu^{-1}y)| + \mu^{-1}\int_0^\infty \int_y^\infty (1 - G(z))\mathrm{d}z\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

де через $\mathcal{V}_{[y,\,\infty)}(f)$ ми позначаємо повну варіацію функції f на $[y,\,\infty)$. Перший доданок скінченний згідно з зауваженням 3.1.7(ii) на с. 121 книги [25], та другий доданок скінченний за припущенням $\mathbb{E}\eta^2 < \infty$.

Явний вигляд γ_0 знайдемо, використовуючи декомпозицію

$$\begin{aligned}
V(t) - \mu^{-1}t \;=\; & \int_{[0,\,t]} (U(t-y) - \mu^{-1}(t-y))\mathrm{d}G(y) \\
& -\mu^{-1}\int_{[0,\,t]} y\mathrm{d}G(y) - \mu^{-1}t(1 - G(t)),
\end{aligned}$$

де перший доданок збігається до $(2\mu^2)^{-1}\mathbb{E}\xi^2$ за теоремою Лебега про мажоровану збіжність, (2.12) та (2.13); другий доданок збігається до $\mu^{-1}\mathbb{E}\eta$, а третій доданок збігається до нуля при $t \to \infty$. $\square$

Нарешті, ми формулюємо загальний результат щодо поведінки f_j для довільних $j = j(t) = o(t)$. На жаль, цей результат рідко можна застосувати до лічильної функції V. Проте він має незалежний інтерес та принаймні дві переваги. З одного боку, він дає ймовірнісне пояснення досить таємничого вигляду експоненти у (2.27). З іншого боку, ним можна скористатися для передбачення поведінки V_j для $j = j(t)$, що зростають як $t^{2/3}$ або швидше.

Твердження 30. *Припустимо, що існує функція розподілу K, що дорівнює нулеві на від'ємній півосі, для якої*

$$f(t) = a \cdot t - \int_0^t (1 - K(y))\mathrm{d}y, \quad t \ge 0.$$

Нехай $(\widetilde{S}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ – *затримане в нулі стандартне випадкове блукання, що задовольняє* $\mathbb{P}\{\widetilde{S}_1 \le t\} = K(t)$ *при* $t \ge 0$. *Тоді*

$$f^{*(j)}(t) = \frac{\mathbb{E}(a\cdot t - \widetilde{S}_j)_+^j}{j!}, \quad t \ge 0.$$

Зокрема, якщо $\mathbb{E}\widetilde{S}_1^2 < \infty$ *та* $j = j(t) = o(t^{2/3})$ *при* $t \to \infty$, *то співвідношення* (2.27) *виконується з* $\gamma_0 := -\mathbb{E}\widetilde{S}_1$.

Доведення. Замінивши функцію розподілу $t \mapsto K(t)$ на $t \mapsto K(at)$, ми можемо припустити, що $a = 1$, а, отже, що $f(t) = \int_0^t K(y)\mathrm{d}y$ або $f = K * \mathrm{Id}$. Таким чином,

$$\begin{aligned} f^{*(j)}(t) &= \left((\mathrm{Id})^{*(j)} * K^{*(j)}\right)(t) \\ &= \int_{[0,\,t]} \frac{(t-y)^j}{j!}\mathrm{d}K^{*(j)}(y) = \frac{\mathbb{E}(t-\widetilde{S}_j)_+^j}{j!}, \quad t \ge 0. \end{aligned}$$

Якщо $\mathbb{E}\widetilde{S}_1^2 < \infty$, то $\mathbb{E}(t-\widetilde{S}_j)_+^j = \mathbb{E}(t-\gamma_0 j - (\widetilde{S}_j - \gamma_0 j))_+^j \sim (t-\gamma_0 j)^j$, що можна легко перевірити за допомогою $\mathbb{E}|\widetilde{S}_j - \gamma_0 j| = O(j^{1/2})$ та припущення $j(t) = o(t^{2/3})$. $\square$

Зауваження 31. *Припустимо, що* $\mathbb{E}\widetilde{S}_1^3 < \infty$ *та* $j = j(t) = o(t^{3/4})$. *Тоді*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(1 - \frac{\widetilde{S}_j}{t}\right)_+^j &= \mathbb{E}\left(\exp\left(j\log\left(1-\frac{\widetilde{S}_j}{t}\right)\right)\mathbb{1}_{\{S_j<t\}}\right) \\ &\sim \exp\left(\gamma_0 j^2/t + (\gamma_1/2 - \gamma_0^2)j^3/t^2\right), \end{aligned}$$

де $\gamma_0 := -\mathbb{E}\widetilde{S}_1$, $\gamma_1 := \mathbb{E}\widetilde{S}_1^2$.

Доведення. Маємо

$$\exp\left(j\log\left(1-\frac{\widetilde{S}_j}{t}\right)\right) = \exp\left(-\left(j\widetilde{S}_j/t + j\widetilde{S}_j^2/2t^2\right)\right)(1+o(1)),$$

де (випадковий) член $o(1)$ є рівномірно інтегровним та збігається до нуля за ймовірністю за припущення $j = j(t) = o(t^{3/4})$. Далі

$$\frac{j\widetilde{S}_j^2}{2t^2} = \frac{j\left((\widetilde{S}_j + \gamma_0 j)^2 - 2j\gamma_0\widetilde{S}_j - \gamma_0^2 j^2\right)}{2t^2} = -\gamma_0\frac{j^2\widetilde{S}_j}{t^2} - \frac{\gamma_0^2}{2}\frac{j^3}{t^2} + o(1)$$

означає, що

$$\exp\left(j\log\left(1-\frac{\widetilde{S}_j}{t}\right)\right) \sim \exp\left(\frac{\gamma_0^2}{2}\frac{j^3}{t^2}\right)\exp\left(-\widetilde{S}_j\left(j/t-\gamma_0 j^2/t^2\right)\right).$$

Покладемо $\phi(s) := \mathbb{E}e^{-s\widetilde{S}_1}$. Маємо $\phi(s) = 1+\gamma_0 s+\gamma_1 s^2/2+O(s^3)$ при $s\to 0+$, і, таким чином,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\exp\left(-\widetilde{S}_j\left(j/t-\gamma_0 j^2/t^2\right)\right) = \phi^j\left(j/t-\gamma_0 j^2/t^2\right) \\ \sim\ & \left(1+\gamma_0\left(j/t-\gamma_0 j^2/t^2\right)+\gamma_1\left(j/t-\gamma_0 j^2/t^2\right)^2/2\right)^j \\ \sim\ & \left(1+\gamma_0 j/t-\gamma_0^2 j^2/t^2+\gamma_1 j^2/2t^2\right)^j. \end{aligned}$$

Після перетворень отримаємо

$$\mathbb{E}\left(1-\frac{\widetilde{S}_j}{t}\right)_+^j \sim \exp\left(\frac{\gamma_0^2}{2}\frac{j^3}{t^2}\right)\exp\left(\gamma_0 j^2/t+(\gamma_1/2-3\gamma_0^2/2)j^3/t^2\right),$$

що завершує доведення. □

2.3.3.2 Доведення теореми 22

Для $t\geq 0$ покладемо $g(t) := \int_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}V(y)$ та $I := \mu^{-1}\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y$. Згідно з лемою 25(a) для заданого $\varepsilon>0$ існує $t_0>0$ таке, що $|g(t)-I|\leq\varepsilon$ при $t\geq t_0$. До того ж, за лемою 26 $g(t)\leq J$ для деякого $J>0$ та всіх $t\geq 0$. Маємо

$$\begin{aligned} &(f*V_j)(t) = (g*V_{j-1})(t) = \int_{[0,\,t]} g(t-y)\mathrm{d}V_{j-1}(y) \\ =\ & \int_{[0,\,t-t_0]} g(t-y)\mathrm{d}V_{j-1}(y) + \int_{(t-t_0,\,t]} g(t-y)\mathrm{d}V_{j-1}(y) \\ \leq\ & (I+\varepsilon)V_{j-1}(t) + J(V_{j-1}(t)-V_{j-1}(t-t_0)). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Доведемо, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{V_{j-1}(t)-V_{j-1}(t-t_0)}{V_{j-1}(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{V_{j(t)-1}(t)-V_{j(t)-1}(t-t_0)}{V_{j(t)-1}(t)} = 0. \tag{2.29}$$

Зауважимо, що співвідношення (2.29) не є прямим наслідком елементарної теореми відновлення, оскільки (2.29) потребує знання асимптотики $V_{j(t)-1}(t-$

t_0), тоді як елементарна теорема відновлення забезпечує асимптотику для $V_{j(t-t_0)-1}(t-t_0)$. Для доведення (2.29) запишемо, використовуючи (2.17),

$$\begin{aligned} 0 &\le V_{j(t)-1}(t) - V_{j(t)-1}(t-t_0) \\ &= \int_{[0,\,t]} (V(t-y) - V(t-t_0-y))\mathrm{d}V_{j(t)-2}(y) \\ &\le U(t_0)V_{j(t)-2}(t), \end{aligned}$$

для всіх $t \ge 0$. Таким чином, (2.29) випливає з

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V_{j(t)-2}(t)}{V_{j(t)-1}(t)} = 0,$$

що є наслідком теорем 16 та 19 при $j = j(t) - 1$ та $j = j(t) - 2$.

Поєднуючи (2.28) та (2.29), отримуємо

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{(f * V_j)(t)}{V_{j-1}(t)} \le I + \varepsilon.$$

Аналогічним чином випливає і нерівність для нижньої границі.

Доведення теореми 22 завершено.

2.4 Початкові рівні

2.4.1 Обговорення та основні результати

Твердження 32 є аналогом елементарної теореми відновлення для $V_j = \mathbb{E}N_j$.

Твердження 32. *Припустимо, що* $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$*. Тоді для фіксованого* $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V_j(t)}{t^j} = \frac{1}{j!\mu^j}. \tag{2.30}$$

Теорема 33 визначає швидкість збіжності в (2.30) за припущень $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ та $\mathbb{E}\eta < \infty$.

Теорема 33. *Припустимо, що розподіл* ξ *є негратчастим,* $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ *та* $\mathbb{E}\eta < \infty$*. Тоді для будь-якого фіксованого* $j \in \mathbb{N}$

$$V_j(t) - \frac{t^j}{j!\mu^j} \sim \frac{b_V j t^{j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}}, \quad t \to \infty, \tag{2.31}$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$ *та* $b_V := \mu^{-1}(\mathbb{E}\xi^2/(2\mu) - \mathbb{E}\eta) \in \mathbb{R}$.

Теорема 34 є аналогом ключової теореми відновлення для V_j.

Теорема 34. *Нехай* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ – *безпосередньо інтегровна за Ріманом функція на* $[0, \infty)$. *Припустимо, що розподіл* ξ *є негратчастим, та що* $\mu < \infty$. *Тоді для фіксованого* $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_{[0,\, t]} f(t-y)\mathrm{d}V_j(y) \ &\sim \ \Big(\frac{1}{\mu}\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y\Big)V_{j-1}(t) \\ &\sim \ \int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y\frac{t^{j-1}}{(j-1)!\mu^j}, \quad t \to \infty.\end{aligned}$$

Теорема 35, що є аналогом теореми Блекуелла для V_j, є окремим випадком теореми 34 при $f(y) = \mathbb{1}_{[0,\,h)}(y)$ для $y \geq 0$. Тим не менше, ми вважаємо корисним надати альтернативне доведення. Це пояснюється тим, що наведене у підрозділі 2.4.3.2 доведення добре ілюструє основні концепції теорії відновлення та може бути адаптоване до інших задач.

Теорема 35. *Припустимо, що розподіл* ξ *є негратчастим та* $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$. *Тоді для фіксованих* $j \in \mathbb{N}$ *та* $h > 0$

$$V_j(t+h) - V_j(t) \ \sim \ \frac{ht^{j-1}}{(j-1)!\mu^j}, \quad t \to \infty. \tag{2.32}$$

Зауваження 36. *У випадку, коли* $\eta = 0$ *м.н., граничне співвідношення* (2.32) *можна знайти в теоремі 1.16 монографії [55].*

Далі при фіксованому $j \in \mathbb{N}$ ми знайдемо асимптотику $\operatorname{Var} N_j(t)$ при $t \to \infty$ за припущення $\eta = \xi$ м.н., з якого випливає $T_k = S_k$ для $k \in \mathbb{N}$. Іншими словами, нижче ми розглядаємо *ітероване стандартне випадкове блукання*. Теорема 37 є посиленням леми 4.2 статті [36], в якій було отримано оцінку "O" велике для $\operatorname{Var} N_j(t)$, а не точну асимптотику. Ми не знаємо асимптотичної поведінки $\operatorname{Var} N_j(t)$ для ітерованих збурених випадкових блукань.

Теорема 37. *Припустимо, що* $\eta = \xi$ *м.н., розподіл* ξ *є негратчастим та* $\sigma^2 := \operatorname{Var}\xi \in (0, \infty)$. *Тоді для будь-якого* $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\operatorname{Var} N_j(t)}{t^{2j-1}} = \frac{\sigma^2}{(2j-1)((j-1)!)^2\mu^{2j+1}}, \tag{2.33}$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$.

Зауваження 38. *З огляду на твердження 41, наведене нижче, результат теореми 37 виглядає очікуваним, проте повне доведення вимагає певних зусиль. Звичайно, співвідношення*

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\mathrm{Var}\,N_j(t)}{t^{2j-1}} \geq \frac{\sigma^2}{(2j-1)((j-1)!)^2\mu^{2j+1}}$$

є безпосереднім наслідком (2.37) *та леми Фату.*

Теорема 39 є посиленим законом великих чисел для N_j.

Теорема 39. *Припустимо, що $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$. Тоді для фіксованого $j \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_j(t)}{t^j} = \frac{1}{\mu^j j!} \quad \text{м.н.} \tag{2.34}$$

Далі наведемо функціональну граничну теорему для $(N_1(ut), N_2(ut), \ldots)_{u\geq 0}$, належним чином нормалізованого та центрованого, при $t \to \infty$. Нагадаємо, що через B та R_ρ ми позначаємо стандартний броунівський рух та дробово-інтегровний броунівський рух (див. (1.6)) відповідно.

Теорема 40. *Припустимо, що $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}\,\xi \in (0,\infty)$ та $\mathbb{E}\eta^a < \infty$ для деякого $a > 0$. Тоді*

$$\left((j-1)!\left(\frac{N_j(ut)-V_j(ut)}{\sqrt{\mu^{-2j-1}\sigma^2 t^{2j-1}}}\right)_{u\geq 0}\right)_{j\in\mathbb{N}} \Rightarrow \big((R_{j-1}(u))_{u\geq 0}\big)_{j\in\mathbb{N}}, \quad t\to\infty \tag{2.35}$$

у J_1-топології на $D^{\mathbb{N}}$.

Якщо $\mathbb{E}\eta^{1/2} < \infty$, то центрування $V_j(ut)$ можна замінити на $(ut)^j/(j!\mu^j)$. Якщо $\mathbb{E}\eta^{1/2} = \infty$, то центрування $V_j(ut)$ можна замінити на

$$\begin{aligned} &\frac{\mathbb{E}(ut-(\eta_1+\ldots+\eta_j))^j \mathbb{1}_{\{\eta_1+\ldots+\eta_j\leq ut\}}}{j!\mu^j} \\ = &\frac{\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\ldots\int_0^{t_j}\mathbb{P}\{\eta_1+\ldots+\eta_j\leq y\}\mathrm{d}y\mathrm{d}t_j\ldots\mathrm{d}t_2}{\mu^j}, \end{aligned} \tag{2.36}$$

де $t_1 = ut$.

Тепер одержимо одновимірну центральну граничну теорему для N_j. Для цього достатньо розглянути лише одну координату в (2.35). Покладемо $u = 1$ та зауважимо, що $R_{j-1}(1)$ має той самий розподіл, що і $(2j-1)^{-1/2}B(1)$.

Наслідок 41. *За припущень теореми 40 для фіксованого* $j \in \mathbb{N}$

$$\frac{(j-1)!(2j-1)^{1/2}\mu^{j+1/2}}{\sigma t^{j-1/2}}\big(N_j(t) - V_j(t)\big) \xrightarrow{\mathrm{d}} B(1), \quad t \to \infty. \tag{2.37}$$

2.4.2 Допоміжні твердження

Лема 42 запозичена з доведення леми 7.3 роботи [3].

Лема 42. *Нехай* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *є локально обмеженою функцією. Тоді для будь-якого* $l \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}\bigg(\sum_{k\geq 0} f(t - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}}\bigg)^l \leq \bigg(\sum_{j=0}^{[t]} \sup_{y\in[j,\,j+1)} f(y)\bigg)^l \mathbb{E}(\nu(1))^l, \quad t \geq 0,$$

де $\nu(t) = \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > t\}$.

Покажемо, що ліва нерівність у (2.12) виконується для ступенів згортки $U_j = U^{*(j)}$ (див. (2.7)) у такому сенсі.

Лема 43. *Нехай* $j \in \mathbb{N}$ *та* $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty)$. *Тоді*

$$U_j(t) \geq \frac{t^j}{j!\mu^j}, \quad t \geq 0. \tag{2.38}$$

Доведення. Будемо використовувати метод математичної індукції. При $j = 1$ (2.38) зводиться до лівої нерівності у (2.12). Припускаючи, що (2.38) виконується для $j \leq k$, робимо висновок

$$\begin{aligned} &U_{k+1}(t) - \frac{t^{k+1}}{(k+1)!\mu^{k+1}} \\ &= \int_{[0,\,t]}\Big(U(t-y) - \frac{t-y}{\mu}\Big)\mathrm{d}U_k(y) + \frac{1}{\mu}\int_0^t \Big(U_k(y) - \frac{y^k}{k!\mu^k}\Big)\mathrm{d}y \geq 0, \end{aligned}$$

тобто (2.38) виконується для $j = k + 1$. □

Покладемо $\tilde{U}(t) := \sum_{r\geq 1} \mathbb{P}\{S_r \leq t\} = U(t) - 1$ для $t \geq 0$.
Лема 44 використовується при доведенні теореми 37.

Лема 44. *Припустимо, що розподіл* ξ *є негратчастим та* $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. *Тоді для фіксованого* $j \in \mathbb{N}$

$$\int_{[0,\,t]} (t-y)^j \mathrm{d}\tilde{U}(y) = \frac{t^{j+1}}{(j+1)\mu} + (b_U - 1)t^j + o(t^j), \quad t \to \infty \tag{2.39}$$

де $b_U := \mathbb{E}\xi^2/(2\mu^2)$.

Доведення. Використовуючи формулу

$$\int_{[0,\,t]}(t-y)^j\mathrm{d}\tilde{U}(y)=j\int_0^t\int_{[0,\,s]}(s-y)^{j-1}\mathrm{d}\tilde{U}(y)\mathrm{d}s,\quad j\in\mathbb{N},\ \ t\geq 0$$

та математичну індукцію, можна показати, що

$$\int_{[0,\,t]}(t-y)^j\mathrm{d}\tilde{U}(y)=j!\int_0^t\int_0^{y_j}\ldots\int_0^{y_2}\tilde{U}(y_1)\mathrm{d}y_1\ldots\mathrm{d}y_j,\quad j\in\mathbb{N},\ \ t\geq 0.$$

Тепер (2.39) випливає з останньої рівності та співвідношення $\tilde{U}(t)=\mu^{-1}t+b_U-1+o(1)$ при $t\to\infty$, що є формулою (2.31) з $j=1$ та $\eta=\xi$ м.н. $\square$

Лема 45 буде використана для доведення теореми 39.

Лема 45. *Припустимо, що* $\mu=\mathbb{E}\xi<\infty$. *Тоді*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}(N(t))^2}{t^2}=\frac{1}{\mu^2}.$$

Доведення. Співвідношення

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}(N(t))^2}{t^2}\geq\frac{1}{\mu^2}$$

випливає з $\mathbb{E}(N(t))^2\geq(V(t))^2$ та твердження 32. Протилежна нерівність випливає з нерівності

$$N(t)\leq\nu(t)=\sum_{i\geq 0}\mathbb{1}_{\{S_i\leq t\}},\quad t\geq 0\quad \text{м.н.}$$

та $\lim_{t\to\infty}t^{-2}\mathbb{E}(\nu(t))^2=\mu^{-2}$ (див. теорему 5.1 (ii) на с. 57 книги [30]). $\square$

Твердження 46 та 47 є важливими компонентами доведення теореми 40.

Твердження 46. *Припустимо, що* $\mu=\mathbb{E}\xi<\infty$, $\sigma^2=\operatorname{Var}\xi\in(0,\infty)$ *та* $\mathbb{E}\eta^a<\infty$ *для деякого* $a>0$. *Тоді*

$$\Big(\frac{N(ut)-V(ut)}{\sqrt{\mu^{-3}\sigma^2t}}\Big)_{u\geq 0}\ \Rightarrow\ (B(u))_{u\geq 0},\quad t\to\infty$$

у J_1*-топології на* D*, де* $(B(u))_{u\geq 0}$ *є стандартним броунівським рухом.*

Доведення. Як вже було зазначено в прикладі 2 підрозділу 1.3.3, згідно з теоремою 3.2 [3],

$$\Big(\frac{N(ut)-\mu^{-1}\int_0^{ut}G(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{\mu^{-3}\sigma^2 t}}\Big)_{u\geq 0} \;\Rightarrow\; (B(u))_{u\geq 0}, \quad t\to\infty$$

у J_1-топології на D, де G є функцією розподілу η. Таким чином, достатньо показати, що для всіх $T>0$

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1/2}\sup_{u\in[0,\,T]}\Big|V(ut)-\mu^{-1}\int_0^{ut}G(y)\mathrm{d}y\Big| = 0. \tag{2.40}$$

Відповідно до (2.12) для $u\in[0,T]$ та $t\geq 0$

$$0\leq V(ut)-\mu^{-1}\int_0^{ut}G(y)\mathrm{d}y = \int_{[0,\,ut]}(U(tu-y)-\mu^{-1}(tu-y))\mathrm{d}G(y)\leq c_U,$$

отже, виконується (2.40). □

Твердження 47. *Припустимо, що* $\mu=\mathbb{E}\xi<\infty$, $\sigma^2=\operatorname{Var}\xi\in(0,\infty)$ *та* $\mathbb{E}\eta^a<\infty$ *для деякого* $a>0$. *Тоді*

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[0,\,t]}(N(s)-V(s))^2 = O(t), \quad t\to\infty.$$

Доведення. У випадку $\mathbb{E}\eta<\infty$ це граничне співвідношення було доведено в лемі 4.2(b) статті [27].

З цього моменту ми будемо припускати, що $\mathbb{E}\eta^a<\infty$ для деякого $a\in(0,1)$ та $\mathbb{E}\eta=\infty$. Як і при доведенні леми 4.2(b) статті [27] ми використаємо декомпозицію

$$N(t)-V(t)=\sum_{k\geq 0}(\mathbb{1}_{\{S_k+\eta_{k+1}\leq t\}}-G(t-S_k))+\sum_{k\geq 0}G(t-S_k)-V(t),$$

де G є функцією розподілу η. Тому достатньо довести, що

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\in[0,\,t]}\Big(\sum_{k\geq 0}(\mathbb{1}_{\{S_k+\eta_{k+1}\leq s\}}-G(s-S_k))\Big)^2\Big] = O(t), \quad t\to\infty \tag{2.41}$$

та

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\in[0,\,t]}\Big(\sum_{k\geq 0}G(t-S_k)-V(t)\Big)^2\Big] = O(t), \quad t\to\infty. \tag{2.42}$$

Доведення (2.42), що можна знайти у [27], є вірним для будь-якого розподілу η, тому застосовується без змін у поточній ситуації. З іншого боку, доведення (2.41), що можна знайти у [27], суттєво використовує припущення $\mathbb{E}\eta < \infty$, яке було накладене в лемі 4.2(b) згаданої статті. Таким чином, ми маємо знайти нові міркування, що дозволять встановити (2.41) за поточних припущень.

Для $u, t \geq 0$ покладемо

$$Z_t(u) := \sum_{k\geq 0} \big(\mathbb{1}_{\{S_k+\eta_{k+1}\leq ut\}} - G(ut-S_k)\big)\mathbb{1}_{\{S_k\leq ut\}}.$$

Тому

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\in[0,\,t]}\Big(\sum_{k\geq 0}(\mathbb{1}_{\{S_k+\eta_{k+1}\leq s\}} - G(s-S_k))\Big)^2\Big] = \mathbb{E}[\sup_{u\in[0,\,1]}(Z_t(u))^2].$$

Надалі ми будемо писати $\sup_{u\in K}$, якщо супремум береться за незліченною множиною K, та $\max_{m\leq k\leq n}$, якщо максимум береться за дискретним набором $\{m, m+1, \ldots, n\}$. Почнемо зі спостереження, що для додатного цілого числа $I = I(t)$, що буде вибране пізніше у (2.49),

$$\begin{aligned}\sup_{u\in[0,\,1]}|Z_t(u)| &= \max_{0\leq k\leq 2^I-1}\sup_{u\in[0,\,2^{-I}]}\big|Z_t(k2^{-I}+u) - Z_t(k2^{-I}) + Z_t(k2^{-I})\big| \\ &\leq \max_{0\leq k\leq 2^I}|Z_t(k2^{-I})| + \max_{0\leq k\leq 2^I-1}\sup_{u\in[0,\,2^{-I}]}|Z_t(k2^{-I}+u) - Z_t(k2^{-I})|.\end{aligned}$$

Для останньої нерівності ми використали субадитивність супремуму. Далі продовжуємо як на с. 764 статті [65]. Покладемо $F_j := \{k2^{-j} : 0 \leq k \leq 2^j\}$ для $j \in \mathbb{N}_0$ та фіксованого $u \in F_I$. Тепер визначимо $u_j := \max\{w \in F_j : w \leq u\}$ для невід'ємного цілого числа $j \leq I$. Тоді $u_{j-1} = u_j$ або $u_{j-1} = u_j - 2^{-j}$. Маючи це, запишемо

$$\begin{aligned}|Z_t(u)| &= \Big|\sum_{j=1}^{I}(Z_t(u_j) - Z_t(u_{j-1})) + Z_t(u_0)\Big| \\ &\leq \sum_{j=0}^{I}\max_{1\leq k\leq 2^j}|Z_t(k2^{-j}) - Z_t((k-1)2^{-j})|.\end{aligned}$$

Об'єднавши фрагменти разом, ми приходимо до нерівності

$$\begin{aligned}\sup_{u\in[0,\,1]}|Z_t(u)| \;\le\; & \sum_{j=0}^{I}\max_{1\le k\le 2^j}|Z_t(k2^{-j})-Z_t((k-1)2^{-j})|\\ & +\max_{0\le k\le 2^I-1}\sup_{u\in[0,\,2^{-I}]}|Z_t(k2^{-I}+u)-Z_t(k2^{-I})|.\end{aligned}$$

Таким чином, (2.41) виконується, якщо ми покажемо, що

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{j=0}^{I}\max_{1\le k\le 2^j}|Z_t(k2^{-j})-Z_t((k-1)2^{-j})|\Big)^2=O(t),\quad t\to\infty \tag{2.43}$$

та

$$\mathbb{E}[\max_{0\le k\le 2^I-1}\sup_{u\in[0,\,2^{-I}]}(Z_t(k2^{-I}+u)-Z_t(k2^{-I}))^2]=O(t),\quad t\to\infty. \tag{2.44}$$

Доведемо, що для $u,v\ge 0$, $u>v$ та $t\ge 0$

$$\mathbb{E}(Z_t(u)-Z_t(v))^2\le 2\mathbb{E}\nu(1)a((u-v)t), \tag{2.45}$$

де для $t\ge 0$ $a(t):=\sum_{k=0}^{[t]+1}(1-G(k))$ та $\nu(t)=\inf\{k\in\mathbb{N}:S_k>t\}=\sum_{k\ge 0}\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}$. Дійсно,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_t(u)-Z_t(v))^2 &= \int_{(vt,\,ut]}G(ut-y)(1-G(ut-y))\mathrm{d}\nu(y)\\ +\;&\int_{[0,\,vt]}(G(ut-y)-G(vt-y))(1-G(ut-y)+G(vt-y))\mathrm{d}\nu(y)\\ \le\;&\int_{(vt,\,ut]}(1-G(ut-y))\mathrm{d}\nu(y)+\int_{[0,\,vt]}(G(ut-y)-G(vt-y))\mathrm{d}\nu(y).\end{aligned}$$

Використовуючи лему 42 з $f(y)=(1-G(y))\mathbb{1}_{[0,\,(u-v)t)}(y)$ та $f(y)=G((u-v)t+y)-G(y)$ відповідно, отримаємо

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_{(vt,\,ut]}(1-G(ut-y))\mathrm{d}\nu(y)\\ =\;&\mathbb{E}\int_{[0,\,ut]}(1-G(ut-y))\mathbb{1}_{[0,\,(u-v)t)}(ut-y)\mathrm{d}\nu(y)\\ \le\;&\mathbb{E}\nu(1)\sum_{n=0}^{[ut]}\sup_{y\in[n,\,n+1)}((1-G(y))\mathbb{1}_{[0,\,(u-v)t)}(y))\\ \le\;&\mathbb{E}\nu(1)\sum_{n=0}^{[(u-v)t]}(1-G(n))\le\mathbb{E}\nu(1)a((u-v)t)\end{aligned} \tag{2.46}$$

та

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\ \int_{[0,\,vt]}(G(ut-y)-G(vt-y))\mathrm{d}\nu(y)\\
\le\ & \mathbb{E}\nu(1)\sum_{n=0}^{[vt]}\sup_{y\in[n,\,n+1)}(G((u-v)t+y)-G(y))\\
\le\ & \mathbb{E}\nu(1)\Big(\sum_{n=0}^{[vt]}(1-G(n))-\sum_{n=0}^{[vt]}(1-G((u-v)t+n+1))\Big)\\
\le\ & \mathbb{E}\nu(1)\Big(\sum_{n=0}^{[vt]}(1-G(n))-\sum_{n=0}^{[ut]+1}(1-G(n))+\sum_{n=0}^{[(u-v)t]+1}(1-G(n))\Big)\\
\le\ & \mathbb{E}\nu(1)a((u-v)t). \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

Об'єднуючи (2.46) та (2.47), маємо (2.45).

Доведення (2.43). Припущення $\mathbb{E}\eta^a<\infty$ тягне за собою $\lim_{t\to\infty}t^a(1-G(t))=0$. Отже, для заданого $C>0$ існує $t_1>0$ такий, що $a(t)\le Ct^{1-a}$ при $t\ge t_1$. Використовуючи цей факт у поєднанні з (2.45), отримаємо

$$\mathbb{E}(Z_t(k2^{-j})-Z_t((k-1)2^{-j}))^2\le 2C\mathbb{E}\nu(1)2^{-j(1-a)}=:C_1 2^{-j(1-a)} \qquad (2.48)$$

при $2^{-j}t\ge t_1$. Нехай $I=I(t)$ позначає ціле число, що задовольняє

$$2^{-I}t\ge t_1>2^{-I-1}t. \qquad (2.49)$$

Тоді нерівності (2.48) та

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[(\max_{1\le k\le 2^j}(Z_t(k2^{-j})-Z_t((k-1)2^{-j}))^2]\\
\le\ & \sum_{k=1}^{2^j}\mathbb{E}(Z_t(k2^{-j})-Z_t((k-1)2^{-j}))^2\le C_1 2^{aj}
\end{aligned}$$

виконуються для $j\le I$. Використовуючи нерівність трикутника для L_2-

норм, запишемо

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\sum_{j=0}^{I}\max_{1\le k\le 2^j}|Z_t(k2^{-j})-Z_t((k-1)2^{-j})|\Big)^2\\
\le\ &\Big(\sum_{j=0}^{I}(\mathbb{E}[\max_{1\le k\le 2^j}(Z_t(k2^{-j})-Z_t((k-1)2^{-j}))^2]^{1/2}\Big)^2\\
\le\ & C_1\Big(\sum_{j=0}^{I}2^{aj/2}\Big)^2=\big(O\big(2^{aI/2}\big)\big)^2=O(t^a),\quad t\to\infty,
\end{aligned}
$$

де остання рівність забезпечується вибором I.

Доведення (2.44). Використаємо декомпозицію

$$
\begin{aligned}
& Z_t(k2^{-I}+u)-Z_t(k2^{-I})\\
=\ & \sum_{j\ge 0}\big(\mathbb{1}_{\{S_j+\eta_{j+1}\le(k2^{-I}+u)t\}}-G((k2^{-I}+u)t-S_j)\big)\mathbb{1}_{\{k2^{-I}t<S_j\le(k2^{-I}+u)t\}}\\
+\ & \sum_{j\ge 0}\big(\mathbb{1}_{\{k2^{-I}t<S_j+\eta_{j+1}\le(k2^{-I}+u)t\}}\\
& \quad -(G((k2^{-I}+u)t-S_j)-G(k2^{-I}t-S_j))\big)\mathbb{1}_{\{S_j\le k2^{-I}t\}}\\
=:\ & J_1(t,k,u)+J_2(t,k,u).
\end{aligned}
$$

Достатньо довести, що для $i=1,2$

$$
\mathbb{E}[\max_{0\le k\le 2^I-1}\sup_{u\in[0,\,2^{-I}]}(J_i(t,k,u))^2]=O(t),\quad t\to\infty. \tag{2.50}
$$

Доведення (2.50) для $i=1$. Оскільки $|J_1(t,k,u)|\le \nu((k2^{-I}+u)t)-\nu(k2^{-I}t)$, та функція $t\mapsto\nu(t)$ є м.н. неспадною, робимо висновок, що $\sup_{u\in[0,\,2^{-I}]}|J_1(t,k,u)|\le\nu((k+1)2^{-I}t)-\nu(k2^{-I}t)$ м.н. Отже,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\max_{0\le k\le 2^I-1}\sup_{u\in[0,\,2^{-I}]}(J_i(t,k,u))^2] &\le \mathbb{E}[\max_{0\le k\le 2^I-1}(\nu((k+1)2^{-I}t)-\nu(k2^{-I}t))^2]\\
&\le \mathbb{E}\sum_{k=0}^{2^I-1}\mathbb{E}(\nu((k+1)2^{-I}t)-\nu(k2^{-I}t))^2\\
&\le 2^I\mathbb{E}(\nu(2^{-I}t))^2\le(t/t_1)\mathbb{E}(\nu(2t_1))^2\\
&= O(t),\quad t\to\infty,
\end{aligned}
$$

де друга нерівність випливає з субадитивності за розподілом $\nu(t)$ (див., наприклад, формулу (5.7) на с. 58 книги [30]), а третя нерівність забезпечується вибором I.

Доведення (2.50) для $i = 2$. Маємо

$$\begin{aligned}
& \sup_{u\in[0,\,2^{-I}]} |J_2(t,k,u)| \\
\leq\ & \sup_{u\in[0,\,2^{-I}]} \Big(\sum_{j\geq 0} \mathbb{1}_{\{k2^{-I}t<S_j+\eta_{j+1}\leq (k2^{-I}+u)t\}} \mathbb{1}_{\{S_j\leq k2^{-I}t\}} \\
+\ & \sum_{j\geq 0} \big(G((k2^{-I}+u)t-S_j)-G(k2^{-I}t-S_j)\big)\big) \mathbb{1}_{\{S_j\leq k2^{-I}t\}} \Big) \\
\leq\ & \sum_{j\geq 0} \mathbb{1}_{\{k2^{-I}t<S_j+\eta_{j+1}\leq (k+1)2^{-I}t\}} \mathbb{1}_{\{S_j\leq k2^{-I}t\}} \\
+\ & \sum_{j\geq 0} (G(((k+1)2^{-I})t-S_j)-G(k2^{-I}t-S_j)) \mathbb{1}_{\{S_j\leq k2^{-I}t\}} \\
\leq\ & \Big| \sum_{j\geq 0} \big(\mathbb{1}_{\{k2^{-I}t<S_j+\eta_{j+1}\leq (k+1)2^{-I}t\}} \\
& \qquad -(G(((k+1)2^{-I})t-S_j)-G(k2^{-I}t-S_j))\big) \mathbb{1}_{\{S_j\leq k2^{-I}t\}} \Big| \\
+\ & 2\sum_{j\geq 0} (G(((k+1)2^{-I})t-S_j)-G(k2^{-I}t-S_j))\big) \mathbb{1}_{\{S_j\leq k2^{-I}t\}} \\
=:\ & J_{21}(t,k)+2J_{22}(t,k).
\end{aligned}$$

Використовуючи (2.47) з $u = (k+1)2^{-I}$ та $v = k2^{-I}$, отримаємо

$$\mathbb{E}(J_{22}(t,k))^2 \leq \mathbb{E}(\nu(1))^2(a(2^{-I}t))^2 \leq \mathbb{E}(\nu(1))^2(a(2t_1))^2,$$

з чого випливає

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\max_{0\leq k\leq 2^I-1} J_{22}(t,k))^2 \ &\leq\ 2^I \max_{0\leq k\leq 2^I-1} \mathbb{E}(J_{22}(t,k))^2 \\
&\leq\ (t/t_1)\mathbb{E}(\nu(1))^2(a(2t_1))^2 = O(t), \quad t\to\infty.
\end{aligned}$$

Далі, використовуючи (2.47),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(J_{21}(t,k))^2 \ &=\ \mathbb{E}\int_{[0,\,k2^{-I}t]} (G((k+1)2^{-I}t-y)-G(k2^{-I}t-y))\mathrm{d}\nu(y) \\
&\leq\ \mathbb{E}\nu(1)a(2^{-I}t).
\end{aligned}$$

Отже, за тими самими міркуваннями, що і раніше $\mathbb{E}(\max_{0\le k\le 2^I-1} J_{21}(t,k))^2 = O(t)$. Таким чином, виконується співвідношення (2.50) для $i=2$. Доведення твердження 47 завершено. $\square$

Для доведення теореми 40 також буде використана теорема 48. Для її формулювання введемо додаткові позначення. Для $j\in\mathbb{N}$ та $t\ge 0$ позначимо через $N_j^*(t)$ кількість індивідуумів у j-ому поколінні з моментами народження $\le t$ у загальному гіллястому процесі, що породжений довільним локально скінченним точковим процесом T^*, та покладемо $V_j^*(t) := \mathbb{E}N_j^*(t)$. Зокрема, $N_j^* = N_j$ для $j\in\mathbb{N}$, коли $T^*=T$. Для простоти позначень покладемо $N^* := N_1^*$ та $V^* := V_1^*$.

Нехай $W := (W(s))_{s\ge 0}$ позначає центрований гаусівський процес, який є м.н. локально неперервним за Гьольдером та задовольняє $W(0)=0$. Для кожного $u>0$ покладемо

$$R_1^{(u)}(s) := W(s),\quad R_j^{(u)}(s) := \int_{[0,\,s]} (s-y)^{u(j-1)}\mathrm{d}W(y),\quad s\ge 0,\ j\ge 2.$$

Наведений нижче результат випливає з теореми 3.2 [27] та її доведення.

Теорема 48. *Припустимо, що виконуються умови:*

(а)
$$b_0 + b_1 t^{\omega-\varepsilon_1} \le V^*(t) - ct^{\omega} \le a_0 + a_1 t^{\omega-\varepsilon_2} \tag{2.51}$$
для всіх $t\ge 0$ та деяких констант $c,\omega,a_0,a_1>0$, $0<\varepsilon_1,\varepsilon_2\le\omega$ та $b_0,b_1\in\mathbb{R}$,

(б)
$$\mathbb{E}\sup_{s\in[0,\,t]}(N^*(s)-V^*(s))^2 = O(t^{2\gamma}),\quad t\to\infty \tag{2.52}$$
для деякого $\gamma\in(0,\omega)$.

(в)
$$\Big(\frac{N^*(ut)-V^*(ut)}{bt^{\gamma}}\Big)_{u\ge 0} \ \Rightarrow\ (W(u))_{u\ge 0},\quad t\to\infty \tag{2.53}$$
у J_1-топології на D для деякого $b>0$ та γ з (2.52).

Тоді
$$\Big(\Big(\frac{N_j^*(ut)-V_j^*(ut)}{b\rho_{j-1}t^{\gamma+\omega(j-1)}}\Big)_{u\geq 0}\Big)_{j\in\mathbb{N}} \ \Rightarrow\ \big(\big(R_j^{(\omega)}(u)\big)_{u\geq 0}\big)_{j\in\mathbb{N}} \tag{2.54}$$
у J_1-топології на $D^{\mathbb{N}}$, де
$$\rho_j := \frac{(c\Gamma(\omega+1))^j}{\Gamma(\omega j+1)},\quad j\in\mathbb{N}_0,$$
а $\Gamma(\cdot)$ *позначає гамма-функцію.*

2.4.3 Доведення основних результатів

2.4.3.1 Доведення твердження 32 та теореми 33.

Доведення твердження 32. Найпростіший спосіб доведення твердження базується на застосуванні перетворення Лапласа. Дійсно, для фіксованого $j\in\mathbb{N}$
$$\int_{[0,\infty)} e^{-st}\mathrm{d}V_j(t) = \Big(\frac{\mathbb{E}e^{-s\eta}}{1-\mathbb{E}e^{-s\xi}}\Big)^j \ \sim\ \frac{1}{\mu^j s^j},\quad s\to 0+\,.$$
За тауберовою теоремою Карамата (теорема 1.7.1 монографії [12]) виконується (2.30). □

Доведення теореми 33. Будемо використовувати індукцію по j. Нехай $j=1$. Запишемо
$$V(t)-\mu^{-1}t = \int_{[0,\,t]}(U(t-y)-\mu^{-1}(t-y))\mathrm{d}G(y)-\mu^{-1}\int_0^t(1-G(y))\mathrm{d}y. \tag{2.55}$$
Очевидно, що другий доданок збігається до $-\mu^{-1}\mathbb{E}\eta$ при $t\to\infty$. Один наслідок з теореми Блекуелла стверджує, що
$$\lim_{t\to\infty}(U(t)-\mu^{-1}t) = (2\mu^2)^{-1}\mathbb{E}\xi^2 = b_U.$$
Використовуючи цей факт у комбінації з (2.15), а також теорему Лебега про мажоровану збіжність, робимо висновок, що перший доданок в (2.55) збігається до b_U при $t\to\infty$. Отже, ми показали, що (2.31) виконується для $j=1$.

Припустимо, що (2.31) виконується для $j = k$. З огляду на (2.31) з $j = 1$, для заданого $\varepsilon > 0$ існує $t_0 > 0$ таке, що

$$|V(t) - \mu^{-1}t - b_V| \le \varepsilon \tag{2.56}$$

при $t \ge t_0$. Для $t \ge t_0$ запишемо

$$\begin{aligned} V_{k+1}(t) - \frac{t^{k+1}}{(k+1)!\mu^{k+1}} &= \int_{[0,\, t-t_0]} (V(t-y) - \mu^{-1}(t-y))\mathrm{d}V_k(y) \\ &+ \int_{(t-t_0,\, t]} (V(t-y) - \mu^{-1}(t-y))\mathrm{d}V_k(y) \\ &+ \mu^{-1} \int_0^t \Big(V_k(y) - \frac{y^k}{k!\mu^k}\Big)\mathrm{d}y \\ &= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t). \end{aligned}$$

Згідно з (2.56)

$$(b_V - \varepsilon)V_k(t - t_0) \le I_1(t) \le (b_V + \varepsilon)V_k(t - t_0),$$

звідки

$$\frac{b_V - \varepsilon}{k!\mu^k} \le \liminf_{t\to\infty} \frac{I_1(t)}{t^k} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{I_1(t)}{t^k} \le \frac{b_V + \varepsilon}{k!\mu^k}$$

за твердженням 32.

Використовуючи (2.15), отримаємо $|I_2(t)| \le c_V(V_k(t) - V_k(t - t_0))$ для всіх $t \ge t_0$. Тому $\lim_{t\to\infty} t^{-k} I_2(t) = 0$ за теоремою 35. Об'єднавши цей факт з останньою центрованою формулою та спрямовуючи $\varepsilon \to 0+$, робимо висновок, що

$$I_1(t) + I_2(t) \sim \frac{b_V t^k}{k!\mu^k}, \quad t \to \infty.$$

Нарешті, за припущенням індукції та правилом Лопіталя

$$I_3(t) \sim \frac{b_V t^k}{(k-1)!\mu^k}, \quad t \to \infty.$$

Поєднуючи фрагменти разом, приходимо до (2.31) з $j = k + 1$. □

2.4.3.2 Доведення теорем 34 та 35

Доведення теореми 34. Застосовне доведення теореми 22 з очевидними спрощеннями. Зауважимо, що для початкових поколінь (j є фіксованим) асимптотичне співвідношення (2.30) виконується за єдиного припущення $\mu < \infty$.

Це не так для проміжних поколінь ($j = j(t) \to \infty$, $j(t) = o(t)$ при $t \to \infty$), що пояснює появу додаткового припущення $\mathbb{E}\xi^r < \infty$ для деякого $r \in (1, 2]$ у теоремі 22. $\square$

Доведення теореми 35. При $j = 1$ співвідношення (2.32) виконується за лемою 24. Запишемо

$$\begin{aligned} V_j(t+h) - V_j(t) &= \int_{[0,\,t]} (V(t+h-y) - V(t-y))\mathrm{d}V_{j-1} \\ &+ \int_{(t,\,t+h]} V(t+h-y)\mathrm{d}V_{j-1}(y) \\ &=: A_j(t) + B_j(t). \end{aligned}$$

Спочатку покажемо, що внесок $B_j(t)$ є несуттєвим. Дійсно, використовуючи монотонність V та $\lim_{t\to\infty}(V_j(t+h)/V_j(t)) = 1$ (див. твердження 32), отримаємо

$$B_j(t) \le V(h)(V_{j-1}(t+h) - V_{j-1}(t)) = o(V_{j-1}(t)), \quad t \to \infty.$$

З огляду на (2.32) з $j = 1$ для заданого $\varepsilon > 0$ існує $t_0 > 0$ таке, що

$$|V(t+h) - V(t) - \mu^{-1}h| \le \varepsilon$$

при $t \ge t_0$. Таким чином, для $t \ge t_0$ отримаємо

$$\begin{aligned} A_j(t) &= \int_{[0,\,t-t_0]} (V(t+h-y) - V(t-y))\mathrm{d}V_{j-1}(y) \\ &+ \int_{(t-t_0,\,t]} V(t+h-y)\mathrm{d}V_{j-1}(y) \\ &=: A_{j,1}(t) + A_{j,2}(t). \end{aligned}$$

Використовуючи ті самі міркування, що і для $B_j(t)$, робимо висновок, що $A_{j,2}(t) = o(V_{j-1}(t))$. Далі, $A_{j,1}(t) \le (\mu^{-1}h + \varepsilon)V_{j-1}(t-t_0)$, звідки

$$\limsup_{t\to\infty}(A_j(t)/V_{j-1}(t)) \le \mu^{-1}h.$$

Аналогічним чином можна довести протилежну нерівність для нижньої границі. Звернення до твердження 32 завершує доведення теореми 35. $\square$

2.4.3.3 Доведення теореми 37.

Для $j \in \mathbb{N}$ та $t \geq 0$ покладемо $D_j(t) := \operatorname{Var} N_j(t)$. Нагадаємо, що як наслідок припущення $\eta = \xi$ м.н., $T_r = S_r$ для $r \in \mathbb{N}$ та $V(t) = \tilde{U}(t) = \sum_{r\geq 1} \mathbb{P}\{S_r \leq t\}$ для $t \geq 0$. Однак, ми вважаємо, що краще писати V_j, ніж $\tilde{U}_j$.

Нехай $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$. За допомогою (2.6) отримаємо

$$\begin{aligned} N_j(t) - V_j(t) &= \sum_{r\geq 1} \Big(N_{j-1}^{(r)}(t - S_r) - V_{j-1}(t - S_r)\Big) \mathbb{1}_{\{S_r \leq t\}} \\ &+ \Big(\sum_{r\geq 1} V_{j-1}(t - S_r) \mathbb{1}_{\{S_r \leq t\}} - V_j(t)\Big) \\ &=: N_{j,1}(t) + N_{j,2}(t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

звідки

$$D_j(t) = \mathbb{E}(N_{j,1}(t))^2 + \mathbb{E}(N_{j,2}(t))^2. \tag{2.57}$$

Спочатку покажемо, що виконуються таке асимптотичне співвідношення для $j \geq 2$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_{j,2}(t))^2 &= \operatorname{Var}\Big(\sum_{r\geq 1} V_{j-1}(t - S_r) \mathbb{1}_{\{S_r \leq t\}}\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(\sum_{r\geq 1} V_{j-1}(t - S_r) \mathbb{1}_{\{S_r \leq t\}}\Big)^2 - V_j^2(t) \\ &\sim \frac{\sigma^2}{(2j-1)((j-1)!)^2 \mu^{2j+1}} t^{2j-1}, \quad t \to \infty. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Доведення (2.58). Будемо використовувати рівність (див. формулу (4.9) статті [36])

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big(\sum_{r\geq 1} V_{j-1}(t - S_r) \mathbb{1}_{\{S_r \leq t\}}\Big)^2 \\ &= 2\int_{[0,t]} V_{j-1}(t-y) V_j(t-y) \mathrm{d}\tilde{U}(y) + \int_{[0,t]} V_{j-1}^2(t-y) \mathrm{d}\tilde{U}(y). \end{aligned} \tag{2.59}$$

З огляду на (2.31)

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\,t]} V_{j-1}(t-y)V_j(t-y)\mathrm{d}\tilde{U}(y)\\
=\;&\int_{[0,\,t]}\Big(\frac{(t-y)^{j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}}+\frac{b_V(j-1)(t-y)^{j-2}}{(j-2)!\mu^{j-2}}+o((t-y)^{j-2})\Big)\\
&\qquad\times\Big(\frac{(t-y)^j}{j!\mu^j}+\frac{b_V j(t-y)^{j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}}+o((t-y)^{j-1})\Big)\mathrm{d}\tilde{U}(y)\\
=\;&\frac{1}{(j-1)!j!\mu^{2j-1}}\int_{[0,\,t]}(t-y)^{2j-1}\mathrm{d}\tilde{U}(y)\\
+\;&\frac{b_V(2j^2-2j+1)}{(j-1)!j!\mu^{2j-2}}\int_{[0,\,t]}(t-y)^{2j-2}\mathrm{d}\tilde{U}(y)\\
+\;&\int_{[0,\,t]}o((t-y)^{2j-2})\mathrm{d}\tilde{U}(y),
\end{aligned}$$

де $b_V=\mathbb{E}\xi^2/(2\mu^2)-1$, оскільки за поточним припущенням $\mathbb{E}\eta=\mu$. Відповідно до (2.39)

$$\int_{[0,\,t]}(t-y)^{2j-1}\mathrm{d}\tilde{U}(y)=\frac{t^{2j}}{2j\mu}+b_V t^{2j-1}+o(t^{2j-1}),\quad t\to\infty;$$

$$\int_{[0,\,t]}(t-y)^{2j-2}\mathrm{d}\tilde{U}(y)=\frac{t^{2j-1}}{(2j-1)\mu}+o(t^{2j-1}),\quad t\to\infty.$$

Крім того, можна перевірити, що

$$\int_{[0,\,t]}o((t-y)^{2j-2})\mathrm{d}\tilde{U}(y)=o(t^{2j-1}),\quad t\to\infty.$$

Згідно з твердженням 32

$$V_{j-1}^2(t)\;\sim\;\frac{t^{2j-2}}{((j-1)!)^2\mu^{2j-2}}\quad\text{та}\quad V(t)=\tilde{U}(t)\;\sim\;\frac{t}{\mu},\quad t\to\infty.$$

Як і при доведенні твердження 32, ми знову звертаємось до тауберової теореми Карамата (теорема 1.7.1 книги [12]) для отримання

$$\int_{[0,\,t]}V_{j-1}^2(t-y)\mathrm{d}\tilde{U}(y)\;\sim\;\frac{t^{2j-1}}{(2j-1)((j-1)!)^2\mu^{2j-1}},\quad t\to\infty.$$

Використовуючи вищезазначене асимптотичне співвідношення та (2.59), робимо висновок

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\bigg(\sum_{r\geq 1} V_{j-1}(t-S_r)\mathbb{1}_{\{S_r\leq t\}}\bigg)^2 &= \frac{t^{2j}}{(j!)^2\mu^{2j}}+\frac{2b_V t^{2j-1}}{(j-1)!j!\mu^{2j-1}}\\ &+ \frac{2b_V(2j^2-2j+1)t^{2j-1}}{(2j-1)(j-1)!j!\mu^{2j-1}}\\ &+ \frac{t^{2j-1}}{(2j-1)((j-1)!)^2\mu^{2j-1}}\\ &+ o(t^{2j-1}),\quad t\to\infty.\end{aligned}$$

Далі, використовуючи (2.31), отримуємо при $t\to\infty$

$$\begin{aligned}V_j^2(t) &= \frac{t^{2j}}{(j!)^2\mu^{2j}}+\frac{2t^j}{j!\mu^j}\bigg(V_j(t)-\frac{t^j}{j!\mu^j}\bigg)+\bigg(V_j(t)-\frac{t^j}{j!\mu^j}\bigg)^2\\ &= \frac{t^{2j}}{(j!)^2\mu^{2j}}+\frac{2b_V t^{2j-1}}{((j-1)!)^2\mu^{2j-1}}+o(t^{2j-1}).\end{aligned}$$

Два останні асимптотичні співвідношення тягнуть за собою (2.58).

Маючи (2.58), ми готові перейти до доведення (2.33). Для цього будемо використовувати математичну індукцію. Якщо $j=1$, то (2.33) набуває вигляду $D_1(t)=\mathbb{E}(N(t)-\tilde{U}(t))^2\sim\sigma^2\mu^{-3}t$ при $t\to\infty$. Це можна перевірити, використовуючи доведення (2.58). Також це співвідношення випливає з теореми 3.8.4 книги [30], де не робиться припущення щодо негратчастості розподілу ξ. Припустимо, що (2.33) виконується для $j=k-1\geq 1$, тобто

$$D_{k-1}(t)\ \sim\ \frac{\sigma^2}{(2k-3)((k-2)!)^2\mu^{2k-1}}t^{2k-3},\quad t\to\infty.$$

Використовуючи це та рівність

$$\mathbb{E}(N_{k,1}(t))^2=\mathbb{E}\sum_{r\geq 1}D_{k-1}(t-S_r)\mathbb{1}_{\{S_r\leq t\}}=\int_{[0,\,t]}D_{k-1}(t-y)\mathrm{d}\tilde{U}(y)$$

у поєднанні з тауберовою теоремою Карамата (теорема 1.7.1 [12]) або, ще простіше, обчислюючи власноруч, отримуємо, що

$$\mathbb{E}(N_{k,\,1}(t))^2\ \sim\ \frac{\sigma^2}{(2k-3)(2k-2)((k-2)!)^2\mu^{2k}}t^{2k-2},\quad t\to\infty.$$

Завдяки (2.57) та (2.58) робимо висновок, що (2.33) виконується для $j=k$. Доведення теореми 37 завершено.

2.4.3.4 Доведення теореми 39.

Скористаємося методом математичної індукції. Якщо $j = 1$, то (2.34) має місце за формулою (24) статті [3]. Припускаючи, що твердження виконується для $j = k$, ми покажемо, що (2.34) також виконується для $j = k + 1$. Для цього запишемо з використанням (2.6) для $j = k + 1$

$$\begin{aligned} N_{k+1}(t) &= \sum_{r\geq 1}\big(N^{(r)}_{1,\,k+1}(t-T^{(k)}_r) - V(t-T^{(k)}_r)\big)\mathbb{1}_{\{T^{(k)}_r\leq t\}} \\ &+ \int_{[0,\,t]} V(t-y)\mathrm{d}N_k(y), \quad t\geq 0. \end{aligned}$$

Згідно з твердженням 32 для заданого $\varepsilon > 0$ існує $t_0 > 0$ таке, що $|t^{-1}V(t) - \mu^{-1}| \leq \varepsilon$ для $t \geq t_0$. Маємо

$$\int_{(t-t_0,\,t]} V(t-y)\mathrm{d}N_k(y) \leq V(t_0)(N_k(t)-N_k(t-t_0)) = o(t^k) \quad \text{м.н. при} \quad t\to\infty$$

за припущенням індукції. Аналогічно

$$\int_{(t-t_0,\,t]} (t-y)\mathrm{d}N_k(y) = o(t^k) \quad \text{м.н. при} \quad t\to\infty.$$

Далі,

$$\begin{aligned} &\int_{[0,\,t-t_0]} V(t-y)\mathrm{d}N_k(y) \geq (\mu^{-1}-\varepsilon)\int_{[0,\,t-t_0]}(t-y)\mathrm{d}N_k(y) \\ \geq\; &(\mu^{-1}-\varepsilon)\Big(\int_{[0,\,t]}(t-y)\mathrm{d}N_k(y) - \int_{(t-t_0,\,t]}(t-y)\mathrm{d}N_k(y)\Big). \end{aligned}$$

Використовуючи $\int_{[0,\,t]}(t-y)\mathrm{d}N_k(y) = \int_0^t N_k(y)\mathrm{d}y$ та застосовуючи правило Лопіталя у комбінації з припущенням індукції, робимо висновок

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_{[0,\,t]}(t-y)\mathrm{d}N_k(y)}{t^{k+1}} = \frac{1}{\mu^k(k+1)!} \quad \text{м.н.}$$

Поєднуючи фрагменти разом, приходимо до

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\int_{[0,\,t]}V(t-y)\mathrm{d}N_k(y)}{t^{k+1}} \geq \frac{1}{\mu^{k+1}(k+1)!} \quad \text{м.н.}$$

Аналогічним чином можна отримати протилежну нерівність для верхньої границі, звідки

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_{[0,\,t]}V(t-y)\mathrm{d}N_k(y)}{t^{k+1}} = \frac{1}{\mu^{k+1}(k+1)!} \quad \text{м.н.} \tag{2.60}$$

Далі,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\sum_{r\geq 1}\big(N^{(r)}_{1,\,k+1}(t-T^{(k)}_r)-V(t-T^{(k)}_r)\big)\mathbb{1}_{\{T^{(k)}_r\leq t\}}\Big)^2\\
=&\sum_{r\geq 1}\mathbb{E}\big(N^{(r)}_{1,\,k+1}(t-T^{(k)}_r)-V(t-T^{(k)}_r)\big)^2\mathbb{1}_{\{T^{(k)}_r\leq t\}}\\
\leq&\int_{[0,\,t]}\mathbb{E}(N(t-y))^2\mathrm{d}V_k(y)\leq\mathbb{E}(N(t))^2V_k(t)=O(t^{k+2}),\quad t\to\infty.
\end{aligned}$$

Ми скористалися монотонністю $t\mapsto\mathbb{E}(N(t))^2$ для останньої нерівності та лемами 32 і 45 для останньої рівності. Використовуючи нерівність Маркова та лему Бореля-Кантеллі, робимо висновок

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{r\geq 1}\big(N^{(r)}_{1,\,k+1}(n^2-T^{(k)}_r)-V(n^2-T^{(k)}_r)\big)\mathbb{1}_{\{T^{(k)}_r\leq n^2\}}}{n^{2(k+1)}}=0\quad\text{м.н.}$$

(n прямує до ∞ по цілих числах). Це разом з (2.60) дає

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_{k+1}(n^2)}{n^{2(k+1)}}=\frac{1}{\mu^{k+1}(k+1)!}\quad\text{м.н.}$$

Отже, залишається показати, що ми можемо перейти до границі по дійсних числах. Для цього зауважимо, що для кожного $t\geq 0$ існує $n\in\mathbb{N}$ таке, що $t\in[(n-1)^2,n^2)$, та, використовуючи м.н. монотонність, отримаємо

$$\frac{(n-1)^{2(k+1)}}{n^{2(k+1)}}\frac{N_{k+1}((n-1)^2)}{(n-1)^{2(k+1)}}\leq\frac{N_{k+1}(t)}{t^{k+1}}\leq\frac{N_{k+1}(n^2)}{n^{2(k+1)}}\frac{n^{2(k+1)}}{(n-1)^{2(k+1)}}\quad\text{м.н.}$$

Спрямовуючи t до ∞, ми приходимо до

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_{k+1}(t)}{t^{k+1}}=\frac{1}{\mu^{k+1}(k+1)!}\quad\text{м.н.},$$

тим самим завершуючи крок індукції. Доведення теореми 39 завершено.

2.4.3.5 Доведення теореми 40.

У випадку $\mathbb{E}\eta<\infty$ цей результат випливає з теореми 3.2 та леми 4.2 статті [27]. Отже, ми розглянемо випадок $\mathbb{E}\eta^a<\infty$ для $a\in(0,1)$ та $\mathbb{E}\eta=\infty$.

Застосуємо теорему 48 з $N^*_j=N_j$, $j\in\mathbb{N}$. Відповідно до (2.16)

$$-c_1-c_2t^{1-a}\leq V(t)-\mu^{-1}t\leq c_U,\quad t\geq 0$$

для деяких додатних c_1 і c_2 та $c_U = \mu^{-2}\mathbb{E}\xi^2$, тобто (2.51) виконується з $c = \mu^{-1}$, $\omega = 1$, $\varepsilon_1 = a$, $\varepsilon_2 = 1$, $a_0 + a_1 = c_U$, $b_0 = -c_1$, $b_1 = -c_2$. Згідно з твердженням 47

$$\mathbb{E} \sup_{s\in[0,\,t]} (N(s) - V(s))^2 = O(t), \quad t \to \infty,$$

тобто умова (2.52) виконується з $\gamma = 1/2$. За твердженням 46

$$\Big(\frac{N(ut) - V(ut)}{\sqrt{\mu^{-3}\sigma^2 t}}\Big)_{u\geq 0} \ \Rightarrow \ (B(u))_{u\geq 0}, \quad t \to \infty$$

у J_1-топології на D. Це означає, що умова (2.53) виконується з $\gamma = 1/2$, $b = \mu^{-3/2}\sigma$ та $W = B$ (броунівський рух). Нагадаємо, що процес B є локально неперервним за Гьольдером з показником β для будь-якого $\beta \in (0, 1/2)$. Отже, за теоремою 48 співвідношення (2.35) є окремим випадком (2.54) з $\gamma = 1/2$, $\omega = 1$, $R_j^{(1)} = R_{j-1}$, $j \in \mathbb{N}$ та $\rho_j = 1/(\mu^j j!)$, $j \in \mathbb{N}_0$.

Тепер доведемо, що центрування $V_j(ut)$ можна замінити на вираз у (2.36). Спочатку зауважимо, що рівність в (2.36) за допомогою математичної індукції по k випливає з зображення

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(t-\Theta_i)^k \mathbb{1}_{\{\Theta_i\leq t\}} &= \int_{[0,\,t]} (t-y)^k \mathrm{d}\mathbb{P}\{\Theta_i \leq y\} \\ &= k\int_0^t \int_{[0,\,s]} (s-y)^{k-1} \mathrm{d}\mathbb{P}\{\Theta_i \leq y\}\mathrm{d}s, \quad i, k \in \mathbb{N}, \ \ t \geq 0,\end{aligned}$$

де $\Theta_i := \eta_1 + \ldots + \eta_i$, а перший крок індукції випливає з рівності

$$\int_{[0,\,t]} (t-y)\mathrm{d}\mathbb{P}\{\Theta_i \leq y\} = \int_0^t \mathbb{P}\{\Theta_i \leq s\}\mathrm{d}s, \quad i \in \mathbb{N}, \ t \geq 0.$$

Далі ми покажемо, що за умови $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ та незалежно від розподілу η для всіх $T > 0$

$$\lim_{t\to\infty} t^{-(j-1/2)} \sup_{u\in[0,\,T]} |V_j(ut) - (j!\mu^j)^{-1}\mathbb{E}(ut - \Theta_j)^j \mathbb{1}_{\{\Theta_j\leq ut\}}| = 0. \qquad (2.61)$$

Для цього нагадаємо, що згідно з формулою (4.4) статті [14] (з $\eta = 0$),

$$U_j(t) - \frac{t^j}{j!\mu^j} \leq \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \frac{c_U^{j-i} t^i}{i!\mu^i}, \quad t \geq 0,$$

де $c_U = \mu^{-2}\mathbb{E}\xi^2$. Використовуючи це та лему 43, робимо висновок, що для $u \in [0, T]$ та $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\Big| V_j(ut) - \frac{\mathbb{E}(ut-\Theta_j)^j \mathbb{1}_{\{\Theta_j \leq ut\}}}{j!\mu^j} \Big| \\
&= \int_{[0,\,ut]} \Big(U_j(ut-y) - \frac{(ut-y)^j}{j!\mu^j} \Big) \mathrm{d}\mathbb{P}\{\Theta_j \leq y\} \\
&\leq \int_{[0,\,ut]} \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \frac{c_U^{j-i}(ut-y)^i}{i!\mu^i} \mathrm{d}\mathbb{P}\{\Theta_j \leq y\} \\
&\leq \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \frac{c_U^{j-i}(Tt)^i}{i!\mu^i} = o(t^{j-1/2}), \quad t \to \infty,
\end{aligned}$$

що доводить (2.61).

Залишається показати, що за умови $\mathbb{E}\eta^{1/2} < \infty$ центрування $V_j(ut)$ можна замінити на $(ut)^j/(j!\mu^j)$. Достатньо перевірити, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sup_{u\in[0,T]} \big((ut)^j - j! \int_0^{ut} \int_0^{t_2} \ldots \int_0^{t_j} \mathbb{P}\{\Theta_j \leq y\} \mathrm{d}y \mathrm{d}t_j \ldots \mathrm{d}t_2 \big)}{t^{j-1/2}} = 0. \quad (2.62)$$

Чисельник під знаком границі у лівій частині формули (2.62) дорівнює

$$\begin{aligned}
&\sup_{u\in[0,\,T]} \int_0^{tu} \int_0^{t_2} \ldots \int_0^{t_j} \mathbb{P}\{\Theta_j > y\} \mathrm{d}y \mathrm{d}t_j \ldots \mathrm{d}t_2 \\
&= \int_0^{tT} \int_0^{t_2} \ldots \int_0^{t_j} \mathbb{P}\{\Theta_j > y\} \mathrm{d}y \mathrm{d}t_j \ldots \mathrm{d}t_2.
\end{aligned}$$

Отже, залишається показати, що

$$\lim_{t\to\infty} t^{-(j-1/2)} \int_0^{t} \int_0^{t_2} \ldots \int_0^{t_j} \mathbb{P}\{\Theta_j > y\} \mathrm{d}y \mathrm{d}t_j \ldots \mathrm{d}t_2 = 0.$$

Припустимо, що $\mathbb{E}\eta < \infty$, тоді $\mathbb{E}\Theta_j < \infty$ та $\lim_{t\to\infty} \int_0^t \mathbb{P}\{\Theta_j > y\} \mathrm{d}y = \mathbb{E}R_j < \infty$. Використовуючи правило Лопіталя $(j-1)$ разів, отримуємо

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \int_0^{t_2} \ldots \int_0^{t_j} \mathbb{P}\{\Theta_j > y\} \mathrm{d}y \mathrm{d}t_j \ldots \mathrm{d}t_2}{t^{j-1/2}} \\
&= \frac{2^{j-1}}{1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2j-1)} \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \mathbb{P}\{\Theta_j > y\} \mathrm{d}y}{t^{1/2}} = 0.
\end{aligned}$$

Припустимо, що $\mathbb{E}\eta = \infty$. Оскільки нерівність $\mathbb{E}\eta^{1/2} < \infty$ еквівалентна такій $\mathbb{E}\Theta_j^{1/2} < \infty$, то $\lim_{t\to\infty} t^{1/2}\mathbb{P}\{\Theta_j > t\} = 0$. Маючи це та використовуючи правило Лопіталя j разів, отримуємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t\int_0^{t_2}\ldots\int_0^{t_j}\mathbb{P}\{\Theta_j>y\}\mathrm{d}y\mathrm{d}t_j\ldots\mathrm{d}t_2}{t^{j-1/2}}$$
$$=\frac{2^j}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2j-1)}\lim_{t\to\infty}t^{1/2}\mathbb{P}\{\Theta_j>t\}=0.$$

Доведення теореми 40 завершено.

2.5 Висновки до розділу 2

У цьому розділі дисертаційної роботи досліджено ітеровані збурені випадкові блукання на деревах загальних гіллястих процесів. Зокрема, отримано такі результати:

- Знайдено умови скінченності моментів часу першого проходження рівня збуреним випадковим блуканням.
- Доведено аналоги результатів теорії відновлення (елементарної теореми відновлення, ключової теореми відновлення, теореми Блекуелла) для початкових та проміжних рівнів.
- Доведені теорема про швидкість збіжності в аналогу елементарної теореми відновлення, посилений закон великих чисел, функціональна гранична теорема та знайдена асимптотика дисперсії лічильного процесу для початкових рівнів.
- Проведено моделювання, що демонструє реалізації об’єктів, що досліджуються.

ВИСНОВКИ

Дана дисертаційна робота є внеском до теорії загальних процесів дробового ефекту та до розвитку теорії відновлення для ітерованих збурених випадкових блукань. Досліджено граничну поведінку процесів дробового ефекту без жодних припущень щодо вхідної послідовності, окрім локальної скінченності лічильного процесу. Доведено аналоги відомих результатів теорії відновлення для початкових та проміжних рівнів ітерованих збурених випадкових блукань на деревах загальних гіллястих процесів. Серед отриманих в дисертаційній роботі результатів слід виділити такі.

(1) Доведено функціональні граничні теореми для загальних процесів дробового ефекту за природних припущень. Наведено приклади використання отриманих теорем.

(2) Досліджено неперервність за Гьольдером процесів типу Рімана-Ліувілля.

(3) Доведено теорему про скінченність моментів часу першого проходження рівня збуреним випадковим блуканням.

(4) Доведено елементарну теорему відновлення, ключову теорему відновлення, теорему Блекуелла для проміжних рівнів ітерованих збурених випадкових блукань.

(5) Для початкових рівнів, окрім згаданих у попередньому пункті результатів, також були доведені теорема про швидкість збіжності в аналогу елементарної теореми відновлення, посилений закон великих чисел,

функціональна гранична теорема та знайдено асимптотику дисперсії лічильного процесу.

(6) Для візуалізації отриманих результатів проведене комп'ютерне моделювання. Розроблені програмні засоби можуть використовуватися у подальших дослідженнях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Adler, R.J.: An introduction to continuity, extrema, and related topics for general Gaussian processes. IMS (1990)

[2] Alsmeyer, G., Buraczewski, D., Iksanov, A.: Null recurrence and transience of random difference equations in the contractive case. Journal of Applied Probability **54**(4), 1089–1110 (2017)

[3] Alsmeyer, G., Iksanov, A., Marynych, A.: Functional limit theorems for the number of occupied boxes in the Bernoulli sieve. Stochastic Processes and their Applications **127**(3), 995–1017 (2017)

[4] Alsmeyer, G., Iksanov, A., Meiners, M.: Power and exponential moments of the number of visits and related quantities for perturbed random walks. Journal of Theoretical Probability **28**(1), 1–40 (2015)

[5] Asmussen, S.: Applied probability and queues. Springer Science & Business Media (2008)

[6] Beran, J., Feng, Y., Ghosh, S., Kulik, R.: Long-memory processes: probabilistic properties and statistical methods. Springer-Verlag (2013)

[7] Bertoin, J.: Subordinators: examples and applications. In: Lectures on probability theory and statistics, pp. 1–91. Springer (1999)

[8] Biggins, J.D.: Growth rates in the branching random walk. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete **48**(1), 17–34 (1979)

[9] Biggins, J.D.: Uniform convergence of martingales in the branching random walk. Annals of Probability **20**(1), 137–151 (1992)

[10] Billingsley, P.: Convergence of probability measures: 2nd edition. John Wiley & Sons (1999)

[11] Bingham, N.: Maxima of sums of random variables and suprema of stable processes. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **26**(4), 273–296 (1973)

[12] Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L., Teugels, J.L.: Regular variation. Cambridge university press (1989)

[13] Bohun, V., Iksanov, A., Marynych, A., Rashytov, B.: Renewal theory for iterated perturbed random walks on a general branching process tree: intermediate generations. Journal of Applied Probability **59**(2) (2022). Прийнята до друку, препринт доступний за адресою arXiv:2012.03341.

[14] Buraczewski, D., Dovgay, B., Iksanov, A.: On intermediate levels of nested occupancy scheme in random environment generated by stick-breaking I. Electronic Journal of Probability **25**(123), 1–24 (2020)

[15] Butkovsky, O.A.: Limit behavior of a critical branching process with immigration. Mathematical Notes **92**(5), 612–618 (2012)

[16] Carlsson, H., Nerman, O.: An alternative proof of Lorden's renewal inequality. Advances in Applied Probability **18**(4), 1015–1016 (1986)

[17] Chernavskaya, E.A.: Limit theorems for an infinite-server queuing system. Mathematical Notes **98**(3), 653–666 (2015)

[18] Chigansky, P., Kleptsyna, M., Marushkevych, D.: On the eigenproblem for Gaussian bridges. Bernoulli **26**(3), 1706–1726 (2020)

[19] Cinlar, E.: Introduction to stochastic processes. Courier Corporation (2013)

[20] Daley, D.: Asymptotic properties of stationary point processes with generalized clusters. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete **21**(1), 65–76 (1972)

[21] Daw, A., Pender, J.: Queues driven by Hawkes processes. Stochastic Systems **8**(3), 192–229 (2018)

[22] Dong, C., Iksanov, A.: Weak convergence of random processes with immigration at random times. Journal of Applied Probability **57**(1), 250–265 (2020)

[23] Duchamps, J.J., Pitman, J., Tang, W.: Renewal sequences and record chains related to multiple zeta sums. Transactions of the American Mathematical Society **371**(8), 5731–5755 (2019)

[24] Durrett, R., Liggett, T.: Fixed points of the smoothing transformation. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **64**(3), 275–301 (1983)

[25] Frenk, J.B.G.: On Banach algebras, renewal measures and regenerative processes. CWI Tracts (1987)

[26] Gnedin, A., Hansen, B., Pitman, J.: Notes on the occupancy problem with infinitely many boxes: general asymptotics and power laws. Probability surveys **4**, 146–171 (2007)

[27] Gnedin, A., Iksanov, A.: On nested infinite occupancy scheme in random environment. Probability Theory and Related Fields **177**(3), 855–890 (2020)

[28] Gnedin, A., Iksanov, A., Marynych, A.: A generalization of the Erdős–Turán law for the order of random permutation. Combinatorics, Probability and Computing **21**(5), 715–733 (2012)

[29] Gnedin, A., Iksanov, A., Marynych, A., Möhle, M.: The collision spectrum of Λ-coalescents. Annals of Applied Probability **28**(6), 3857–3883 (2018)

[30] Gut, A.: Stopped random walks. Springer (2009)

[31] Holmgren, C., Janson, S.: Fringe trees, Crump–Mode–Jagers branching processes and m-ary search trees. Probability Surveys **14**, 53–154 (2017)

[32] Iglehart, D., Whitt, W.: The equivalence of functional central limit theorems for counting processes and associated partial sums. Annals of Mathematical Statistics **42**(4), 1372–1378 (1971)

[33] Iksanov, A.: Functional limit theorems for renewal shot noise processes with increasing response functions. Stochastic Processes and their Applications **123**(6), 1987–2010 (2013)

[34] Iksanov, A.: Renewal theory for perturbed random walks and similar processes. Springer (2016)

[35] Iksanov, A., Jedidi, W., Bouzeffour, F.: Functional limit theorems for the number of busy servers in a $G/G/\infty$ queue. Journal of Applied Probability **55**(1), 15–29 (2018)

[36] Iksanov, A., Kabluchko, Z.: A functional limit theorem for the profile of random recursive trees. Electronic Communications in Probability **23**, 1–13 (2018)

[37] Iksanov, A., Kabluchko, Z., Marynych, A.: Weak convergence of renewal shot noise processes in the case of slowly varying normalization. Statistics & Probability Letters **114**, 67–77 (2016)

[38] Iksanov, A., Kabluchko, Z., Marynych, A., Shevchenko, G.: Fractionally integrated inverse stable subordinators. Stochastic Processes and their Applications **127**(1), 80–106 (2017)

[39] Iksanov, A., Marynych, A., Meiners, M.: Limit theorems for renewal shot noise processes with eventually decreasing response functions. Stochastic Processes and their Applications **124**(6), 2132–2170 (2014)

[40] Iksanov, A., Marynych, A., Meiners, M.: Asymptotics of random processes with immigration I: Scaling limits. Bernoulli **23**(2), 1233–1278 (2017)

[41] Iksanov, A., Marynych, A., Meiners, M.: Asymptotics of random processes with immigration II: Convergence to stationarity. Bernoulli **23**(2), 1279–1298 (2017)

[42] Iksanov, A., Marynych, A., Samoilenko, I.: On intermediate levels of nested occupancy scheme in random environment generated by stick-breaking II. Preprint (2020)

[43] Iksanov, A., Marynych, A., Vatutin, V.: Weak convergence of finite-dimensional distributions of the number of empty boxes in the Bernoulli sieve. Theory of Probability & Its Applications **59**(1), 87–113 (2015)

[44] Iksanov, A., Meiners, M.: Exponential rate of almost-sure convergence of intrinsic martingales in supercritical branching random walks. Journal of Applied Probability **47**(2), 513–525 (2010)

[45] Iksanov, A., Pilipenko, A., Samoilenko, I.: Functional limit theorems for the maxima of perturbed random walk and divergent perpetuities in the M_1-topology. Extremes **20**(3), 567–583 (2017)

[46] Iksanov, A., Rashytov, B.: A functional limit theorem for general shot noise processes. Journal of Applied Probability **57**, 280–294 (2020)

[47] Iksanov, A., Rashytov, B.: Функціональна гранична теорема без центрування для загальних процесів дробового ефекту. Український математичний журнал **73**(2), 160–178 (2021)

[48] Iksanov, A., Rashytov, B., Samoilenko, I.: Renewal theory for iterated perturbed random walks on a general branching process tree: early generations. Journal of Applied Probability (2022+). Подана до друку, препринт (2021) доступний за адресою arXiv:2105.02846.

[49] Jacod, J., Shiryaev, A.: Limit theorems for stochastic processes. Springer Science & Business Media (2003)

[50] Janson, S.: Moments for first-passage and last-exit times, the minimum, and related quantities for random walks with positive drift. Advances in Applied Probability **18**(4), 865–879 (1986)

[51] Kabluchko, Z., Marynych, A.: Renewal shot noise processes in the case of slowly varying tails. Theory of Stochastic Processes **21**(2), 14–21 (2016)

[52] Karlin, S.: Central limit theorems for certain infinite urn schemes. Journal of Mathematics and Mechanics **17**(4), 373–401 (1967)

[53] Koops, D., Saxena, M., Boxma, O., Mandjes, M.: Infinite-server queues with Hawkes input. Journal of Applied Probability **55**(3), 920–943 (2018)

[54] Meerschaert, M., Scheffler, H.P.: Limit theorems for continuous-time random walks with infinite mean waiting times. Journal of Applied Probability pp. 623–638 (2004)

[55] Mitov, K.V., Omey, E.: Renewal processes. Springer (2014)

[56] Mohan, N.: Teugels' renewal theorem and stable laws. Annals of Probability **4**(5), 863–868 (1976)

[57] Owada, T., Samorodnitsky, G.: Functional central limit theorem for heavy tailed stationary infinitely divisible processes generated by conservative flows. Annals of Probability **43**(1), 240–285 (2015)

[58] Pang, G., Zhou, Y.: Functional limit theorems for a new class of non-stationary shot noise processes. Stochastic Processes and their Applications **128**(2), 505–544 (2018)

[59] Pitman, J., Tang, W.: Regenerative random permutations of integers. Annals of Probability **47**(3), 1378–1416 (2019)

[60] Pitman, J., Yakubovich, Y.: Gaps and interleaving of point processes in sampling from a residual allocation model. Bernoulli **25**(4B), 3623–3651 (2019)

[61] Rashytov, B.: Power moments of first passage times for some oscillating perturbed random walks. Theory of Stochastic Processes **23**(1), 93–97 (2018)

[62] Resnick, S.: Adventures in stochastic processes. 3rd printing, Birkhäuser (2002)

[63] Resnick, S.: Heavy-tail phenomena: probabilistic and statistical modeling. Springer Science & Business Media (2007)

[64] Resnick, S., Greenwood, P.: A bivariate stable characterization and domains of attraction. Journal of Multivariate Analysis **9**(2), 206–221 (1979)

[65] Resnick, S., Rootzén, H.: Self-similar communication models and very heavy tails. Annals of Applied Probability **10**, 753–778 (2000)

[66] Rice, J.: On generalized shot noise. Advances in Applied Probability **9**(3), 553–565 (1977)

[67] Schmidt, V.: On finiteness and continuity of shot noise processes. Optimization **16**(6), 921–933 (1985)

[68] Westcott, M.: On the existence of a generalized shot-noise process. Studies in Probability and Statistics **9**(3), 73–88 (1976)

[69] Yakovlev, A., Yanev, N.: Age and residual lifetime distributions for branching processes. Statistics & Probability Letters **77**(5), 503–513 (2007)

[70] Yamazato, M.: On a J_1-convergence theorem for stochastic processes on $D[0,\infty)$ having monotone sample paths and its applications. RIMS Kokyuroku **1620**, 109–118 (2009)

Додаток А

Простір Скорохода

Означення 49. *Для* $T > 0$ *простором Скорохода* $D[0,T]$ *називається простір дійснозначних неперервних справа функцій* f*, що визначені на* $[0,T]$ *та мають скінченні лівобічні границі у точках з* $(0,T]$*. Тобто для* $f \in D[0,T]$

(а) *існує границя* $f(t_0+) = \lim_{t\to t_0+} f(t)$ *та* $f(t_0+) = f(t_0)$ *для* $t_0 \in [0,T)$*;*

(б) *існує границя* $f(t_0-) = \lim_{t\to t_0-} f(t)$ *для* $t_0 \in (0,T]$.

Простір Скорохода $D[T_1,T_2]$ для довільних $T_1 < T_2$ визначається аналогічним чином. Наведені нижче відомості справедливі також для $D[T_1,T_2]$.

Нехай Λ є класом неперервних строго зростаючих функцій $\lambda : [0,T] \to [0,T]$ для яких $\lambda(0) = 0$ та $\lambda(T) = T$.

Означення 50. J_1*-топологією Скорохода на* $[0,T]$ *називається топологія, що породжена метрикою*

$$d^T(f,g) := \inf_{\lambda\in\Lambda}\left(\sup_{t\in[0,T]}|f(\lambda(t)) - g(t)| \vee \sup_{t\in[0,T]}|\lambda(t) - t|\right).$$

Означення 51. *Припустимо, що* $f \in D[0,T]$ *та* $f_n \in D[0,T]$ *для* $n \in \mathbb{N}$*. Будемо казати, що* f_n *збігається у* J_1*-топології до* f*, якщо існують* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *з* Λ *такі, що*

$$\sup_{0\le t\le T}|\lambda_n(t) - t| \to 0, \quad n\to\infty$$

$$\text{та} \quad \sup_{0\le t\le T}|f_n(\lambda_n(t)) - f(t)| \to 0, \quad n\to\infty.$$

Функції f_n, що збігаються у J_1-топології до граничної функції f, можуть мати один стрибок в околі стрибка функції f. Крім того, положення стрибків f_n та їх величини повинні збігатися з положенням стрибків f і їх величин. Це основна відмінність від локально рівномірної збіжності, яка вимагає, щоб положення стрибків f_n і f були однаковими, а не асимптотично рівними.

Далі на просторі $D[0,T]$ визначимо метрику d_0^T, яка є еквівалентною до метрики d^T і, отже, також породжує J_1-топологію. Покладемо

$$d_0^T(f,g) := \inf_{\lambda\in\Lambda}\left(\sup_{t,s:t\neq s}\left|\log\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right| \vee \sup_{y\in[0,T]}|f(t)-g(\lambda(t))|\right).$$

Головною відмінністю метрик d^T та d_0^T є те, що простір $D[0,T]$ не є повним відносно d^T, але є повним відносно d_0^T.

Тепер наведемо два означення та критерій щільності послідовності ймовірнісних мір. Теорема 54 поєднує в собі теорему 13.2 та коментарі до теореми 13.3 монографії [10].

Означення 52. *Ймовірнісна міра P називається щільною, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує компактна множина K така, що $P(K) > 1-\varepsilon$.*

Означення 53. *Послідовність ймовірнісних мір $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ називається щільною, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує компактна множина K така, що $P_n(K) > 1-\varepsilon$ для кожного $n\in\mathbb{N}$.*

Теорема 54. *Послідовність $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є щільною у $D[0,T]$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\lim_{t\to\infty}\limsup_{n} P_n(\{f : \sup_{x\in[0,T]}|f(x)|\geq t\}) = 0$$

та для будь-яких додатних ε та ϵ існують такі $\delta\in(0,1)$ та $n_0\in\mathbb{N}$, що для всіх $n\geq n_0$ виконуються

$$P_n(\{f : \sup_{0\leq t_1\leq t\leq t_2\leq T,\, t_2-t_1\leq\delta}\{|f(t)-f(t_1)|\wedge|f(t_2)-f(t)|\}\geq\varepsilon\})\leq\epsilon,$$

$$P_n(\{f : |f(\delta)-f(0)|\geq\varepsilon\})\leq\epsilon \quad \text{та} \quad P_n(\{f : |f(T-)-f(T-\delta)|\geq\varepsilon\})\leq\epsilon.$$

Далі наведемо критерій слабкої збіжності ймовірнісних мір в просторі $D[0,T]$. Для цього визначимо проекції $\pi_t : D[0,T] \to \mathbb{R}$ для $t \in [0,T]$ так

$$\pi_t(f) := f(t)$$

для $f \in D[0,T]$. Аналогічно для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ та $t_1, \cdots, t_k \in [0,T]$ визначимо $\pi_{t_1,\cdots,t_k} : D[0,T] \to \mathbb{R}^k$ так

$$\pi_{t_1,\cdots,t_k}(f) := (f(t_1), \cdots, f(t_k)).$$

Для ймовірнісної міри P в просторі $D[0,T]$ позначимо через T_P множину всіх $t \in (0,T)$, для яких проекції π_t є майже напевно P-неперервними. Помітимо, що проекції π_0 та π_T є неперервними в $D[0,T]$, оскільки відображення λ фіксують кінці відрізку. При $t \in (0,T)$ проекції π_t є неперервними тоді і тільки тоді, коли функція f є неперервною на цьому інтервалі.

Наведена нижче теорема запозичена з теореми 13.1 книги [10].

Теорема 55. *Нехай задано послідовність ймовірнісних мір $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Якщо $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є щільною та для довільних $t_1, \cdots, t_k \in T_P$*

$$P_n \circ \pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_k} \implies P \circ \pi^{-1}_{t_1,\cdots,t+k}$$

при $n \to \infty$, то

$$P_n \implies P, \quad n \to \infty.$$

Простір Скорохода $D[0,\infty)$ – це простір дійснозначних неперервних справа функцій, що визначені на $[0,\infty)$ та мають скінченні лівобічні границі у додатних точках. Для введення J_1-топології на $D[0,\infty)$ визначимо метрику d_0^∞ на $D[0,\infty)$ в термінах $(d_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$h_n(t) := \begin{cases} 1, & t \le n-1 \\ n-t, & n-1 \le t \le n \\ 0, & x \ge n \end{cases}$$

та для кожної функції $f \in D[0,\infty)$ визначимо $f_n \in D[0,\infty)$ так

$$f_n(t) := h_n(t) f(t), \quad t \ge 0.$$

Помітимо, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ f_n є неперервною в точці n.

Означення 56. *J_1-топологією Скорохода на $[0,\infty)$ називається топологія, що породжена метрикою*

$$d^{\infty}(f,g) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}(1 \wedge d_0^n(f_n,g_n)).$$

Нехай Λ_∞ є класом неперервних строго зростаючих функцій $\lambda : [0,\infty) \to [0,\infty)$ для яких $\lambda(0) = 0$. Наступне означення базується на теоремі 16.1 книги [10]

Означення 57. *Припустимо, що $f \in D[0,\infty)$ та $f_n \in D[0,\infty)$ для $n \in \mathbb{N}$. Будемо казати, що f_n збігається у J_1-топології до f, якщо існують $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ з Λ_∞ такі, що*

$$\sup_{0\le t\le\infty} |\lambda_n(t) - t| \to 0, \quad n\to\infty$$

$$\text{та для кожного } m \in \mathbb{N} \quad \sup_{0\le t\le m} |f_n(\lambda_n(t)) - f(t)| \to 0, \quad n\to\infty.$$

Наступна теорема запозичена з теореми 16.2 монографії [10].

Теорема 58. *Нехай $f, (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D[0,\infty)$. Збіжність $d_0^\infty(f_n,f) \to 0, n\to\infty$ є еквівалентною збіжності $d_0^T(f_n,f) \to 0$, $n\to\infty$ для всіх точок неперервності T функції f.*

Для кожної $f \in D[0,\infty)$ визначимо $r_T f$ як звуження f на $D[0,T)$. Далі наведемо критерій слабкої збіжності в $D[0,\infty)$, що запозичений з теореми 16.7 книги [10].

Теорема 59. *Нехай задано послідовність ймовірнісних мір $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Збіжність*

$$P_n \implies P, \quad n\to\infty$$

виконується тоді і тільки тоді, коли для кожного $T \in T_P$

$$P_n \circ r_T^{-1} \implies P \circ r_T^{-1}, \quad n\to\infty.$$

З огляду на теореми 55 та 59 зазначимо, що для доведення слабкої збіжності послідовності ймовірнісних мір в $D[0,\infty)$ достатньо встановити слабку збіжність скінченновимірних розподілів та щільність послідовності ймовірнісних мір на $D[0,T]$ для кожного $T > 0$, що є точкою неперервності границі.

Функції, що правильно змінюються

Означення 60. *Додатна вимірна функція l, що визначена в деякому околі нескінченності, називається функцією, що повільно змінюється на нескінченності, якщо $\lim_{t\to\infty} l(ut)/l(t) = 1$ для всіх $u > 0$.*

Означення 61. *Додатна вимірна функція f, що визначена в деякому околі нескінченності, називається функцією, що правильно змінюється на нескінченності з показником $\alpha \in \mathbb{R}$, якщо $\lim_{t\to\infty} f(ut)/f(t) = u^\alpha$ для всіх $u > 0$.*

Наступні дві леми запозичені з лем 6.1.3 та 6.1.4 монографії [34].

Лема 62. *Нехай додатна функція $f(t)$ задовольняє $\lim_{t\to\infty} tl(f(t))(f(t))^{-\alpha} = 1$ для деякого $\alpha > 0$ та функції l, шо повільно змінюється на нескінченності, та $\lim_{t\to\infty} l(t) = \infty$. Тоді $f(t)$ правильно змінюється на нескінченності з показником $1/\alpha$ та $\lim_{t\to\infty} t^{-1/\alpha} f(t) = \infty$.*

Лема 63. *Нехай функція f правильно змінюється на нескінченності з показником α та є локально обмеженою.*

(а) *Тоді $\lim_{t\to\infty} \sup_{a\le s\le b} |f(st)/f(t) - s^\alpha| = 0$ для всіх $0 < a < b < \infty$.*

(б) *Нехай $\alpha \neq 0$. Тоді існує монотона функція g така, що $f(t) \sim g(t)$ при $t \to \infty$.*

(в) *Нехай $\alpha > -1$ та $a > 0$. Тоді $\int_a^t f(y)\mathrm{d}y \sim (\alpha+1)tf(t)$ при $t \to \infty$.*

(г) *Нехай $\alpha = -1$ та $a > 0$. Тоді $t \mapsto \int_a^t f(y)\mathrm{d}y$ є функцією, що повільно змінюється на нескінченності, та $\lim_{t\to\infty} \frac{tf(t)}{\int_0^t f(y)\mathrm{d}y} = 0$.*

Беспосередня інтегровність за Ріманом

Означення 64. *Функція* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *є безпосередньо інтегровною за Ріманом на* $\mathbb{R}$*, якщо*

(а) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{(n-1)h\le y<nh} f(y) < \infty$ *для кожного* $h > 0$ *та*

(б) $\lim_{h\to 0+} h \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\sup_{(n-1)h\le y<nh} f(y) - \inf_{(n-1)h\le y<nh} f(y)) = 0.$

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *є безпосередньо інтегровною за Ріманом на* $\mathbb{R}$*, якщо* f^+ *та* f^- *є безпосередньо інтегровними за Ріманом функціями.*

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *є безпосередньо інтегровною за Ріманом на* $[0,\infty)$ *або* $(-\infty, 0]$)*, якщо виконуються* (а) *та* (б)*, де суми беруться по* $\mathbb{N}$ *та* $-\mathbb{N}_0$ *відповідно.*

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом. Тоді f є обмеженою на $\mathbb{R}$, оскільки

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) \le \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{n-1\le y<n} f(y) \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{n-1\le y<n} f(y) < \infty,$$

де скінченність випливає з пункту (а). Крім того, $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$. Для цього помітимо, що для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ існує $n \in \mathbb{Z}$ таке, що $t \in [n-1, n)$. Також зауважимо, що $\lim_{n\to\pm\infty} \sup_{n-1\le y<n} f(y) = 0$ та $f(t) \le \sup_{n-1\le y<n} f(y)$.

Лема 65. *Наведені нижче умови є достатніми для того, щоб функція* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *була безпосередньо інтегровною за Ріманом на* $\mathbb{R}_+$*:*

(а) f *не зростає та є інтегровною за Лебегом на* $\mathbb{R}_+$*;*

(б) f *є інтегровною за Лебегом на* $\mathbb{R}_+$*, та функція* $e^{-at} f(t)$ *є не зростає на* $\mathbb{R}_+$ *для деякого* $a > 0$*;*

(в) $f(t) := \mathbb{E} g(t-\Theta)\mathbb{1}_{\{\Theta\le t\}}$*, де* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *є безпосередньо інтегровною за Ріманом на* $\mathbb{R}_+$*, та* Θ *є невід'ємною випадковою величиною;*

(г) f *є локально обмеженою та майже скрізь неперервною на* $\mathbb{R}_+$*, а також обмеженою зверху деякою безпосередньо інтегровною за Ріманом на*

$\mathbb{R}_+$ *функцією, або, більш загально,* $\sum_{n\geq 1}\sup_{(n-1)h\leq y<nh} f(y) < \infty$ *для деякого* $h > 0$*;*

(ґ) f *є неперервною з компактним носієм.*

Пункт (а) добре відомий, див., наприклад, зауваження 3.10.3 книги [62]. Пункт (б) та останнє твердження випливають з доведення наслідку 2.17 статті [24]. Пункт (в) є твердженням 2.16(d) на с. 297 у [19]. Пункт (г) з $h = 1$ є зауваженням 3.10.4 у [62]. Випадок $h \neq 1$ вимагає лише тривіальних модифікацій. Пункт (ґ) є окремим випадком зауваження 3.10.1 у [62].

Додаток Б. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

1. Rashytov, B.: Power moments of first passage times for some oscillating perturbed random walks. Theory of Stochastic Processes **23**(1), 93–97 (2018).

2. Iksanov, A., Rashytov, B.: A functional limit theorem for general shot noise processes. Journal of Applied Probability **57**, 280–294 (2020).

3. Іксанов, О., Рашитов, Б.: Функціональна гранична теорема без центрування для загальних процесів дробового ефекту. Український математичний журнал **73**(2), 160-178 (2021).

4. Bohun, V., Iksanov, A., Marynych, A., Rashytov, B.: Renewal theory for iterated perturbed random walks on a general branching process tree: intermediate generations. Journal of Applied Probability **59**(2) (2022). Прийнята до друку, препринт доступний за адресою arXiv:2012.03341.

5. Iksanov, A., Rashytov, B., Samoilenko, I.: Renewal theory for iterated perturbed random walks on a general branching process tree: early generations. Journal of Applied Probability (2022+). Подана до друку, препринт (2021) доступний за адресою arXiv:2105.02846.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Рашитов, Б.: Функціональна центральна гранична теорема для загальних процесів дробового ефекту. IX Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті» при КПІ ім. І. Сікорського. Збірник матеріалів конференції, ст. 133-137, Київ, Україна (2020).

2. Rashytov B.: Functional limit theorems for general shot noise processes. Chinese-Ukrainian workshop on Probability Theory and Related Topics at the Xidian University. Abstracts, p. 5, Xi'an, China (2020).

3. Рашитов Б.: Аналог елементарної теореми відновлення на ранніх та проміжних рівнях ітерованих збурених випадкових блукань. XIX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2021» при КНУ ім. Т. Шевченка. Збірник матеріалів конференції, ст. 26-27, Київ, Україна (2021).

4. Rashytov B.: Development of renewal theory for the early generations of an iterated perturbed random walk on a general branching process tree. International Conference of Young Mathematicians at the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. Abstracts, p. 89, Kyiv, Ukraine (2021).

Документ підписано у сервісі Вчасно (початок)

Rashytov_thesis.pdf

Документ підписано у сервісі Вчасно (продовження)
Rashytov_thesis.pdf

Документ відправлено: 20:06 07.07.2022

Власник документу

Електронний підпис
20:06 07.07.2022
Ідентифікаційний код: 3445410498
Рашитов Богдан Сергійович
Власник ключа: Рашитов Богдан Сергійович
Час перевірки КЕП/ЕЦП: 20:06 07.07.2022
Статус перевірки сертифікату: Сертифікат діє
Серійний номер: 3ED5083160DBC59B0400000098150C00EE8F8700