МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СТЕПУХ ВІТАЛІЙ ВАСИЛЬОВИЧ

УДК 512.544

Централізатори елементів і абелеві підалгебри в алгебрах Лі диференціювань

01.01.06 – алгебра і теорія чисел

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри та математичної логіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
ПЕТРАВЧУК Анатолій Петрович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
механіко-математичний факультет,
завідувач кафедри алгебри та математичної логіки.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
БЕДРАТЮК Леонід Петрович,
Хмельницький національний університет,
завідувач кафедри інженерії програмного забезпечення;

доктор фізико-математичних наук
старший науковий співробітник
СИСАК Ярослав Прокопович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри.

Захист відбудеться «26» вересня 2016 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.18 при Київському національному університеті імені Тараса Шевченка за адресою:
м. Київ, проспект акад. Глушкова, 4-е,
механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись в Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: м. Київ, вул. Володимирська, 58, зал № 12

Автореферат розісланий «28» липня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради В.М. Журавльов

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дослідження алгебр Лі диференціювань асоціативних комутативних кілець, зокрема, кілець многочленів від кількох змінних утворюють великий розділ сучасної диференціальної алгебри, який тісно повязаний з теорією диференціальних рівнянь, з математичним аналізом, а саме теорією лінійних диференціальних операторів, з геометрією та математичною фізикою. Наприклад, з кожною групою Лі пов'язується відповідна їй алгебра Лі, яка є алгеброю Лі лівоінваріантних векторних полів, або, що теж саме, диференціювань асоціативно-комутативного кільця гладких функцій на групі. Після вивчення цієї алгебри Лі, (що, як правило, є набагато простішою задачею, ніж вивчення груп у зв'язку з лінійністю операцій на алгебрі Лі) отримані результати застосовуються до груп Лі. Цей метод теорії Лі виявився потужним інструментом для вивчення груп симетрій диференціальних рівнянь і побудови їх точних розв'язків, що є однією з найважливіших задач сучасної математичної фізики. Зауважимо, що кожне диференціювання D кільця многочленів $K[x_1,\dots,x_n]$, де K будь-яке поле, має вигляд:

Описание: Σn
D = P (x ,..., x) -∂--,...

де коефіцієнти $P_i(x_1,\dots,x_n), i = 1,\dots,n$ є многочленами із $K[x_1,\dots,x_n]$, тобто D є лінійним диференціальним оператором з поліноміальними коефіцієнтами. Ядро цього оператора складають розв'язки відповідного диференціального рівняння в частинних похідних з поліноміальними коефіцієнтами. Це пов'язує алгебраїчну частину теорії Лі з відповідними розділами теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних. Оскільки комутатор двох диференціювань $D_1 = \sum_{i=1}^{n} P_i(x_1,\dots,x_n)$ та $D_2 = \sum_{i=1}^{n} Q_i(x_1,\dots,x_n)$ також є диференціюванням кільця многочленів $K[x_1,\dots,x_n]$, то векторний простір $\mathrm{Der}(K[x_1,\dots,x_n])$ з операцією комутування утворює алгебру Лі. В цій алгебрі Лі $W_n = \mathrm{Der}(K[x_1,\dots,x_n])$ виділено цілий ряд підалгебр, які пов'язані з дією диференціювань на певні диференціальні форми. Аналогічно визначається алгебра Лі $_n(K)$ всіх K-диференціювань поля раціональних функцій $K(x_1,\dots,x_n)$.

Основними об'єктами дослідження в дисертаційній роботі є алгебра Лі диференціювань $W_2(K)$ кільця многочленів від 2 змінних, алгебра Лі $_2(K)$ диференціювань поля раціональних функцій від 2 змінних і алгебра Лі диференціювань поля алгебраїчних функцій від кількох змінних. В таких алгебрах Лі важливим є опис двовимірних неабелевих підалгебр (як алгебр Лі диференціювань). У зв'язку з цим досліджуються властивості слабко напівпростих многочленів із $K[x,y]$, які породжують двовимірні неабелеві підалгебри із $W_2(K)$. Встановлено також зв'язки між комутативними базисами в алгебрах Лі диференціювань поліноміальних кілець і полів раціональних функцій.

Одним з основних результатів дисертаційної роботи є опис централізаторів елементів та максимальних абелевих підалгебр в алгебрі Лі $W_2(K)$. Відзначимо, що дана тематика вивчалась багатьма авторами (І. Клеп, Г. Бенкарт та інші) і тісно пов'язана з деякими проблемами комутативної алгебри, теорії динамічних систем та теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних (А. Новіцкі, Ж. Олланьєр, А. Боден та інші). Далі природньо виникло питання про опис централізаторів елементів в алгебрах Лі диференціювань полів. У загальному випадку навіть для вузьких класів скінченновимірних алгебр Лі ці питання виявилися непростими. При певних обмеженнях на степінь трансцендентності поля констант над основним підполем було описано їх структуру, такий опис наведено у третьому розділі. Слід зазначити також, що схожі питання, але для простішої за будовою алгебри Лі sa_2(K) розглядалися в роботі А.Петравчука та О.Єни[1]. Зокрема, в термінах замкнених многочленів у ній описана структура максимальних абелевих підалгебр та централізаторів.

Найпростішими після абелевих алгебр Лі є метабелеві, тобто такі, які є розширеннями абелевих алгебр Лі за допомогою абелевих, найпростішою тут є двовимірна неабелева алгебра Лі. У роботах Ю. Стейна (див., наприклад,[2]) у зв'язку з деякими питаннями, пов'язаними зі знаменитою проблемою якобіана, було введено поняття слабко напівпростого многочлена. Такі многочлени визначають двовимірні неабелеві підалгебри із алгебри Лі W_2(K). Будова двовимірних (абелевих і неабелевих) підалгебр алгебри Лі W_2(K) дуже важлива для кращого розуміння будови підалгебр W_2(K). В дисертаційній роботі дано опис слабко напівпростих многочленів із відокремленими змінними та встановлено їх основні властивості. При вивченні таких многочленів корисними виявилися різні достатні умови незвідності та замкненості многочленів від двох змінних, які отримані методами алгебраїчної геометрії, зокрема результати Д. Лоренціні[3].

У зв'язку з вивченням алгебр Лі диференціювань полів раціональних функцій у дисертаційній роботі досліджуються анулятори раціональних функцій у відповідних алгебрах Лі диференціювань. Анулятор підмножини $S \subseteq$ K($x_1,\ldots,x_n$) в алгебрі Лі $_n$(K), який позначається $Ann_{n(K)}(S)$ і є множиною всіх K-диференціювань поля K($x_1,\ldots,x_n$), які анулюють множину $S \subseteq$ K($x_1,\ldots,x_n$), тісно пов'язаний з будовою підалгебр алгебри Лі $_n$(K).З цієї точки зору анулятори вивчались в роботах Є. Єни, А.П. Петравчука, С. Аяда, Г. Фройденбурга та інших.

Окрім централізаторів,ануляторів та слабко напівпростих многочленів у дисертаційній роботі розглядаються комутативні базиси алгебр Лі диференціювань (над відповідним кільцем або полем). Зауважимо, що кожен комутативний базис визначає скінченновимірну абелеву підалгебру в алгебрі Лі диференціювань кільця або поля. В роботі описано метод побудови деяких комутативних базисів в алгебрі Лі диференціювань полів алгебраїчних функцій від двох змінних, тобто алге- браїчних розширень поля K(x,y). Для таких полів також знайдено закон зміни

[1] A.P. Petravchuk, O. G. Iena On centralizers of elements in the Lie algebra of the special Cremona group sa(2,k)// Journal of Lie Theory. - 2006. - 16, no. 3 . P. 561–567.

[2] Steyn Y. Weakly nilpotent and weakly semisimple polynomials on the plane // Int. Math. Research Notices - 2000. - Vol. 13. - P. 681–698.

[2] D. Lorenzini, Reducibility of polynomials in two variables // J. Algebra. – 1993 – **156.** – 65 - 75

дивергенції при переході від одного базису трансцендентності поля до іншого базису (у випадку кільця многочленів від двох змінних і переходу до інших координатних многочленів дивергенція не змінюється і цей інваріант може бути корисним в подальших дослідженнях). В деяких випадках такі питання розглядав А. Новіцкі і в дисертаційній роботі використовуються його підходи до вивчення комутативних базисів.

З усього вищезазначеного можна зробити висновок, що тематика дисертаційної роботи є актуальною.

Зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано в рамках держбюджетної дослідницької теми 06БФ038 "Розробка алгебраїчних і геометричних методів дослідження з використанням комбінаторних та категорних підходів що виконується на кафедрі алгебри та математичної логіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (номер державної реєстрації 0106U005862).

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження є опис централізаторів елементів та максимальних абелевих підалгебр в алгебрі Лі $W_2(\mathrm{K})$ та в алгебрах Лі диференціювань полів, дослідження структури ануляторів у $W_n(\mathrm{K})$, детальне вивчення комутативних базисів в алгебрах Лі диференціювань кілець і полів та дослідження слабко напівпростих многочленів із відокремленими змінними у кільці $\mathrm{K}[x,y]$, які визначають двовимірні неабелеві підалгебри в алгебрі Лі $W_2(\mathrm{K})$.

Об'єктом дослідження є алгебра Лі $W_n(\mathrm{K})$, зокрема окремо розглядається алгебра Лі диференціювань кільця многочленів від двох змінних, замкнені многочлени і раціональні функції від кількох змінних.

Предмет дослідження - централізатори елементів та максимальні абелеві підалгебри алгебри Лі $W_2(\mathrm{K})$, централізатори елементів та анулятори елементів в алгебрі Лі $W_n(\mathrm{K})$, слабко напівпрості многочлени кільця $\mathrm{K}[x,y]$ та комутативні базиси в алгебрах Лі диференціювань комутативних кілець та полів.

Методи дослідження. Основними методами, що використовуються у дослідженні є методи теорії алгебр Лі, методи комутативної алгебри, які пов'язані з розширеннями комутативних кілець і полів та методи лінійної алгебри.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації автором отримано нові теоретичні результати, основними із яких є такі:

1. описано будову централізаторів елементів в алгебрі Лі $W_2(\mathrm{K})$ та залежно від степеня трансцендентності поля констант диференціювання D описано централізатор D в алгебрі Лі $Der_{\mathrm{K}}(R)$ диференціювань поля R алгебраїчних функцій від кількох змінних;

2. дано опис максимальних абелевих підалгебр в алгебрі Лі $W_2(\mathrm{K})$ у випадку основного поля нульової характеристики;

3. отримано критерій слабкої напівпростоти многочленів кільця $\mathrm{K}[x,y]$ із відокремленими змінними, тобто таких, що $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, встановлено

основні властивості таких многочленів;

4. вказано зв'язок між деякими класами комутативних базисів алгебр Лі всіх К-диференціювань поля алгебраїчних функцій від n змінних, вказано метод їх побудови;
5. знайдено закон зміни дивергенції диференціювання поля алгебраїчних функцій від двох змінних при переході від одного базису трансцендентності цього поля до іншого базису;
6. досліджено структуру ануляторів множин раціональних функцій в алгебрі Лі W_n(K) та встановлено їх основні властивості.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Її результати можуть бути використані в теорії алгебр Лі, комутативній алгебрі, теорії трансцендентних розширень полів раціональних функцій та суміжних розділах математики.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації, які виносяться на захист, отримані автором особисто. Визначення напрямку досліджень, постановка задач, ідеї відносно вибору методів розв'язання належать науковому керівнику. У всіх роботах, опублікованих у співавторстві, внески авторів є рівними і нероздільними.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися

- на Міжнародній математичній конференції, присвяченій 70-річчю В. В. Кириченка (Миколаїв, червень 2012 р.);
- на Третій міжуніверситетській науковій конференції молодих вчених з математики та фізики (Київ, квітень 2013 р.);
- на Дев'ятій Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (Львів, липень 2013 р.);
- на Четвертій школі-конференції з теорії алгебр Лі, алгебраїчних груп та теорії інваріантів (Москва, Росія, січень-лютий 2014 р.);
- на Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна (Київ, липень 2014 р.);
- на Дев'ятій літній школі: Алгебра, топологія і аналіз (с. Поляниця, Івано-Франківська область, липень 2014 р.);
- на Міжнародній школі-конференції "Перспективи в теорії Лі"(Піза, Італія, січень-лютий 2015 р.);
- на Десятій Міжнародній алгебраїчній конференції присвяченій 70-річчю від дня народження Ю.А. Дрозда (Одеса, серпень 2015 р.);
- на засіданні Алгебраїчного семінару Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Київ, грудень 2015 р.);

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 12 наукових роботах. З них 5 — це статті [1 - 5] у фахових виданнях та 7 — публікації у матеріалах та тезах конференцій [6 - 12].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, п’яти розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи – 108 сторінок, з них список використаних джерел займає місце з 101 по 108 сторінку і містить 72 найменування.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Дисертаційна робота складається зі вступу та п’яти розділів. На початку кожного розділу подається короткий зміст його підрозділів.

У **вступі** розкривається актуальність теми дисертації, мета та завдання. Обговорюється наукова новизна та практичне значення отриманих результатів. Вказується особистий внесок здобувача у дослідження, розкривається зміст роботи та наводиться список публікацій.

У **першому розділі** проводиться огляд літератури, повязаної з тематикою досліджень, що проводилася здобувачем. Вказуються досягнення за темою дисертації, які вже були отримані іншими авторами.

У **другому розділі** подано необхідні означення та деякі допоміжні результати, які використовуються в подальшому викладі результатів роботи.

Диференціюванням (точніше, K-диференціюванням) асоціативної K-алгебри R називається довільне лінійне відображення $\delta : R \to R$, яке задовольняє правило Ляйбніца $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$. Множина усіх диференціювань алгебри R утворює векторний підпростір в $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(R,R)$, що позначається $\mathrm{Der}(R)$. Множина диференціювань $\mathrm{Der}(R) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(R,R)$ є замкненою відносно взяття комутатора Описание: [D1, D2] := D1D2 — D2D1 і є, таким чином, алгеброю Лі. Якщо $R = \mathrm{K}[x_1,\dots,x_n]$– кільце многочленів від n змінних, то кожне диференціювання кільця R має вигляд

Описание: ∂ ∂
D = f1-----+ □□ □ + fn-----, fi □ K [x1,..., xn].

Кожне диференціювання D кільця многочленів $\mathrm{K}[x_1,\dots,x_n]$ однозначно продовжується до диференціювання поля раціональних функцій $\mathrm{K}(x_1,\dots,x_n)$ за правилом $D(f/g) = (D(f)g - fD(g))/g^2$ для довільних многочленів $f,g \in \mathrm{K}[x_1,\dots,x_n]$, $g \neq 0$. Алгебра Лі всіх K-диференціювань кільця многочленів $\mathrm{K}[x_1,\dots,x_n]$ позначається через $W_n(\mathrm{K})$, алгебра Лі K-диференціювань поля раціональних функцій $\mathrm{K}(x_1,\dots,x_n)$ – через $_n(\mathrm{K})$.

Якщо L – алгебра Лі і $x \in L$ – довільний елемент із L, то *централізатор елемента* x в L–це множина $C_L(x) = \{g \in L \mid [g,x] = 0\}$, це підалгебра алгебри Лі L.

Ненульове диференціювання кільця многочленів D називається редукованим, якщо з рівності $D = hD_1, h \in \mathrm{K}[x_1,\dots,x_n]$, $D_1 \in W_n(\mathrm{K})$ випливає, що $h \in \mathrm{K}^*$. Очевидно, що кожне диференціювання $D \in W_n(\mathrm{K})$ може бути записане у вигляді

$D = hD_0$ де $h \in$ K$[x_1,\dots,x_n]$ і D_0 редуковане. Кожен многочлен $p \in$ K$[x,y]$ визначає диференціювання $D_p \in W_2$(K) (воно називається якобіанним диференціюванням) за правилом: $D_p(h) = detJ(p,h)$, де $J(p,h)$ – матриця Якобі многочленів p,h. Якщо p – незвідний многочлен, то ми позначаємо через δ_p редуковане диференціювання, яке відповідає диференціюванню D_p. Аналогічно кожна незвідна раціональна функція $p/q \in$ K(x,y) визначає якобіанне диференціювання $D_{p,q} = qD_p - pD_q \in W_2$(K), редуковане до нього диференціювання будемо позначати через δ_{pq}.

Нехай δ диференціювання кільця многочленів від n змінних K$[x_1,\dots,x_n]$. Многочлен f називається *многочленом Дарбу* (або власним вектором) для δ, якщо $\delta(f) = \lambda f$ для деякого многочлена λ (не обов'язково $\lambda \in$ K). Многочлен λ називається *комножником* диференціювання δ (або узагальненим власним значенням), який відповідає многочлену Дарбу f. Іншими словами, f є поліноміальною власною функцією для δ з (узагальненим) власним значенням λ.

Відзначимо деякі властивості многочленів Дарбу.

1) Якщо f і g є многочленами Дарбу деякого диференціювання δ : K$[x_1,\dots,x_n] \rightarrow$ K$[x_1,\dots,x_n]$, що відповідають комножникам λ і μ відповідно, то тоді fg є многочленом Дарбу диференціювання δ, який відповідає комножнику $\lambda + \mu$;

2) Нехай h – многочлен Дарбу диференціювання $\delta \in Der($K$[x_1,\dots,x_n])$. Тоді довільний дільник многочлена h теж є многочленом Дарбу для δ.

В роботі А.Новіцкі і М.Нагати[4] доведено, що для довільного диференціювання D кільця многочленів K$[x,y]$ існує многочлен $f \in$ K$[x,y]$, такий що Ker $D =$ K$[f]$. Цей факт часто використовується при вивченні диференціювань кільця многочленів від двох змінних.

Нехай K$(x_1,\dots,x_n)$ – поле раціональних функцій над полем K. Нагадаємо, що полем алгебраїчних функцій від n змінних над полем K називається скінченне алгебраїчне розширення $R \supseteq$ K$(x_1,\dots,x_n)$ поля K$(x_1,\dots,x_n)$. Будова диференціювань поля алгебраїчних функцій схожа в багатьох випадках на будову диференціювань поля K$(x_1,\dots,x_n)$ і це дозволяє використовувати розроблені методи досліджень алгебри Лі $_n$(K) для вивчення алгебри Лі диференціювань полів алгебраїчних функцій.

Якщо S – деяка підмножина із поля раціональних функцій $R =$ K$(x_1,\dots,x_n)$, то анулятор $Ann(S)$ підмножини S в $_n$(K) – це підмножина всіх диференціювань поля R, які анулюють всі елементи множини S. Очевидно, $Ann(S)$ – підалгебра із алгебри Лі $_n$(K) і векторний підпростір векторного простору $_n$(K) над полем R.

---

[4] Nowicki A. Nagata M., Rings of constants for k – derivations in k[x1, ... ,xn] // J. Math Kyoto Univ. - 1988. – Vol. 28, no. 1 - P. 111–118.

Многочлен $f \in$ K$[x,y]$ називається слабко напівпростим, якщо існує многочлен $g \in$ K$[x,y]$ такий, що $D_f(g) = \lambda g$ для ненульового $\lambda \in$ K, многочлен g тут є власною функцією для f з власним числом λ. Останнє означає, що кожен слабко напівпростий многочлен f індукує якобіанне диференціювання D_f, яке може бути включене в двовимірну неабелеву підалгебру $L_f = \langle D_f \rangle \rightthreetimes \langle D_g \rangle$ алгебри Лі W_2(K).

У **третьому розділі** досліджуються централізатори елементів і максимальні абелеві підалгебри в алгебрах Лі диференціювань. В підрозділі 3.1 розглядаються централізатори елементів в алгебрі Лі W_2(K) всіх диференціювань кільця многочленів від двох змінних над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль. Структура централізатора елемента $D \in W_2$(K) в цій алгебрі Лі суттєво залежить від будови ядра диференціювання D в полі раціональних функцій (диференціювання D природнім чином продовжується з кільця многочленів на поле раціональних функцій), деякі результати про ядра таких диференціювань були отримані раніше в роботах А.Петравчука, О.Єни і А. Регети. Встановлено основні властивості таких централізаторів і доведено основну теорему, яка їх описує:

Теорема 3.1.6. *Нехай* D *довільний ненульовий елемент з* W_2(K). *Тоді централізатор* $C = C_{W_2}(D)$ *є підалгеброю одного з наступних типів:*

1) $C =$ KD, *якщо* Ker D *в* K(x,y) *співпадає з* K.
2) $C =$ KD + KD_1, *якщо* Ker D *в* K(x,y) *співпадає з* K *та існує диференціювання* D_1 *таке, що* $[D,D_1] = 0$ *і* D,D_1 *є лінійно незалежними над* K(x,y).
3) $C =$ K$[p]h\delta_p$, *якщо* Ker D *в* K(x,y) *містить несталий многочлен, цей многочлен* p *може бути вибраний незвідним, многочлен* h *є* p*-вільним і* δ_p *є зведеним диференціюванням для* D_p.
4) $C =$ K$[p,q]_m h\delta_{pq}$, *якщо* Ker D *містить несталу раціональну функцію* p/q *і не містить многочленів, відмінних від константи,* Ker $D =$ K( ) *та* δ_{pq} *є зведеним диференціюванням для диференціювання* $qD_p - pD_q$.
5) $C = ($K( )D+K( )$D_1) \cap W_2$(K), *де* D,D_1 *є лінійно незалежними над* K(x,y) *та* $[D_1,D] = 0$. *Якщо* $D = P$ $+Q$ $,D_1 = P_1$ $+Q_1$ *та* $\Delta = PQ_1 - P_1Q$, *то* $\dim_{\text{K}} C \leq m + s + 2$, *де число* m *таке ж як в пункті 4 даної теореми і* $s = deg_{p-q}\Delta$.

Зауважимо, що централізатори елементів для різних типів алгебр Лі вивчались багатьма авторами і для деяких алгебр їх будова достатньо добре вивчена. Далі розглядаються максимальні абелеві підалгебри в алгебрі Лі W_2(K). Всі типи таких підалгебр описані в наступній теоремі.

Теорема 3.1.8. *Нехай* L *максимальна абелева підалгебра алгебри Лі* W_2(K). *Тоді алгебра Лі* L *є однією із наступних:*

1) *Одновимірна вигляду*KD, *де* $D \in W_2$(K) *та* Ker$D$ *в* K(x,y) *співпадає з* K.

2) *Двовимірна вигляду* KD+KD_1, *де* D,D_1 *є лінійно незалежними над* K(x,y).

3) *Скінченно вимірна вигляду* $K[p,q]_m h\delta_{pq}$, *де* $h \in K[x,y]$, $K[p,q]_m$ *є векторним простором всіх однорідних по* p,q *многочленів степеня* m *(дивись Теорему 3.1.6).*
4) *Нескінченно вимірна вигляду* $K[p]h\delta_p$, *де* $h \in K[x,y]$, $K[p]$ *є векторним простором многочленів від* p *(дивись Теорему 3.1.6).*

У підрозділі 3.2 розглянуто властивості централізаторів елементів в алгебрах Лі диференціювань полів алгебраїчних функцій від кількох змінних при деяких обмеженнях на степінь трансцендентності поля констант диференціювання.

Нехай K — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, $K(x_1,..,x_n)$ – поле раціональних функцій над K і $R \supseteq K(x_1,\ldots,x_n)$ — скінченне алгебраїчне розширення поля $K(x_1,\ldots,x_n)$ (тобто поле алгебраїчних функцій від n змінних). Зауважимо, що в випадку $K = \mathbb{R}$ або $K = \mathbb{C}$ з геометричної точки зору диференціювання можна розглядати як векторні поля на відповідних гладких многовидах. Відомо, що знання структури централізаторів елементів алгебри Лі дає важливу інформацію про саму алгебру Лі.

В наступних лемах вказано ряд властивостей централізаторів елементів в алгебрах Лі диференціювань полів алгебраїчних функцій від кількох змінних. Для поля алгебраїчних функцій R від n змінних над полем K будемо позначати через $W(R)$ алгебру Лі $Der_K(R)$ *всіх* K-диференціювань поля R.

Лема 3.2.3 *Нехай* $D \in Der_K(R)$, $D\neq 0$ *і* $F = \mathrm{Ker}\, D$ - *поле констант* для D в R. *Тоді централізатор* $C=C\_Der_K(R)(D)$ є *векторним простором над F розмірності* $\leq n$.

Лема 3.2.5. *Нехай* $D_1,\ldots,D_k$ – *лінійно незалежні над* R *елементи з* $W(R) = Der_K(R)$. *Тоді підполе констант* $S = \cap_{i=1}^{k} KerD_i$ *для системи* $\{D_1,\ldots,D_k\}$ *має степінь трансцендентності над* K *не вище ніж* $n - k$.

Наступні теореми, які є основними результатами цього підрозділу дають характеризацію централізаторів елементів при деяких обмеженнях на степінь трансцендентності полів констант.

Теорема 3.2.9. *Нехай* $D \in W(R)$ *і* $F = KerD$ — *поле констант для* D. *Якщо* $tr.deg_K F \leq 2$, *то централізатор* $C = C_{W(R)}(D)$ *є або алгеброй Лі над* F *розмірності* $\dim_F C \leq n$, *або* C *містить ідеал* $I = \{T \in C | T(F) = 0\}$, *який є алгеброю Лі над* F *розмірності* $rk_R C - 1$ *за умови, що* $tr.deg_K F = 1$ *або* $rk_R C - 2$ *за умови, що* $tr.deg_K F = 2$ *такий, що:*

1) *при умові* $tr.deg_K F = 1$ *фактор-алгебра* C/I *ізоморфна* $\mathrm{Der}_K K(x)$;
2) *при умові* $tr.deg_K F = 2$ *фактор-алгебра* C/I *ізоморфна або підалгебрі рангу 1 з* $\mathrm{Der}_K F$, *або самій алгебрі* $\mathrm{Der}_K F$.

Теорема 3.2.12. *Нехай* K – *алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль,* R – *розширення поля* K, *яке має степінь трансцендентності* n *над* K, $D \in W(R)$ *таке* K-*диференціювання поля* R, *що його поле констант* F *в* R *має степінь* *трансцендентності* n - 1 *над* K. *Якщо для деякого елемента* $z \in R \setminus F$ *виконується* $D(z) \in F$, *то централізатор* $C = C_{W(R)}(D)$ *має ранг* n *над* R *і складається з диференціювань вигляду*

Описание: ∂
D2 + (f0 + D2 (r)z /r)--- ,
∂z

де D_2 *– довільне диференціювання поля* F, *продовжене до диференціювання поля* R *вздовж елемента* z, *і при цьому* $r = D(z)$, *а* $f_0 \in F$ *– довільний елемент.*

Четвертий розділ присвячено дослідженню слабко напівпростих многочленів у кільці $K[x,y]$. Тут дано опис всіх слабко напівпростих многочленів $f \in K[x,y]$ вигляду $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ (многочленів з відокремленими змінними) та їхніх власних функцій $g(x,y) \in K[x,y]$ таких, *що* $[f,g] = \lambda g, \lambda \in K^*$. Насправді, можна вважати, що $\lambda = 1$, оскільки в іншому випадку ми можемо взяти $\lambda^{-1}f$ замість f. Тому далі розглядається лише випадок $[f,g] = g$. Встановлено основні властивості таких многочленів з відокремленими змінними, при цьому використовуються результати Ю. Стейна, зокрема, такий: нехай $f,g \in K[x,y]$ – такі многочлени, що g незвідний і $[f,g] = hg$ для деякого $h \in K[x,y]$. Тоді існує елемент $c \in K$ такий. що g ділить многочлен f - c. Використовуються також результати Ж. Олланьєра [5], який дослідив замкнені многочлени і замкнені раціональні функції від кількох змінних.

При доведенні основного результату цього розділу використовується наступна лема:

Лема 4.1.1. *Нехай многочлен* $g = g(x,y)$ *задовольняє умову* $[f,g] = g$, *де* $f(x,y) = f_1(x)f_2(y) \in K[x,y]$. *Тоді єдиними незвідними множниками многочлена* $g(x,y)$ *є або многочлени вигляду* $\delta(f(x,y) + c)$, *де* $\delta, c \in K^*$ *або* $\beta(x - c_1), \gamma(y - c_2)$, *де* $\beta, \gamma \in K^*$ *та* c_1, c_2 *задовольняють умову* $f_1(c_1) = 0, f_2(c_2) = 0$.

Основним результатом даного розділу є наступний критерій слабкої напівпростоти многочлена з розділеними змінними:

Теорема 4.1.5. *Многочлен* $f(x,y) = f_1(x)f_2(y) \in K[x,y]$ *є слабко напівпростим тоді і тільки тоді, коли він не має кратних коренів і принаймні один з многочленів* $f_1(x), f_2(y)$ *є лінійним, і якщо, наприклад,* $f_2(y) = ay + b$, $a, b \in K$ *та* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *є коренями* $f_1(x)$, *тоді* l_i = Оп $\in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$. *Крім того, якщо* $g = g(x,y)$ *є власною функцією для* D_f *із власним значенням* 1, *тоді*

Описание: Пn
g = F (f)f (y)k (x - α)k- li,
2 i...

____

[5] J. M. Ollagnier, Algebraic closure of a rational functions // Qualitative theory dynamical systems. - 2004. – 5. - 285–300.

де $F(t) \in K[t], k \in \mathbb{N}$ *таке, що* $k \geq l_i, i = 1, \ldots, n$.

Як наслідок, з основної теореми отримано наступне твердження, яке розширяє множину слабко напівпростих многочленів:

Наслідок 4.1.6. *Нехай* $f(x,y)$ *– слабко напівпростий многочлен і многочлен* $g(x,y)$ *такий, що* $[f,g] = g$. *Якщо многочлени* p,q *задовольняють умову* $[p,q] = 1$, *тоді* $f(p,q)$ *є слабко напівпростим і* $[f(p,q),g(p,q)] = g(p,q)$.

Як відзначено у роботах Ю. Стейна, опис слабко напівпростих многочленів довільного вигляду(а не тільки з розділеними змінними)був би серйозним кроком вперед у розв'язанні відомої проблеми якобіана при n = *2*.

В останньому, *і і* досліджуються комутативні базиси в алгебрах Лі диференціювань полів алгебраїчних функцій від двох змінних та анулятори множин раціональних функцій у алгебрі Лі $_n$*(K)* диференціювань поля раціональних функцій від n змінних. У першій частині описано метод побудови деяких комутативних базисів у алгебрі Лі $W_2(K)$ всіх *K*-диференціювань кільця многочленів $K[x_1,x_2]$. Один із основних результатів цього підрозділу – наступна теорема:

Теорема 5.1.3. *Нехай*

Описание: ∂ ∂ ∂ ∂
D1 = a11 -----+ a12 ----,D2 = a21 -----+ a22-----...

диференціювання поля $R \supseteq K(x_1,x_2)$ *алгебраїчних функцій такі, що*

Описание: | |
|| a11 a12 ||
Δ = | a21 a22 | /= 0

Рівність $[D_1,D_2] = aD_1 + bD_2$, *для деяких* $a,b \in R$ *виконується тоді і тільки тоді, коли*

Описание: D1-(Δ-)- D2--(Δ-)
divD1 = - b, divD2 = - a....

Наслідок 5.1.4. *Нехай елементи*

Описание: -∂--- --∂-- --∂-- -∂--- ^
D1 = a11 + a12 ,D2 = a21 + a22 ☐ W2 (K)
∂x1 ∂x2 ∂x1 ∂x2

лінійно незалежні над R. *Диференціювання* D_1 *та* D_2 *комутують тоді і тільки тоді, коли* $div(\ D_1) = 0, div(\ D_2) = 0$, *де* $\Delta =$

Описание: ||
||
| a11 a12 |

При вивченні алгебри Лі $_2$(R*)* всіх *K*-диференціювань поля R алгебраїчних функцій від двох змінних виникає питання про такі диференціювання $D_1,D_2 \in$ $_2$(R*)*, що $[D_1,D_2] = D_2$ (вони породжують в $_2$(R*)* двовимірну над *K* неабелеву підалгебру). Така алгебра Лі може також бути охарактеризована в термінах дивергенції:

Наслідок 5.1.5. *Нехай диференціювання* $D_1,D_2 \in$ $_2$*(R) лінійно незалежні над R. Рівність* $[D_1,D_2] = D_2$ *виконується тоді і тільки тоді, коли*

Описание: -1- -1- 1--
div (Δ D1) = - Δ ,div (Δ D2) = 0,

зокрема, якщо Δ = 1 *тоді* $divD_2 = 0, divD_1 = -1$.

Зауважимо, що проблема опису многочленів f,g, які задовольняють рівність detJ(f,g) = g, або, що те ж саме про структуру якобіанних диференціювань, які задовольняють вищезгадану умову, була вперше сформульована Ю.Стейном.

У другій частині 5-го розділу розглянуто питання про те, як змінюється дивергенція диференціювання D при переході від одного базису трансцендентності до іншого. Відповідь на це питання дає наступна теорема:

Теорема 5.2.1. *Нехай* { , } *– комутативний базис алгебри Лі* $_2(R)$ = $Der_K R$, *де* R ⊇ K(*x*,*y*) *– поле алгебраїчних функцій. Якщо D = P + Q* ∈ $_2(R)$ *виражається як D = R + S в базисі* { , }, *тоді*

Описание: ∂P-- ∂Q-- ∂R-- ∂S-- -1-
divD = + = + - D (Δ) ,
∂x ∂y ∂f ∂g Δ

де Δ = *detJ*(*f*,*g*) *– якобіан многочленів f,g.*

Як наслідок, отримаємо наступний результат:

Наслідок 5.2.2. *Якщо* Δ = *detJ*(*f*,*g*) ∈ K^*, *то дивергенція диференціювання D* ∈ *DerR не залежить від вибору комутативного базису* { , }. *Зокрема, дивергенція не залежить від вибору координатних многочленів у кільці многочленів* K[*x*,*y*].

У підрозділі 5.3 вивчаються анулятори множин раціональних функцій. Позначимо через $Ann_{n(K)}(S)$ анулятор множини S із поля раціональних функцій в алгебрі Лі $_n(K)$, нагадаємо, що

Описание: Ann (S) = {D ☐ ^W (K)|D (s) = 0 для всіхs ☐ S }.
^Wn (K) n

Деякі властивості анулятoрів підмножин із поля раціональних функцій наведені в наступній лемі:

Лема 5.3.1. *Нехай S – підмножина із поля* K($x_1,\ldots,x_n$) *і K(S) підполе породжене K та S в* K($x_1,\ldots,x_n$). *Якщо K(S) – алгебраїчне замикання K(S) в* K($x_1,\ldots,x_n$), *то справедливі наступні твердження:*

1) $Ann_{n(K)}(S) = Ann_{n(K)}(K(S)) = Ann_{n(K)}(K(S))$.
2) $Ann_{n(K)}(S)$ *є підалгеброю в* $_n(K)$ *і векторним простором над R розмірності* $m = n - tr.deg_K K(S)$.
3) *Якщо* $m \geq 1$, *то алгебра Лі* $Ann_{n(K)}(S)$ *є простою.*

Нехай S – непорожня підмножина із $K(x_1,\dots,x_n)$, яку без обмеження загальності можна вважати скінченною і алгебраїчно незалежною над полем K, $S = \{y_1,\dots,y_k\}$. Доповнимо множину S до базиса трансцендентності $\{x_1,\dots,x_{n-k},y_1,\dots,y_k\}$ поля $K(x_1,\dots,x_n)$ над K (це можливо після перенумерації змінних) і позначимо через J_{S,x_i} якобіанне диференціювання підполя $K(x_1,\dots,x_{n-k},y_1,\dots,y_k)$, яке визначене за правилом:

Описание: JS,x = detJ (x1, ...,xi - 1,h, xi+1, ...,xn - k,y1,...,yk), i = 1, ...,n - k...

де $J(x_1,\dots,x_{i-1},h,x_{i+1},\dots,x_{n-k},y_1,\dots,y_k)$ – матриця Якобі многочленів $x_1,\dots,x_{i-1},h,x_{i+1},\dots,x_{n-k},y_1,\dots,y_k$. Продовжимо ці диференціювання на все поле $K(x_1,\dots,x_n)$ і збережемо ті ж самі позначення для них. Позначимо через

Описание: Δ = detJ (x ,..., x ,y ,...,y)....

Наступні теореми є основними результатами підрозділів 5.3 та 5.4. В них отримано характеризацію ануляторів підмножин із поля раціональних функцій в $_n(K)$ і ануляторів раціональних функцій в алгебрі Лі $W_n(K)$.

Теорема 5.3.3. *Нехай* K *поле, S – підмножина поля раціональних функцій* $K(x_1,\dots,x_n)$ *і* $\{y_1,\dots,y_k\}$ *– максимальна множина алгебраїчно незалежних над* K *елементів з S. Тоді анулятор* $Ann_{\,n(K)}(S)$ *є векторним простором над* $K(x_1,\dots,x_n)$ *з базисом* $J_{S,x_1},\dots,J_{S,x_{n-k}}$*. Множина* N_1 *всіх елементів з* $_n(K)$*, які відображають підполе* $K(S)$ *в себе, є напівпрямою сумою*

Описание: N1 = M ☐ Ann ^ (S)

де M є підалгеброю в $_n(K)$ *з базисом* $J_{S,y_1},\dots,J_{S,y_k}$.

Алгебра Лі $W_n(K)$ міститься в (K) і $W_n(K)$ є вільним $K[x_1,\dots,x_n]$–модулем. Ця алгебра Лі діє природнім чином на $K(x_1,\dots,x_n)$ і якщо $\phi \in K(x_1,\dots,x_n)$, то $Ann_{W_n(K)}(\phi)$ є підмодулем модуля $W_n(K)$ над кільцем $K[x_1,\dots,x_n]$. В наступній теоремі вказано породжуючі елементи $Ann_{W_n(K)}(\phi)$ для деяких раціональних функцій.

Теорема 5,4,3. *Нехай* $\phi = \ \in K(x_1,\dots,x_n)$ *така раціональна функція із взаємопростими многочленами u та v, що існують такі многочлени* $f_1,\dots,f_n$*, що* $f_1 + \dots + f_n =$ *. Тоді* $Ann_{W_n(K)}(\phi)$ *є підмодулем рангу n - 1 над* $K[x_1,\dots,x_n]$ *з породжуючими*

Описание: ---- Σn ∂ϕ ∂ ∂ϕ ∂
Dj = fiD (i),j = 1, ...,n д е D (i) = (- ---- -----+ ---------)v2.
j j ∂xi ∂xj ∂xj ∂xi
i=1,i/=j

ВИСНОВКИ

У дисертації автором отримано нові теоретичні результати, які пов'язані з описом централізаторів елементів та максимальних абелевих підалгебр в алгебрах Лі диференціювань. Також отримані нові результати пов'язані з описом ануляторів множин раціональних функцій в алгебрах Лі диференціювань полів, слабко напівпростими многочленами та комутативними базисами в алгебрах Лі диференціювань полів алгебраїчних функцій.

Основними науковими результатами є наступні:

- описано будову централізаторів елементів в алгебрі Лі $W_2(K)$ та залежно від степеня трансцендентності поля констант диференціювання D описано централізатор D в алгебрі Лі $Der_K(R)$ диференціювань поля R алгебраїчних функцій від кількох змінних;
- дано опис максимальних абелевих підалгебр в алгебрі Лі $W_2(K)$ у випадку основного поля нульової характеристики;
- отримано критерій слабкої напівпростоти многочленів кільця $K[x,y]$ із відокремленими змінними, тобто таких, що $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, встановлено основні властивості таких многочленів;
- вказано зв'язок між деякими класами комутативних базисів алгебр Лі всіх K-диференціювань поля алгебраїчних функцій від n змінних, вказано метод їх побудови;
- знайдено закон зміни дивергенції диференціювання поля алгебраїчних функцій від двох змінних при переході від одного базису трансцендентності до іншого базису трансцендентності цього ж поля;
- досліджено структуру ануляторів множин раціональних функцій в алгебрі Лі $W_n(K)$ та наведено їх властивості.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику, професору А.П. Петравчуку за постановку розглянутих в дисертаційній роботі питань, постійну увагу і підтримку в роботі.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Stepukh V.V. On centralizers of elements in the Lie algebra $W_2(K)$. / Ie.O. Makedonskiy, A.P. Petravchuk, V.V. Stepukh // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова — 2013. — вип.14. — С.24–30.

2. Stepukh V.V. On weakly semisimple derivations of the polynomial ring in two variables. / V.S. Gavran, V.V. Stepukh // Algebra and Discrete mathematics — 2014. — Vol. 18. NUM 1. — P. 50–58.

3. Степух В.В. Централізатори елементів в алгебра Лі диференціювань полів./С.В. Лисенко, А.П.Петравчук, В.В.Степух//Збірник праць інституту математики — 2015. — вип.12. — С.141–153.

4. Stepukh V.V. Annihilator subalgebras in Lie algebras of derivations. / V.V. Stepukh // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics — 2015. — Vol. 33. NUM 1. — P. 52–56.

5. Stepukh V.V. On bases of Lie algebras of derivations. / A.P. Petravchuk, V.V. Stepukh// Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. — 2015 — Vol. 2 — P. 28–32.

6. Stepukh V.V. On annihilators of some polynomials in the Lie algebra $W_n(K)$. / A.P. Petravchuk, V.V. Stepukh // International Mathematical Conference on occasion to the 70th year anniversary of Professor V.V.Kirichenko, June 13–19, 2012, Mykolaiv, Ukraine. — P.112.

7. Степух В.В. Централізатори елементів в алгебрі Лі $W_2(K)$. / В.В. Степух //Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, 25–27 квітня, 2013, Київ, Україна. — С.138.

8. Stepukh V.V. On centralizers of elements in some Lie algebras of derivations. / A.P. Petravchuk, Ie.O. Makedonskiy, V. V. Stepukh / 9-th International Algebraic conference in Ukraine, July 8–13, 2013, L’viv, Ukraine. — P.119.

9. Степух В.В. Слабо полупростые дифференцирования кольца многочленов от двух переменных. / В.С. Гавран, В.В. Степух // Четвёртая школа-конференция Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов, 27 января — 1 февраля, 2014, Москва, Российская Федерация. — С.15—16.

10. Stepukh V.V. On centralizers of elements in Lie algebras of derivations./S.V. Lysenko, A.P. Petravchuk, V.V. Stepukh // The International Algebraic Conference dedicated to the 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin, July 7–12, 2014, Kiev, Ukraine. — P.59.

11. Степух В.В. Централізатори елементів алгебри Лі диференціювань. /В.В. Степух // IX-а Літня школа Алгебра, топологія і аналіз, 7–18 Липня, 2014, с. Поляниця, Івано–Франківська область, Україна. — С.78–79.

12. Stepukh V.V. On bases of Lie algebras of derivations. / A.P. Petravchuk, V.V. Stepukh // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd, August 20–27, 2015, Odesa, Ukraine. — P.85.

АНОТАЦІЯ

Степух В.В. *Централізатори елементів і абелеві підалгебри в алгебрах Лі диференціювань*. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 — алгебра і теорія чисел. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОН України, Київ, 2016.

Дисертація присвячена вивченню централізаторів елементів, абелевих підалгебр, ануляторів та комутативних базисів в алгебрах Лі диференціювань полів і кілець многочленів та слабко напівпростих многочленів, які породжують двовимірні неабелеві підалгебри в алгебрі Лі диференціювань кільця многочленів від двох змінних.

В дисертаційній роботі описано будову централізаторів елементів в алгебрі Лі диференціювань кільця многочленів від двох змінних над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль, дано опис максимальних абелевих підалгебр в цій алгебрі Лі; залежно від степеня трансцендентності поля констант диференціювання D описано централізатор D в алгебрі Лі диференціювань поля алгебраїчних функцій від кількох змінних, вказано зв'язок між деякими класами комутативних базисів алгебр Лі диференціювань таких полів, вказано метод побудови комутативних базисів. Отримано критерій слабкої напівпростоти многочленів від двох змінних з відокремленими змінними, встановлено їх основні властивості, знайдено закон зміни дивергенції диференціювання поля алгебраїчних функцій від двох змінних при переході від одного базису трансцендентності до іншого базису трансцендентності цього ж поля. Досліджено структуру ануляторів множин раціональних функцій в алгебрі Лі диференціювань поля раціональних функцій від кількох змінних і в алгебрі Лі диференціювань кільця многочленів від кількох змінних.

Ключові слова: алгебра Лі, централізатор елемента, диференціювання, анулятор, комутативний базис, максимальна абелева підалгебра, слабко напівпростий многочлен.

АННОТАЦИЯ

Степух В.В. *Централизаторы элементов и абелевы подалгебры в алгебрах Ли дифференцирований*. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - алгебра и теория чисел. - Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко МОН Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена изучению централизаторов элементов, абелевых подалгебр, аннуляторов и коммутативных базисов в алгебрах Ли дифференцирований полей и колец многочленов, слабо полупростых многочленов, порождающих двумерные неабелевы подалгебры в алгебре Ли дифференцирований кольца многочленов от двух переменных.

В диссертационной работе описано строение централизаторов элементов в алгебре Ли дифференцирований кольца многочленов от двух переменных над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль, дано описание максимальных абелевых подалгебр в этой алгебре Ли; в зависимости от степени трансцендентности поля констант дифференцирования D описано централизатор D в алгебре Ли дифференцирований поля алгебраических функций от нескольких переменных, отмечена связь между некоторыми классами коммутативних базисов алгебр Ли дифференцирований таких полей, указан метод построения коммутативных базисов. Получен критерий слабой полупростоты многочленов от двух переменных с разделенными переменными, указаны их основные свойства, установлен закон изменения дивергенции дифференцирования поля алгебраических функций от двух переменных при переходе от одного базиса трансцендентности к другому базису трансцендентности этого поля. Исследована структура аннуляторов множеств рациональных функций в алгебре Ли дифференцирований поля рациональных функций от нескольких переменных и в алгебре Ли дифференцирований кольца многочленов от нескольких переменных.

Ключевые слова: алгебра Ли, централизатор элемента, дифференцирование, аннулятор, коммутативный базис, максимальная абелева подалгебра, слабо полупростой многочлен.

ABSTRACT

Stepukh V. V. *Centralizers of elements and abelian subalgebras in Lie algebras of derivations.* — Manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate’s degree of Physical and Mathematical Sciences on the speciality 01.01.06 — algebra and number theory.— Taras Shevchenko National University of Kyiv MES of Ukraine, Kyiv, 2016.

The dissertation is devoted to the investigation of centralizers of elements, maximal abelian subalgebras of Lie algebras of derivations, annihilators of sets of rational functions in Lie algebras of derivations, commutative bases of such Lie algebras and weakly semisimple polynomials.

In the first chapter we give a short review of the references related to the topics studied in the dissertation.

In the second chapter, some basic definitions and important facts are collected that are widely used in the subsequent chapters.

The third chapter is devoted to centralizers of elements in the Lie algebra of derivations of polynomial rings in two variables over an algebraically closed field of characteristic zero. To study such centralizers is useful to extend a given derivation to the field of rational functions in two variables and to investigate the subfield of constants of this derivation. A description of maximal abelian subalgebras in this Lie algebra is given. The structure of such a maximal abelian subalgebra depends on the

properties of the subfield of constants for some derivations in the field of rational functions. For a derivation D of a field of algebraic functions in several variables the centralizer of D is described depending on transcendence degree of the field of constants for the derivation D. Some relations among some classes of commutative bases in Lie algebras of derivations of such fields are pointed out, an approach to constructing such commutative bases is obtained.

The fourth chapter deals with weakly semisimple polynomials in two variables. Ten years ago, Y. Stein posed a problem of describing all weakly semisimple polynomials (such a description would characterize all two dimensional nonabelian subalgebras of the Lie algebra of all derivations with zero divergence). Since weakly semisimple polynomials induce the Jacobian derivations which can be included in a two-dimensional nonabelian subalgebras in the Lie algebra of all derivations of the polynomial ring, these polynomials are useful in study some problems related to the jacobian conjecture. A description of weakly semisimple polynomials with separated variables is given and their properties are obtained.

In the fifth chapter, annihilators of sets of rational functions in the Lie algebra of derivations of polynomial rings are studied. The structure of the annihilator for a set S of rational functions is described under some restrictions, some sets of generators of this annihilator are pointed out. A method of building some commutative bases in Lie algebra of derivations of a field of algebraic functions in two variables is pointed out. This approach uses some results of A. Nowicki about commutative bases in Lie algebras of derivations of polynomial rings. The law of changing of divergence when we change a transcendence basis of the field is found. In particular, the divergence does not depend on the choice of the coordinate polynomials in the polynomial ring.

The results provided in PhD Thesis are important from the theoretical point for the development of differential algebra and Lie theory.

Keywords: Lie algebra, centralizer of an element, derivation, annihilator, commutative basis, maximal abelian subalgebra, weakly semisimple polynomial.