

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ПРИХОДЬКО ДМИТРО ФЕДОРОВИЧ

УДК 539.3

**КОЛИВАННЯ КОНСОЛЬНОГО СТРИЖНЯ ІЗ ЗАКРИТИЧНИМ
СТАТИЧНИМ СТАНОМ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНІЙ ВІБРАЦІЇ
ЗАКРІПЛЕННЯ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико – математичних наук

Науковий керівник:
Краснопольська Тетяна
Сігізмундівна,
доктор фізико – математичних
наук, старший науковий
співробітник

Київ – 2016

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1 СУЧАСНІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ КОНСОЛЬНИХ СТРИЖНІВ	9
1.1 Огляд літератури	9
1.2 Теорія динамічних систем	15
1.3 Параметричне збурення коливань	22
РОЗДІЛ 2 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА СТАБІЛІЗАЦІЯ КОНСОЛЬНИХ СТРИЖНІВ З ЗАКРИТИЧНОЮ ЖОРСТКІСТЮ	31
2.1 Опис експериментальної установки	32
2.2 Методика випробувань	34
2.3 Критерій стабілізації	42
РОЗДІЛ 3 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОЛИВАНЬ КОНСОЛЬНОГО СТРИЖНЯ ТА ЇЇ ДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ	44
3.1 Основні положення лінійної теорії пружності	44
3.2 Постановка задачі про коливання стрижня з закритичною жорсткістю	68
3.3 Динамічні характеристики згинних коливань	70
3.4 Ідентифікація	74
РОЗДІЛ 4 НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ КОНСОЛЬНОГО СТРИЖНЯ З ЗАКРИТИЧНОЮ ЖОРСТКІСТЮ	79
4.1 Згинні коливання стрижня при нелінійному законі пружності	79
4.2 Побудова моделі параметричних коливань стрижня по двох модах при відсутності початкових напружень	83
4.3 Рівняння згинних коливань стрижня при врахуванні в'язкого опору	91
4.4 Побудова моделі параметричних коливань стрижня по двох модах з врахуванням початкових напружень	94
РОЗДІЛ 5 ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ СТРИЖНЯ ПРИ	102

ВЗАЄМОДІЇ ДВОХ ВЛАСНИХ ФОРМ

5.1 Аналіз усталених режимів динамічної системи для моделі закритичного стрижня без початкових напружень 102

5.2 Усталені режими динамічної системи у моделі стрижня з початковими напруженнями 115

ВИСНОВКИ 122

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 123

ВСТУП

Актуальність теми дисертаційної роботи визначається важливістю розуміння законів динаміки консольно-стрижневих конструкцій в наслідок їх широкого застосування в сучасній техніці і новітніх технологіях. Математичне моделювання процесів коливання консольних стрижнів дозволяє виявити нові аспекти їх динаміки, що раніше не привертали увагу вчених.

Динаміка найрізноманітніших і важливих елементів сучасної техніки таких як, висотні споруди, об'єкти ракетно – космічної техніки, чутливі елементи конденсаторів в подушках безпеки автомобілів – моделюються за допомогою консольно-стрижневих систем. Однією з важливих задач динаміки і дослідженні стійкості таких систем є вивчення їх поведінки в умовах зовнішнього вібраційного впливу, коли реалізуються резонансні параметричні коливання. При цьому, як правило, виникають небезпечні динамічні напруження і значні амплітуди коливань. З іншої сторони, відомо, що високо частотний вібраційний вплив призводить до виникнення таких несподіваних динамічних явищ як стабілізація верхнього положення перевернутого маятника при вертикальній вібрації його вісі підвісу (маятник Стефенсона-Капіці), як рух кільця вгору на оберненому маятнику (маятник Челомея) і стабілізація кільця в деякому стійкому положенні. Іншим захоплюючим прикладом є стабілізація у вертикальному положенні гнучкого каната і навіть рух чародіїв вгору по такому канату, так званий ефект магічного індійського каната (the 'Indian rope trick').

Ці ефекти покладені в основу функціонування деяких приладів і технологічних процесів. Спосіб вібраційної стабілізації прямолінійної форми вісі може використовуватись, наприклад, для самоцентрування при подачі гнучкої проволочи (нитки, шланга) з намоточного барабана модуля для подальшої її технологічної обробки.

Розв'язку задач вібраційної стабілізації гнучких пружних стрижнів при зовнішньому вібраційному збуренні були присвячені чисельні роботи таких видатних вчених: В.В. Болотіна, А.С. Вольміра, І.І. Блехмана, О.М.Гузя, М.П. Матвєєва, Я.Г. Пановко, Г.Я. Пановко, Г.С. Писаренко, К.М. Рагульскиса, А.Р. Ржаніцина, С.П. Тимошенко, Г. Циглера, А.П. Яковлева, D. Acheson, B. Budiansky, A. Champneys, N.J. Mallon, A. Stephenson та інших. Тим не менше, деякі аспекти цієї проблеми такі, як стабілізація та визначення частотних діапазонів параметричних коливань по власним формам закритичних пружних консольних стрижнів (тобто стрижнів, які за означенням С.П.Тимошенко в положенні вільного спокою прогинаються і мають вигнуту форму під дією власної ваги) потребують подальшого дослідження. Саме дослідженню таких актуальних питань і присвячена данна дисертаційна робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Робота виконувалась в рамках наукових напрямків кафедри теоретичної та прикладної механіки КНУ. Зокрема, результати ввійшли у звіт НД теми 14БП038-02 "Математичні та експериментальні методи механіки спряжених коливальних процесів і хвильових полів та їх застосування в гіроскопічних геонавігаційних та мікроелектромеханічних системах".

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є встановлення закономірностей регулярних і хаотичних динамічних режимів коливань при згинних деформаціях та дослідженні ефекту вібраційної стабілізації консольних стрижнів із закритичним статичним станом. Поставлена мета досягається на основі експериментального і теоретичного вивчення стабілізації і згинних коливань гнучких стрижневих систем.

Для досягнення поставлених цілей були сформульовані наступні наукові задачі:

- експериментально дослідити ефект стабілізації та коливань закритичного стрижня при згинних деформаціях та при вертикальних вібраціях з різними частотами;

- визначити основні динамічні характеристики та ідентифікувати параметри стрижня із закритичним статичним станом;
- побудувати математичні моделі резонансних параметричних коливань стрижня із закритичним статичним станом при двохмодовій апроксимації нелінійних згинних деформацій стрижня при урахуванні початкових напружень і без їх урахування;
- вивчити закономірності регулярних і хаотичних режимів коливань закритичного стрижня при згинних деформаціях.

Об'єктом досліджень є коливання при згинних деформаціях та вібраційна стабілізація стрижня із закритичним статичним станом.

Предметом дослідження є динамічні характеристики (власні частоти та форми) і регулярні та хаотичні режими сталих коливань стрижнів із закритичним статичним станом при згинних деформаціях.

Методи дослідження. Використовується комплексний метод дослідження, який складається з об'єднання експериментальних, аналітичних та чисельних методів дослідження динамічних стрижневих систем. Розробка розрахункових моделей досліджуваної системи виконана на основі класичних методів нелінійної механіки. Для розрахункового аналізу використовувались аналітичні методи: Бубнова-Гальоркіна, багатомаштабних розкладів, усереднення по швидкому часу, визначення показників Ляпунова, фазових портретів, часових реалізацій та спектральних щільностей.

Наукова новизна роботи полягає в

- експериментальному визначенні частотних значень вертикальних вібрацій для резонансних коливань по другій і третій власним формам згинних коливань і вертикальній стабілізації стрижня із закритичним статичним станом;
- побудові математичних моделей резонансних нелінійних параметричних коливань стрижня із закритичним статичним станом з урахуванням початкових напружень і без їх урахування;

- доведенні існування і визначенні характеристик регулярних та хаотичних режимів усталених коливань стрижнів із закритичним статичним станом.

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що

- встановлені значення параметрів, при яких виникає стабілізація стрижня із закритичним статичним станом;
- встановлені закономірності регулярних та хаотичних режимів доцільно використовувати при моделюванні та аналізі коливань консольно-стрижневих систем при згинних деформаціях.

Особистий внесок здобувача. Результати роботи відображені в шести статтях. З них одна робота опублікована в міжнародному періодичному журналі, який включено до міжнародних наукометричних баз. Формулювання загальної проблеми динаміки закритичних стрижнів належить д.ф. – м.н. професору В.В. Мелешку, який її сформулював у 2011 році. Постановка основних задач та ідей належать науковому керівнику д.ф. – м.н. Т.С. Краснопольській. Деякі ідеї та допомога при розрахунках резонансних характеристик належать д.ф. – м.н. професору О.А. Гуржію. Побудова аналітичних моделей, експериментальні дослідження і чисельне моделювання були виконані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Матеріали дисертації доповідались на:

- Міжнародній конференції «Шевченкова весна» 19-23 березня, 2012, Київ, Україна;
- Міжнародній конференції «Сучасні математичні методи досліджень в механіці», Міжнародна наукова школа–семінар, 8-11 жовтня, 2012, Київ, Україна;
- семінарі «Сучасні проблеми механіки» (керівники: академік НАН України В.Т. Грінченко, чл. – корр. НАН України А.Ф. Улітко) Київського національного університету ім. Т. Шевченка (січень 2012);
- Міжнародній конференції «Шевченкова весна», 2013, Київ, Україна;

- II Міжнародній конференції «Сучасні проблеми механіки» 27-29 серпня 2013, Київ, Україна;
- 6 Chaotic Modeling and Simulation International Conference, 11-14 June, 2013, Istanbul, Turkey;
- 8th European Nonlinear Oscillations Conference, 6-11 July, Vienna, Austria
- III Міжнародній конференції «Сучасні проблеми механіки» 27-29 серпня 2015, Київ, Україна
- семінарі «Сучасні проблеми механіки» (керівники: академік НАН України В.Т. Грінченко, д.ф. – м.н. Я.О. Жук) Київського національного університету ім. Т. Шевченка (січень 2016).

Публікації. Результати досліджень опубліковані в одинадцяти публікаціях, у тому числі – в шести статтях та в п'яти збірниках абстрактів міжнародних конференцій. З них одна стаття опублікована в міжнародному науковому періодичному журналі, який має DOI (Digital Object Identifier) і яка включена до міжнародних наукометричних баз. Абстракти доповідей опубліковані в п'яти збірниках міжнародних конференцій.

Структура та об'єм дисертації. Дисертаційна робота складається з вступу, п'яти розділів, висновків і списку використаних літературних джерел з 94 найменувань. Основний текст роботи займає 122 сторінки. В роботі приведено 30 рисунків і 9 фотографій. Повний об'єм роботи складає 131 сторінку.

РОЗДІЛ 1

СУЧАСНІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ КОНСОЛЬНИХ СТРИЖНІВ

1.1 Огляд літератури

Стрижневі конструкції представляють широкий клас механічних об'єктів, які активно використовуються в сучасному машинобудуванні, а також в промисловості і техніці. В умовах експлуатації стрижневі конструкції піддаються дії інтенсивних динамічних, зокрема періодичних навантажень, що обумовлює виникнення складних нестационарних процесів. Тому зрозумілий постійний і не спадаючий інтерес дослідників, інженерів і конструкторів до задач динамічних стрижневих систем.

Першочергово такі задачі розглядалися в спрощеній лінійній постановці та зводилися до визначення власних частот та форм коливань, до виявлення та прогнозування можливих резонансних ситуацій. Розв'язкам таких задач присвячені роботи таких видатних вчених, як В.Т. Грінченко [12–15], О.М. Гузь [16], В.В. Мелешко [34–36], А.Ф. Улітко [15]. Починаючи з середини минулого століття становище суттєво змінилося. Прогрес машинобудівної, авіаційної, будівельної та інших областей нової техніки, що супроводжується збільшенням робочих швидкостей та підвищенням інтенсивності динамічних навантажень, створив передумови для розвитку теорії нелінійних коливань пружних тіл. В роботах таких видатних вчених, як Болотін В.В. [6, 7], Вольмір А.С. [9], Ганієв Р.Ф. [10], Кононенко В.О. [10], Пановко Я.Г. [40, 41], Писаренко Г.С. [42], Тимошенко С.П. [50, 51], Челомей В.М. [53–55] було показано, що лінійне трактування недостатнє для опису і пояснення таких явищ, як залежність частот від амплітуд деформацій, зриви коливань, затягування коливань по частоті та інші. Тоді ж почались дослідження параметрично збудованих коливань стрижнів. Найбільш суттєвий внесок в нього зробили В.К. Аврамов [1], В.В. Болотін [6, 7], А.С.

Вольмір [9], О.М. Гузь [16], Я.О. Жук [18–23], В.Д. Кубенко [32], Ю.В. Міхлін [94], Я.Г. Пановко [40, 41], І.К. Сенченков [49]. При параметричному збуренні можливе виникнення різних ефектів: втрата стійкості вертикальної форми осі стрижня, зникнення старих і поява нових положень рівноваги та видів руху, зміна характеру положення рівноваги. Перераховані ефекти спостерігаються вже у поведінці найпростішої системи у вигляді жорсткого стрижня, що шарнірно закріплений на рухомій опорі, – маятника. Ця система, стала класичною в теорії параметричних коливань, демонструє, що нижнє положення статичної рівноваги при вібрації основи, в залежності від певних параметрів збурення, може виявитися не стійким, а стійким буде верхнє положення (обернений маятник).

Однією з перших робіт, присвяченою дослідженню стійкості оберненого маятника є робота П.Л. Капіци [25]. Він експериментально спостерігав як обернений маятник може досягати стійке положення, якщо прикласти до його основи вертикальне збурення певної частоти (Рис 1.1, а). Він дав теоретичне пояснення даному ефекту. Відмітимо, що про стійкість маятникових систем згадувалось ще в роботах А. Стефенсона [89], в яких було показано, що вертикальна вібрація точки підвісу маятника стабілізує його верхнє положення, а також була висунута думка про можливість стабілізації двохланкового та навіть трьохланкового маятника (Рис. 1.1, а) [90].

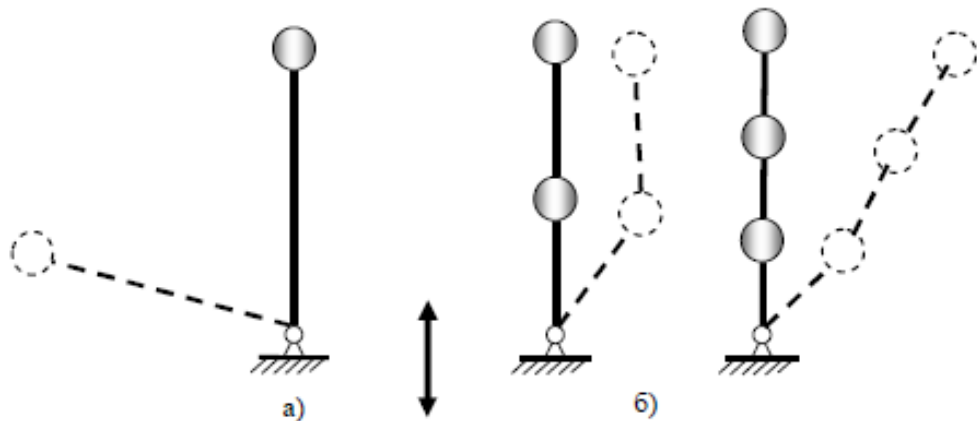


Рис. 1.1. Маятникові системи

В багатьох наступних роботах, присвячених аналізу динамічної поведінки оберненого маятника, вивчалися різні аспекти цієї задачі: в тому числі, можливі схематизації маятника (математичний або фізичний маятник), врахування пружності маятника, зовнішнього тертя, розсіювання внутрішньої енергії, впливу закону та напрямку збурення і т.п.

Проблема динамічної стійкості оберненого математичного маятника (Рис. 1.1 а) відома ще з початку двадцятого століття, починаючи з класичних експериментів А. Стефенсона [89, 90]. Роботами академіків М.М. Боголюбова [5], В.В. Болотіна [6, 7], Р.Ф. Ганієва [10], П.Л. Капіци [25], В.М. Челомея [53–55] та інших видатних вчених минулого була створена завершена теорія коливань такого маятника при динамічному гармонічному збуренні точки підвіса. При цьому накопичений великий обсяг даних, які мають важливе застосування в різних галузях промисловості, авіабудуванні, ракетобудуванні та суднобудуванні, зокрема.

Близько двадцяти років тому, починаючи з 1993 р., теоретичні та експериментальні роботами британського вченого Д. Ачесона [60, 61] привернули увагу до більш складної системи, яка складається з N послідовно з'єднаних маятників при гармонічному збуренні нижньої точки підвіса. Були визначені області параметрів, при яких відбуваються стійкі (гармонічні та хаотичні) коливання. Виникає важливе питання: що буде в системі з розподіленими параметрами, як граничний перехід до нескінченного N при зменшенні довжини кожного маятника. Модель тонкого пружного стрижня може розглядатись, як перехід від системи нескінченного числа N послідовно з'єднаних обернених плоских маятників при зменшенні довжини кожного маятника (коли мала пружність нібито додається у місця з'єднань) до системи з розподіленими параметрами.

Детальний огляд досліджень, присвячених дослідженню маятникових систем при віброуючій основі приведений в книзі Блехмана І.І. «Вібраційна механіка» [5]. Розвиток досліджень присвячених стійкості верхнього

положення маятника, привело до нових постановок задач, зокрема розглядались задачі стійкості маятника, в тілі якого розташовані пружно-підвішені маси (з «внутрішніми» степенями вільності) (Рис. 1.2) [5]. Додаткова маса зв'язана з маятником пружно-в'язкими елементами радіальному або тангенційному напрямкам. Прийнято, що вісь маятника виконує періодичні коливання в горизонтальному або вертикальному напрямках по періодичним законам. Було виявлено, що додаткова степінь вільності може суттєво змінити поведінку маятника з віброуючою віссю підвісу: нестійкі положення рівноваги стають стійкими або навпаки. В деяких роботах показано, що для забезпечення стійкості верхнього положення маятника при наявності додаткової рухомої маси потребує значно менше значення амплітуди і швидкості коливань осі маятника, ніж при її відсутності.

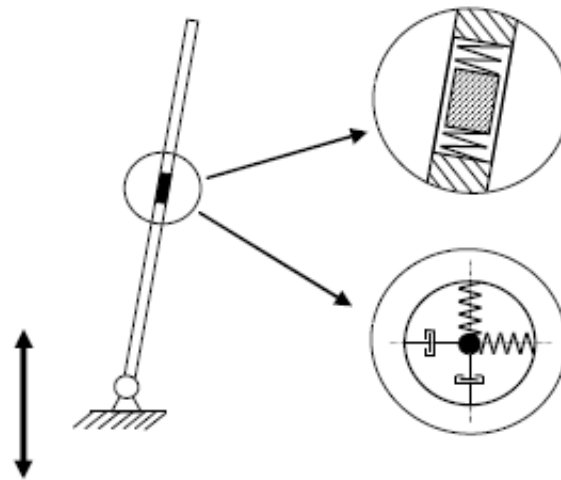


Рис. 1.2. Схема маятника в тілі якого розташовані пружні маси

Ідеалізація маятника у вигляді жорстких недеформівних тіл послідовно з'єднаних пружно-в'язкими шарнірами дозволяє також розглядати задачу про стійкість верхнього положення пружного стрижня.

Далі в роботі ми будемо розглядати поведінку закритичного стрижня, що консольно защемлений по вертикалі на віброуючій основі. Такий стрижень в статичному положенні при певних умовах втрачає стійкість

статичної форми рівноваги в полі сил тяжіння і його вісь викривляється – це називається явищем випучування [92].

Відомі роботи, в яких показують, що вібрація основи призводить до випрямлення зігнутої осі, інакше кажучи, цей випадок називається вібраційною стабілізацією. Однією з перших робіт, присвячених стабілізації стрижня є книга Б. Будянського [63], а також стаття Шамни і Фрайзера [64], в якій досліджуються параметричні коливання закритичного стрижня, який знаходиться в полі сил тяжіння. В роботі [64] було проаналізовано умови, при яких викривлена під дією сил тяжіння вісь стрижня випрямляється і стає вертикальною при вібрації основи. В результаті виконаного у роботах А.М. Гуськовим, Г.Я. Пановко та Т. Мяло [17, 38] аналізу, було детально досліджено рух кільця вздовж пружного стрижня при його параметричному збуренні.

Питання вібраційної стабілізації прямолінійної форми осі стрижня є важливою не тільки з наукової точки зору, але і з практичної точки зору. Для багатьох технічних систем питання про відновлення прямолінійної форми може мати принципове значення. Це відноситься до деяких антенних систем, гнучких трубопроводів, ультразвукових інструментів з гнучкими хвилеводами. В системах подачі гнучких ниток та проволоки.

Спосіб вібраційної стабілізації прямолінійної форми осі гнучкого стрижня може використовуватись, наприклад, при створенні системи самоцентрування гнучких стрижнів, ниток, шлангів. На деякій ділянці проволока із-за викривлення, що виникло через втрату стійкості (у випадку вертикального розташування технологічної вісі станка), не вставляється в прийомний отвір оброблюючого модуля станка. Завдяки вібрації подаючих роликів проволока стабілізується та легко центрується відносно центру прийомного отвору. Приблизно за такою ж схемою працює система подачі з'єднувальних шлангів та інших гнучких елементів.

Стрімкий розвиток техніки, високотехнологічні й енергоємні виробництва ставлять перед сучасною наукою нові задачі, однією з яких є

розробка нових пристроїв. Сьогодні добре відомо, що дослідження в області мікроелектро-механічних систем (МЕМС) за останні десять років стали частиною великої науки і великого бізнесу.

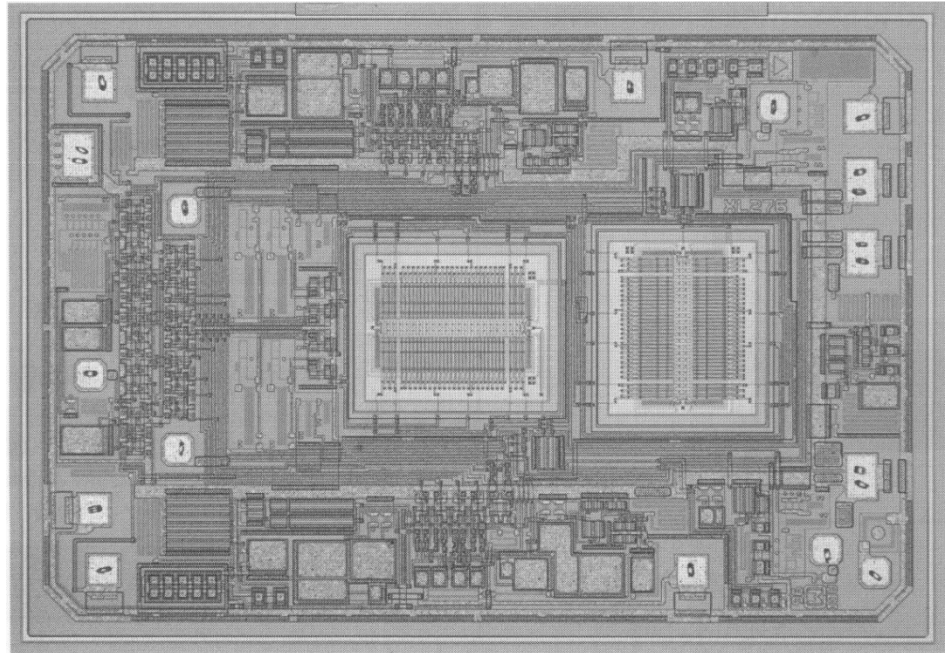


Рис. 1.3. Прилад для виявлення удару та подачі команди активації подушки безпеки, створений на МЕМС–технології [91]

Ці досягнення призвели до великих промислових успіхів, як це було з використанням активації подушок безпеки (Рис. 1.3) [91]. Мікроелектро-механічна система для подушок безпеки, яка вперше з'явилась в 1980-х роках, складається з інтегральної системи на кремнійовій пластині, розміром всього декілька міліметрів ($10^{-3} м$), яка включає в себе як електронні компоненти, так і електромеханічний пристрій, що здатен виявити фізичний удар. Ділянка-детектор (Рис. 1.4) довжиною декілька сот мікрометрів представляє собою серце цього чіпа. Він складається з двох балок, одна балка – підкладка є фіксованою, а інша – рухомою; ємність такого детектора, що складається з цих балок в електричному полі, змінюється пропорційно згину

балки $\delta x \approx \left(\frac{x}{L}\right)\delta L$ під дією удару (Рис. 1.4). Мініатюризація

конденсаторів дозволяє створювати високу чутливість та швидке реагування.

Промисловий успіх MEMS обумовлюється не лише покращенням регулювання та чутливості, але і тим, що все інтегровано в одному чіпі (Рис. 1.3): сигнал, аналіз інформації і обробка сигналу. Так само, як і всі інтегральні схеми, цей чіп може бути відтворений в великій кількості екземплярів. Вартість, яка має суттєве значення в області автомобілебудування, такого пристрою мала і тому його виробництво стає дуже вигідним в порівнянні з традиційними системами. З цієї причини всі сучасні автомобілі використовують MEMS для своїх подушок безпеки та мільярди цих приладів виробляється кожен рік.

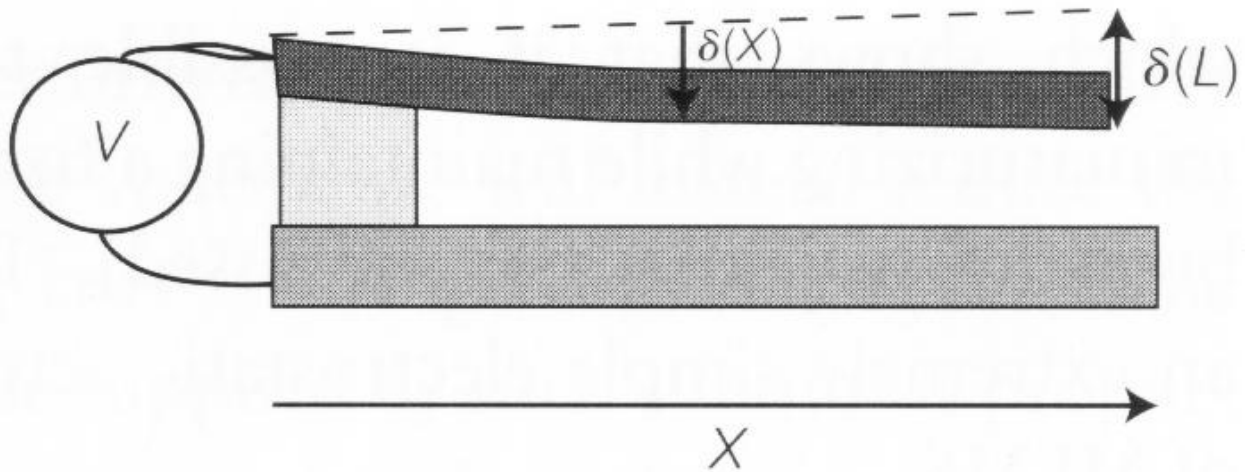


Рис. 1.4. Консольна балка, балка і підкладка є провідниками. Балка піддається дії різниці електричного потенціалу V , створюючи привід [91].

Проте в існуючих дослідженнях питання про області стабілізації та явища хаотизації коливань закритичних стрижнів мало розглянуті в сучасній літературі. Тому в данній роботі буде присвячено увагу саме цим питанням.

1.2 Теорія динамічних системи

Світ фізичних систем характеризується великою кількістю хаотичних режимів. Як завжди досліджується динаміка якої – небудь конкретної механічної системи? Для того щоб «зрозуміти» систему, аналізують її стаціонарні режими, так як вважається, що саме вони «пробивають собі дорогу в життя». Якщо сталі режими в системі у більшій частині випадків

хаотичні, то значення та розуміння їх динаміки зв'язано не з регулярними, а з хаотичними її рухами.

Зупинимось більш детально на деяких характеристиках та поняттях, що використовуються в теорії динамічних систем і які ми будемо використовувати в подальшому. По перше, що таке динамічна система?

Якщо існує закон еволюції, або іншими словами оператор, який ставить у відповідність динамічним змінним, які описують стан системи в даний момент, їх значенню в будь – який наступний момент часу, то ми кажемо, що маємо динамічну систему. Динамічні змінні називають фазовими. Тому за рухом динамічної системи можна спостерігати як за рухом деякої фазової рідини, яку ми гіпотетично можемо уявити. Сам закон може бути записаний як система диференціальних рівнянь, що припускає неперервну зміну змінних, або дискретне відображення, що ставить у відповідність змінній в момент часу n x_n його величину в момент $n + 1$, а саме

$$x_{n+1} = f(x_n) . \quad (1.1)$$

називається нестисненою (динамічна система – недисепативною), якщо

$$\operatorname{div} \dot{V} = 0, \quad (1.2)$$

і стискуваною (а система – дисепативною), якщо

$$\operatorname{div} \dot{V} < 0. \quad (1.3)$$

Математичне визначення динамічної системи складається з трьох компонент [2, 8, 12, 13, 16, 18, 27, 28, 34, 39, 56–58, 70, 77, 78, 81, 88]:

- i) Математичного простору D , що називається фазовим простором [86];
- ii) Часу t , який може бути як неперервним так і дискретним;
- iii) Оператора еволюції φ , що відображає будь яку точку x фазового простору в довільний момент часу t – в однозначно визначений стан $\varphi(x, t)$. При цьому необхідно виконання наступних властивостей:
 - а. $\varphi(x, 0) = x$,

$$b. \varphi(x, t_1 + t_2) = \varphi(\varphi(x, t_1), t_2),$$

c. $\varphi(x, t)$ неперервна по x, t .

Орієнтовану криву, яку отримали при фіксованому значенні x і $-\infty < t < +\infty$, називають фазовою траєкторією динамічної системи. Точки в фазовій площині, що лежать на траєкторії називають зображуваними точками. Підмножина A фазового простору, що містить при $t \rightarrow +\infty$ або $t \rightarrow -\infty$ всі точки з множини $B \supset A$ фазового простору, називається граничною множиною динамічної системи. Гранична множина A в фазовому просторі, до якого при $t \rightarrow +\infty$ прямують всі точки множини B називається аттрактором, а множина B - басейном притягання атрактора.

Процес руху зображуючої точки в фазових просторах дисипативних систем розділяють на два класи:

- a) перехідний – відповідний процесу переходу з початкового стану в граничну множину станів;
- б) усталений (стаціонарний) – відповідає процесу руху по граничній множині.

При цьому характер руху фазової траєкторії називають динамічним режимом динамічної системи. Згідно теорії динамічних систем, дисипативна динамічна система може мати наступні типи аттракторів:

- 1) положення рівноваги (точки в фазовому просторі),
- 2) граничний цикл (замкнуті лінії в фазовій площині),
- 3) квазіперіодичні аттрактори (тороїдальні поверхні в фазовому просторі),
- 4) дивні аттрактори (ірегулярні різноманіття складної структури) [84].

Перші три з яких є регулярними, а четвертий ірегулярним (хаотичним). Аналогічно класифікуються і відповідні усталені динамічні режими.

При аналізі динамічних режимів, що реалізуються в системі, використовується певний набір кількісних і якісних характеристик, що залежить від особливостей модельованої динаміки та характеру еволюційних рівнянь математичної моделі.

Важливими якісними характеристиками динаміки системи є часові реалізації координат моделі та відповідні їм портрети фазового простору. Під часовою реалізацією розуміють графік зміни за часом однієї з координат математичної моделі досліджуваного об'єкту. Відповідним портретом фазового простору буде проекція розглядуваної області фазового простору на координатні площини або підпростори. При цьому і графік часової реалізації і портрет фазового простору дозволяють на якісному рівні класифікувати характер динамічного режиму тільки в часовій області яку виділили.

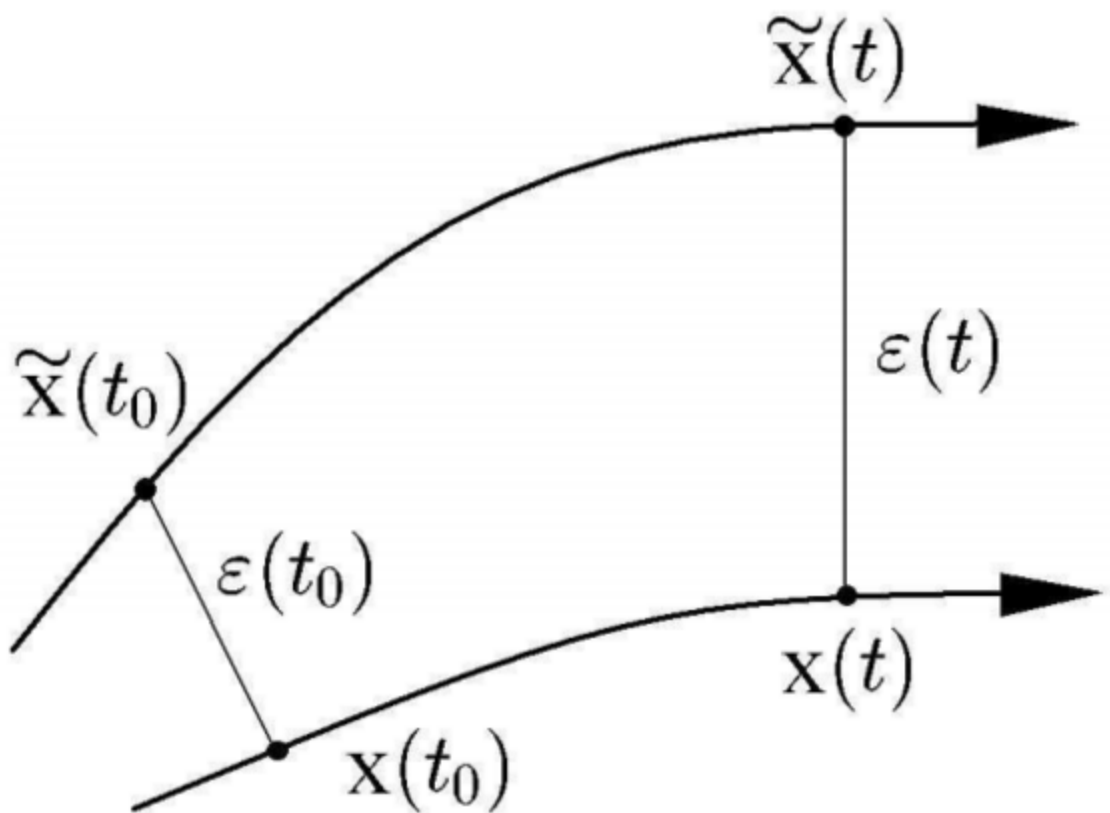


Рис.1.5. Еволюція двох близьких точок у фазовому просторі динамічної системи

Як відомо, однією з необхідних умов хаотичності динамічної поведінки системи є чутливість до значень початкових умов. В якості кількісного критерія цього поняття зазвичай використовується старший показник Ляпунова (експонента Ляпунова) [2, 8, 12, 26, 27, 31, 33, 34, 39, 47, 56, 72, 76, 78].

Розглянемо точку $x t_0$ на аттракторі деякої динамічної системи (Рис.1.5) в початковий момент часу t_0 . Задаючи деяке мале значення εt_0 , виберемо ще одну точку $\mathcal{X}t_0$ на аттракторі, що задовольняє умову $\|\mathcal{X}t_0 - x t_0\| = \varepsilon t_0$. Через проміжок часу Δt точки $x t_0$ і $\mathcal{X}t_0$ еволюціонують відповідно в $x t$ і $\mathcal{X}t$. Відстань між ними позначимо через εt , тут $t = t_0 + \Delta t$. Значення εt залежить від початкового положення точок $x t_0$ і $\mathcal{X}t_0$, а також проміжку часу Δt і динамічної системи в цілому. Проте, наближено, можна вважати, що

$$\varepsilon t \approx \varepsilon t_0 e^{\lambda \Delta t}, \quad (1.4)$$

де λ - старший показник Ляпунова. Таким чином, параметр, що характеризує динаміку зображуючої точки на аттракторі рівний

$$\lambda \approx \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\varepsilon t}{\varepsilon t_0}. \quad (1.5)$$

Тут необхідно враховувати той факт, що з обмеженості аттрактора впливає обмеженість εt і, отже, Δt повинно зростати до того часу, поки εt суттєво менше розмірів аттрактора, а інакше λ буде рівна нулю при $\Delta t \rightarrow \infty$. Отримане значення λ у відповідності до (1.5) слід розглядати як усереднене по всім початковим точкам $x t_0$ аттрактора. Тому, строге визначення старшого показника Ляпунова показано співвідношенням:

$$\lambda = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\varepsilon t}{\varepsilon t_0}, \quad (1.6)$$

де εt суттєво менше розмірів аттрактора. На практиці для знаходження значень старшого показника Ляпунова використовується алгоритм Бенеттіна [62].

Основною характеристикою, що дозволяє на кількісному і якісному рівні досліджувати динамічний режим є частотний спектр. Як відомо,

перетворення Фур'є функції часу є функцією змінної ω , яку слід розглядати як кутову частоту. Тому

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.7)$$

можна розглядати як спектральне представлення часової залежності координати $x(t)$. Аналіз за допомогою перетворень Фур'є називають частотним аналізом. При цьому розглядають графік $F(\omega)$ як функції ω . В загальному випадку $F(\omega)$ є комплексною функцією, тому можна окремо зобразити дійсну та уявну частини функції $F(\omega)$, величину і фазу функції $F(\omega)$:

$$F(\omega) = A(\omega) e^{i\theta(\omega)}, \quad (1.8)$$

тут $A(\omega)$ – амплітуда функції $F(\omega)$, є дійсною невід'ємною функцією аргумента ω :

$$A(\omega) = \sqrt{\Re[F(\omega)]^2 + \Im[F(\omega)]^2}, \quad (1.9)$$

а $\theta(\omega)$ – фаза $F(\omega)$, дійсна функція аргумента ω :

$$\theta(\omega) = \arctan \frac{\Im[F(\omega)]}{\Re[F(\omega)]}. \quad (1.10)$$

Амплітуду $A(\omega)$ для часу реалізації $x(t)$ зручно зображати графічно у логарифмічному масштабі як функцію частоти (при цьому амплітуда виражається в децибелах, а частота – герцах):

$$S(f) = 10 \cdot \lg[A(f)]^2, \quad (1.11)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (1.12)$$

На практиці частотний спектр будується чисельно [12, 36], через дискретне перетворення Фур'є. При цьому часто використовується алгоритм Кулі і Такей (Cooley-Tukey algorithm) швидкого перетворення Фур'є, що суттєво оптимізує кількість необхідних чисельних розрахунків [18].

Передумови для відкриття хаотичних режимів були закладені роботами великого французького математика Анрі Пуанкаре. Він є творцем топології, засновником якісної теорії диференціальних рівнянь [2, 27]. В 1881р. Саме він ввів поняття граничних циклів. Значний внесок у розвиток розуміння хаотичної динаміки внесли роботи російських та радянських вчених. Великий російський математик Олександр Михайлович Ляпунов (більшу частину життя пропрацював у Харківському Технічному Університеті та помер в 1918 р. в Одесі) був також засновником, як і А. Пуанкаре, якісної теорії диференціальних рівнянь. Він ввів в науку такі поняття експоненційні показники Ляпунова, додатність яких є одним з загально прийнятих (і, мабуть, найпопулярнішим) критерієм наявності хаоса в детермінованих системах [33]. Школа, яку заснував відомий математик Андрій Миколайович Колмагоров, зробила цілий ряд відкриттів, зокрема, ввела в теорію динамічних систем поняття ентропії Колмагорова-Синя (відмінна від нуля вона є ще одним критерієм хаоса [72]). Величезний вплив робіт Володимира Ігоревича Арнольда [88] на розвиток механіки, теорії динамічних систем, особливо гамільтонових систем.

Вперше властивості хаотичного атрактора були описані в 1963 р. Едвардом Лоренсом [82], який чисельно розглядав термоконвекцію в атмосфері, яку він моделював як динамічну систему трьох нелінійних рівнянь. Е. Лоренц відкрив двері в новий світ, світ хаосу. (Хоча саме поняття «дивний атрактор» було вперше введено в наукову літературу Рюеллем і Текенсом трохи пізніше при аналізі властивостей переходу до турбулентності [12, 27, 57, 58].) Мабуть, не тільки відкриття хаосу, але і відкриття сценаріїв переходу до хаосу є принципово важливим в теорії динамічних систем. Один зі сценаріїв був відкритий у 1976 р. американським вченим Мітчелом Фейгенбаумом, так званий сценарій переходу через подвоєння періоду.

Хаотичні режими можуть мати місце в різного роду динамічних системах. Зупинимось на понятті локальної нестійкості детальніше. Як слід пам'ятати поява хаоса в розв'язках системи

диференціальних рівнянь, задовольняє теоремі Коші про єдиність розв'язку? Насправді, розв'язки детермінованої динамічної системи не можуть бути випадковими, так як за теоремою Коші однозначно визначаються початкові умови. Хаотична поведінка відрізняється від випадкової тим, що вона відповідає сукупності розв'язків детермінованої динамічної системи. Тенденції розв'язків детермінованої системи до порядку і хаосу в асимптотичному сенсі (тобто коли час наближається до нескінченності) обумовлені локальною стійкістю та нестійкістю. Локально стійкий обмежений рух – це або стан рівноваги, або періодичний (квазіперіодичний) рух. Локально нестійкий неперіодичний усталений обмежений розв'язок визначається як хаотичний. Таким чином, «хаотичний рух» визначається як неперіодичний (аперіодичний) усталений рух, глобально стійкий по Лагранжу (що означає обмежений за величиною, не прямує на нескінченність), але локально нестійкий за Ляпуновим. Крім локальної нестійкості, важливою умовою виникнення хаотичних рухів є відсутність глобального розширення («розбігання» траєкторій). Хаотичні атрактори, як правило, характеризуються дробовою розмірністю.

1.3 Параметричне збурення коливань

Колівання механічних систем можуть викликати не лише зовнішні сили, безпосередньо виконуючи роботу на основних переміщеннях системи, але зовнішні впливи, що змінюють параметри системи (жорсткість, маса).

В деяких випадках параметри, що періодично змінюються, викликають наростаючі коливання системи, має місце параметричний резонанс [3, 4, 40, 41, 52].

Прикладом параметричних коливань є розгойдування на качелях. В цьому випадку вдається збільшити розмахи коливань тільки за рахунок періодичної зміни відстані центра ваги системи від точки підвісу гойдалок. Той же процес може бути відтворено на маятнику з змінною довжиною. Прикладом параметричного збудження коливань є також явище динамічної

нестійкості стрижнів (рис. 1.6), коли під дією поздовжньої сили, що періодично змінювалася, стрижень здійснює поперечні коливання.

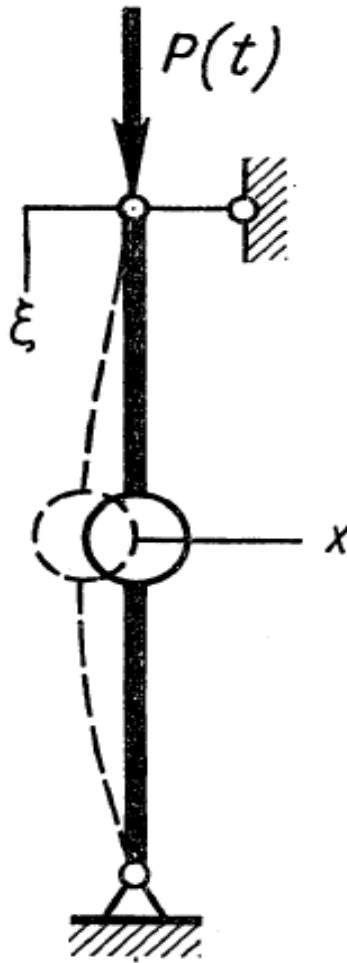


Рис. 1.6. Поперечні коливання стрижня

Як при звичайному так і параметричному резонансі коливання розвиваються в зв'язку з безперервним надходженням енергії в систему. Прослідкуємо цей процес на прикладі динамічної нестійкості стрижня.

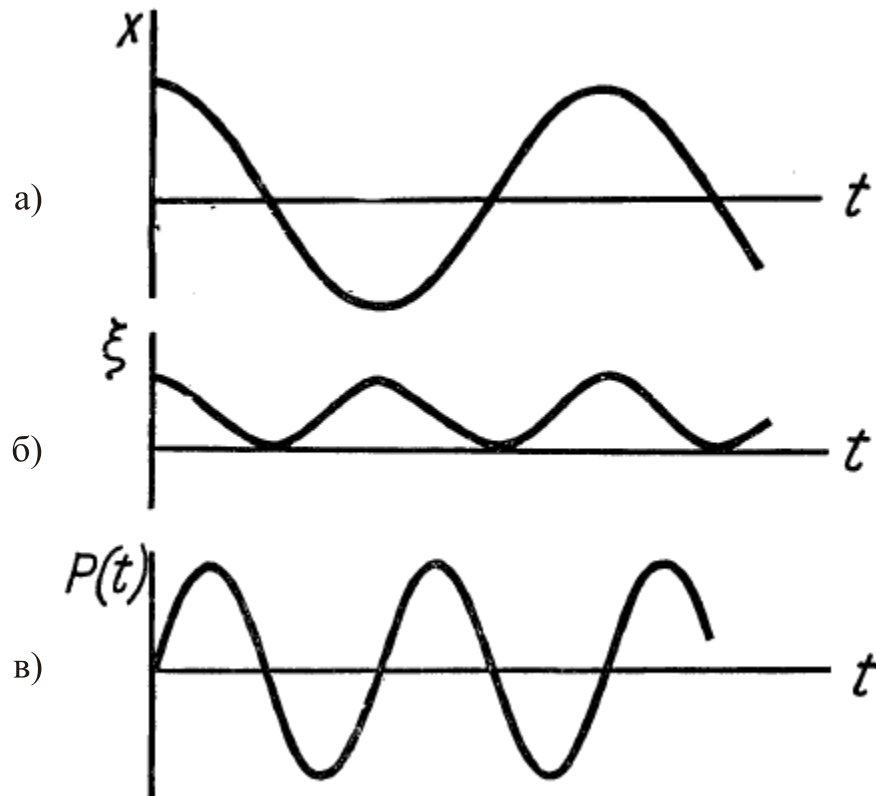


Рис. 1.7. Часові характеристики

Нехай стрижень (рис. 1.6) здійснює власні поперечні коливання з частотою p (рис. 1.7, а):

$$x = f \cos pt.$$

При цьому верхній шарнір отримує невеликі вертикальні переміщення ξ з подвоєною частотою (рис. 1.7, б). Він спускається вниз при відхиленнях вантажу x вліво і вправо та займає найвище положення, коли вантаж проходить положення статистичної рівноваги. Якщо поздовжня сила змінюється також з частотою вдвоє більшою, ніж частота поперечних коливань вантажу (рис. 1.7, в), то вона при кожному циклі виконує роботу і енергія системи безперервно зростає.

Складемо рівняння руху вантажа m , закріпленого на стрижні:

$$m\ddot{x} + c \dot{x} + kx = 0 \quad (1.13)$$

В даному випадку жорсткість стрижня c являється функцією часу, так як вона залежить від величини поздовжньої сили $P(t)$, прикладеної в даний момент. В відповідності до наближеної формули

$$c(t) = c_0 \left[1 - P(t) / P_e \right],$$

де c_0 – жорсткість стрижня при відсутності поздовжньої сили; P_e – ейлерова критична сила для стрижня.

Таким чином, рівняння (1.13) може бути записано в вигляді

$$p^2 \left[1 - P(t) / P_e \right] x = 0 \quad p^2 = c_0 / m. \quad (1.14)$$

Якщо $P(t)$ є періодичною (з періодом τ) функцією часу, то рівняння (1.14) називається рівнянням Хілла [3].

Зосередимо увагу на одному періоді τ зміни параметра. Конструюємо два рішення рівняння (1.14), що задовольняють початковим умовам:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \\ x_2(0) &= 0, \quad \dot{x}_2(0) = 1. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Очевидно, що побудова таких рішень можлива завжди, хоча б шляхом чисельного інтегрування рівняння (1.14). Тоді загальне рішення рівняння (1.14) отримає вигляд

$$x(t) = x_0 x_1(t) + \dot{x}_0 x_2(t), \quad (1.16)$$

де \dot{x}_0 та x_0 – початкові значення швидкості та зміщення.

Знайдемо значення x та \dot{x} в кінці періода при $t = \tau$:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= x_0 x_1(\tau) + \dot{x}_0 x_2(\tau), \\ \dot{x}(\tau) &= x_0 \dot{x}_1(\tau) + \dot{x}_0 \dot{x}_2(\tau). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Якщо припустити, що виконуються рівності

$$x(\tau) = \sigma x_0, \quad \dot{x}(\tau) = \sigma \dot{x}_0, \quad (1.18)$$

де σ – число, більше за одиницю, то це означає, що впродовж періода τ і зміщення, і швидкість зростають в σ раз. При наступному періоді знову відбудеться таке ж зростання розмахів і т.д. Таким чином, при $|\sigma| > 1$

рівняння (1.18) є достатніми умовами нестійкості процесу і необмеженого наростання коливань.

Підставляємо в рівняння (1.18) вираз (1.17), отримуємо систему лінійних однорідних рівнянь відносно x_1 , x_2 . Умова наявності нетривіальних розв'язків цього рівняння приводить до рівності

$$\begin{vmatrix} x_1 \tau - \sigma & x_2 \tau \\ \alpha_1 \tau & \alpha_2 \tau - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

тобто до квадратного рівняння відносно σ

$$\sigma^2 - [x_1 \tau + \alpha_2 \tau] \sigma + x_1 \tau \alpha_2 \tau - \alpha_1 \tau x_2 \tau = 0 \quad (1.19)$$

Вільний член рівняння (1.19) тотожно дорівнює 1. Насправді, x_1 та x_2 є розв'язками рівняння (1.13):

$$\alpha_1 + c t x_1 = 0, \quad \alpha_2 + c t x_2 = 0.$$

Множимо першу з цих рівностей на x_2 , другу – x_1 , віднімаємо почленно та інтегруємо від 0 до τ , знаходимо

$$\int_0^\tau \alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2 dt = \alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2 \Big|_0^\tau = 0,$$

тобто

$$\alpha_2 \tau x_1 \tau - \alpha_1 \tau x_2 \tau = \alpha_2 x_1(0) - \alpha_1 x_2(0) = 1.$$

Таким чином, характеристичний множник визначається рівністю

$$\sigma = A \pm \sqrt{A^2 - 1},$$

де

$$A = [x_1 \tau + \alpha_2 \tau] / 2.$$

Очевидно, якщо

$$|A| > 1 \quad (1.20)$$

то одне із значень $|\sigma| > 1$ і рух нестійкий. Якщо $|A| < 1$, то дійсні значення σ відсутні і нестійкий рух, що відповідає рівнянням (1.18), неможливий.

Граничним є випадок $|A|=1$, $|\sigma|=1$. Таким чином, для того, щоб встановити чи має місце параметричний резонанс при даному законі зміни параметра, необхідно знайти розв'язок $x_1(t)$, $x_2(t)$ та перевірити дотримання нерівності (1.20).

Обчислення розв'язків x_1 , x_2 в загальному вигляді виявляється нескладним, якщо $c(t)$ змінюється кусково-постійному закону (наприклад, якщо впродовж половини періоду поздовжня сила постійна стискаюча, а впродовж другої половини – постійна розтягуюча).

Практично більш важливий випадок, коли параметр змінюється по гармонічному закону

$$c(t) = c_0 + c_1 \cos \omega t.$$

При цьому рівняння (1.13) отримає вигляд

$$\left[\frac{c_0}{m} + \frac{c_1}{m} \cos \omega t \right] x = 0 \quad (1.21)$$

Це рівняння, що називається рівнянням Мат'є, добре вивчено. Характер його розв'язків залежить від двох безрозмірних коефіцієнтів.

Справді, вводячи безрозмірний час $\vartheta = \omega t/2$, приводимо рівняння (1.21) до виду

$$d^2 x / d\vartheta^2 + l + 2q \cos 2\vartheta \quad x = 0, \quad (1.22)$$

де

$$l = 4c_0 / m\omega^2 = 4p^2 / \omega^2, \quad q = 2c_1 / m\omega^2$$

Коефіцієнти l (що характеризують відношення власної частоти системи при середньому значенні параметра c_0 до частоти зміни параметра) та q (характеризує ступінь зміни параметра) повністю визначають стійкість руху. Площина зміни l та q може бути розділена на області, що відповідають стійким і нестійким рухам.

Така діаграма (діаграма Айнса-Стретта) представлена на (рис. 1.8). Ділянки стійкості на рисунку заштриховані. Таким чином, для того щоб

визначити, стійкий чи нестійкий рух, який описаний рівнянням (1.21), достатньо обчислити коефіцієнти l , q , нанести відповідну точку на діаграму та визначити, чи потрапляє вона в стійку (заштриховану) чи нестійку (білу) область.

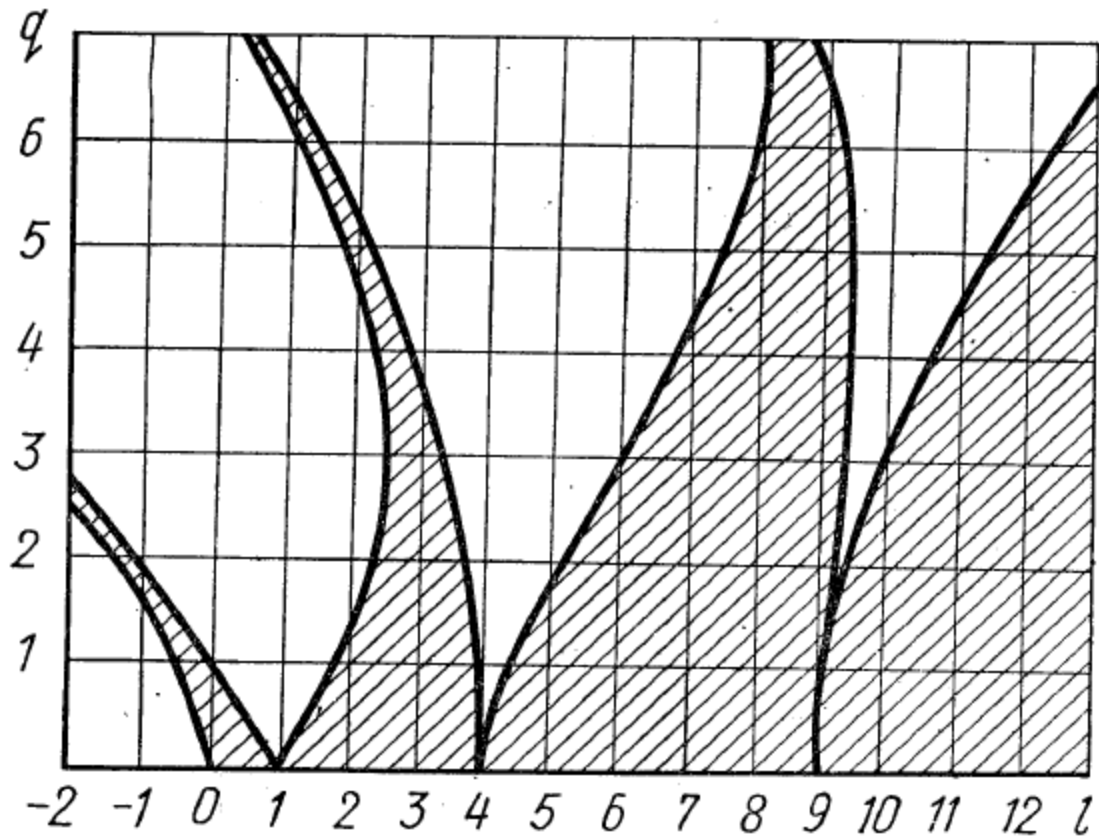


Рис. 1.8. Діаграма Айнса-Стретта

Прослідкуємо як змінюється стійкість системи при зміні частоти ω . В цьому випадку відношення q/l зберігає постійне значення і відповідна точка на діаграмі Айнса-Стретта рухається по променю, який проходить через початок координат. При цьому точка послідовно потрапляє то в область стійкості, до – нестійкості. Бачимо, що при малій зміні параметра (q мале) нестійкість має місце при значеннях параметра $l = 1, 4, 9, \dots$, тобто при відношеннях $p/\omega = 1/2; 1; 3/2; 2; 5/2$ і т.д [3, 40, 41].

Як було вказано, границям зон стійкості відповідають значення $|\sigma|=1$. Отже, в цьому випадку можливі періодичні розв'язки рівняння (1.22). При цьому період руху повинен вдвоє перевищувати період зміни параметра.

Такий рух можна розкласти в ряд Фур'є:

$$x = a_0 + a_1 \cos \vartheta + a_2 \cos 2\vartheta + \dots + b_1 \sin \vartheta + b_2 \sin 2\vartheta + \dots \quad (1.23)$$

Таким чином, границі зон стійкості відповідають тим сполученням безрозмірних коефіцієнтів, при яких рівняння руху має розв'язок виду (1.23).

Наведемо обчислення для випадку, коли в системі є в'язке тертя; при цьому в рівняння руху входить член, пропорційний \dot{x} , і воно може бути приведено до виду

$$d^2x/d\vartheta^2 + \alpha_1 dx/d\vartheta + l + 2q \cos 2\vartheta \ x = 0. \quad (1.24)$$

Для того, щоб наближено визначити границі першої (найбільш важливої), області нестійкості, достатньо в виразі (1.23) утримати лише доданки, пропорційні $\cos \vartheta$ та $\sin \vartheta$:

$$x = a \cos \vartheta + b \sin \vartheta \quad (1.25)$$

Підставляючи цей вираз в ліву частину рівняння (1.24) і виконуючи нескладні тригонометричні перетворення, отримуємо

$$F(\vartheta) = a \left[l - 1 \cos \vartheta - \alpha_1 \sin \vartheta + q \cos \vartheta + \cos 3\vartheta \right] + \\ + b \left[l - 1 \sin \vartheta + \alpha_1 \cos \vartheta - q \sin \vartheta + \sin 3\vartheta \right] \neq 0.$$

Застосовуючи метод гармонічного балансу, який уже використовувався в попередньому параграфі, прирівнюємо до нуля коефіцієнти при $\cos \vartheta$ та $\sin \vartheta$ [більш строгі виконання рівності $F(\vartheta) = 0$ вимагало б обліку більшої кількості доданків в виразі (1.23)]. Отримуємо

$$\begin{aligned} a(l - 1 + q) + b\alpha_1 &= 0, \\ a(-\alpha_1) + b(l - 1 - q) &= 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Прирівнюємо до нуля визначник системи (1.26), знаходимо умову, при якій можлива рівність (1.27):

$$l - 1^2 - q^2 + \alpha_1^2 = 0. \quad (1.27)$$

Ця умова і представляє собою наближене рівняння границь першої зони нестійкості. При цьому нестійкості відповідає нерівність

$$l - 1^2 - q^2 + \alpha_1^2 < 0. \quad (1.28)$$

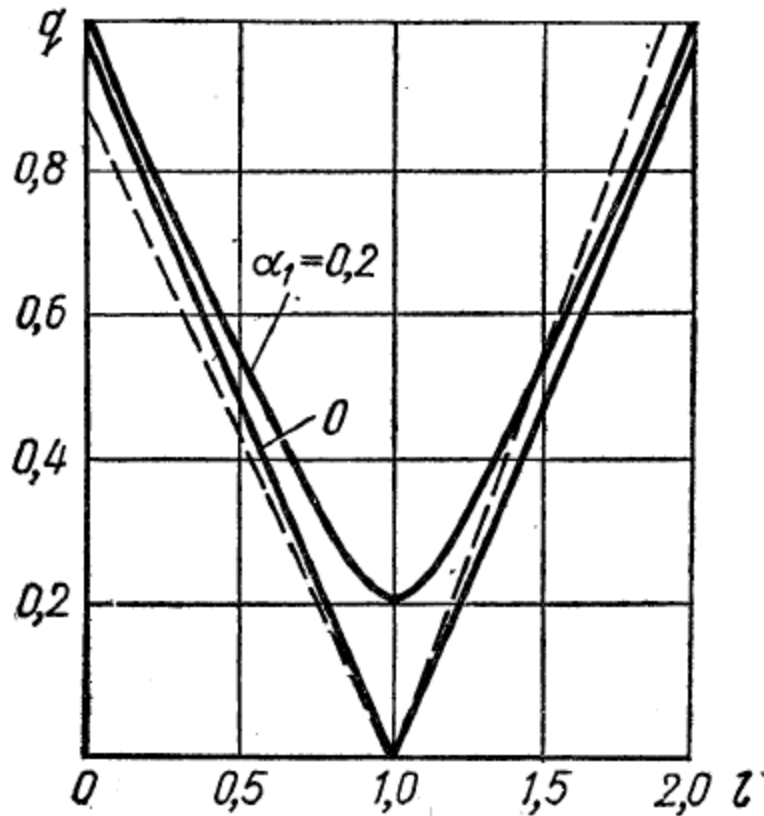


Рис. 1.9. Вплив в'язкого тертя на границі зони нестійкості

На (Рис. 1.9) показані розраховані по рівнянню (1.27) границі $\alpha_1 = 0$ та $\alpha_1 = 0.2$. Для порівняння штриховою лінією показана також точна границя $\alpha_1 = 0$ по діаграмі Айнса-Стретта. Формула (1.27) показує, що при наявності в'язкого тертя параметричний резонанс можливий тільки при $|q| > \alpha_1$, тобто при достатньо великій зміні параметра. При утриманні великої кількості доданків в виразі (1.23) і відповідно більш точному виконанні рівності $F \mathcal{G} = 0$ можна уточнити границі першої області нестійкості та розрахувати границі інших областей.

РОЗДІЛ 2

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА СТАБІЛІЗАЦІЯ КОНСОЛЬНИХ СТРИЖНІВ З ЗАКРИТИЧНОЮ ЖОРСТКІСТЮ

Ціллю данного розділу роботи є експериментальне дослідження коливань і стабілізації «закритичного» стрижня при наявності вертикальних вібрацій. Як вже було зазначено: згідно теорії Тимошенка при відсутності зовнішнього впливу, окрім рівномірно розподіленої сили ваги буде спостерігатися явище випучування гнучкого стрижня, яке полягає в тому, що він втрачає прямолінійний вигляд і його вісь викривляється, тобто в стані спокою вісь стрижня має великий кут відхилення від вертикалі. Такий стрижень називається “закритичним” [92].

Для експериментального підтвердження ефекту стабілізації стрижня з закритичною жорсткістю при консольній фіксації на вібруючій основі, а також з ціллю перевірки теоретичного розрахунку в лабораторії кафедри теоретичної та прикладної механіки були поставлені та проведені відповідні дослід з використанням індикаторної апаратури та приладів.

2.1 Опис експериментальної установки

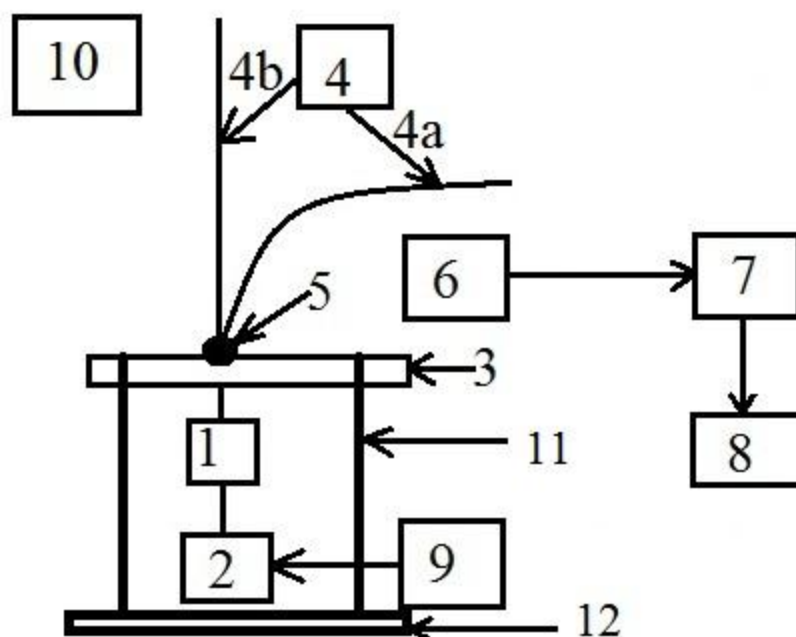


Рис.2.1. Схема експериментальної установки:

(1) – кривошипно-шатунний механізм, (2) – двигун, (3) – жорстко зафіксована станина, (4) – стрижень, де стрілкою 4а показано початкове положення, а стрілкою 4b положення стабілізації. (5) – маркер, (6)– фотоелемент, (7) – осцилограф, (8)- ПК, (9) - регулятор обертів двигуна, (10) – камера.

Для збудження гармонічних коливань у вертикальному напрямі використано електродвигун “ИНТЕРСКОЛ МП-65/550Э”, приєднаний до жорсткої платформи, двигун був з’єднаний з кривошипно – шатунним механізмом. Закритичний стрижень жорстко защемлювався на кінці шатуна, який рухається у вертикальному напрямі з постійною амплітудою.

Частота коливань зчитувалась фотодатчиком, який приєднувався до платформи, та обраховувалась за допомогою осцилографа.

Керування частотою збурення відбувалося за допомогою транзистора, що дає змогу проходити частоти з 0 Гц до 50 Гц з амплітудою вібрацій рівною $\Delta = 9 \cdot 10^{-3}$ м.

Експериментальна модель стрижня складається з сталеві проволочки, яка являла собою щільну кругову намотанку у вигляді жгута з 35 сталевих струн діаметра $25 \cdot 10^{-5}$ м, вага 1 м проволочки $12 \cdot 10^{-3}$ кг, довжина використаного зразка в моделі $l = 26,7 \cdot 10^{-2}$ м. Зовні жгут покритий пластиковою оболонкою. Такий стрижень закріплювався консольно, тобто один кінець жорстко закріплений та приєднаний до кривошипно-шатунного механізму, який з'єднаний з валом електродвигуна, інший кінець був вільним.

Схема експериментальної установки показана на Рис.2.1. Кривошипно-шатунний механізм «1» приводиться в дію електродвигуном «2» та жорстко приєднаний до станини «3», яка в свою чергу зафіксована на важкій основі «11» за допомогою стійок «12». Під важкою основою мається на увазі така основа, що при русі кривошипно-шатунного механізму вся система залишається нерухомою. Стрижень з закритичною жорсткістю «4», був жорстко закріплений на кривошипно-шатунному механізмі, і точка закріплення стрижня позначена маркером «5». На схемі показано два положення стрижня, положення «4а» - стан спокою, «4б» - стабілізація. Для здійснення експерименту необхідно було, щоб електродвигун помірно набирив оберти, цю функцію виконував регулятор обертів «9». Для фіксації частоти коливань використовувався фотодатчик «6», який фіксував рухи маркера «5». Дані з фотодатчика обробляли за допомогою осцилографа «7», і за допомогою персонального комп'ютера «8» приводили в зручний формат для сприйняття. Весь процес проведення експерименту фіксували за допомогою камери «10». Всі елементи експериментальної установки були індикаторними, щоб якісно виявити та зафіксувати динаміку стрижневих систем.

2.2 Методика випробувань

Експеримент проводився наступним чином.

До увімкнення двигуна стрижень з закритичною жорсткістю знаходився в положенні «4а» (Рис.2.1).

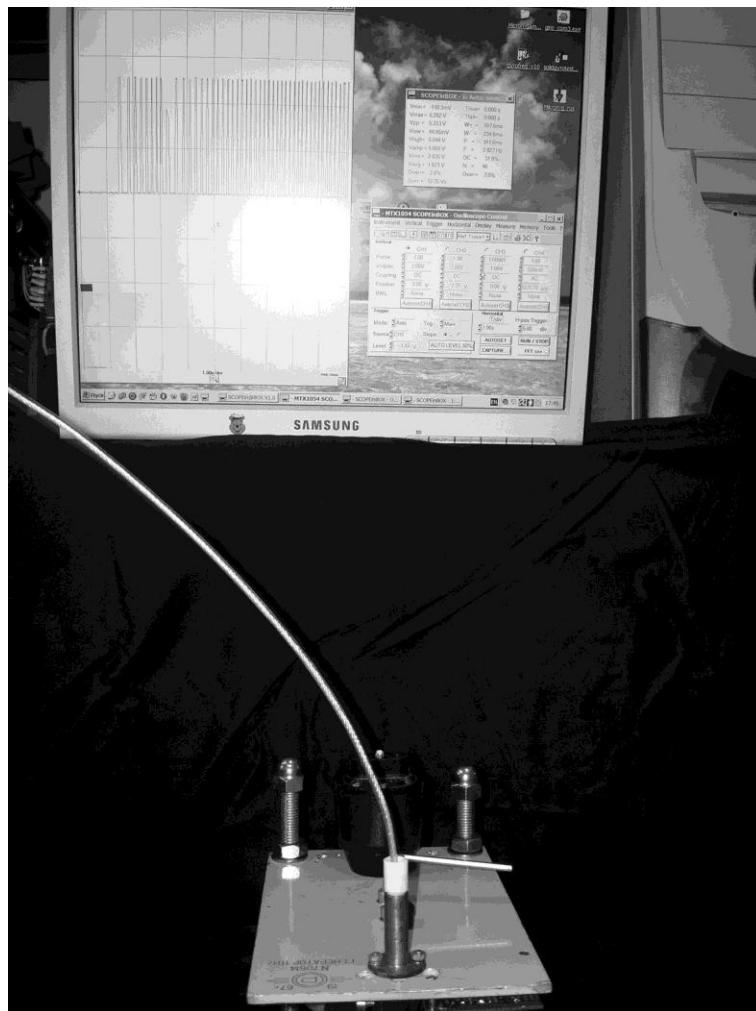


Рис. 2.2. Початкове положення стрижня

Після увімкнення живлення двигуна кривошипно-шатунний механізм починав повільно рухатися по вертикалі, разом з ним починала свій рух точка

жорсткого закріплення стрижня з закритичною жорсткістю «5». При малій частоті коливань стрижень з закритичною жорсткістю рухався у вертикальній площині за точкою закріплення «5», але при цьому не змінював свою форму, показану на фотографії на Рис. 2.2.

Поступове збільшення частоти коливань відбувалося повертанням ручки регулятора обертів «9». При збільшенні частоти коливань точка закріплення стрижня з закритичною жорсткістю збільшує свою швидкість коливань. При збільшенні частоти до 7 Гц спостерігаємо, що стрижень з закритичною жорсткістю на згин починає коліватись по сталій другій власній формі, в якій є два вузли – один рухається разом з точкою жорсткого закріплення, а другий на самому стрижні і рухається вертикально з тією ж амплітудою, що і точка жорсткого закріплення. Таким чином, спостерігаємо, що стрижень з закритичною жорсткістю має сталу форму коливань у вертикальній площині, яка утримується від 7 Гц до 9 Гц та дана на Рис. 2.3.

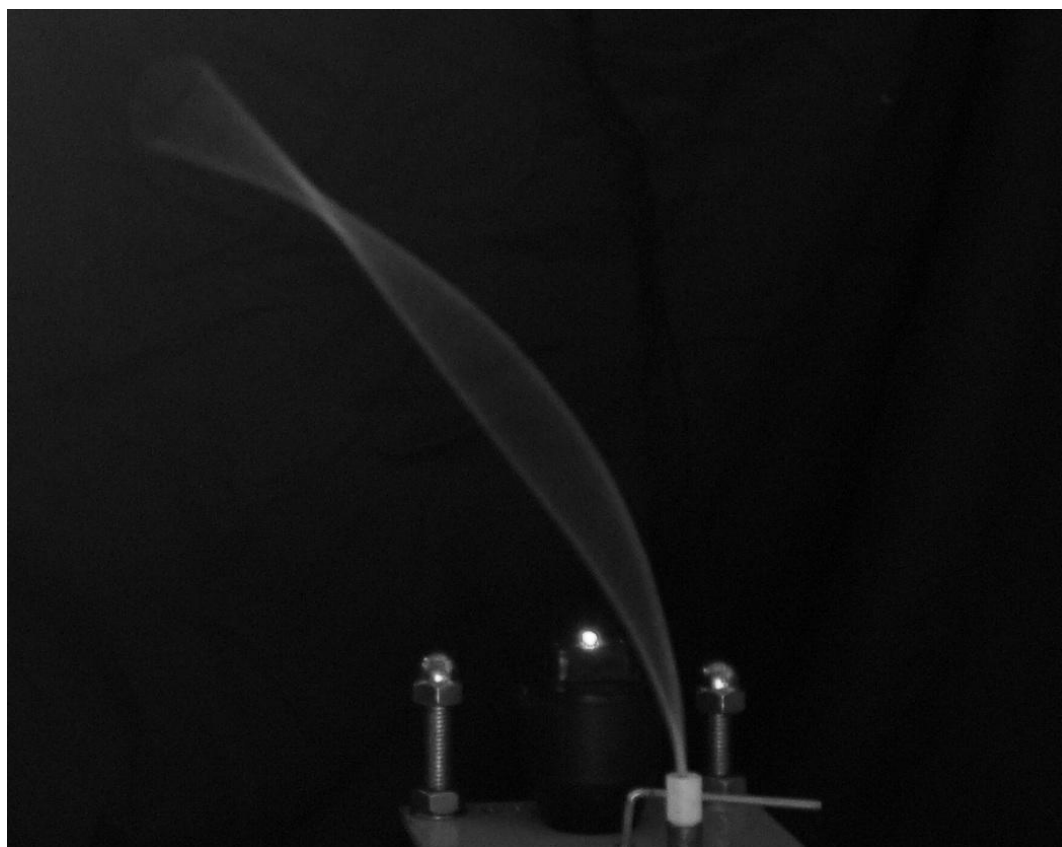


Рис. 2.3. Коливання стрижня по другій власній формі.

При подальшому проведені експериментальних досліджень спостерігається перехід стрижня з закритичною жорсткістю від плоских коливань до просторових коливань. Спочатку стрижень починає розкручуватись відносно вертикальної осі, що проходить через точку закріплення. При цьому реалізовувалась друга форма коливань з двома вузлами. Потім вільний кінець стрижня починав коливатися хаотично із амплітудами (фотографія на Рис. 2.4), які ми спостерігали також при хаотичних коливаннях маятника [38].

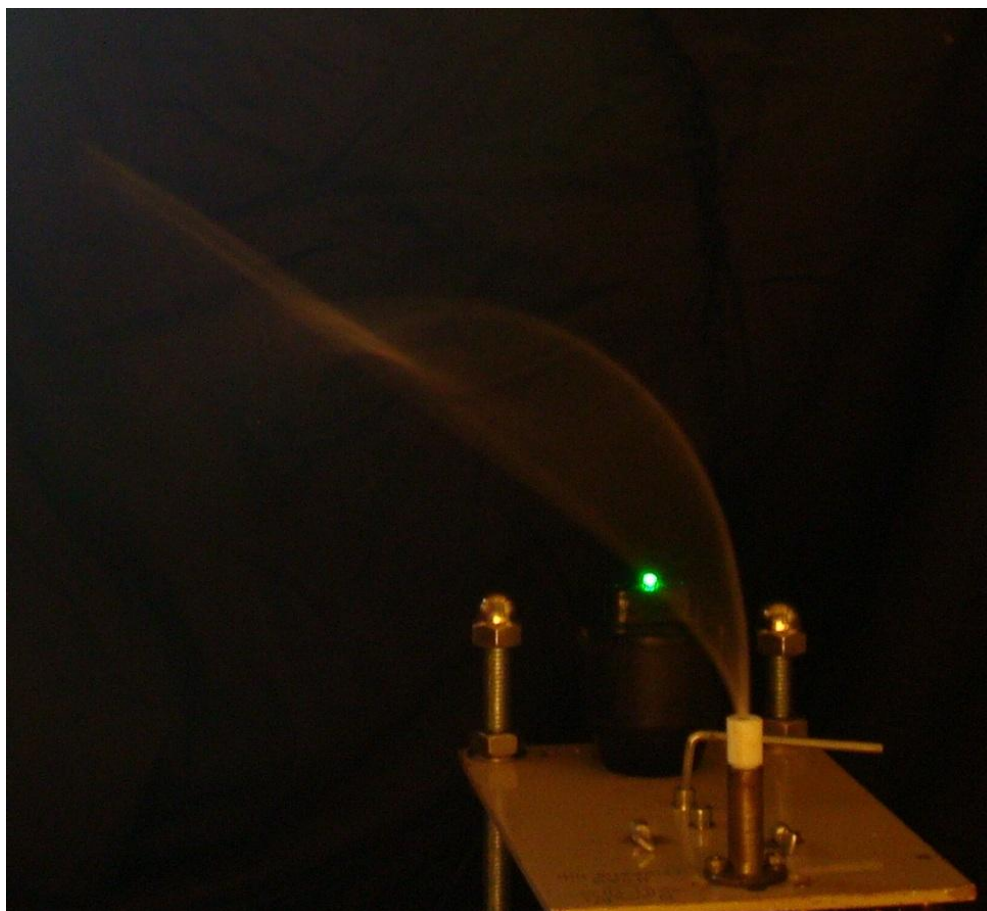


Рис. 2.4. Перехідні коливання стрижня між другою та третьою формами

Таким чином, починаючи з 7 Гц стрижень коливається по другій власній формі і такі коливання відбуваються до 9 Гц. При цьому, якщо провести уявну

лінію по вузлах коливань, можна зафіксувати збільшення кута нахилу стрижня від горизонталі (в порівнянні з початковим положенням).

Продовжуючи збільшувати частоту обертань двигуна можна візуально побачити сумісні коливання стрижня по двох формах коливань одночасно: ми бачимо другу та третю власну форму коливань стрижня. Фотографія сумісних коливань стрижня приведена на Рис. 2.5 а та на Рис. 2.5 б. На Рис. 2.5 б білими лініями наведено положення стрижня. Таку картину ми спостерігаємо до 18 Гц.

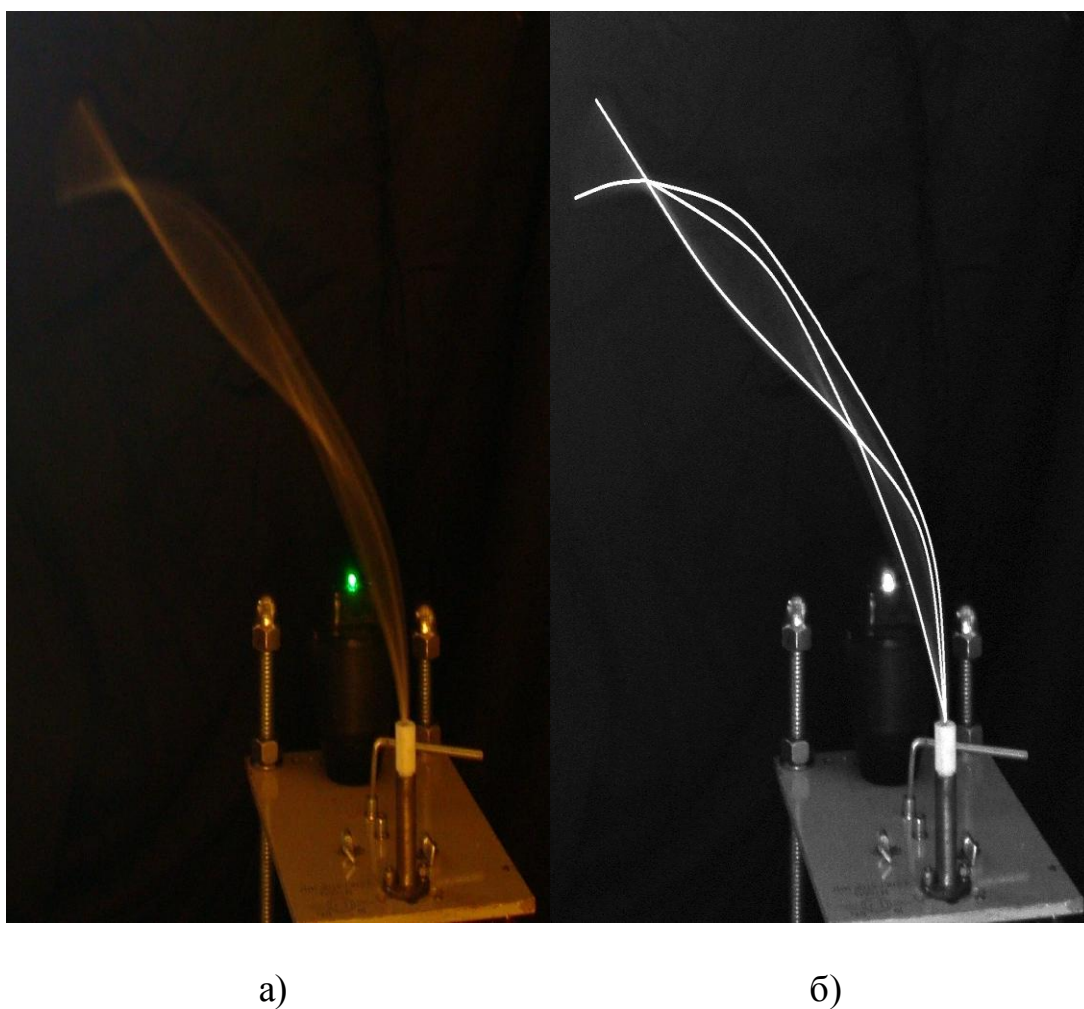


Рис. 2.5. Одночасні коливання стрижня по другій та третій власним формам

При збільшенні частоти реалізуються перехідні коливання стрижня, при наближенні до частоти 24 Гц стрижень сповільнював своє хитання і вільний кінець зменшував свою амплітуду. При частоті 24 Гц коливання стрижня переходили в одну площину і реалізовувались коливання по третій власній формі, що показано на Рис. 2.6. У цьому випадку спостерігалися три вузли: один – точка закріплення, а два інших знаходяться на стрижні. Такі коливання спостерігалися при збільшенні частоти до 26 Гц.



Рис. 2.6. Коливання стрижня по третій формі.

При подальшому збільшенні частоти помітно схожу ситуацію, як при переході від 9 Гц, тобто ми спостерігаємо перехідні режими коливань, які в даному випадку мають вигляд, приведений на Рис. 2.7.



Рис. 2.7. Перехідні коливання між третьою формою та стабілізацією

При подальшому збільшенні частоти так само, як і при переході від другої форми коливань до третьої, відбувається перехід до просторових коливань, але на відміну від минулого випадку, амплітуда коливань вільного кінця зменшується (Рис. 2.8.).

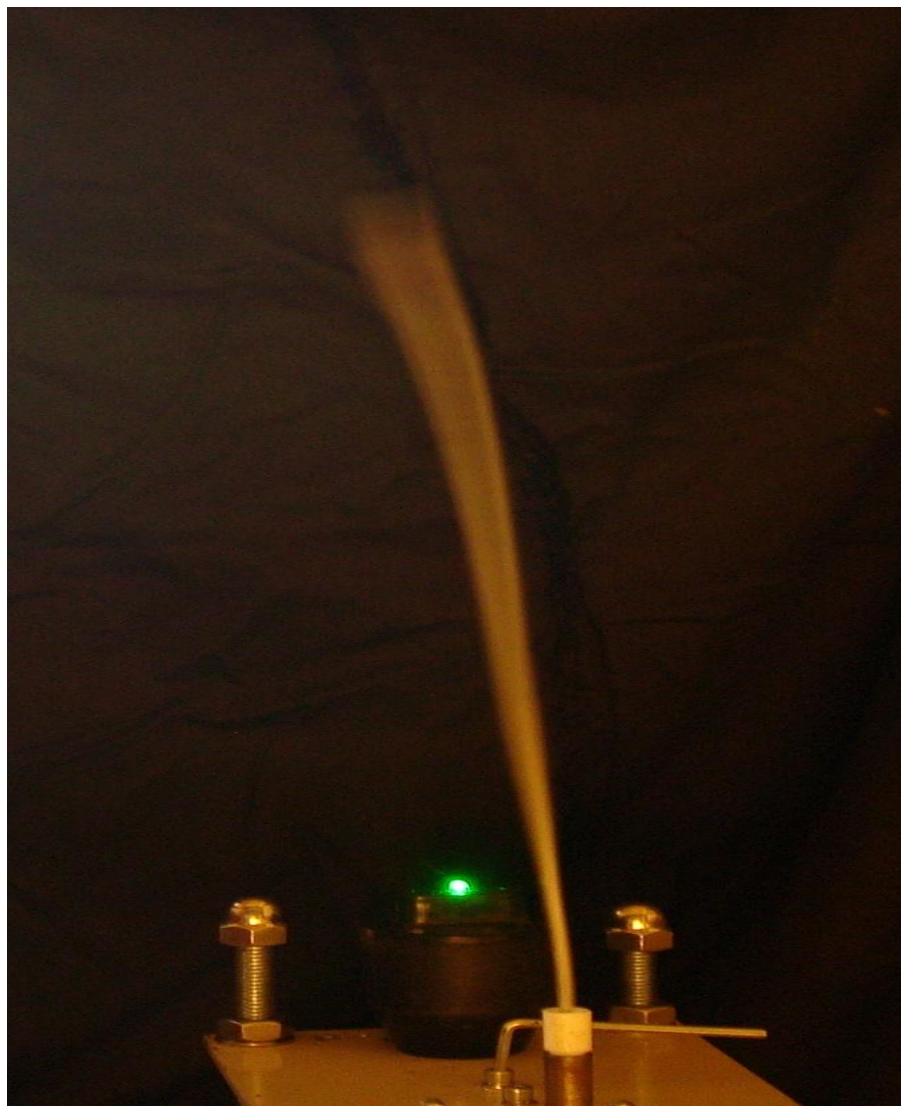


Рис. 2.8. Перехідні коливання між третьою формою та стабілізацією

Та вже при збільшенні частоти до 28,5 Гц стрижень займає стійке вертикальне положення, тобто стабілізується, що зафіксовано на фотографії на Рис. 2.9.

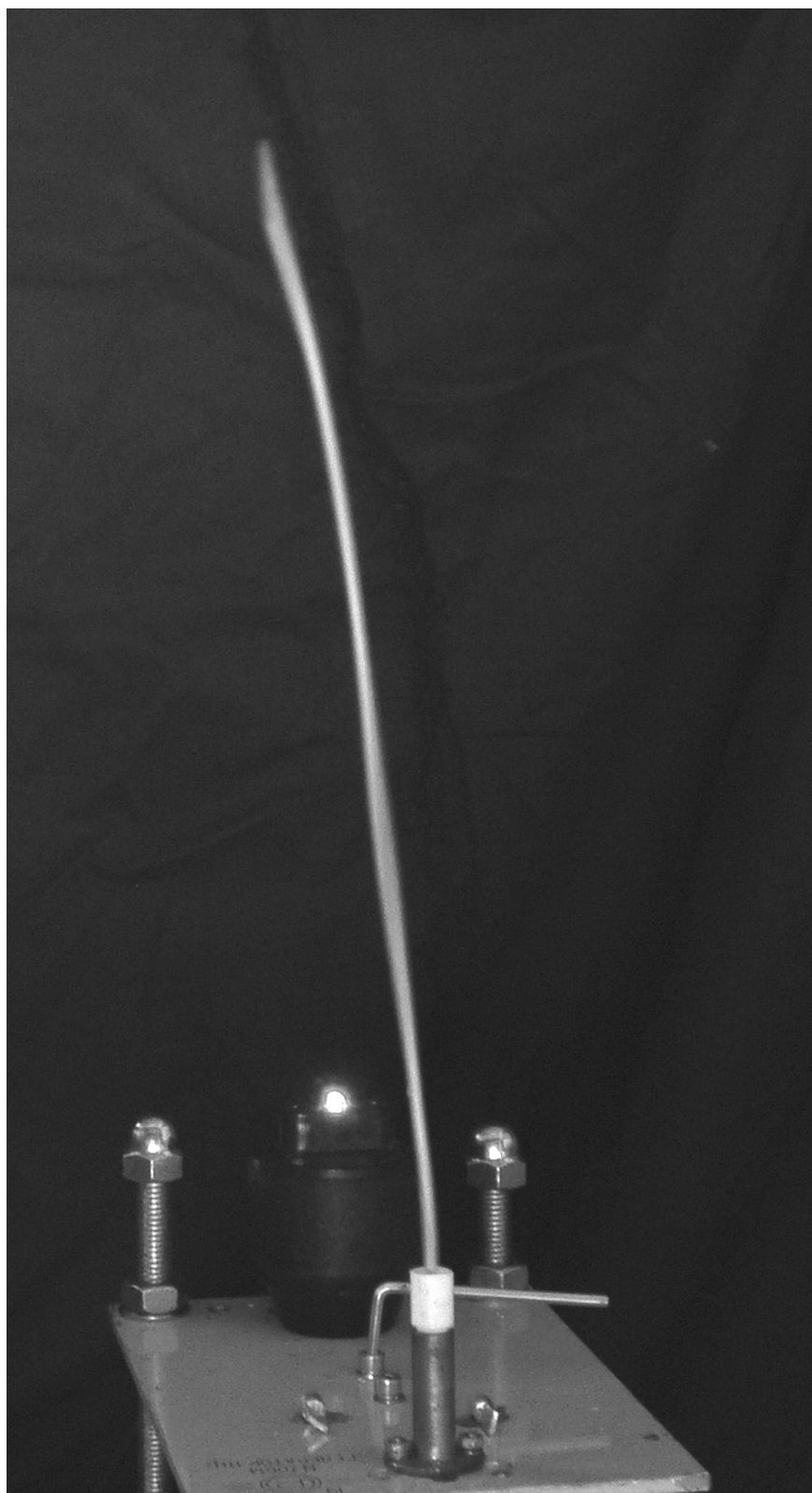


Рис. 2.9. Стабілізація стрижня

2.3 Критерій стабілізації

Критерій стабілізації “закритичного” консольного стрижня при наявності вертикальних вібрацій точки закріплення отримано на основі аналізу з застосуванням методу послідовних наближень в роботах Шамні і Фрейсера [68]. Умови для стабілізації згідно цього критерія мають вигляд

$$\omega_{cr}^2 \Delta^2 > 1,275 l \cdot g \left(1 - \frac{l_{cr}^3}{l^3} \right), \quad (2.1)$$

де ω_{cr} – критична кругова частота коливань, при якій стрижень стабілізується у вертикальному положенні, Δ – амплітуда коливань закріплення, l – довжина стрижня, l_{cr} – критична довжина стрижня, g – прискорення вільного падіння, де $g = 9,8 \frac{M}{c^2}$. У використаній в експериментах моделі стрижня $l_{cr} = 16,5 \cdot 10^{-2}$ м. Зауважимо, що ця критична довжина визначалась експериментальним шляхом для досліджуваного стрижня, вона дорівнює максимальній довжині досліджуваного стрижня, при якій стрижень зберігає вертикальне положення без впливу зовнішніх навантажень, тобто в стані спокою.

Використавши перехід від кругової частоти до звичайної, коли $\omega = 2\pi f$, отримаємо такий вираз для критичної частоти коливань, більше якої відбувається стабілізація стрижня

$$f_{cr}^2 > \frac{1,275 l \cdot g \left(1 - \frac{l_{cr}^3}{l^3} \right)}{\Delta^2 2\pi^2}. \quad (2.2)$$

Підставивши значення довжин та амплітуди коливань, які використовувалися у експерименті, у формулу (2.2) отримаємо, що $f_{cr} > 28,25 \text{ Гц}$. Порівнюючи значення частоти стабілізації “закритичного” стрижня в більшості проведених експериментів, коли частота була приблизно

рівна $28,5\Gamma\zeta$, із значенням отриманим вище з критерія стабілізації, приходимо до висновку про добре співпадання з похибкою порядку 1%.

Висновки

Таким чином, при проведенні експериментальних досліджень зафіксовані ефекти стабілізації і резонансних коливань закритичного стрижня. Знаходяться інтервали частот параметричних коливань по другій та третій власних формах коливань, а також знайдено ефект сумісних одночасних коливань стрижня по двох (по другій та третій) власних формах коливань. Експериментально отримані частоти стабілізації добре співпадають з обрахованими по теоретичному критерію стабілізації закритичного консольного стрижня, аналітично побудованому у роботі Шамні і Фрейсера [64].

Матеріали досліджень, приведених у Розділі 2 відображені в публікаціях [29, 46] та доповідях [43–45, 80].

РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОЛИВАНЬ КОНСОЛЬНОГО СТРИЖНЯ ТА ЇЇ ДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Перш, ніж розглянути математичну модель коливань консольного стрижня, приведемо основні положення теорії пружності [3, 9, 14–16, 36, 37, 49–51, 71, 75].

3.1 Основні положення лінійної теорії пружності

Розглянемо довільне тверде диформівне тіло, окремі точки якого можна визначити координатами x, y, z в нерухомій системі прямокутних координат. Тіло може знаходитись під дією зовнішніх сил, або розподілених будь-яким чином по його повехні, або розподілених по його об'єму (наприклад, сили тяжіння або доцентрові сили), або тих та інших.

Уявно виділимо з тіла прямокутний паралелепіпед з ребрами довжини dx, dy та dz , паралельними осям координат, та дослідимо ті внутрішні сили, які діють на грані цього паралелепіпеда зі сторони інших частин тіла. На кожній з шести граней паралелепіпеда додамо розподілені по ній сили; ми отримаємо шість результуючих, кожна з яких слід розглядати як нескінченно малий вектор. Розділивши ці нескінченно малі вектори на площі $dydz, dzdx$ та $dx dy$ граней, ми отримаємо скінченні вектори, які будемо називати векторами напружень Рис. 3.1. Зокрема, вектори напружень, прикладені до трьох граней, що сходяться в правому верхньому передньому куті паралелепіпеда, позначаються через t_x, t_y, t_z (індекс вказує вісь координат, перпендикулярну до розглядуваної грані).

Розкладемо кожен з цих векторів напружень на три компоненти, паралельні осям координат. Тоді, ввівши одиничні вектори $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ напрямків x, y, z , отримаємо

$$t_x = \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}; \quad t_y = \tau_{yx} \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{yz} \mathbf{k}; \quad t_z = \tau_{zx} \mathbf{i} + \tau_{zy} \mathbf{j} + \sigma_z \mathbf{k}.$$

Компоненти σ_x , σ_y та σ_z перпендикулярні до граней паралелепіпеда та вважаються додатними, якщо співпадають з напрямками зовнішніх нормалей до граней, та, навпаки, від'ємними, якщо направлені всередину паралелепіпеда. Ці компоненти називаються нормальними напруженнями, і при цьому розтягуючими напруженнями, якщо вони додатні, та стискаючими напруженнями, якщо вони від'ємні. Компоненти τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zy} , τ_{xz} та τ_{zx} , лежать в площинах граней паралелепіпеда, називаються дотичними напруженнями [3, 75].

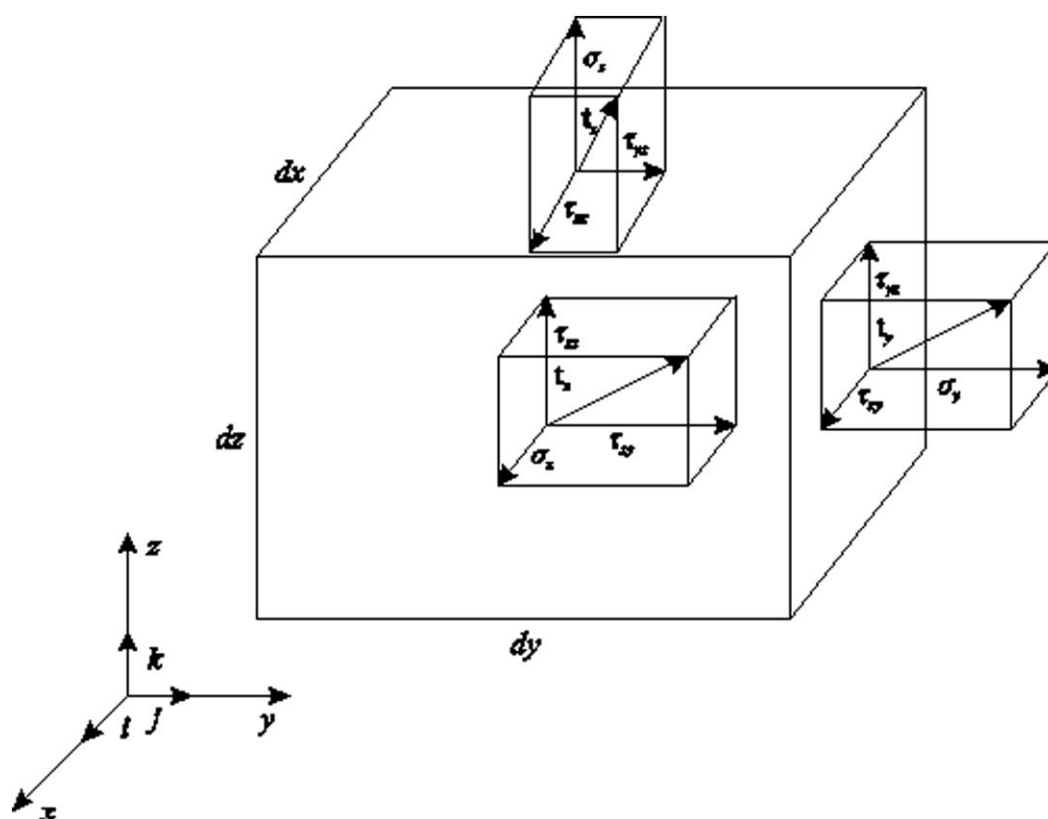


Рис. 3.1. Вектори напружень, що діють на грані елементарного паралелепіпеда

Для них справедливий закон парності, згідно з яким

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}; \quad (3.1)$$

тому в подальшому ми можемо обмежитись розглядом тільки трьох дотичних напружень τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} .

Дев'ять компонент трьох векторів напружень можна вважати компонентами тензора напружень T , матриця якого внаслідок співвідношень (3.1) симетрична відносно головної діагоналі, тобто

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Таким чином, кожній точці x, y, z твердого тіла відповідає визначений тензор напружень T . Він характеризує напружений стан в данній точці, який в подальшому будемо називати просто напруженим станом T . Отже, тензор T , а разом з ним і його окремі компоненти, можна розглядати як функції точки x, y, z . В тих областях, де ці функції диференційовні по координатам, повинні виконуватись умови рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Ввівши поняття дивергенції тензора, можна об'єднати ці три рівняння в одне векторне рівняння

$$\operatorname{div} T + \mathbf{K} = 0,$$

де \mathbf{K} означає віднесенний до одиниці об'єму вектор результуючої всіх сил, розподілених по об'єму $dx dy dz$ елементарного прямокутного паралелепіпеда. Велечини X, Y, Z суть проекції вектора \mathbf{K} на осі координат x, y, z .

Для кожного тензора напружень T можна скласти три незалежні одна від одной скалярні величини, значення яких не змінюються при довільному

переносі або повороті системи координат x, y, z відносно тіла. Ці так звані інваріантні тензори мають вид

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$S_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$S_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

В кожній точці тіла існує три взаємно перпендикулярних напрямки, які мають наступні властивості: якщо направити осі системи x, y, z паралельно цим напрямкам, то дотичні напруження будуть рівними нулю, а нормальні напруження при будь яких нескінченно малих поворотах координатних площин будуть зберігати стаціонарні значення. Ці особливі напрямки, взагалі кажучи, змінюються при переході від однієї точки тіла до іншої, будуть називатися головними напрямками для напружень, а відповідні стаціонарні значення нормальних напружень – головними напруженнями. Позначивши останні через σ_1, σ_2 та σ_3 , ми приймемо, що

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3.$$

Гловні напрямки для напружень можна однозначно визначити лише в тому випадку, коли всі три головні напруження різні. В протилежному випадку існує безліч головних напрямків.

Якщо ми візьмемо таку координатну систему x, y, z , осі якої паралельні до головних напрямків для напружень в будь-якій точці тіла, то тензор T напруженого стану в цій точці можна представити у вигляді матриці

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Отже, три інваріанти цієї матриці будуть мати вид

$$S_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$S_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1,$$

$$S_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Головні напруження тепер рівні кореням кубічного рівняння

$$\sigma^3 - S_1\sigma^2 + S_2\sigma - S_3 = 0.$$

Таким чином інваріанти тензора T визначають значення головних напружень.

Будемо називати незмінне середнє значення трьох нормальних напружень тобто величину

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}S_1 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (3.3)$$

середнім напруженням. Вводячи до розгляду одиничний тензор

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

складемо тензор середнього напруження

$$T_0 = \frac{1}{3}S_1E = \sigma_0E = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Він характеризує гідростатично напружений стан, при якому вектор напруження на будь-якій площадці завжди перпендикулярний до неї і має один і той же модуль.

Віднімемо тензор T_0 від тензора напружень T , отримаємо девіатор напружень

$$T' = T - T_0 = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Напружений стан, що визначається девіатором напружень має тіж головні напрямки, що і напружений стан T , але головні напруження тепер рівні відповідно

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_0, \quad \sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_0, \quad \sigma'_3 = \sigma_3 - \sigma_0,$$

причому, як випливає з співвідношення (3.3),

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0.$$

Позначивши через

$$\sigma'_x = \sigma_x - \sigma_0, \quad \sigma'_y = \sigma_y - \sigma_0, \quad \sigma'_z = \sigma_z - \sigma_0 \quad (3.6)$$

різниці нормальних напружень σ_x , σ_y , σ_z та середнього напруження σ_0 , ми знайдемо для трьох інваріантів девіатора напружень наступні вирази:

$$\begin{aligned} S'_1 &= \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z, \\ S'_2 &= \sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2 = S_2 - \frac{1}{3} S_1^2, \end{aligned}$$

$$S_3' = \begin{vmatrix} \sigma_x' & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y' & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z' \end{vmatrix} = \sigma_1' \sigma_2' \sigma_3' = S_3 - \frac{1}{3} S_1 S_2 + \frac{2}{27} S_1^3.$$

Отже, інваріанти девіатора напружень T' можуть бути виражені через інваріанти тензора T .

Введемо так звану інтенсивність дотичних напружень

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \sqrt{\frac{1}{3} \sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{3} [\sigma_1 - \sigma_0]^2 + [\sigma_2 - \sigma_0]^2 + [\sigma_3 - \sigma_0]^2}. \end{aligned}$$

Вона рівна середньому квадратичному відхиленню трьох головних напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ від середнього напруження σ_0 та є скалярною мірою відмінності напруженого стану T та гідростатичним напруженням станом T_0 .

Виразивши S_2' через τ_0 , отримаємо

$$S_2' = -\frac{3}{2} \tau_0^2,$$

або, навпаки,

$$\tau_0 = \sqrt{-\frac{2}{3} S_2'}. \quad (3.7)$$

Отже, інваріант S_2' завжди від'ємний. Якщо скласти величину τ_0 для будь-якої координатної системи x, y, z , то отримаємо

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{2} \sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3} \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Інтенсивність дотичних напружень τ_0 допускає також інше механічне тлумачення. Для кожного девіаторного напруженого стану T' можна визначити (та при цьому нескінченно великою кількістю способів) таку трійку взаємно перпендикулярних площадок, для яких $\sigma'_x = \sigma'_y = \sigma'_z = 0$. Якщо з таких площадок утворити елементарний паралелепіпед та направити осі системи x, y, z паралельно його ребрам, то інтенсивність дотичних напружень τ_0 в такій системі координат буде рівна

$$\tau_0 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3} \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2},$$

тобто з точністю до множника $\sqrt{2}$ буде рівна середньому квадратичному значенню трьох різних дотичних компонент напруженого стану T , отриманого для розглядуваного спеціального паралелепіпеда шляхом накладання на гідростатичне напруження стан $T_0 = \sigma_0 E$ чистого зсуву без будь-яких нормальних напружень.

Для опису деформівного стану використаємо те, обумовлене зовнішніми силами переміщення де-якої точки P тіла в положення P' визначається в просторі вектором переміщень \mathbf{s} направленим від P до P' . Співставивши з кожною точкою твердого тіла такий вектор переміщень, ми отримаємо векторне поле. Якщо x, y, z – координати точки P в нерухомій системі системі координат x, y, z , а u, v, w – компоненти вектора переміщень \mathbf{s} в цій системі, то розподіл переміщень всього тіла визначається трьома функціями компонент переміщень

$$u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z),$$

залежних від x, y, z . Припустимо, що ці функції неперервні та диференційовані; тоді компонента переміщень u_Q сусідньої з точкою $P(x, y, z)$ точки Q з координатами $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ вийде за допомогою розкладу в ряд Тейлора поблизу точки P в наступному вигляді:

$$u_Q = u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_P \Delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_P \Delta y + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_P \Delta z +$$

+члени вищих степенів відносно Δx , Δy , Δz .

Для компонент переміщення v_Q , w_Q отримуються аналогічні розклади. Внаслідок певного переміщення заданого цими компонентами, точка Q займе положення Q' .

Тепер визначимо відстань $\Delta l = \overline{PQ}$ між сусідніми точками тіла до переміщення і відстань $\Delta l' = \overline{P'Q'}$ між цими ж точками після переміщення. Ми знайдемо

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (3.9)$$

та

$$\begin{aligned} \Delta l'^2 = & \left[x + \Delta x + u_Q - x + u_P \right]^2 + \left[y + \Delta y + v_Q - y + v_P \right]^2 + \\ & + \left[z + \Delta z + w_Q - z + w_P \right]^2 = \Delta x + \Delta u^2 + \Delta y + \Delta v^2 + \Delta z + \Delta w^2, \end{aligned}$$

де

$$\Delta u = u_Q - u_P = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_P \Delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_P \Delta y + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_P \Delta z +$$

+члени вищих степенів відносно Δx , Δy , Δz .

Аналогічними виразами представляються і прирости

$$\Delta v = v_Q - v_P, \quad \Delta w = w_Q - w_P.$$

Підставивши ці розклади у вираз для $\Delta l'^2$, отримаємо співвідношення

$$\begin{aligned} \Delta l'^2 = & 1 + \lambda_{xx} \Delta x^2 + 1 + \lambda_{yy} \Delta y^2 + 1 + \lambda_{zz} \Delta z^2 + \\ & + 2\lambda_{xy} \Delta x \Delta y + 2\lambda_{yz} \Delta y \Delta z + 2\lambda_{zx} \Delta z \Delta x + \end{aligned}$$

+члени третьої і вищих степенів відносно Δx , Δy , Δz , (3.10)

де λ_{xx} , λ_{yy} , ... мають наступні значення:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{xx} &= 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \lambda_{yy} &= 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \lambda_{zz} &= 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2, \\ \lambda_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \lambda_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \lambda_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Похідні від компонент переміщень u , v , w , що входять в праві частини цих рівностей, обчислюються для точки P .

Тепер розглянемо окремі випадки розташування точок P та Q . Виконавши відповідні граничні переходи, ми перейдемо до понять видовження та зсуву.

Візьмемо поблизу довільної точки P x, y, z сусідню точку Q з координатами $x + \Delta x, y, z$; отже, ця точка Q лежить на прямій, що проходить через точку P паралельно осі x . Для таких точок P і Q та відповідних їм точок P' і Q' , які отримаємо після переміщення, відношення квадратів відстаней, що знаходяться з рівності (3.9), (3.10), буде рівний

$$\frac{\Delta l'^2}{\Delta l^2} = \frac{1 + \lambda_{xx} \Delta x^2 + \Delta x^3 \dots}{\Delta x^2} = 1 + \lambda_{xx} + \text{члени, в яких є } \Delta x,$$

так як $\Delta y = \Delta z = 0$. Будемо тепер наближувати точку Q до точки P паралельно осі x , тобто будемо наближати відстань Δx до нуля. Тоді точка Q' також буде наближатись до точки P' . В граничному випадку ми отримаємо

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta l'}{\Delta l} \right)^2 = 1 + \lambda_{xx}$$

або, після взяття кореня,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta l'}{\Delta l} = \sqrt{1 + \lambda_{xx}}.$$

Величина

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta l'}{\Delta l} - 1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta l' - \Delta l}{\Delta l} = \sqrt{1 + \lambda_{xx}} - 1 \quad (3.12)$$

називається видовженням в точці P x, y, z в напрямі x .

Аналогічним шляхом граничних переходів при $\Delta x = \Delta z = 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$ та відповідно при $\Delta x = \Delta y = 0$ і $\Delta z \rightarrow 0$ ми знайдемо видовження в напрямках y та z відповідно:

$$\varepsilon_x = \sqrt{1 + \lambda_{yy}} - 1 \quad \text{та} \quad \varepsilon_x = \sqrt{1 + \lambda_{zz}} - 1 \quad (3.13)$$

Для того щоб ввести поняття зсуву, візьмемо в околі точки P x, y, z дві точки: Q_1 $x + \Delta x, y, z$ та Q_2 $x, y + \Delta y, z$. Отже, до деформації Q_1 лежить на прямій, що проходить через точку P , паралельно осі x , Q_2 – на прямій, що проходить через точку P , паралельно осі y . Квадрат відстані $\Delta l_{12} = \overline{Q_1 Q_2}$ до деформації рівний

$$\overline{Q_1 Q_2}^2 = \Delta l_{12}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

Після деформації, переміщення що визначаються u_1, v_1, w_1 та u_2, v_2, w_2 , точки Q_1 та Q_2 перейдуть в точки Q_1' та Q_2' з координатами

$$Q_1' \quad x + \Delta x + u_1, \quad y + v_1, \quad z + w_1,$$

$$Q_2' \quad x + u_2, \quad y + \Delta y + v_2, \quad z + w_2.$$

Отже, квадрат відстані $\Delta l'_{12} = \overline{Q_1' Q_2'}$ в деформованому тілі буде рівний

$$\overline{Q_1'Q_2'}^2 = \Delta l_{12}'^2 = \Delta x + u_1 - u_2^2 + \Delta y + v_1 - v_2^2 + w_1 - w_2^2.$$

Якщо сюди підставити розклади

$$u_1 = u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_P \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_P \Delta x^2 + \dots,$$

$$u_2 = u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_P \Delta y + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_P \Delta y^2 + \dots,$$

та аналогічні розклади для v_1 , v_2 , w_1 , w_2 , то отримаємо

$$\Delta l_{12}'^2 = 1 + \lambda_{xx} \Delta x^2 - 2\lambda_{xy} \Delta x \Delta y + 1 + \lambda_{yy} \Delta y^2 +$$

$$+ \text{члени третього та вищих степенів відносно } \Delta x \text{ і } \Delta y. \quad (3.14)$$

Тепер розглянемо трикутник PQ_1Q_2 . При деформації тіла він переходить в трикутник $P'Q_1'Q_2'$, причому з початку прямиий кут Q_1PQ_2 стає рівний куту $Q_1'PQ_2'$, косинус якого, на підставі теореми косинусів, рівний

$$\cos \vartheta'_{12} = \frac{\overline{P'Q_1'}^2 + \overline{P'Q_2'}^2 - \overline{Q_1'Q_2'}^2}{2\overline{P'Q_1'}^2 \cdot \overline{P'Q_2'}^2}.$$

Приймемо в (3.10) спочатку $\Delta y = \Delta z = 0$, потім $\Delta z = \Delta x = 0$, отримаємо

$$\overline{P'Q_1'}^2 = \Delta l_1'^2 = 1 + \lambda_{xx} \Delta x^2 + \dots,$$

$$\overline{P'Q_2'}^2 = \Delta l_2'^2 = 1 + \lambda_{yy} \Delta y^2 + \dots;$$

потім, використавши рівність (3.14), знайдемо

$$\begin{aligned} \cos \vartheta'_{12} &= \frac{\Delta l_1'^2 + \Delta l_2'^2 - \Delta l_{12}'^2}{2\Delta l_1'^2 \cdot \Delta l_2'^2} = \\ &= \frac{\lambda_{xy} \Delta x \Delta y + \text{члени третьої та вищих степенів відносно } \Delta x \text{ і } \Delta y}{\Delta x \sqrt{1 + \lambda_{xx} + \Delta x} \dots \Delta y \sqrt{1 + \lambda_{yy} + \Delta y} \dots} = \\ &= \frac{\lambda_{xy} + \Delta x \dots + \Delta y \dots}{\Delta x \sqrt{1 + \lambda_{xx} + \Delta x} \dots \Delta y \sqrt{1 + \lambda_{yy} + \Delta y} \dots}. \end{aligned}$$

Тепер будемо наближувати точку Q_1 до точки P паралельно осі x , а точку Q_2 – паралельно осі y , тобто будемо наближати Δx та Δy до нуля. Тоді точки Q_1' та Q_2' будуть наближатись до точки P' , та в границі ми отримаємо

$$\psi_{xy} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \cos \mathcal{G}'_{12} = \frac{\lambda_{xy}}{\sqrt{1+\lambda_{xx}}\sqrt{1+\lambda_{yy}}} = \frac{\lambda_{xy}}{1+\varepsilon_x} \frac{1}{1+\varepsilon_y}. \quad (3.15)$$

Це граничне значення називається зсувом в точці $P(x, y, z)$, в площині, паралельній площині xy .

Застосувавши аналогічні міркування до точок Q_1 та Q_2 , що знаходяться на прямих, які проходять через точку P паралельно осям y та z (для точки Q_1) або осям z та x (для точки Q_2), знайдемо зсувом

$$\psi_{yz} = \frac{\lambda_{yz}}{1+\varepsilon_y} \frac{1}{1+\varepsilon_z}, \quad \psi_{zx} = \frac{\lambda_{zx}}{1+\varepsilon_z} \frac{1}{1+\varepsilon_x}. \quad (3.16)$$

Можна показати, що шість виразів (3.11) представляють компоненти симетричного тензора. Цей тензор, помножений на $\frac{1}{2}$, називається тензором деформації D . Матричним представленням тензора деформації буде

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{zx} \\ \lambda_{xy} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{yz} & \lambda_{zz} \end{pmatrix}.$$

Тепер зробимо наступне важливе припущення: будемо розглядати тільки такі деформівні стани, в яких функції $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ мало змінюються при переході від точки до точки в будь-якому напрямі. Це припущення рівносильне вимозі про те, що значення часткових похідних функцій u , v , w по x , y , z не перевищували де якого значення η , малого в порівнянні з одиницею. Практично можна обмежити величину η значенням $0.5\% = \frac{1}{200}$.

Виходячи з цього, спростимо раніше складене рівняння, а потім і ті рівняння, які будуть виведені нижче, зберігши в них тільки члени найнижчого порядку відносно η . Таким шляхом ми отримаємо рівняння теорії малих

деформацій. Ці рівняння вже не будуть точними, але їх можна буде використовувати в якості наближень та притому найбільш точних, чим менші часткові похідні функцій u , v , w по координатах x , y , z . Отже, ми повинні були б писати приведені нижче співвідношення, застосовуючи знак наближеної рівності \approx ; тим не менше ми будемо використовувати знак рівності, хоча і не зовсім коректно, але відповідає прийнятій традиції.

Спочатку, спростивши у вказаному сенсі співвідношення (3.11), ми отримаємо

$$\begin{aligned}\lambda_{xx} &= 2\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lambda_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \lambda_{yy} &= 2\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \lambda_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \lambda_{zz} &= 2\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \lambda_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned}$$

Далі, розклавши вирази ε_x , ε_y , ε_z в біноміальні ряди, ми отримаємо, у відповідності до зроблених припущень, наступні вирази для видовжень:

$$\left. \begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2}\lambda_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2}\lambda_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2}\lambda_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \quad (3.17)$$

Аналогічним чином отримаємо вирази для зсуву

$$\left. \begin{aligned}\psi_{xy} &= \lambda_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \psi_{yz} &= \lambda_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \psi_{zx} &= \lambda_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \quad (3.18)$$

Отже, при малих деформаціях тензор деформації наближено рівний

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\psi_{xy} & \frac{1}{2}\psi_{zx} \\ \frac{1}{2}\psi_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\psi_{yz} \\ \frac{1}{2}\psi_{zx} & \frac{1}{2}\psi_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Для малих деформацій виконується закон накладання: якщо надати будь-якому твердому тілу спочатку деформацію, що визначаються векторним полем переміщень $\mathbf{s}_1(x, y, z)$ з компонентами u_1, v_1, w_1 , а потім ще одну деформацію $\mathbf{s}_2(x, y, z)$ з компонентами u_2, v_2, w_2 , то сума обох тензорів деформацій буде рівна тензору деформації, що визначається векторним полем переміщень

$$\mathbf{s}(x, y, z) = \mathbf{s}_1(x, y, z) + \mathbf{s}_2(x, y, z).$$

Цей закон, очевидно, виконується лише при припущенні про малі деформації.

Компоненти результуючої деформації, що визначається полем переміщень $\mathbf{s}(x, y, z)$, отриманим шляхом накладання полів \mathbf{s}_1 та \mathbf{s}_2 , містять помилки порядку η^2 .

Так як шість деформацій (три видовження та три зсуви) виражаються через похідні від трьох функцій $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ та $w(x, y, z)$, що вибираються довільно, то самі деформації не можуть бути вибрані довільно. Навпаки, між їх другими похідними повинні виконуватись з точністю до величин вищих порядків наступні шість умов сумісності:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}, \\
 \frac{\partial^2 \psi_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}, \\
 \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}, \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial z} \right), \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} \right), \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \psi_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{zx}}{\partial y} \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Якщо ми внесемо сюди похідні від функцій u , v , w на підставі рівностей (3.17) та (3.18), то побачимо, що умови сумісності лише засвідчують незалежність величин змішаних третіх похідних функцій u , v , w по x , y , z від порядку деформування.

Тензор деформації, так само як і тензор напружень, має три незалежних один від одного інваріанти, а саме:

$$J_1 = \frac{1}{2} \lambda_{xx} + \lambda_{yy} + \lambda_{zz} ,$$

$$J_2 = \frac{1}{4} \lambda_{xx} \lambda_{yy} + \lambda_{yy} \lambda_{zz} + \lambda_{zz} \lambda_{xx} - \lambda_{xy}^2 - \lambda_{yz}^2 - \lambda_{zx}^2 ,$$

$$J_3 = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{zx} \\ \lambda_{xy} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{yz} & \lambda_{zz} \end{vmatrix} .$$

В теорії малих деформацій ці інваріанти можна представити, якщо знехтувати величинами η^2 (в виразі J_1), η^3 (в виразі J_2) та η^4 (в виразі J_3) наступним чином:

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

$$J_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} \psi_{xy}^2 - \psi_{yz}^2 - \psi_{zx}^2,$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\psi_{xy} & \frac{1}{2}\psi_{zx} \\ \frac{1}{2}\psi_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\psi_{yz} \\ \frac{1}{2}\psi_{zx} & \frac{1}{2}\psi_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

Інваріант J_1 називається об'ємним розширенням. Це розширення представляє собою границю відношення приросту об'єму $\Delta x \Delta y \Delta z$ паралелепіпеда з ребрами, паралельними осям координат, до початкового об'єму $\Delta x \Delta y \Delta z$, коли останній наближається до нуля.

Аналогічно до головних напружень визначаються головні видовження ε_1 , ε_2 , ε_3 :

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_3$$

як стаціонарні значення видовжень ε_x , ε_y , ε_z . Їм відповідають три взаємно перпендикулярних напрямки осей – напрямки головних видовжень. В системі координат, осі які паралельні напрямкам головних видовжень в будь-якій точці тіла, зсув в цій точці рівний нулю, і тому відповідний тензор деформацій рівний

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Три інваріан цього тензора мають вид

$$J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

$$J_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1,$$

$$J_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

Таким чином, головні видовження є коренями кубічного рівняння

$$\varepsilon^3 - J_1\varepsilon^2 + J_2\varepsilon - J_3 = 0$$

та визначаються інваріантами тензора D .

Аналогічно тому, як це було зроблено при дослідженні напружень, введемо середнє видовження

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{3} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{3} J_1 \quad (3.20)$$

та відповідний цьому видовженню шаровий тензор

$$D_0 = \frac{1}{3} J_1 E = \varepsilon_0 E = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Він представляє собою деформацію, при якій елементарний паралелепіпед переходить в геометрично подібну фігуру. Таку деформацію будемо називати зміною об'єму без зміни форми або чисто-об'ємною деформацією.

Віднявши тензор D_0 з тензора деформації D , отримаємо девіатор деформації

$$D' = D - D_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\psi_{xy} & \frac{1}{2}\psi_{zx} \\ \frac{1}{2}\psi_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\psi_{yz} \\ \frac{1}{2}\psi_{zx} & \frac{1}{2}\psi_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix}.$$

Він має ті ж напрямки головних видовжень, що і тензор деформації; його головні видовження рівні відповідно

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_0, \quad \varepsilon'_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_0, \quad \varepsilon'_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_0,$$

причому

$$\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 = 0.$$

Таким чином девіатор D' визначає деформацію, при якій об'ємне розширення рівне нулю (з точністю до величин вищих порядків малості). При такій деформації елементарний прямокутний паралелепіпед в загальному випадку перетвориться в косокутний паралелепіпед з таким самим об'ємом. Таку деформацію будемо називати зміною форми без зміни об'єму. Якщо різниця між видовженнями ε_x , ε_y , ε_z та середнім видовженням ε_0 позначити через

$$\varepsilon'_x = \varepsilon_x - \varepsilon_0, \quad \varepsilon'_y = \varepsilon_y - \varepsilon_0, \quad \varepsilon'_z = \varepsilon_z - \varepsilon_0, \quad (3.22)$$

то інваріанти девіатора деформацій D' будуть

$$J'_1 = \varepsilon'_x + \varepsilon'_y + \varepsilon'_z = 0, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} J'_2 &= \varepsilon'_x \varepsilon'_y + \varepsilon'_y \varepsilon'_z + \varepsilon'_z \varepsilon'_x - \frac{1}{4} \psi_{xy}^2 + \psi_{yz}^2 + \psi_{zx}^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon_x'^2 + \varepsilon_y'^2 + \varepsilon_z'^2 - \frac{1}{4} \psi_{xy}^2 + \psi_{yz}^2 + \psi_{zx}^2 = , \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon_1'^2 + \varepsilon_2'^2 + \varepsilon_3'^2 = J_2 - \frac{1}{3} J_1^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$J'_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon'_x & \frac{1}{2} \psi_{xy} & \frac{1}{2} \psi_{zx} \\ \frac{1}{2} \psi_{xy} & \varepsilon'_y & \frac{1}{2} \psi_{yz} \\ \frac{1}{2} \psi_{zx} & \frac{1}{2} \psi_{yz} & \varepsilon'_z \end{vmatrix} = \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \varepsilon'_3 = J_3 - \frac{1}{3} J_1 J_2 + \frac{2}{27} J_1^3, \quad (3.25)$$

Отже, їх можна виразити через інваріанти тензора D .

Тепер введемо інтенсивність деформації зсуву деформівного стану:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 2\sqrt{\frac{1}{3} \varepsilon_1'^2 + \varepsilon_2'^2 + \varepsilon_3'^2} = \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{3} \left[\varepsilon_1 - \varepsilon_0 \right]^2 + \left[\varepsilon_2 - \varepsilon_0 \right]^2 + \left[\varepsilon_3 - \varepsilon_0 \right]^2}.\end{aligned}$$

Вона представляє собою подвоєне значення середнього квадратичного відхилення трьох головних видовжень від середнього видовження ε_0 та є скалярною мірою того, наскільки деформівний стан D відрізняється від чисто об'ємної деформації, що визначається шаровим тензором D_0 . Виражаючи J_2' через ψ_0 , маємо

$$J_2' = -\frac{3}{8}\psi_0^2 \text{ або обернену залежність } \psi_0 = 2\sqrt{-\frac{2}{3}J_2'}; \quad (3.26)$$

отже, інваріант J_2' завжди від'ємний. В довільній системі координат x, y, z величину ψ_0 можна також представити у вигляді

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_x'^2 + \varepsilon_y'^2 + \varepsilon_z'^2 + \frac{1}{2} \psi_{xy}^2 + \psi_{yz}^2 + \psi_{zx}^2} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_x + \frac{1}{2} \psi_{xy}^2 + \psi_{yz}^2 + \psi_{zx}^2}.\end{aligned} \quad (3.27)$$

Інтенсивність деформації зсуву допускає також іншу геометричну трактовку. Для кожної чисто об'ємної деформації можна визначити (і при цьому нескінченно великим числом способів) такі тріки взаємно перпендикулярних осей, для яких $\varepsilon_x' = \varepsilon_y' = \varepsilon_z' = 0$. Тому в елементарному прямокутному паралелепіпеді, ребра якого паралельні таким осям, при деформації змінюються тільки прямі кути між ребрами, але не довжини ребер. Якщо направити систему осей x, y, z паралельно ребрам недеформованого паралелепіпеда, то отримаємо

$$\psi_0 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3} \psi_{xy}^2 + \psi_{yz}^2 + \psi_{zx}^2} .$$

Отже, інтенсивність деформації зсуву з точністю до множника $\sqrt{2}$ рівна квадратному кореню з середнього квадратичного значення трьох зсувів деформованого стану D , в яке ми переводимо вибраний нами паралелепіпед, спочатку збільшуючи або зменшуючи його подібно самому собі, а потім піддаючи чистому зсуву, тобто деформуємо його так, щоб його ребра, не змінюючи довжини, змінили взаємний нахил.

Тепер, знаючи властивості величин, що визначають напружений та деформівний стани твердого тіла, зформуємо для нього закон, який виражає в загальній формі для будь-якої точки тіла зв'язок між компонентами тензора напружень T та компонентами тензора деформацій D .

З точки зору практичного застосування такий закон повинен найкращим чином задовольняти двом основним умовам, зазвичай що протирічать одна одній, а саме: з однієї сторони, він повинен точніше відображати ті фізичні властивості матеріала, значенню якого ми надаємо особливе значення, а з іншої сторони, він повинен мати можливо простішу форму.

Другій вимозі, напевно, краще за все відповідає закон Гука для малих деформацій в тому вигляді, в якому він використовується в класичній теорії пружності.

В основі цього закону лежать два процеси лінеаризації, які необхідно відрізнити один від одного. Перший процес можна назвати геометричною лінеаризацією, оскільки він відноситься до геометрії деформованого тіла. Як було показано вище, він полягає в тому, що нехтують добутками часткових похідних компонент u , v , w вектора переміщень \mathbf{s} по змінним x , y , z в порівнянні з самими похідними; отже, вирази (3.12), (3.13), (3.15) та (3.16) для деформацій замінюють (3.17) та (3.18), лінійними відносно похідних. Ми бачили, що при цьому з'являються похибки порядку η^2 , якщо похідні від u , v , w по x , y , z не перевищують значення η . Іншими словами, деформації

можуть утримувати відносну похибку того ж порядку, що і порядок самих деформацій. Тому допустима відносна похибка того ж порядку і для напружень; це в принципі не погіршує точності пов'язані між напруженнями та деформаціями, яку дає закон Гука. Цю можливість ми використаємо, відносячи напруження не до елементів поверхні деформованого тіла, а до елементів поверхні не деформованого тіла. Аналогічно ми вчинимо з об'ємними силами (якщо вони є).

Другий процес лінеаризації, лежить в основі закону Гука, може бути названий фізичною лінеаризацією, так як він стосується фізичних властивостей деформованого тіла; він складається з встановлення пропорційності між середнім напруженням σ_0 та середнім видовженням ε_0 , також між компонентами девіатора напружень T' та компонентами девіатора деформацій D' . За допомогою двох постійних матеріала – модуля об'ємного стиску K та модуля зсуву G - ці залежності представляють в наступній формі:

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad (3.28)$$

$$T' = 2GD'. \quad (3.29)$$

В будь-якому випадку, в цій формі закону Гука міститься де яке фізичне твердження. Воно полягає в тому, що частка всієї деформації елемента тіла, яка виражається шаровим тензором D_0 повністю та взаємно однозначно визначається часткою відповідного напруженого стану, що виражається шаровим тензором T_0 ; так само частка девіатора деформації D' повністю та взаємно однозначно визначається часткою напруженого стану, що виражається девіатором T' .

Якщо обмежити фізичну сторону закону Гука цим твердженням, то, згідно математичній дедукції, рівняння (3.28) та (3.29) неминуче являються граничною формою для нескінченно малих деформацій. Лінійність цих рівнянь є лише виразом того, що в співвідношеннях між нескінченно малими величинами можна знехтувати членами вищих степенів в порівнянні з лінійними членами.

Проте закон Гука одночасно утримує і більш широке інше фізичне твердження, якщо тільки не обмежувати дію цього закону граничним випадком нескінченно малих деформацій, а допустити його справедливості і для малих, але скінченних деформацій.

Наскільки допустимо це друге тлумачення закону Гука, залежить від властивостей матеріала. Насправді, існують матеріали з вираженою границею пропорційності, наприклад сталь, так і матеріали, в котрих неможливо чітко відмітити границю пропорційності, наприклад м'які кольорові метали. В будь-якому випадку, можна стверджувати, що якщо границя пропорційності взагалі існує, то вона лежить майже завжди нижче тієї границі деформації, яка не повинна бути перевищена внаслідок геометричної лінеаризації.

Таким чином, існує широка область деформації, в якій геометрична лінеаризація ще зберігає сенс, оскільки вона забезпечує точність, що задовольняє технічні потреби, тоді як друге фізичне твердження, що є в законі Гука, вже невірне. Саме ця область деформації, досягаючи приблизно 0,5 %, грає важливу роль в техніці; тому доцільно встановити закон для зв'язку між напруженнями та деформаціями, справедливий і в цій області.

Розглянемо чистий згин призматичного стрижня при нелінійному законі пружності для малих деформацій, припущення.

1. При належному прикладанні зовнішніх моментів до кінцевих поперечних перетинів стрижня можна в будь-якому випадку зберегти гіпотезу плоских перетинів.

2. Для-будь-якого елемента стрижня всі напруження та деформації не залежать від його віддалення від кінців стрижня.

3. В лінійній теорії пружності при чистому згині стрижня будь-якої форми поперечного перетину використовується представлення про те, що стрижень складається з сукупності повздовжніх волокон, паралельних осі стрижня і зазнає по всій довжині однакові розтягуючі або стискаючі напруження.

4. Задача чистого згину, що розв'язується в допущенні плоского напруженого стану, завжди допускає точний розв'язок на основі представлення про волокна з пункту 3.

Ці результати дозволяють стверджувати, що для матеріалів, що слідуєть нелінійному закону, можна розвинути технічну теорію згину, якщо використовувати представлення про волокна в сукупності з гіпотезою про плоскі перетини.

Згідно уявленню про волокна приймемо, що зв'язок між напруженням у волокні σ_x і видовженням волокна ε_x визначений шляхом випробуванням стрижня на розтяг – стиск і її можна виразити у вигляді наступної функції:

$$\sigma_x = f \varepsilon_x .$$

Розглянемо рівняння

$$\iint_{\Omega} f \kappa y \, y \, dy \, dz = M , \quad (3.30)$$

яке представляє собою узагальнене рівняння Уйлера з лінійної технічної теорії, M – момент згинних сил. Позначимо кривину осі стрижня через κ та модуль пружності матеріала стрижня через E , це рівняння, як відомо, можна записати у вигляді

$$E J \kappa = M ,$$

J – момент інерції площадки поперечного перетину відносно нейтральної осі.

Функціональний зв'язок між згинним моментом M і кривиною κ можна встановити обравши інтеграл (3.30) і потім представивши κ як функцію від M . Якщо це вдалося, то далі можна продовжувати як в лінійній теорії згину. А саме, для визначення пружної лінії $\eta(x)$, що знаходиться при довільному характері залежності згинного момента $M(x)$ від абсциси x , замінивши кривину κ другою похідною $\partial^2 \eta(x) / \partial x^2$ і потім двічі проінтегруємо співвідношення

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{1}{EJ} M_x \quad (3.31)$$

при відповідних крайових умовах.

3.2 Постановка задачі про коливання стрижня з закритичною жорсткістю

На Рис. 3.2 показана схема однорідного пружного стрижня постійного поперечного перетину з консольним закріпленням. В недеформованому стані вісь стрижня співпадає з вертикальною віссю x прямокутної системи координат xOy , початок координат знаходиться в закріпленні стрижня (рис. 3.2 ,а). Розглянемо рух стрижня при малих кутах відхилення від вертикалі ($\cos \vartheta = 1$, $\sin \vartheta = \vartheta$), L – довжина стрижня, m – лінійна вага, EI – жорсткість на згин, g – прискорення вільного падіння, h – діаметр поперечного перетину.

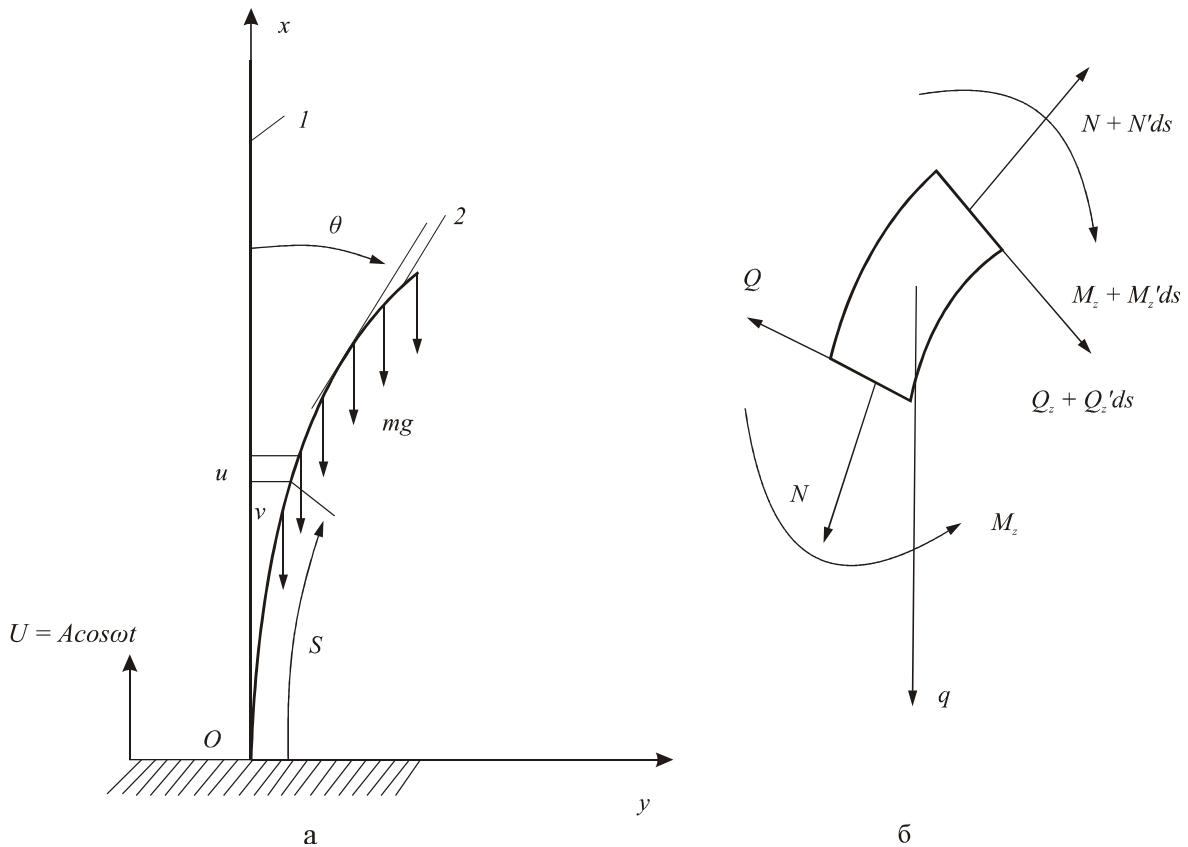


Рис. 3.2. Схема системи

Припускаємо, що поперечні перетини стрижня залишаються плоскими та перпендикулярними до zdeформованої осі, а нормальні напруження на площадках паралельних осей дуже малі порівняно з повздовжніми напруженнями, вісь стрижня залишається нерозтяжною (гіпотеза Кіргофа).

N_x – повздовжня сила зв'язана з масою стрижня, що знаходиться над розглядуваним елементом, F – площа поперечного перетину стрижня, E – модуль Юнга, J – момент інерції стрижня відносно вісі y , ρ – густина стрижня, $Q = \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$ – перерізуюча сила. Рівняння згинних коливань стрижня при розподіленому зовнішньому навантаженні $q(x,t)$ має вигляд [3, 9, 92]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x,t). \quad (3.32)$$

Якщо в перетинах стрижня діє повздовжня сила N_x , то рівняння (3.32) записується в такому вигляді [40–42, 64, 74, 92]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x,t). \quad (3.33)$$

Якщо місце кріплення пружної системи до кривошипно шатунного механізму здійснює вертикальні коливання $A \cos \omega t$, тоді повздовжня сила N_x , яка виникає під дією сили тяжіння, сили інерції коливань частини стрижня від перетину x до його кінця l має вид [3, 17, 24, 38, 64, 92]:

$$N_x = \rho F \times \left\{ g(l-x) + (l-x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} A \cos \omega t \right\}. \quad (3.34)$$

Підставимо рівність (3.34) в рівняння (3.33) за умов, що поперечні перетини не змінюють форму і стрижень має сталий поперечний перетин, ($\rho, F, J, E = const$). Розглянемо деформації стрижня коли $q(x,t) = 0$, а також $A = const$. В цьому випадку рівняння деформацій стрижня має вид:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial}{\partial x} \left((l-x) \left\{ g + A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cos \omega t \right\} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3.35)$$

Проведемо безрозмірювання задачі. Для цього введемо безрозмірні змінні:

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{w}{l}, t^* = t\omega, x^* = \frac{x}{l}, \varepsilon^* = \frac{A\omega^2}{g}, \\ B^* &= \frac{EJ}{\rho Fgl^3}, I^* = \frac{l\omega^2}{g}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Підставивши змінні (3.36) в рівняння (3.35) маємо:

$$B^* \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} + 1 - \varepsilon^* \cos t^* \frac{\partial}{\partial x^*} \left(1 - x^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) + I^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} = 0. \quad (3.36)$$

В цьому випадку рівняння (3.36) після відкидання «*» при змінних має вигляд:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{B}{I} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{I} (1 - \varepsilon \cos t) \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - x \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (3.37)$$

Дана задача має наступні граничні умови: на кінці з жорстким закріплення стрижня $x=0$ прогин та кут прогину рівні нулю, а на вільному кінці $x=1$, тобто згинний момент та перерізуюча сила рівні нулю. Математичне формулювання цих граничних умов має вид:

$$\begin{cases} x=0: w=0, w'=0 \\ x=1: w''=0, w'''=0 \end{cases} \quad (3.38)$$

3.3 Динамічні характеристики згинних коливань

Динамічна поведінка пружних систем при періодичному навантаженні суттєво залежить від динамічних характеристик самої системи, а саме: від власних форм і власних частот коливань. Як відомо власні форми та власні частоти коливань пружної системи визначаються як загальний розв'язок рівняння пружної системи вільної від зовнішніх впливів. Таким чином, щоб визначити такі характеристики як власні форми та власні частоти коливань системи в рівнянні (3.37) покладемо $\varepsilon = 0$. Тоді рівняння (3.37) прийме вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{B}{I} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{I} \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - x \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (3.39)$$

Для знаходження власних форм $\phi_n(x)$ та власних частот γ_n , $n=1, \dots, \infty$ використаємо метод Бубнова-Гальоркіна розділення змінних [3, 4, 8, 10, 48]. Тоді розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$w(x, t) = \sum \phi_n(x) [A_n \cos \gamma_n t + B_n \sin \gamma_n t]. \quad (3.40)$$

Кожна власна форма повинна задовольняти рівняння:

$$B \frac{\partial^4 \phi_n}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(l - x \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right) - \lambda_n \phi_n = 0, \quad (3.41)$$

де $\lambda_n = \gamma_n^2 I$

Система функцій ϕ_n , $n=1, \dots, \infty$ повинна бути повною системою ортогональних функцій і задовольняти, згідно задачі Штурма-Ліувіля для однорідних граничних умов [14, 15], наступним умовам:

$$\begin{cases} \int_0^1 \phi_n(x) \phi_m(x) dx = N_n \delta_{nm} \\ N_n = \int_0^1 \phi_n^2(x) dx \end{cases}, \quad (3.42)$$

де δ_{nm} – символ Кронекера.

Розглядаємо консольну пружну систему з закритичною жорсткістю, що згинається під власною вагою (див. Рис. 3.2 а). Для такої пружної системи безрозмірний параметер B в рівнянні (3.39) повинен бути малим.

Насамперед визначимо чи можливі власні значення $\lambda_n = 0$ та при яких значеннях B вони можливі.

З рівняння (3.41) отримаємо при $\lambda_n = 0$ отримаємо таке рівняння:

$$B \frac{\partial^4 \phi_n}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - x \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.43)$$

Якщо проінтегруємо рівняння (3.43) по змінній x , отримаємо співвідношення:

$$B \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 1 - x \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (3.44)$$

Рівняння (3.44) має розв'язок такого виду [64]:

$$w' x = \sqrt{1-x} \left\{ C_1 J_{\frac{1}{3}} \left[\frac{2}{3} B^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{3}{2}} \right] + C_2 J_{-\frac{1}{3}} \left[\frac{2}{3} B^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{3}{2}} \right] \right\}. \quad (3.45)$$

Використовуючи умову, що $w''(1) = 0$, тоді отримуємо, що $C_1 = 0$ і умова $w'(0) = 0$ дає такий результат:

$$w'(0) = C_2 J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} B^{-\frac{1}{2}} \right) = 0. \quad (3.46)$$

Рівняння (3.46) має нескінченну кількість коренів, найнижчий з його коренів $B_{cr} = 0.1275$, перші п'ять коренів $B = 0.1275, 0.0178, 0.0067, 0.00350, 0.0021$. Визначимо власні форми для першого кореня, для цього $B_{cr} = 0.1275$ підставимо в (3.43) і інтегруємо по змінній x .

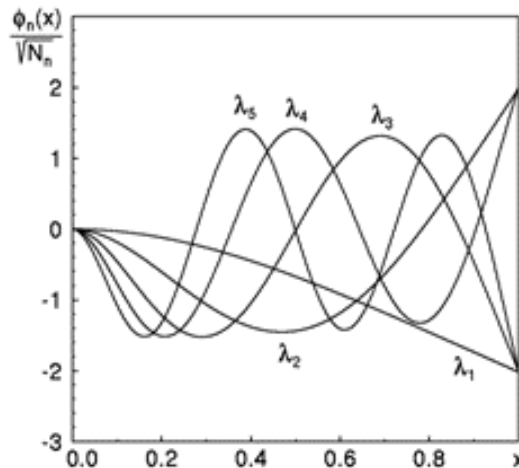


Рис. 3.3. Графік власних форм $\frac{\phi_i}{\sqrt{N_i}} x$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) при $B_{cr} = 0.1275$

На Рис.3.3 показані власні форми для пружної системи, коли її згинна жорсткість $B_{cr} = 0.1275$, а перші п'ять власних значень будуть: $\lambda_1 = 0.0$, $\lambda_2 = 53.285$, $\lambda_3 = 460.68$, $\lambda_4 = 1813.5$, $\lambda_5 = 5008.7$.

Власні значення λ_1 та власні частоти γ_1 рівні нулю. Згідно теорії Тимошенка [92] при даному значенні коефіцієнта пружності на згин в пружній системі буде спостерігатися явище випучування, яке полягає в тому, що система втрачає прямолінійний вигляд і випучується без будь якого зовнішнього впливу, а тільки під дією власної ваги [42, 48, 52, 59, 63, 92]. При

нескінченно малому впливі стрижень приймає випучування дуже подібне до першої форми, яка показана на Рис. 3.4.

Знайдемо власні форми та власні значення для пружної системи, коли її пружність менша $B_{cr} = 0.1275$. При $B = 0.1$ власні значення рівні $\lambda_1 = -0.3431$, $\lambda_2 = 39.884$, $\lambda_3 = 355.63$, $\lambda_4 = 1401.7$, $\lambda_5 = 3906.5$

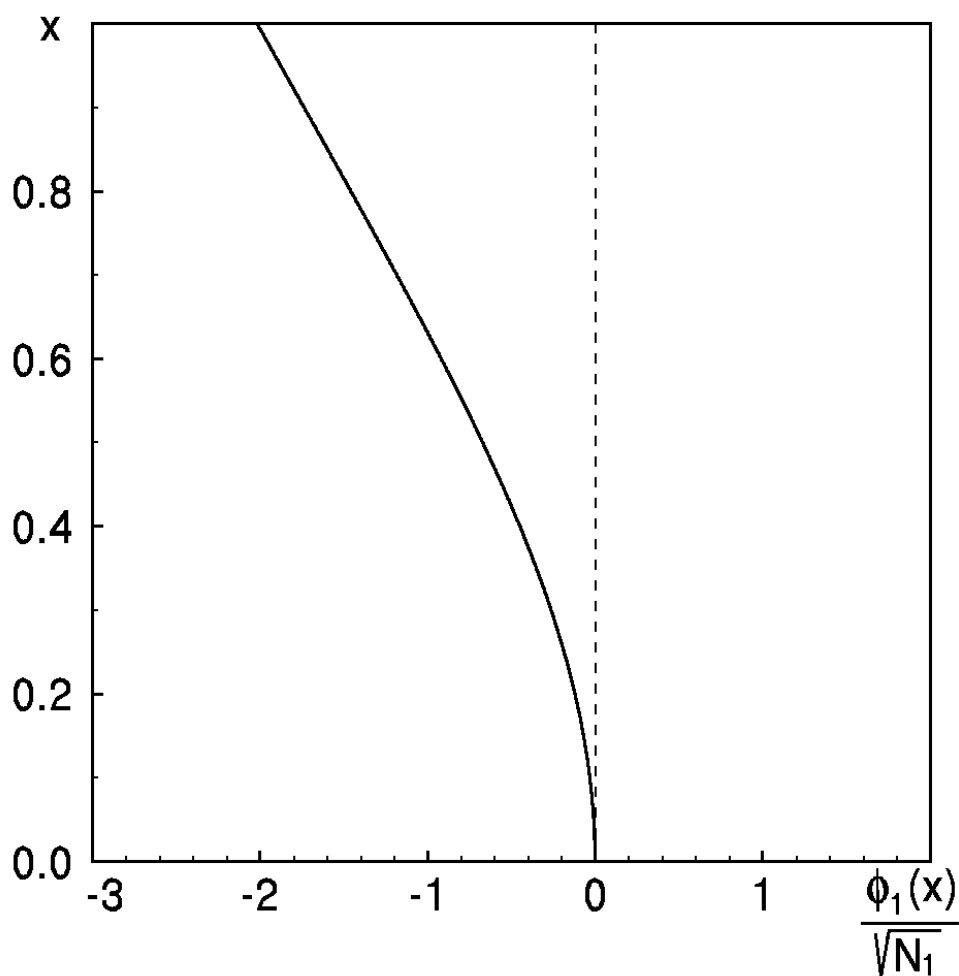


Рис. 3.4. Перша власна форма коливань закритичного стрижня

Власні форми φ_n s ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) для $B = 0.1$ приведені на Рис. 3.5.

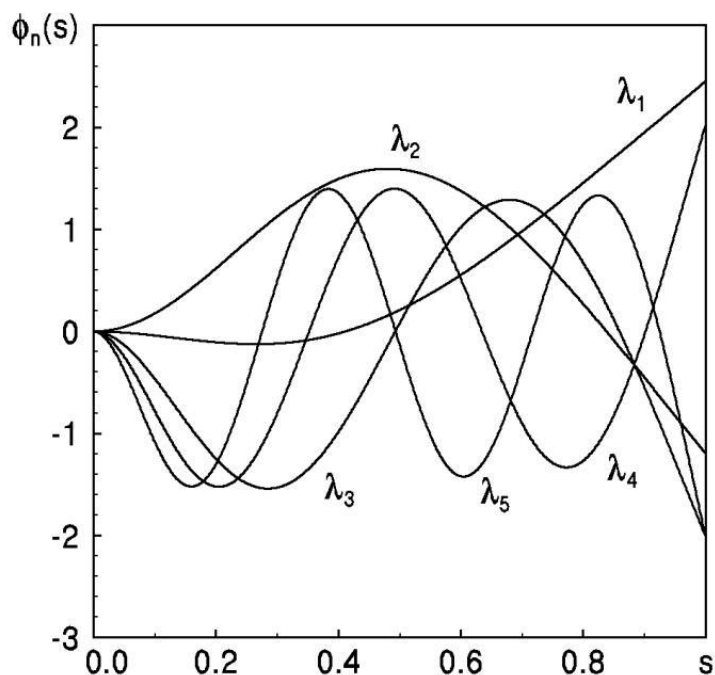


Рис. 3.5. Графік власних форм коливань закритичного стрижня φ_n s

($n = 1, 2, 3, 4, 5$) при $B = 0.1$

3.4 Ідентифікація

Для того, щоб провести ідентифікацію параметрів, ми повинні повернутися до результатів наших експериментальних досліджень. В стані спокою пружний стрижень з малою жорсткістю на згин довжини 26,7 см знаходиться в стані випучування, коли стрижень не має прямолінійної осі. Було проведено цілий ряд експериментів по коливанням і стабілізації стрижня, які описані в **Розділі 2** даної дисертації. Було виконано сім експериментів, результати яких показано на Рис. 2.2 – Рис. 2.9.

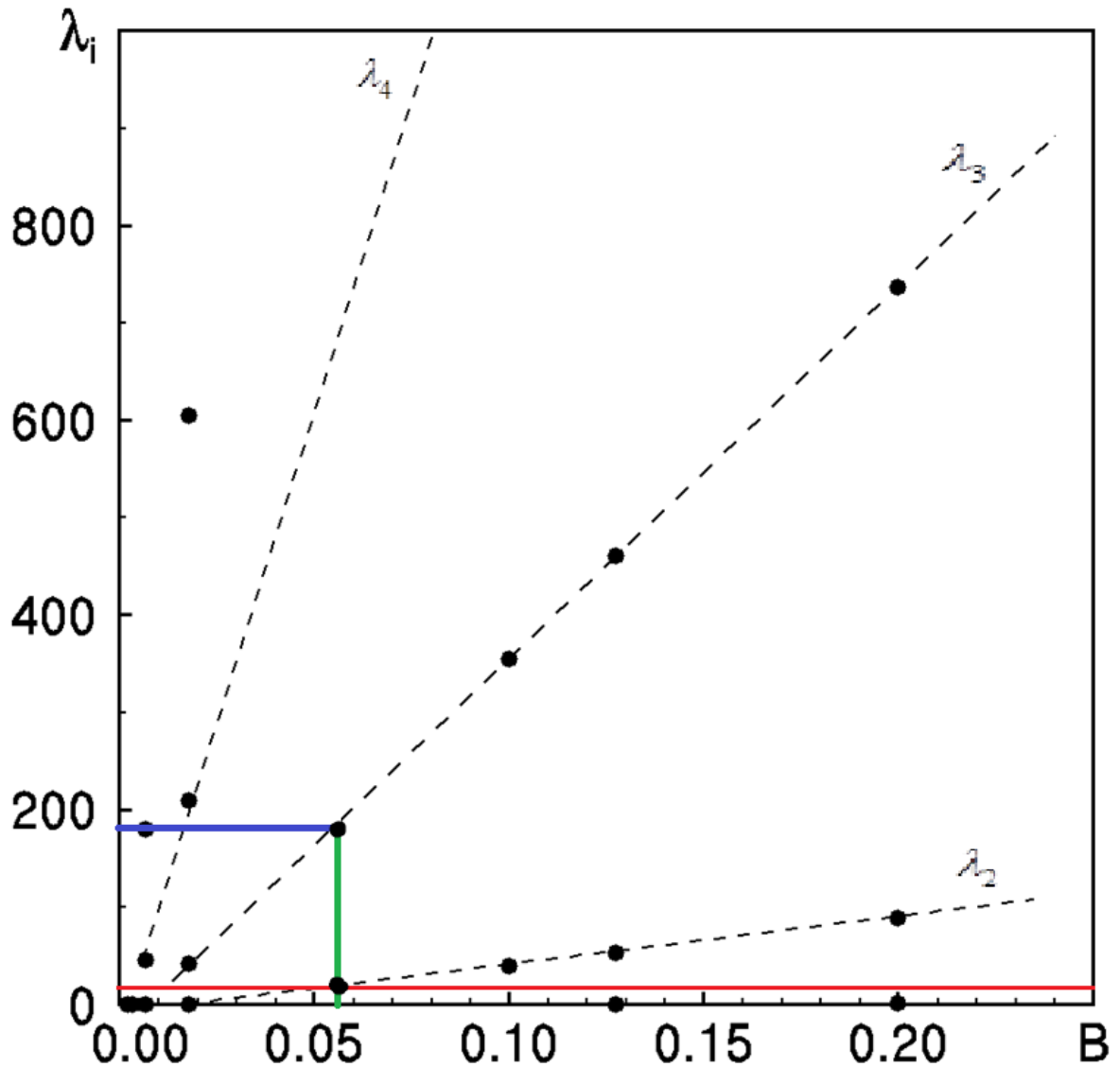


Рис. 3.6. Графік власних значень λ_i ($i=2, 3, 4$) при зміні B

В цих експериментах другу власну форму коливань (Рис. 2.3) можна було спостерігати при частоті вертикальних коливань всієї системи від 7 Гц до 9 Гц. Тому ми робимо висновок, що коливання закритичного стрижня в більшості наших експериментів проходили по другій формі в зоні основного параметричного резонансу [3, 6, 7, 9, 26, 27, 40, 41, 67, 68] (Рис. 1.8), коли частота (3.40) – (3.41) цієї власної форми була в двічі менша за частоту коливань вертикальних вібрацій, тобто дорівнювала $f_2 = \frac{\gamma_2}{2\pi} \approx \frac{1}{2} 8\Gamma\zeta = 4\Gamma\zeta$.

На Рис. 3.6 показано результати обчислень власних значень $\lambda_n = \gamma_n^2 I$, зроблених на підставі рівняння (3.43) при різних значеннях параметра B . Використаємо цей графік для визначення B . По-перше, ми обчислюємо, що $\lambda_2 = 18.031$ коли $\gamma_2 = \frac{2\pi}{2} 8\Gamma\zeta = 8\pi\Gamma\zeta$. Даному значенню λ_2 на Рис. 3.6 відповідає $B = 0.055$, яке ми знайшли, опустивши перпендикуляр (зелена лінія на Рис. 3.6) з точки $\lambda_2 = 18.031$ на графіку прямої λ_2 (точка перетину червоної лінії та прямої λ_2) на вісь абсцис B . Продовживши цей перпендикуляр вище лінії λ_2 аж до перетину з лінією значень λ_3 , ми знайдемо з графіка Рис. 3.6, що такому $B = 0.055$ відповідає $\lambda_3 = 184.32$ (точка перетину синього перпендикуляра та осі ординат). Оскільки $\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{\gamma_3^2}{\gamma_2^2} = 3.17^2$, то легко зробити висновок, що власні частоти коливань досліджуваного стрижня γ_2 і γ_3 мають відношення одна до другої, приблизно, як один до трьох (разстройка частот між $3\gamma_2$ і γ_3 менш ніж $0.053\gamma_3$

$$3\gamma_2 - \gamma_3 \leq 0.053\gamma_3 \quad (3.47)$$

Це означає, що в системі (коливання закритичного стрижня) є внутрішній резонанс, який обумовлює взаємодію коливань по другій власній формі та по третій власній формі [10, 32, 39].

Графіки власних форм коливань закритичного стрижня при $B = 0.055$, побудовані на основі обчислень рівняння (3.41) показані на Рис. 3.7 та Рис. 3.8.

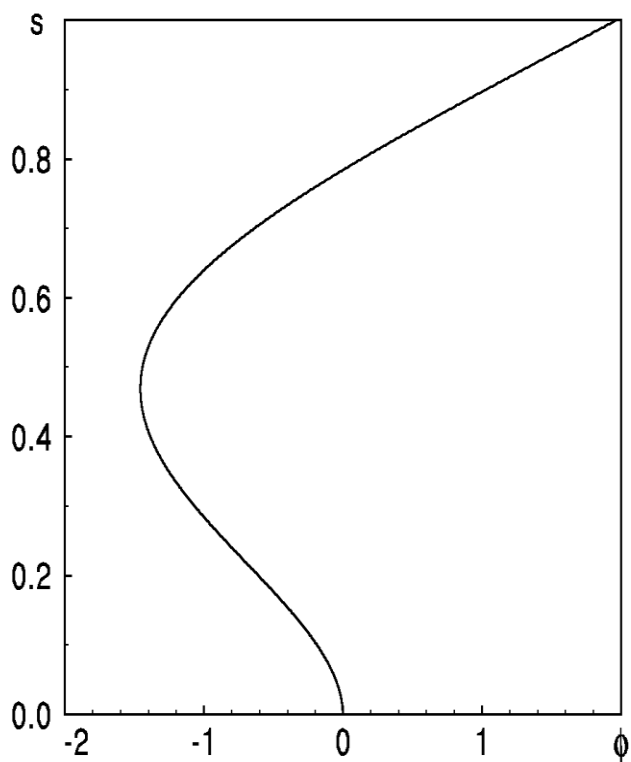


Рис.3.7 Графік другої власної форми коливань φ_2 при $B = 0.055$

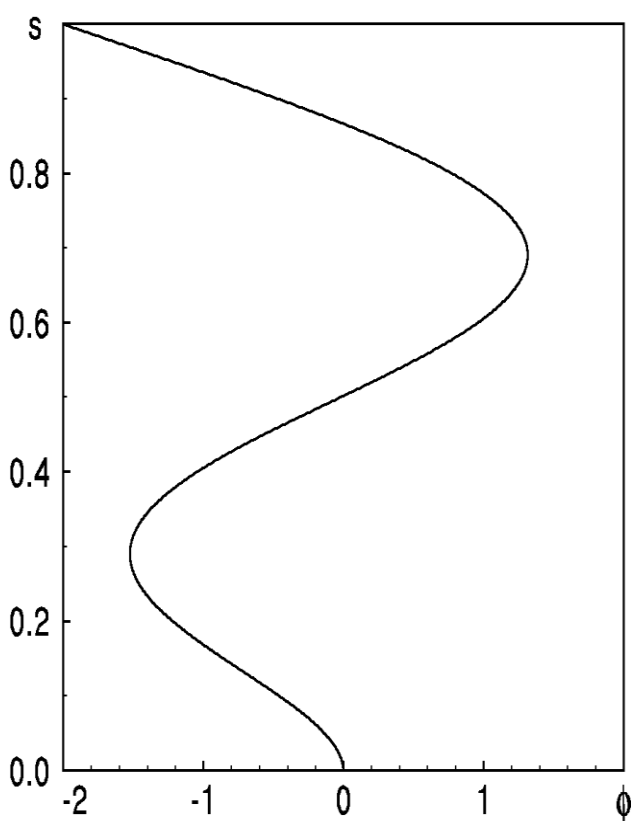


Рис.3.8 Графік третьої власної форми коливань φ_3 при $B = 0.055$

Висновки

В даному **Розділі 3** роботи визначені власні форми і власні частоти коливань пружнього закритичного стрижня, що консольно закріплений. Конкретний вигляд першої, другої та третьої форм для значення жорсткості на згин, ідентифікованого з проведених експериментів, побудовані чисельно. Знайдені значення власних частот свідчать, що в системі, яку розглядаємо, є внутрішній резонанс, коли друга і третя власні частоти мають співвідношення близьке до співвідношення один до трьох.

Матеріали досліджень, приведених у **Розділі 3**, відображені в публікаціях [29, 46] та доповідях [43–45, 80].

РОЗДІЛ 4

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ КОНСОЛЬНОГО СТРИЖНЯ З ЗАКРИТИЧНОЮ ЖОРСТКІСТЮ

4.1 Згинні коливання стрижня при нелінійному законі пружності

Розглянемо в прямокутній системі координат x, y, z стрижень довжиною l , поперечний перетин якого симетричний відносно двох взаємно перпендикулярних осей. Віссю стрижня будемо називати геометричне місце точок перетину цих осей симетрії в усіх поперечних перетинах. Нехай для недеформованого стрижня його вісь співпадає з віссю x (тобто є вертикальною), а осі симетрії паралельні осям y та z . Матеріал стрижня нехай слідує нелінійному закону пружності.

Дослідимо стоячі коливання, які можуть виникнути при згині осі стрижня в площині x, y , причому скористаємось нелінійною технічною теорією згину, що приведена вище [75]. Приймемо, що функцію $f(\varepsilon, x)$ (3.30) можна представити у вигляді:

$$f(\varepsilon, x) = E(1 - \alpha_3 E^2 \varepsilon^2) \varepsilon, \quad (4.1)$$

де E – модуль пружності $E = \frac{9KG}{3K + G}$; $\alpha_3 = \frac{2}{9} \frac{3K}{3K + G} \frac{\gamma_2}{G^2}$, K – модуль стиску, G – модуль зсуву [75]. Позначимо прогин точки x вісі стрижня в напрямку y в момент часу t через $\eta(x, t)$, згинний момент в цьому місці – через $M(x, t)$, площу поперечного перетину Q – через F та густину матеріала стрижня – через ρ . Тоді, незалежно від вигляду закону пружності, основним рівнянням динаміки для елемента dx стрижня в момент часу t буде [16, 19-24, 37, 42, 49-51]:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\rho F \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad (4.2)$$

при умові, що можна не враховувати інерцію обертання елементів стрижня.

Згинний момент M визначається формулою $\iint_Q A_* y y dy dz = M$.

Замінивши в ній кривину A_* осі стрижня, згідно рівності $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = A_*$ і

враховуючи (4.1), отримаємо

$$M_{x,t} = E \iint_Q \left[1 - a_3 E \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 y^2 \right] \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} y^2 dy dz, \quad (4.3)$$

де інтегрування слід розповсюдити на весь поперечний перетин Q стрижня.

Вводячи осьовий момент інерції площі

$$J_0 = \iint_Q y^2 dy dz, \quad (4.4)$$

який визначається формою поперечного перетину, і другу постійну

$$J_2 = \iint_Q y^4 dy dz, \quad (4.5)$$

приведемо $M_{x,t}$ до виду

$$M_{x,t} = EJ_0 \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - a_3 E^2 \frac{J_2}{J_0} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^3 \right]. \quad (4.6)$$

Підставивши цей вираз в рівняння (4.2), отримаємо для $\eta_{x,t}$ нелінійне диференціальне рівняння в часткових похідних четвертого порядку:

$$\rho F \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + EJ_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - 3a_3 E^3 J_2 \left[\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0. \quad (4.7)$$

Якщо в перетині стрижня діє поздовжня сила N_x , то рівняння (4.7) згинних коливань стрижня має вид [1, 3, 6, 7, 9, 24, 38, 50]:

$$EJ_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - 3\alpha_3 E^3 J_2 \left[\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0. \quad (4.8)$$

Якщо місце жорсткого закріплення стрижня виконує вертикальні коливання вигляду $A \cos \omega t$, тоді поздовжня сила в перетині x має вид [17, 64]:

$$N_x = \rho F \left[g(l-x) + l-x \frac{\partial^2}{\partial t^2} A \cos \omega t \right]. \quad (4.9)$$

Тоді рівняння нелінійних згинних коливань стрижня запишеться в формі

$$EJ_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \rho F g \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[l-x + l-x \frac{d^2}{dt^2} \frac{A}{g} \cos \omega t \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\} - 3\alpha_3 E^3 J_2 \left[\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial \eta^2}{\partial t^2} = 0. \quad (4.10)$$

Дане рівняння описує нелінійні згинні коливання стрижня відносно вертикального положення його осі, коли стрижень в початковому положенні в стані спокою є вертикальним.

Приступимо до розгляду рівняння коливань стрижня, який знаходиться в полі сил тяжіння, втрачає стійкість, та початкова прямолінійна форма його осі викривлюється. Такий стрижень називається закритичним [17, 38, 92].

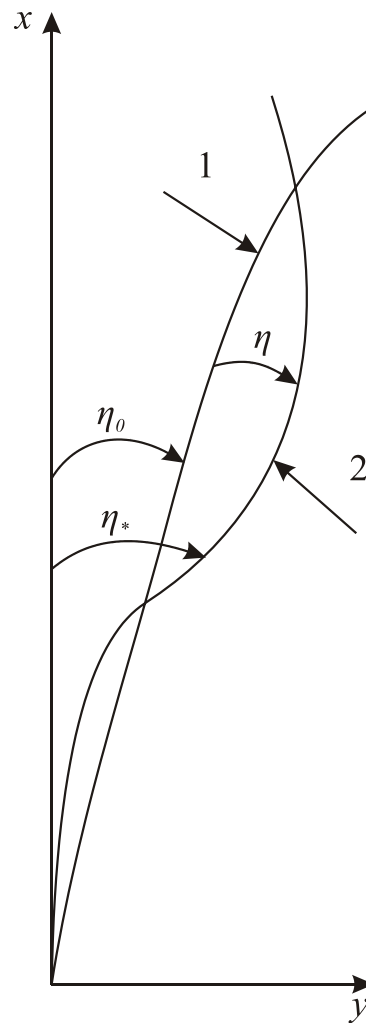


Рис. 4.1. Схема системи:

1 – початкове положення стрижня η_0 , 2 – деформований стан $\eta_* = \eta_0 + \eta$, де η коливання стрижня відносно початкового положення η_0 .

Припустимо, що вісь стрижня має початковий прогин $\eta_0 = \varphi_0$ з постійним за часом відхиленням. Нехай при заданому початковому прогині η_0 згинний момент в стрижні рівний нулю [24, 32]. Тоді рівняння (4.10) можна записати в наступному вигляді відносно загального прогину $\eta_* = \eta_0 + \eta$, де η – динамічний прогин коливань стрижня відносно викривленої вісі η_0 :

$$\begin{aligned}
& EJ_0 \frac{\partial^4 \eta_*}{\partial x^4} - EJ_0 \frac{\partial^4 \eta_0}{\partial x^4} + \rho F g \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[l - x + l - x A \omega^2 \cos \omega t \right] \frac{\partial \eta_*}{\partial x} \right\} - \\
& - 3\alpha_3 E^3 J_2 \left[\left(\frac{\partial^4 \eta_*}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \eta_0}{\partial x^4} \right) \left(\frac{\partial^2 \eta_*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} \right) + \right. \\
& \left. + 2 \left(\frac{\partial^3 \eta_*}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \eta_0}{\partial x^3} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 \eta_*}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \eta_0}{\partial x^3} \right) + \rho F \frac{\partial \eta^2}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

В рівнянні (4.11) ми врахували, що $\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2} = 0$, так як η_0 не залежить від часу. Далі підставляючи співвідношення

$$\eta_* = \eta_0 + \eta \tag{4.12}$$

в рівнянні (4.11) отримаємо рівняння для коливань η закритичного стрижня у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
& EJ_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \rho F g \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[l - x - A \omega^2 l - x \cos \omega t \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\} + \\
& + \rho F g \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[l - x - A \omega^2 l - x \cos \omega t \right] \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \right\} - \\
& - 3\alpha_3 E^3 J_2 \left[\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial \eta^2}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

4.2 Побудова моделі параметричних коливань стрижня по двох модах при відсутності початкових напружень

Даний розділ роботи присвячений розробці нелінійних моделей згинних коливань консольного стрижня, з настільки малою жорсткістю на згин, що – є “закритичним” [63, 92]. При цьому початковий прогин не викликає початкових напружень [24, 32].

Введемо безрозмірні змінні

$$w_0 = \frac{\eta_0}{l}; w = \frac{\eta}{l}; t^* = t\omega; x^* = \frac{x}{l}; \varepsilon^* = \frac{A\omega^2}{g}; B^* = \frac{EJ_0}{\rho F g l^3}; I^* = \frac{l\omega^2}{g}; I_3^* = \frac{3\alpha_3 E^3 J_2}{\rho F g l^3}. \tag{4.14}$$

Використаємо змінні (4.14) в рівнянні (4.13), тоді отримаємо

$$\begin{aligned}
 & B^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^{*4}} + 1 - \varepsilon^* \cos t^* \frac{\partial}{\partial x^*} \left[1 - x^* \frac{\partial w}{\partial x^*} \right] + \\
 & + 1 - \varepsilon^* \cos t^* \frac{\partial}{\partial x^*} \left[1 - x^* \frac{\partial w_0}{\partial x^*} \right] + \dots \\
 & + I^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^{*2}} - I_3^* \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^{*4}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^{*2}} + 2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^{*3}} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^{*2}} = 0
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Таким чином опускаючи $*$, рівняння (4.12) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned}
 & B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 1 - \varepsilon \cos t \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - x \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \\
 & + 1 - \varepsilon \cos t \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - x \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] + \dots \\
 & + I \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_3 \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

де $w_0 = \frac{\eta_0}{l}$, $B = \frac{EJ_0}{\rho Fgl^3}$, $I = \frac{l\omega^2}{g}$, $\varepsilon = \frac{A\omega^2}{g}$, $I_3 = \frac{3\alpha_3 E^3 J_2}{\rho Fgl^3}$. Нехай $\varepsilon = \varepsilon_0^2$, ε_0 - малий додатній параметр.

Будемо відшукувати розв'язки рівняння (4.16) для випадку, коли виконуються умови головного параметричного резонансу по другій власній формі $\phi_2(x)$, тобто коли реалізується умова [6, 7, 65, 67, 68]

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{g\lambda_2}{\omega^2 l}} \approx \frac{1}{2}, \tag{4.17}$$

де γ_2 - власна частота коливань по формі $\phi_2(x)$, коли

$$\frac{1}{2} - \gamma_2 = \varepsilon_0^2 \beta, \text{ або } \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \gamma_2 \frac{1}{I} = \varepsilon_0^2 \beta, \tag{4.18}$$

де ε_0 – малий додатний параметр. Апроксимуємо згин стрижня, як коливання по двом власним модам функцією виду

$$w = \varepsilon_0 \phi_2 x \left[A_2 \tau \cos \frac{t}{2} + B_2 \tau \sin \frac{t}{2} \right] + \varepsilon_0 \phi_3 x \left[A_3 \tau \cos \frac{3t}{2} + B_3 \tau \sin \frac{3t}{2} \right]. \quad (4.19)$$



Рис. 4.2. Одночасне коливання по другій і третій формам

Нагадаємо, що такий вид коливань ми виявили у експериментальних дослідженнях і він представлений на Рис. 4.2. Помітимо, що для $B = 0.055$ крім умови (4.18) буде виконуватись співвідношення виду:

$$\frac{3}{2} - \gamma_3 = \varepsilon_0^2 \beta_3, \quad (4.20)$$

де γ_3 – власна частота коливань по формі $\phi_3 x$, так як $\gamma_3 \approx 3\gamma_2$ згідно (3.47) (тобто $\lambda_3 \approx 3^2 \lambda_2$) тоді з (4.18) випливає (4.20).

Ми ввели в (3.19) повільний час $\tau = \varepsilon_0^2 t$, а в співвідношеннях (4.18) та (4.20) β і β_3 – постійні параметри разстройки частот. Кожна із власних форм ϕ_2 і ϕ_3 задовольняє рівняння

$$B\phi_2'''' + \left[1 - x \phi_2' \right]' - \lambda_2 \phi_2 = 0 \quad (4.21)$$

або

$$B\phi_3'''' + \left[1 - x \phi_3' \right]' - \lambda_3 \phi_3 = 0. \quad (4.22)$$

Помноживши (4.21) на $\varepsilon_0 \left[A_2 \tau \cos \frac{t}{2} + B_2 \tau \sin \frac{t}{2} \right]$, а рівняння (4.22) на $\varepsilon_0 \left[A_3 \tau \cos \frac{3t}{2} + B_3 \tau \sin \frac{3t}{2} \right]$, та додаючи отримані вирази отримуємо

$$\begin{aligned} & \left\{ B\phi_2'''' + \left[1 - x \phi_2' \right]' - \lambda_2 \phi_2 \right\} \varepsilon_0 \left[A_2 \tau \cos \frac{t}{2} + B_2 \tau \sin \frac{t}{2} \right] + \\ & + \left\{ B\phi_3'''' + \left[1 - x \phi_3' \right]' - \lambda_3 \phi_3 \right\} \varepsilon_0 \left[A_3 \tau \cos \frac{3t}{2} + B_3 \tau \sin \frac{3t}{2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Підставляємо функцію коливань (4.19) в рівняння (4.16) і віднімаємо співвідношення (4.23). В результаті отримаємо наступне нелінійне рівняння

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon_0^2 \cos t \left\{ \left[1 - x \phi_2'' - \phi_2' \right] \varepsilon_0 \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) + \right. \\
& \left. + \left[1 - x \phi_3'' - \phi_3' \right] \varepsilon_0 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) \right\} + \\
& + 1 - \varepsilon_0^2 \cos t \left[1 - x w_0'' - w_0' \right] - \\
& - \varepsilon_0^3 \beta I \phi_2 \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) - \\
& - 3 \varepsilon_0^3 \beta_3 I \phi_3 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) + \\
& + I \phi_2 \frac{\varepsilon_0^3}{2} \left[-\frac{dA_2}{d\tau} \sin \frac{t}{2} + \frac{dB_2}{d\tau} \cos \frac{t}{2} \right] + \\
& + I \phi_3 \frac{3\varepsilon_0^3}{2} \left[-\frac{dA_3}{d\tau} \sin \frac{3t}{2} + \frac{dB_3}{d\tau} \cos \frac{3t}{2} \right] - \\
& - \varepsilon_0^3 I_3 \left(F_1 T_1 + F_2 T_2 + F_3 T_3 + F_4 T_4 \right) = 0,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\text{де } F_1 = \phi_2'''' \phi_2''^2 + 2 \phi_2'''' \phi_2''^2;$$

$$F_2 = 2\phi_2'''' \phi_2'' \phi_3'' + 4\phi_2'' \phi_2'''' \phi_3'' + \phi_3'''' \phi_2''^2 + 2 \phi_2'''' \phi_3''^2;$$

$$F_3 = 2\phi_3'''' \phi_2'' \phi_3'' + 4\phi_2'' \phi_3'''' \phi_3'' + \phi_2'''' \phi_3''^2 + 2 \phi_3'''' \phi_2''^2;$$

$$F_4 = \phi_3'''' \phi_3''^2 + 2 \phi_3'''' \phi_3''^2;$$

$$T_1 = \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right)^3; \quad T_2 = \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right)^2 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right);$$

$$T_3 = \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right)^2; \quad T_4 = \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right)^3;$$

В рівнянні (4.24) ми використали наступні додаткові співвідношення (які застосовуються при застосуванні методу усереднення)

$$\frac{d}{dt} \left[A_2 \tau \cos \frac{t}{2} + B_2 \tau \sin \frac{t}{2} \right] = -\frac{1}{2} A_2 \tau \sin \frac{t}{2} + \frac{1}{2} B_2 \tau \cos \frac{t}{2} \quad (4.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left[A_3 \tau \cos \frac{3t}{2} + B_3 \tau \sin \frac{3t}{2} \right] = -\frac{3}{2} A_3 \tau \sin \frac{3t}{2} + \frac{3}{2} B_3 \tau \cos \frac{3t}{2} \quad (4.26)$$

З рівняння (4.24) отримуємо два рівняння, домножаючи один раз на $\phi_2 x$, а другий раз на $\phi_3 x$ та інтегруючи по всій довжині стрижня від 0 до 1. При цьому повинні виконуватись умови

$$\int_0^1 \phi_2 \phi_3 dx = 0; \quad \int_0^1 \phi_2^2 dx = 1; \quad \int_0^1 \phi_3^2 dx = 1, \quad (4.27)$$

так як саме ці умови були використані для визначення ϕ_2 і ϕ_3 , коли $\phi_2 = \frac{\varphi_2}{\sqrt{N_2}}$;

$\phi_3 = \frac{\varphi_3}{\sqrt{N_3}}$; де N_2 і N_3 – норми, які наведено в розділі 3, формула (3.80).

Введемо наступні позначення

$$\begin{aligned} \frac{1}{I} \int_0^1 [1-x \phi_2'' - \phi_2'] \phi_2 dx &= \alpha_1; \quad \frac{1}{I} \int_0^1 [1-x \phi_3'' - \phi_3'] \phi_2 dx = \alpha_2; \\ \frac{1}{I} \int_0^1 [1-x \phi_2'' - \phi_2'] \phi_3 dx &= \alpha_3; \quad \frac{1}{I} \int_0^1 [1-x \phi_3'' - \phi_3'] \phi_3 dx = \alpha_4; \\ \int_0^1 F_1 x \phi_2 dx &= \alpha_5; \quad \int_0^1 F_2 x \phi_2 dx = \alpha_6; \quad \int_0^1 F_3 x \phi_2 dx = \alpha_7; \quad \int_0^1 F_4 x \phi_2 dx = \alpha_8; \quad (4.28) \\ \int_0^1 F_1 x \phi_3 dx &= \alpha_9; \quad \int_0^1 F_2 x \phi_3 dx = \alpha_{10}; \quad \int_0^1 F_3 x \phi_3 dx = \alpha_{11}; \quad \int_0^1 F_4 x \phi_3 dx = \alpha_{12}; \\ \frac{1}{I \varepsilon_0^3} \int_0^1 [(-x)'' - w_0'] \phi_2 dx &= \alpha_{13}; \quad \frac{1}{I \varepsilon_0^3} \int_0^1 [(-x)'' - w_0'] \phi_3 dx = \alpha_{14}; \end{aligned}$$

Тоді з рівняння (4.24) отримаємо наступну систему рівнянь, опускаючи в ній ε_0^3

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[-\frac{dA_2}{d\tau} \sin \frac{t}{2} + \frac{dB_2}{d\tau} \cos \frac{t}{2} \right] - \beta \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) + \alpha_{13} \left(1 - \varepsilon_0^2 \cos t \right) - \\
& - \alpha_1 \cos t \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) - \alpha_2 \cos t \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) - \\
& - \frac{I_3}{I} \alpha_5 \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right)^3 - \frac{I_3}{I} \alpha_6 T_2 \left(A_2, B_2, A_3, B_3, t \right) - \\
& - \frac{I_3}{I} \alpha_7 T_3 \left(A_2, B_2, A_3, B_3, t \right) - \frac{I_3}{I} \alpha_8 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right)^3 = 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2} \left[-\frac{dA_3}{d\tau} \sin \frac{3t}{2} + \frac{dB_3}{d\tau} \cos \frac{3t}{2} \right] - 3\beta_3 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) + \alpha_{14} \left(1 - \varepsilon_0^2 \cos t \right) - \\
& - \alpha_3 \cos t \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) - \alpha_4 \cos t \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) - \\
& - \frac{I_3}{I} \alpha_9 \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right)^3 - \frac{I_3}{I} \alpha_{10} T_2 \left(A_2, B_2, A_3, B_3, t \right) - \\
& - \frac{I_3}{I} \alpha_{11} T_3 \left(A_2, B_2, A_3, B_3, t \right) - \frac{I_3}{I} \alpha_{12} \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right)^3 = 0
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Нагадаємо ще раз, що ми використаємо метод усереднення Боголюбова – Митропольського [5]. Для цього використаємо додаткові до (4.29) і (4.30) співвідношення (4.25) і (4.26), які зазвичай використовуються в цьому методі, звідки отримаємо додатково

$$\frac{dA_2}{d\tau} \cos \frac{t}{2} + \frac{dB_2}{d\tau} \sin \frac{t}{2} = 0 \tag{4.31}$$

$$\frac{dA_3}{d\tau} \cos \frac{3t}{2} + \frac{dB_3}{d\tau} \sin \frac{3t}{2} = 0 \tag{4.32}$$

З системи рівнянь (4.29), (4.30), (4.31), (4.32) отримуємо

$$\begin{aligned}
\frac{dA_2}{d\tau} &= -2 \cos t \left\{ \alpha_1 \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) + \alpha_{13} \left(1 - \varepsilon_0^2 \cos t \right) + \right. \\
&+ \alpha_2 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) \left. \right\} \sin \frac{t}{2} - 2\beta \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) \sin \frac{t}{2} - \\
&- \frac{I_3}{I} 2 \left\{ \alpha_5 \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right)^3 + \alpha_6 T_2 + \right. \\
&+ \alpha_7 T_3 + \alpha_8 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right)^3 \left. \right\} \sin \frac{t}{2}; \\
\frac{dB_2}{d\tau} &= 2 \cos t \left\{ \alpha_1 \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) + \alpha_{13} \left(1 - \varepsilon_0^2 \cos t \right) + \right. \\
&+ \alpha_2 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) \left. \right\} \cos \frac{t}{2} + 2\beta \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) \cos \frac{t}{2} \\
&+ \frac{I_3}{I} 2 \left(\alpha_5 T_1 + \alpha_6 T_2 + \alpha_7 T_3 + \alpha_8 T_4 \right) \cos \frac{t}{2}; \\
\frac{dA_3}{d\tau} &= -\frac{2}{3} \cos t \left\{ \alpha_3 \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) + \alpha_{14} \left(1 - \varepsilon_0^2 \cos t \right) \right. \\
&+ \alpha_4 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) \left. \right\} \sin \frac{3t}{2} - 2\beta_3 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) \sin \frac{3t}{2} - \\
&- \frac{2}{3} \frac{I_3}{I} \left\{ \alpha_9 \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right)^3 + \alpha_{10} T_2 + \right. \\
&+ \alpha_{11} T_3 + \alpha_{12} \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right)^3 \left. \right\} \sin \frac{3t}{2}; \\
\frac{dB_3}{d\tau} &= \frac{2}{3} \cos t \left\{ \alpha_3 \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) + \alpha_{14} \left(1 - \varepsilon_0^2 \cos t \right) \right. \\
&+ \alpha_4 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) \left. \right\} \cos \frac{3t}{2} + 2\beta_3 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) \cos \frac{3t}{2} + \\
&+ \frac{2}{3} \frac{I_3}{I} \left(\alpha_9 T_1 + \alpha_{10} T_2 + \alpha_{11} T_3 + \alpha_{12} T_4 \right) \cos \frac{3t}{2}.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Проінтегрувавши рівняння по t від 0 до 4π . В результаті, отримуємо чотири рівняння для A_2 , B_2 , A_3 , B_3 :

$$\begin{aligned}
\frac{dA_2}{d\tau} &= \alpha_1 B_2 - \frac{\alpha_2}{2} B_3 - \beta B_2 - 2 \frac{I_3}{I} \left\{ \alpha_5 \frac{3}{8} B_2 A_2^2 + B_2^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{\alpha_6}{8} A_2^2 B_3 - B_2^2 B_3 + 2 A_2 B_2 A_3 + \frac{\alpha_7}{4} B_2 A_3^2 + B_3^2 \right\}; \\
\frac{dB_2}{d\tau} &= \frac{\alpha_1}{2} A_2 + \frac{\alpha_2}{2} A_3 + \beta A_2 + 2 \frac{I_3}{I} \left\{ \alpha_5 \frac{3}{8} A_2 A_2^2 + B_2^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{\alpha_6}{8} A_2^2 A_3 - B_2^2 A_3 + 2 A_2 B_2 B_3 + \frac{\alpha_7}{4} A_2 A_3^2 + B_3^2 \right\}; \\
\frac{dA_3}{d\tau} &= -\frac{\alpha_3}{6} B_2 - \beta_3 B_3 - \frac{2 I_3}{3 I} \left\{ \frac{\alpha_9}{8} B_2 3 A_2^2 - B_2^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{\alpha_{10}}{8} B_3 A_2^2 + B_2^2 + \alpha_{12} \frac{3}{8} B_3 A_3^2 + B_3^2 \right\}; \\
\frac{dB_3}{d\tau} &= \frac{\alpha_3}{6} A_2 + \beta_3 A_3 + \frac{2 I_3}{3 I} \left\{ \frac{\alpha_9}{8} A_2 A_2^2 - 3 B_2^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{\alpha_{10}}{8} A_3 A_2^2 + B_2^2 + \alpha_{12} \frac{3}{8} A_3 A_3^2 + B_3^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

4.3 Рівняння згинних коливань стрижня при врахуванні в'язкого опору

Доповнимо рівняння згинних коливань (в розмірному вигляді) (4.13) членом, що враховує демпфування, пропорційне швидкості $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, причому коефіцієнт пропорційності позначається ξ , отримаємо

$$\begin{aligned}
& EJ_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \rho F g \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[l - x + l - x \frac{d^2 A}{dt^2} \frac{1}{g} \cos \omega t \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\} + \\
& + \rho F g \frac{\partial}{\partial x} \left[l - x - A \omega^2 l - x \cos \omega t \right] \frac{\partial \eta_0}{\partial x} - \\
& - 3 \alpha_3 E^3 J_2 \left[\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial \eta^2}{\partial t^2} + \xi \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Перейдемо до безрозмірного вигляду використовуючи формули (4.14) та врахувавши

$$\xi_1^* = \frac{\xi \omega}{\rho F g}, \quad \varepsilon_0^2 = \varepsilon^* \quad (4.36)$$

та вважаючи $\xi = O \varepsilon_0^2$ величиною порядку ε_0^2 . Використовуючи безрозмірні змінні (4.11), (4.33) та відкидаючи «*» отримаємо рівняння в безрозмірних змінних у такому вигляді:

$$\begin{aligned} & B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + [1 - \varepsilon_0^2 \cos t] \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - x \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \\ & + [1 - \varepsilon_0^2 \cos t] \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - x \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] \\ & + I \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \xi_1 \frac{\partial w}{\partial t} - I_3 \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Задаючи шуканий розв'язок у вигляді суми двох гармонік і враховуючи резонансні умови, отримаємо в рівнянні (4.24) наступні додаткові члени

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \xi_1 \left[-A_2 \sin \frac{t}{2} + B_2 \cos \frac{t}{2} \right] \phi_2 \quad x \\ & \frac{3}{2} \xi_1 \left[-A_3 \sin \frac{3t}{2} + B_3 \cos \frac{3t}{2} \right] \phi_3 \quad x \end{aligned} \quad (4.38)$$

Отримаємо систему у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{dA_2}{d\tau} = & \frac{1}{I} \xi_1 \left[-A_2 \sin \frac{t}{2} + B_2 \cos \frac{t}{2} \right] \sin \frac{t}{2} - 2 \cos t \left\{ \alpha_1 \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \alpha_2 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) + \alpha_{13} [1 - \varepsilon_0^2 \cos t] \right\} \sin \frac{t}{2} \\ & - 2\beta \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) \sin \frac{t}{2} - \frac{I_3}{I} 2 \left(\alpha_5 T_1 + \alpha_6 T_2 + \alpha_7 T_3 + \alpha_8 T_4 \right) \sin \frac{t}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dB_2}{d\tau} &= \frac{1}{I} \xi_1 \left[A_2 \sin \frac{t}{2} - B_2 \cos \frac{t}{2} \right] \cos \frac{t}{2} + 2 \cos t \left\{ \alpha_1 \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) + \right. \\
&+ \alpha_2 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) + \alpha_{13} \left. 1 - \varepsilon_0^2 \cos t \right\} \cos \frac{t}{2} + \\
&+ 2\beta \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) \cos \frac{t}{2} + \frac{I_3}{I} 2 \left(\alpha_5 T_1 + \alpha_6 T_2 + \alpha_7 T_3 + \alpha_8 T_4 \right) \cos \frac{t}{2}; \\
\frac{dA_3}{d\tau} &= \frac{1}{I} \xi_1 \left[-A_3 \sin \frac{3t}{2} + B_3 \cos \frac{3t}{2} \right] \sin \frac{3t}{2} - \frac{2}{3} \cos t \left\{ \alpha_3 \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) + \right. \\
&+ \alpha_4 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) + \alpha_{14} \left. 1 - \varepsilon_0^2 \cos t \right\} \sin \frac{3t}{2} - \\
&- 2\beta_3 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) \sin \frac{3t}{2} - \frac{2}{3} \frac{I_3}{I} \left(\alpha_9 T_1 + \alpha_{10} T_2 + \alpha_{11} T_3 + \alpha_{12} T_4 \right) \sin \frac{3t}{2}; \\
\frac{dB_3}{d\tau} &= \frac{1}{I} \xi_1 \left[A_3 \sin \frac{3t}{2} - B_3 \cos \frac{3t}{2} \right] \cos \frac{3t}{2} + \frac{2}{3} \cos t \left\{ \alpha_3 \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) + \right. \\
&+ \alpha_4 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) + \alpha_{14} \left. 1 - \varepsilon_0^2 \cos t \right\} \cos \frac{3t}{2} + \\
&+ 2\beta_3 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) \cos \frac{3t}{2} + \frac{2}{3} \frac{I_3}{I} \left(\alpha_9 T_1 + \alpha_{10} T_2 + \alpha_{11} T_3 + \alpha_{12} T_4 \right) \cos \frac{3t}{2}.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Тоді неконсервативна система рівнянь (4.34) з урахуванням таких позначень

$$\xi_2 = \frac{\xi}{\rho Fl}; \quad \rho Fl = \frac{EJ_0}{Bl^3}; \quad E = \frac{9KG}{3K + G}; \quad B = 0.055 \text{ має вид:}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dA_2}{d\tau} &= -\frac{\xi_2}{2} A_2 + \left\{ \frac{\alpha_1}{2} B_2 - \frac{\alpha_2}{2} B_3 - \beta B_2 - \right. \\
&- 2 \frac{I_3}{I} \left[\alpha_5 \frac{3}{8} B_2 \left(A_2^2 + B_2^2 \right) + \frac{\alpha_6}{8} \left(A_2^2 B_3 - B_2^2 B_3 + 2A_2 B_2 A_3 \right) + \right. \\
&\left. \left. + \frac{\alpha_7}{4} B_2 \left(A_3^2 + B_3^2 \right) \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dB_2}{d\tau} &= -\frac{\xi_2}{2} B_2 + \left\{ \frac{\alpha_1}{2} A_2 + \frac{\alpha_2}{2} A_3 + \beta A_2 + \right. \\
&+ 2 \frac{I_3}{I} \left[\alpha_5 \frac{3}{8} A_2 A_2^2 + B_2^2 + \frac{\alpha_6}{8} A_2^2 A_3 - B_2^2 A_3 + 2 A_2 B_2 B_3 + \right. \\
&\left. \left. + \frac{\alpha_7}{4} A_2 A_3^2 + B_3^2 \right] \right\}; \\
\frac{dA_3}{d\tau} &= -\frac{\xi_2}{2} A_3 + \left\{ -\frac{\alpha_3}{6} B_2 - \beta_3 B_3 - \right. \\
&- \frac{2}{3} \frac{I_3}{I} \left[\frac{\alpha_9}{8} 3 A_2^2 B_2 - B_2^3 + \frac{\alpha_{10}}{8} B_3 A_2^2 + B_2^2 + \right. \\
&\left. \left. + \alpha_{12} \frac{3}{8} B_3 A_3^2 + B_3^2 \right] \right\}; \\
\frac{dB_3}{d\tau} &= -\frac{\xi_2}{2} B_3 + \left\{ \frac{\alpha_3}{6} A_2 + \beta_3 A_3 + \right. \\
&+ \frac{2}{3} \frac{I_3}{I} \left[\frac{\alpha_9}{8} A_2 A_2^2 - 3 A_2 B_2 + \frac{\alpha_{10}}{8} A_3 A_2^2 + B_2^2 + \right. \\
&\left. \left. + \alpha_{12} \frac{3}{8} A_3 A_3^2 + B_3^2 \right] \right\}; \tag{4.40}
\end{aligned}$$

4.4 Побудова моделі параметричних коливань стрижня по двох модах з врахуванням початкових напружень

Нехай при заданому початковому прогині η_0 згинний момент в стрижні не є рівним нулю [16]. Якщо стрижень вже «випучився» і друга і третя форми коливаються навколо випученого стану, враховуємо згинний момент M , що виникає при початковій кривині стрижня $\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} = \xi_0$. Тоді до кривини від динамічних коливань по другій та третій формах $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ (де η коливання стрижня відносно початкового положення η_0) ми додаємо початкову ξ_0 , яку вважаємо

рівній кривині $\xi_0 = A_0 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}$ $A_0 - const$ по першій власній моді (формі) коливань ϕ_1 (яка показана на Рис. 2.2 та Рис.3. 4). Тоді рівняння (4.6) має вид

$$M_{x,t} = EJ_0 \left[\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + A_0 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right) - a_3 E^2 \frac{J_2}{J_0} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + A_0 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right)^3 \right] \quad (4.41)$$

Та рівняння (4.13) з безрозмірними змінними має вид

$$\begin{aligned} & B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{A_0 B}{l} \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} + 1 - \varepsilon \cos t \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{A_0}{l} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \right] + \\ & + I \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_3 \left[\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{A_0}{l} \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{A_0}{l} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right) + \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{A_0}{l} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{A_0}{l} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Оскільки ϕ_1 задовольняє рівнянню для власних форм, то можна записати співвідношення

$$B \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - x \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right] = -\lambda_1 \phi_1 \quad (4.43)$$

Тому рівняння (4.42) представимо у наступній формі

$$\begin{aligned}
& B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(\frac{A_0}{l} \lambda_1 \phi_1 \right) + 1 - \varepsilon \cos t \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - x \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \\
& - \varepsilon \cos t \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{A_0}{l} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} 1 - x \right] + I \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \\
& - I_3 \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\
& - I_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\left(\frac{A_0}{l} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} \right) + 2 \left(\frac{A_0}{l} \right)^2 \left(\frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3} \right)^2 + \frac{A_0}{l} \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\
& + \frac{A_0}{l} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4 \frac{A_0}{l} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3} \left. \right] - I_3 \frac{A_0}{l} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \left[\left(\frac{A_0}{l} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} \right) + \right. \\
& \left. + 2 \left(\frac{A_0}{l} \right)^2 \left(\frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3} \right)^2 + \frac{A_0}{l} \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{A_0}{l} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4 \frac{A_0}{l} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3} \right] = 0 \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Вважаємо амплітуду статичного прогину $\frac{A_0}{l}$ величиною $O \varepsilon_0$, але такою, що при апроксимації динамічного прогину сумою виду (4.19) $w = \varepsilon_0 \left(A_2 \cos \frac{\omega t}{2} + B_2 \sin \frac{\omega t}{2} \right) \phi_2 + \varepsilon_0 \left(A_3 \cos \frac{3\omega t}{2} + B_3 \sin \frac{3\omega t}{2} \right) \phi_3$, величина $\left(\frac{A_0}{l} \right)$, скажімо, задовольняє умові $5A_2 > \left(\frac{A_0}{l} \right) \geq 3A_2$ і ми повинні враховувати всі члени рівняння (4.44). Згрупуємо нелінійні члени рівняння наступним чином:

$$\begin{aligned}
& B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(\frac{A_0}{l} \lambda_1 \phi_1 \right) + 1 - \varepsilon \cos t \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - x \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \\
& - \varepsilon \cos t \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{A_0}{l} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} 1 - x \right] + I \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \\
& - I_3 \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\
& - I_3 \left(\frac{A_0}{l} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3} \right] - \\
& - I_3 \left(\frac{A_0}{l} \right)^2 \left[2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3} \right)^2 + \right. \\
& \left. + 4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] \\
& - I_3 \left(\frac{A_0}{l} \right)^3 \left[\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} + 2 \left(\frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = 0
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Задаючи розв'язок w у вигляді двомодових коливань типу (4.19) при виконанні резонансних умов (4.18) і (4.20), де введений повільний час τ , та використовуючи співвідношення (4.23), в результаті отримуємо наступне нелінійне рівняння:

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{A_0}{l}\right)\lambda_1\phi_1 - \varepsilon_0^2 \cos t \left\{ \left[1-x \phi_2'' - \phi_2' \right] \varepsilon_0 \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{A_0}{l} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} 1-x \right] + \left[1-x \phi_3'' - \phi_3' \right] \varepsilon_0 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) \left. \right\} - \\
& -\varepsilon_0^3 \beta I \phi_2 \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) - \\
& -\varepsilon_0^3 \beta_3 I \phi_3 \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right) + I \phi_2 \frac{\varepsilon_0^3}{2} \left[-\frac{dA_2}{d\tau} \sin \frac{t}{2} + \frac{dB_2}{d\tau} \cos \frac{t}{2} \right] + \\
& + I \phi_3 \frac{3\varepsilon_0^3}{2} \left[-\frac{dA_3}{d\tau} \sin \frac{3t}{2} + \frac{dB_3}{d\tau} \cos \frac{3t}{2} \right] - \varepsilon_0^3 I_3 \left\{ T_1 + F_2 T_2 + F_3 T_3 + F_4 T_4 \right\} \\
& -\varepsilon_0^2 I_3 \left(\frac{A_0}{l} \right) F_5 \left[\left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right)^2, \left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right) \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right), \right. \\
& \left. \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right)^2, \phi_1, \phi_2, \phi_3 \right] - I_3 \left(\frac{A_0}{l} \right)^3 F_6 \left(\phi_1 \right) \\
& -\varepsilon_0 I_3 \left(\frac{A_0}{l} \right)^2 F_7 \left[\left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right), \left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right), \phi_1, \phi_2, \phi_3 \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.46}$$

В рівнянні (4.46) ми позначили функцію F_5 як функцію, що залежить від квадратів функцій $\left(A_2 \cos \frac{t}{2} + B_2 \sin \frac{t}{2} \right)$ і $\left(A_3 \cos \frac{3t}{2} + B_3 \sin \frac{3t}{2} \right)$ та їх добутку, а як функцію F_6 – функцію залежну лише від постійної функції початкового прогину випучування (яка не залежить від часу), і функцію F_7 – як функцію від амплітуд коливань по власним формам ϕ_2 і ϕ_3 при двомодовій апроксимації коливань (4.19). Тому застосовуючи процедуру осереднення по методу Боголюбова-Митропольського, тільки члени, що входять у функцію F_7 будуть входити в осереднені рівняння типу (4.40). А саме

$$\begin{aligned}
\frac{dA_2}{d\tau} &= -\frac{\xi_2}{2} A_2 - \frac{2I_3\alpha_{15}a_0^2}{I} B_2 + \left\{ \frac{\alpha_1}{2} B_2 - \frac{\alpha_2}{2} B_3 - \beta B_2 - \right. \\
&- 2\frac{I_3}{I} \left[\alpha_5 \frac{3}{8} B_2 (A_2^2 + B_2^2) + \frac{\alpha_6}{8} (A_2^2 B_3 - B_2^2 B_3 + 2A_2 B_2 A_3 + \right. \\
&\left. \left. + \frac{\alpha_7}{4} B_2 (A_3^2 + B_3^2) \right] \right\}; \\
\frac{dB_2}{d\tau} &= -\frac{\xi_2}{2} B_2 + \frac{2I_3\alpha_{15}a_0^2}{I} A_2 + \left\{ \frac{\alpha_1}{2} A_2 + \frac{\alpha_2}{2} A_3 + \beta A_2 + \right. \\
&+ 2\frac{I_3}{I} \left[\alpha_5 \frac{3}{8} A_2 (A_2^2 + B_2^2) + \frac{\alpha_6}{8} (A_2^2 A_3 - B_2^2 A_3 + 2A_2 B_2 B_3 + \right. \\
&\left. \left. + \frac{\alpha_7}{4} A_2 (A_3^2 + B_3^2) \right] \right\}; \\
\frac{dA_3}{d\tau} &= -\frac{\xi_2}{2} A_3 - \frac{2I_3\alpha_{16}a_0^2}{3I} B_3 + \left\{ -\frac{\alpha_3}{6} B_2 - \beta_3 B_3 - \right. \\
&- \frac{2}{3} \frac{I_3}{I} \left[\frac{\alpha_9}{8} (A_2^2 B_2 - B_2^3) + \frac{\alpha_{10}}{8} B_3 (A_2^2 + B_2^2) \right. \\
&\left. \left. + \alpha_{12} \frac{3}{8} B_3 (A_3^2 + B_3^2) \right] \right\}; \\
\frac{dB_3}{d\tau} &= -\frac{\xi_2}{2} B_3 + \frac{2I_3\alpha_{16}a_0^2}{3I} A_3 + \left\{ \frac{\alpha_3}{6} A_2 + \beta_3 A_3 + \right. \\
&+ \frac{2}{3} \frac{I_3}{I} \left[\frac{\alpha_9}{8} A_2 (A_2^2 - 3A_2 B_2) + \frac{\alpha_{10}}{8} A_3 (A_2^2 + B_2^2) \right. \\
&\left. \left. + \alpha_{12} \frac{3}{8} A_3 (A_3^2 + B_3^2) \right] \right\};
\end{aligned} \tag{4.47}$$

де

$$\begin{aligned}
\alpha_{15} &= \int_0^1 F_7^* \phi_2 dx = \int_0^1 \phi_2 \left[2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3} \right)^2 + \right. \\
&\left. + 4 \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial x^3} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial^4 \phi_2}{\partial x^4} \right] dx;
\end{aligned}$$

$$\alpha_{16} = \int_0^1 F_7^1 \phi_3 dx = \int_0^1 \phi_3 \left[2 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3} \right)^2 + \right. \\ \left. + 4 \frac{\partial^3 \phi_3}{\partial x^3} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial^4 \phi_3}{\partial x^4} \right] dx;$$

$$a_0 = \frac{A_0}{l}.$$

Порівнюючи динамічні системи усереднених рівнянь (4.40) і (4.47) ми приходимо до висновку, що постійний прогин початкового випучування закритичного стрижня призводить до «здвигу» власних частот коливань по власним формам в сторону їх зменшення, так як вплив членів системи з коефіцієнтами α_{15} і α_{16} протилежно до впливу членів $\beta = \left(\frac{1}{2} - \gamma_2\right) \frac{g}{A\omega^2}$ і

$\beta_3 = \left(\frac{3}{2} - \gamma_3\right) \frac{g}{A\omega^2}$ де, нагадаємо, γ_2 і γ_3 – власні частоти. У осереднених рівняннях (4.47) тепер розстрій частот має вигляд як

$$\beta^* = \frac{g}{2\omega^2 A} - \frac{g}{A\omega^2} \gamma_2 + \frac{2I_3 \alpha_{15} a_0^2}{I} \text{ та } \beta_3^* = \frac{3g}{2\omega A} - \frac{g}{A\omega^2} \gamma_3 + \frac{2I_3 \alpha_{16} a_0^2}{3I},$$

тобто начебто стрижень має частоти: по другій формі коливань $\gamma_2 - 2I_3 \alpha_{15} a_0^2 \frac{A}{l}$ та відповідно

по третій $\gamma_3 - \frac{2}{3} I_3 \alpha_{16} a_0^2 \frac{A}{l}$ (нагадаємо, що $\frac{A}{l}$ безрозмірна амплітуда коливань

закріплення).

Таким чином, враховуючи початкові напруження від випучування стрижня у статичному стані та використовуючи метод осереднення нелінійних рівнянь коливань стрижня при двомодовій їх апроксимації ми отримали неконсервативну динамічну систему четвертого порядку відносно амплітуд коливань по другій та третій власних формах. Ця динамічна система відрізняється від аналогічної динамічної системи, побудованої без урахування початкових напружень у статичному стані стрижня тим, що власні резонансні

частоти дещо зсуваються у бік свого зменшення. Аналітично визначені величини цих зсувів.

Висновки

В даному **Розділі 4** роботи побудовані математичні моделі нелінійних резонансних параметричних коливань закритичного стрижня при двомодовій їх апроксимації, яка обумовлена внутрішнім резонансом власних частот та результатами експериментальних спостережень, як при присутності початкових напружень, так і при їх відсутності. Аналітично визначені зсуви резонансних частот при урахуванні початкових напружень.

Матеріали досліджень, приведених у цьому розділі відображені в публікаціях [30, 31] та доповідях [44, 45, 80].

РОЗДІЛ 5

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ СТРИЖНЯ ПРИ ВЗАЄМОДІЇ ДВОХ ВЛАСНИХ ФОРМ

Даний розділ дисертації присвячений результатам чисельних експериментів по дослідженню властивостей усталених режимів коливань динамічних систем четвертого порядку (4.40) та (4.47).

5.1 Аналіз усталених режимів динамічної системи для моделі закритичного стрижня без початкових напружень

Перейдемо до дослідження усталених розв'язків системи рівнянь (4.40). Ця система є детермінованою нелінійною системою диференціальних рівнянь з чотиривимірним фазовим простором [2, 27, 31, 65, 68]. Тому існує можливість виникнення в системі хаотичних атракторів [2, 27].

Дослідимо вплив параметрів цієї системи на виникнення в ній детермінованого хаосу. Для доведення існування хаотичних режимів у системи знайдемо старші ляпуновські характеристичні показники (ЛПХ) [2, 12, 62, 65].

Умовою виникнення хаотичного атрактора є поєднання глобального стиску з локальною нестійкістю. Достатньою ознакою глобального стиску фазового об'єму для динамічної системи, яка описується диференціальним рівнянням

$$\dot{x} = X(x)$$

є виконання умови $\text{div} X(x) < 0$.

Дивергенція Δ_1 системи рівнянь (4.40) у чотиривимірному просторі A_2, B_2, A_3, B_3 записується у вигляді

$$\Delta_1 = \frac{\partial \frac{dA_2}{d\tau}}{\partial A_2} + \frac{\partial \frac{dB_2}{d\tau}}{\partial B_2} + \frac{\partial \frac{dA_3}{d\tau}}{\partial A_3} + \frac{\partial \frac{dB_3}{d\tau}}{\partial B_3} = -2 \frac{\xi_2}{\omega} - \frac{I_3 \gamma_0}{\omega^2} \alpha_6 B_2 A_3 + \alpha_9 A_2 B_2 \quad (5.1)$$

З умови $\text{div}X \ x < 0$ випливає, що елемент об'єму в фазовому просторі стикається з плином часу як $\exp - \Delta_1 \tau$. Тому кожна траєкторія, яка має скінченні початкові умови, буде знаходитись в обмеженому об'ємі фазового простору [88].

Траєкторії усталених режимів будемо називати асимптотичними. Асимптотичні траєкторії системи рівнянь (4.40) можуть бути побудовані за допомогою чисельних методів. З цією метою застосовується метод Рунге-Кутта п'ятого порядку [68, 69, 87]. В подальшому особлива увага буде приділятися умовам виникнення хаотичних атракторів системи рівнянь.

Одним з головних критеріїв хаотичних режимів динамічної системи є наявність позитивних показників Ляпунова, які характеризують процес розбігання траєкторій. Якщо траєкторії мали досить близькі початкові параметри, то з плином часу вони можуть або зблизитись (якщо обидві прямують до одного граничного циклу чи точки), або зберегти відстань між собою (якщо вони самі знаходяться на граничних циклах), або віддаляться одна від одної (якщо вони не прямують до стікого регулярного руху). В останньому випадку після певного проміжку часу траєкторії «забудуть» свою близькість в початковий момент часу. Вони можуть розходитись досить далеко, не перетинаючись в просторі A_2, B_2, A_3, B_3 , знаходитись достатньо близько, але потім розбігатись, тому що не можуть зустріти на своєму шляху жодної стійкої траєкторії.

Для стійкого граничного циклу один з показників Ляпунова дорівнює нулю, а всі інші від'ємні. Відповідно стійкий, граничний k – вимірний тор має два нульових і $k - 2$ від'ємних показника Ляпунова. Наявність хоча б одного позитивного показника Ляпунова є одним з основних критеріїв хаотичного атратора [2, 12, 27, 31, 65, 68, 70].

Чотирьохвимірна дисипативна система (4.40) має чотири показника Ляпунова, сума яких дорівнює дивергенції системи, тобто є від'ємною величиною. Якщо хоча б один з показників Ляпунова більше нуля, то в системі

спостерігається хаос. В такому випадку реалізуються умови глобального стискання (від'ємна дивергенція) і локальної нестійкості (розбігання траєкторії по одному з напрямків). Безпосередній розрахунок показників Ляпунова по формулі (1.6) для системи з експоненціальною нестійкістю є неможливим у силу того, що навіть при дуже малому $|y_0|$ величина $|y(t)|$ необмежено збільшується, що призводить до переповнення регістрів ЕОМ і зупинці рахування. Для того, щоб цього уникнути Бенеттином та іншими було запропоновано ефективний алгоритм визначення показників Ляпунова [62].

Для побудови фазових портретів системи застосовується метод Рунге-Кутта п'ятого порядку зі змінним шагом чисельного інтегрування по процедурі Дормана-Принса, який забезпечує точність обчислення до $O 10^{-7}$. При проведенні чисельних розрахунків вважалось, що початкові параметри дорівнюють:

$$A_2 = 0.06, B_2 = 0.06, A_3 = 0.03, B_3 = 0.0, \quad (5.2)$$

При цьому фізичні параметри системи дорівнюють:

$$\rho = 1.7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{см}^3}, g = 980 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, A = 0.9 \text{ см}, B = 0.055, l = 26.7 \text{ см}, r = 0.15 \text{ см}, \\ G = 0.1398 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см} \cdot \text{с}}, g_2 = 0.0547 \cdot 10^6, \quad (5.3)$$

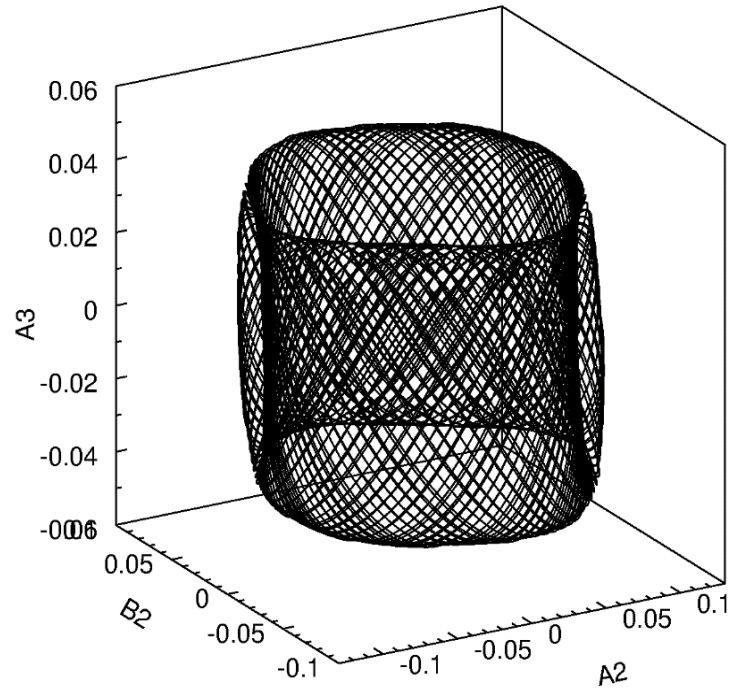
коли

$$\lambda_1 = 18.031, \lambda_2 = 184.32, J_0 = \frac{\pi r^4}{4}, J_2 = \frac{2\pi r^6}{9}, \rho Fl = \frac{EJ_0}{Bl^3}, E = \frac{9KG}{3K + G}. \quad (5.4)$$

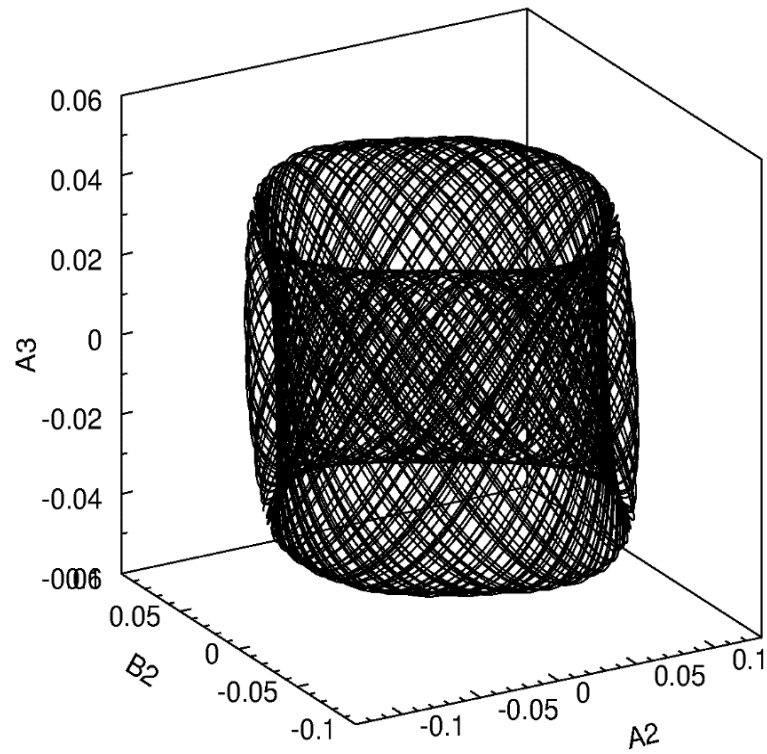
Тоді розрахункові параметри для стрижня з круговим перетином вибирались наступними:

$$E = 1.4227 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{см} \cdot \text{с}^2}, F = \pi r^2, \zeta_2 = \frac{8 \cdot 10^{-7}}{\rho Fl} = 0.0017 \text{ с}^{-1}, \gamma_0 = \frac{g}{l}, \alpha_3^* = \frac{2Eg_2}{27G^3}, \\ \omega = 2\pi f, I_3 = 3B\alpha_3^* E^2 \frac{4}{6} \cdot 25 \cdot 10^{-6}, \quad (5.5)$$

При наших розрахунках як біфуркаційний параметр ми змінювали частоту коливань стрижня $\omega = 2\pi f$, де f – частота, що вимірюється в Гц.



а)



б)

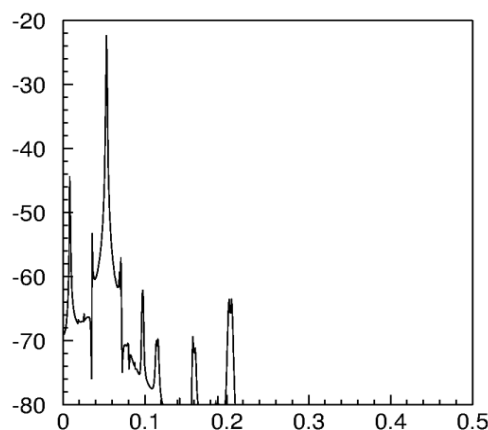
Рис. 5.1. Проекції фазового портрету у трьохвимірному просторі а)

$$\omega = 60 \text{ рад/с} \quad \text{б) } \omega = 50 \text{ рад/с}$$

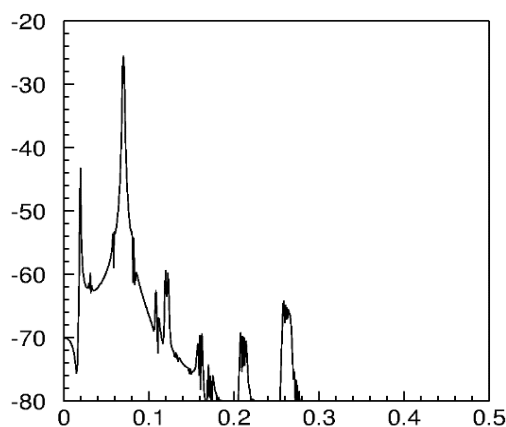
Так, при $\omega = 60 \text{ рад/с}$ на Рис. 5.1 а представлена проекція фазового портрету у трьохвимірному просторі A_2, B_2, A_3 . Фазова траєкторія упорядковано покриває двовимірний тор у трьох вимірній проекції. При цьому дивігенція (5.1) є від'ємною величиною, коливається навколо величини $-0.57 \cdot 10^{-3}$. Тому розв'язок динамічної системи (4.40) є стійким по Пуасону і залишається обмеженим. Старший показник Ляпунова дорівнює нулю, що є ознакою регулярності розв'язку. Спектральна щільність, яка відповідає цьому розв'язку для часової реалізації $A_2(t)$, приведена на Рис. 5.2 а і має дискретні піки. По осі ординат на Рис. 5.2 а приводяться значення квадрата амплітуди $|A_2(t)|^2$ у логарифмічному масштабі як функції частоти її коливань у час, тобто наведена функція

$$S_{f_2} = 10 \lg |A_2(t)|^2, \quad (5.6)$$

коли $f_2 = \frac{\Omega}{2\pi}$. Ми використовували алгоритм Кулі – Такей (Cooly – Tukey algorithm) [18] для побудови графіків спектральної щільності.



а)



б)

Рис. 5.2. Спектральні щільності для розв'язку $A_2(t)$

На графіку спектральних щільностей наведені значення

$$S f_2 > -80, \quad (5.7)$$

тобто, коли

$$|A_2| > 0.0001 \quad (5.8)$$

Якщо ми перейдемо від безрозмірних значень амплітуди A_2 до розмірних A_2^0 тоді нерівність (5.5) перетвориться в нерівність виду

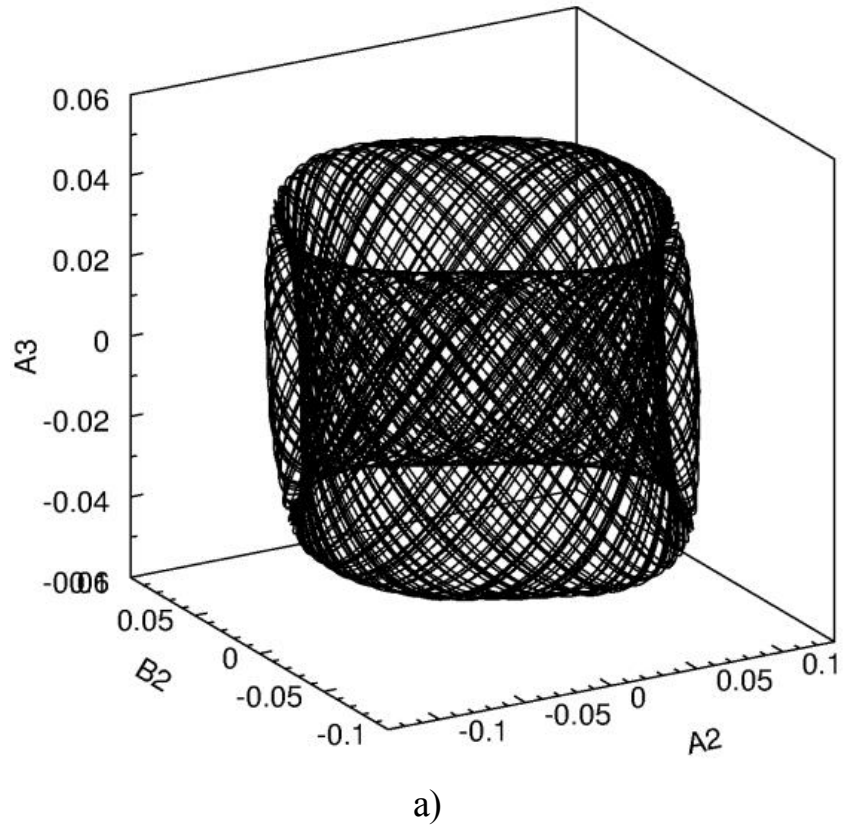
$$|A_2^0| > 0.00267 \text{ см} \quad (5.9)$$

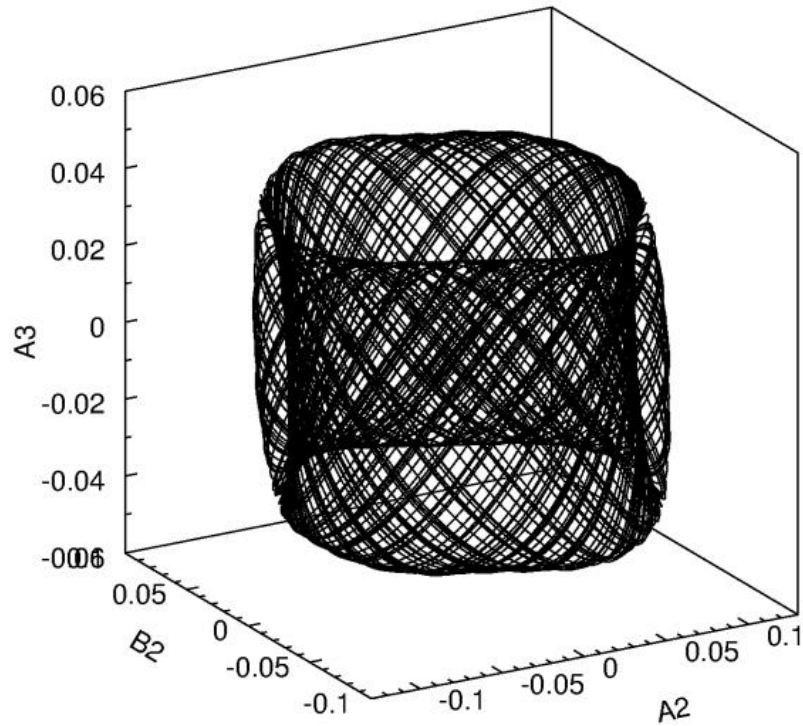
Це означає, що ми на графіку спектральної щільності дали значення амплітуд A_2^0 більших ніж 0,0267 мм. Безумовно, таких значень ми не можемо помітити в експериментах, використовуючи нашу індикаторну апаратуру. Ми можемо помітити амплітуду $|A_2^0| > 0.267 \text{ мм}$, тобто коли $S f_2 > -60$. На графіку $S f_2$ Рис. 5.2 а є тільки чотири піки, які більші, ніж -60 . Тому графік проєкції на Рис. 5.1 а відповідає квазіперіодичному регулярному режиму з чотирма частотами відповідних піків.

При зменшенні частоти коливань закріплення стрижня ω ми будемо спостерігати більш складний регулярний режим усталених коливань. Так, при $\omega = 50 \text{ рад/с}$ проєкція фазового простору має вигляд, наведений на Рис. 5.1 б. Траєкторія регулярно покриває двомірний тор, але відстань між вітками є більш складною функцією часу. Траєкторія з збільшенням часу покриє тор повністю, це є характерним для квазіперіодичних режимів. Старший показник Ляпунова для цього режиму є нульовим, а спектральна щільність приведена на Рис. 5.2 б. Ми спостерігаємо дискретні піки на Рис. 5.2 б, як це було і на Рис. 5.2 а. Відношення частот, яким відповідають ці піки, буде ірраціональним числом.

При подальшому зменшенні частоти ω проєкція фазового портрету усталеного режиму коливань стрижня має вигляд, наведений на Рис. 5.3 а (для $\omega = 49 \text{ рад/с}$) і на Рис. 5.3 б (для $\omega = 48 \text{ рад/с}$), не суттєво відмінний від портрету на Рис. 5.1 б. Для цих режимів спектральна щільність показана на

Рис. 5.4 а та Рис. 5.4 б відповідно. Старший показник Ляпунова є теж нульовим. Тому розв'язки для цих значень ω відповідають квазіперіодичному циклу, який повністю покриває тор з плином часу.

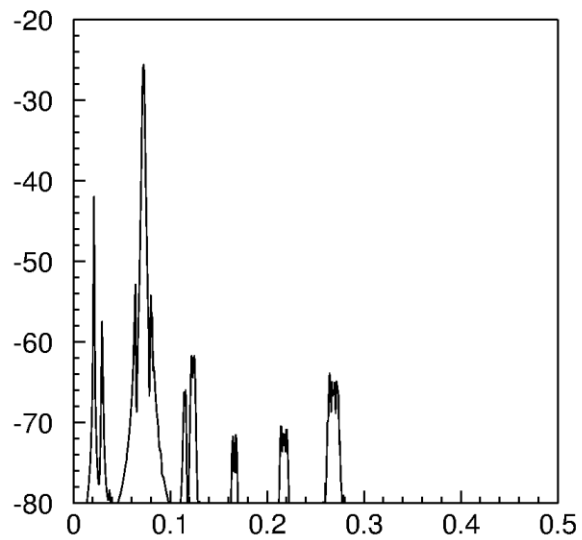




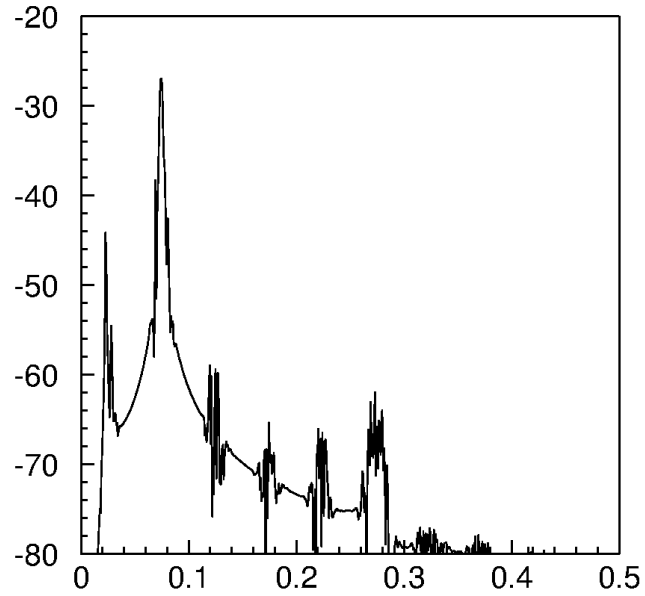
б)

Рис. 5.3. Проекції фазових портретів а) при $\omega = 49 \text{ рад/с}$,

б) при $\omega = 48 \text{ рад/с}$



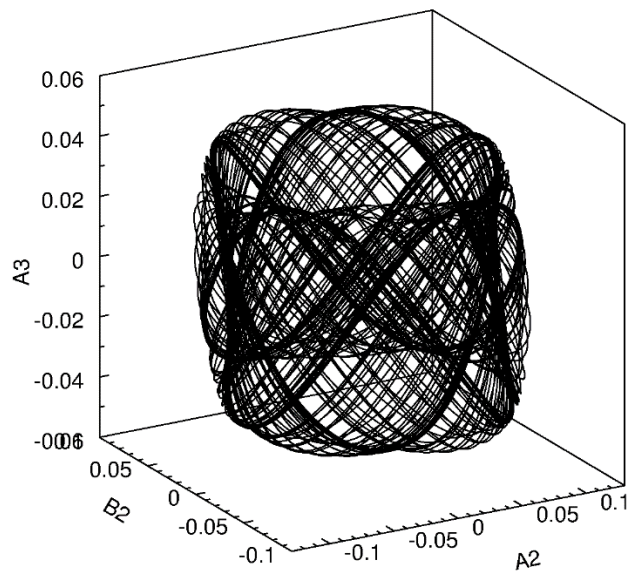
а)



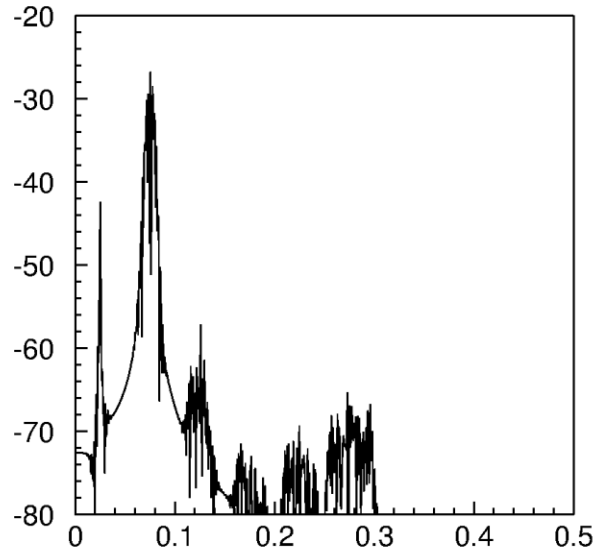
б)

Рис. 5.4. Спектральні щільності а) при $\omega = 49 \text{ рад/с}$, б) $\omega = 48 \text{ рад/с}$

Зменшуючи частоту ω , при $\omega = 47 \text{ рад/с}$ коливання стрижня значно ускладнюються. На Рис. 5.5 а представлена проєкція чотирьохвимірною



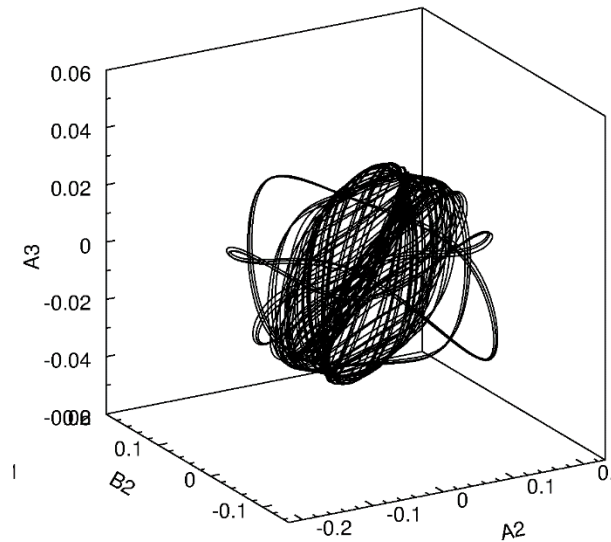
а)



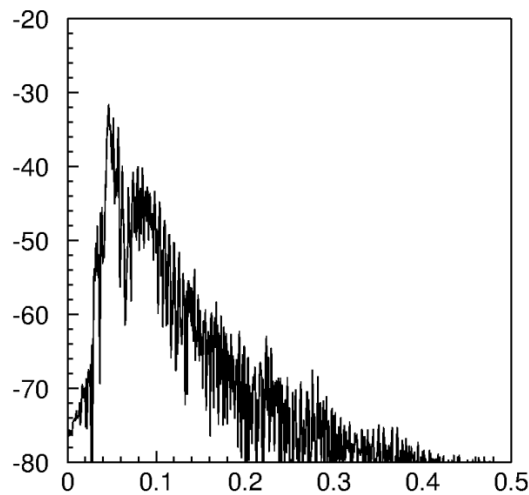
б)

Рис. 5.5. Проекція фазового портрету а) та спектральна щільність б) при частоті $\omega = 47 \text{ рад/с}$

атрактора на тривимірний простір A_2, B_2, A_3 . По-перше, проекція є на торі, який має не гладку форму, а з деякими «розрізами» і пустотами по контуру. Крім цього, старший показник Ляпунова для цього розв'язку є малим, але позитивним, він дорівнює 0.0016, що свідчить про належність розв'язку до хаотичних режимів [2, 8, 11, 39, 43, 46, 66, 72, 76-80]. Про це свідчать і спектральна щільність цього режиму, яка приведена на Рис.5.5б, де головний пік на частоті $f_2 = 0.07$ є неперервним, маючи амплітуду у неперервному відрізку $0.056 < f_2 < 0.08$, а також неперервний спектр при $f_2 > 0.18$ [12, 58, 59].



а)



б)

Рис. 5.6. При частоті $\omega = 37 \text{ rad}/\text{c}$ а) фазовий портрет, б) спектральна щільність

Цей хаотичний режим продовжується аж до $\omega = 37 \text{ rad}/\text{c}$. На Рис. 5.6 а наведена проекція хаотичного атратора при таких самих початкових умовах, що і раніше для $\omega = 37 \text{ rad}/\text{c}$. Як видно, траєкторія атратора вже більше не покриває двовимірний тор, блукає у трьохвимірному просторі [35]. Старший показник Ляпунова додатний і дорівнює 0.0057. Спектральна щільність показана на Рис. 5.6 б для цього режиму і являє собою не дискретні піки, а

неперервну функцію, що є ще однією ознакою хаотичного атратора [2, 27, 31, 34, 35, 39 43,46, 56, 70, 72].

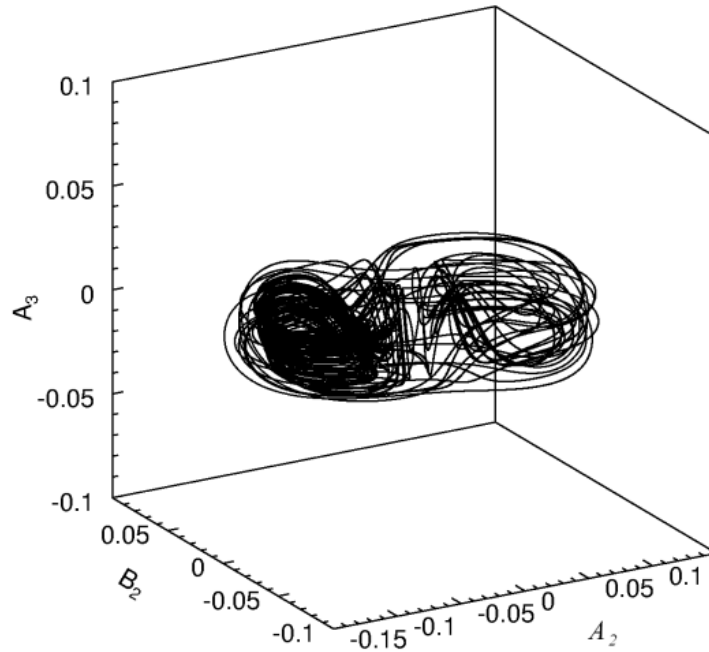
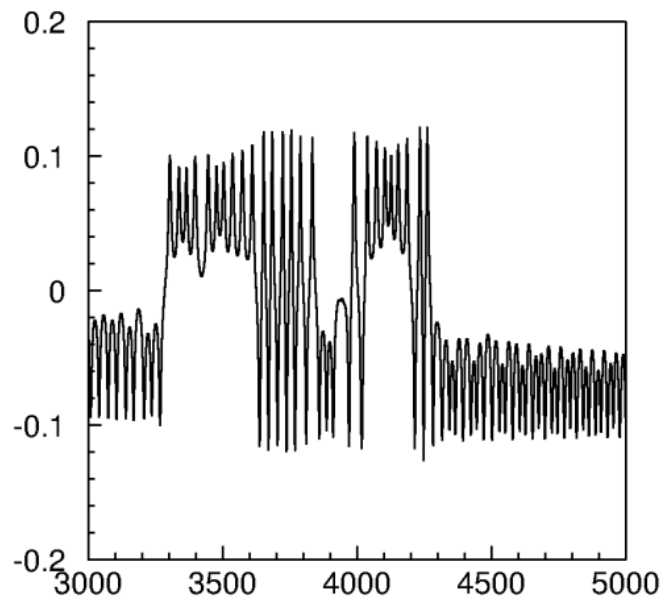
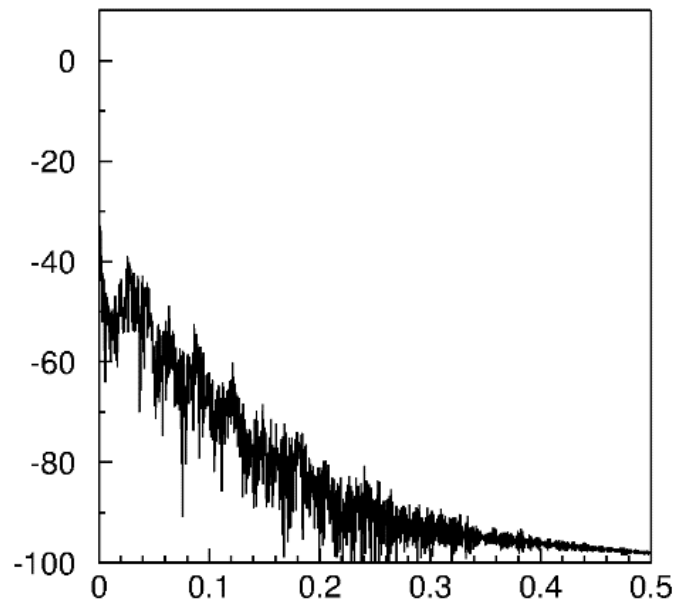


Рис. 5.7. Фазовий портрет хаотичного атратора при $\omega = 37 \text{ рад}/\text{с}$



a)



б)

Рис. 5.8. При частоті $\omega = 37 \text{ rad}/c$ а) часова реалізація $A_2(t)$,

б) спектральна щільності цієї реалізації

Хаотичні усталені коливання спостерігаються в системі, як вже відзначалось, до $\omega = 37 \text{ rad}/c$. Так на Рис. 5.7 дана проекція чотиривимірного атрактора на тривимірний простір для системи (4.40) при наступних початкових умовах

$$A_2(0) = 0.06, B_2(0) = 0.1, A_3(0) = 0.01, B_3(0) = 0.0. \quad (5.10)$$

Як добре помітно, траєкторія атрактора блукає хаотично по простору. Реалізація функції коливань $A_2(t)$ у часі показана на Рис. 5.8 а, де добре помітні неупорядковані коливання, для яких спектральна щільність приведена на Рис. 5.8 б. Графік щільності є неперервним, що свідчить про хаотичність атрактора. Додамо, що всі графіки усталених режимів коливань в системі (4.40), які приведені у цьому розділі, аналізувались та будувались після закінчення перехідних режимів, принаймні, після більше 500000 кроків у часі, коли старші показники Ляпунова стабілізуються біля усталених значень.

Таким чином, у даному розділі було проведено ряд чисельних експериментів і було виявлені та проаналізовано наступні два основні класи

усталених режимів: регулярні та хаотичні. Регулярні режими коливань відповідають квазіперіодичним коливанням. При цьому хаотичні усталені режими мають позитивні старші показники Ляпунова та неперервні спектральні щільності.

5.2 Усталені режими динамічної системи у моделі стрижня з початковими напруженнями

В цьому розділі даної дисертаційної роботи розглянемо усталені розв'язки динамічної системи (4.47), яка описує осереднену систему взаємодії коливань стрижня по двох власних формах при урахуванні початкових напружень.

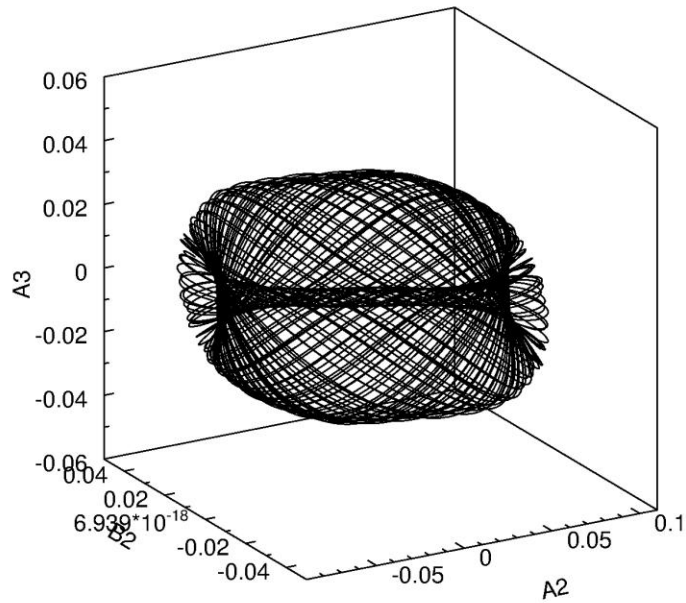
Для побудови фазових портретів системи застосовуємо метод Рунге-Кутта п'ятого порядку зі змінним шагом чисельного інтегрування по процедурі Дормана-Принса, який забезпечує точність обчислення до $O 10^{-7}$. При проведенні чисельних розрахунків беремо ті ж початкові параметри (5.2), що і раніше, які дорівнюють:

$$A_2 0 = 0.06, B_2 0 = 0.06, A_3 0 = 0.03, B_3 0 = 0.0, a_0 = 3A_2 0 \quad (5/11)$$

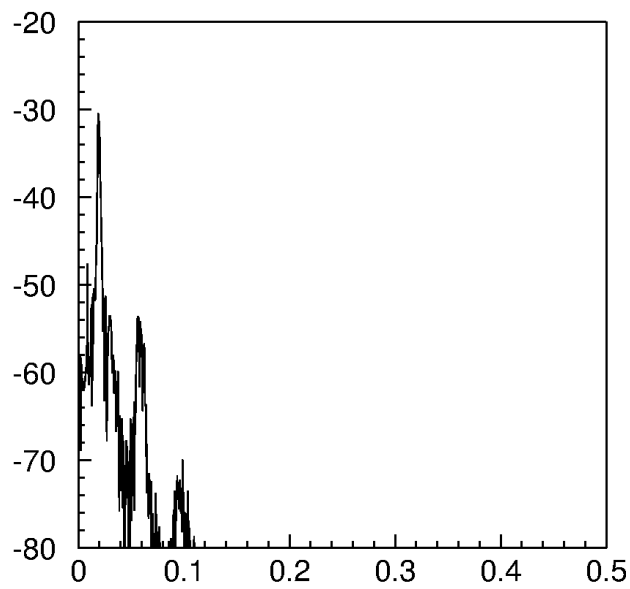
При розрахунках будемо використовувати фізичні параметри системи, які ми використовували раніше, тобто які приведені у (5.3) – (5.5).

При частоті $\omega = 45 \text{ рад/с}$ проекція фазового портрету усталеного режиму коливань стрижня має вигляд, наведений на Рис. 5.9 а, а спектральна щільність показана на Рис. 5.9 б відповідно. Крім того, обчислений старший показник Ляпунова є нульовим. Тому розв'язок для цього значення ω є квазіперіодичним циклом, який повністю покриває тор з плином часу. Графіки параметрів розв'язків, які наведені на Рис. 5.9 б дуже схожі на характеристики розв'язку, які показано на Рис. 5.4 б та Рис. 5.5 б, які отримано в моделі без урахування початкових напружень для більшої частоти, а саме для

$\omega = 48 \text{ rad}/c$. Крім того ми можемо помітити, що коливання по третій моді мають меншу амплітуду A_3 .



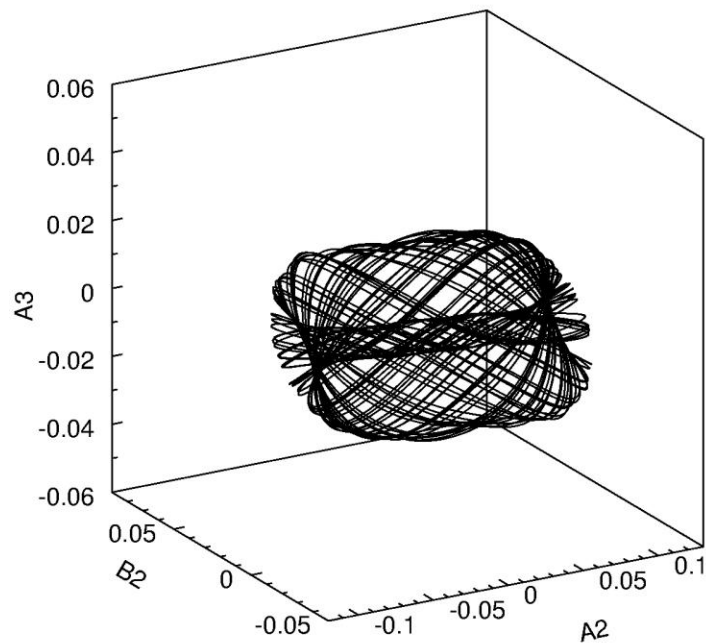
а)



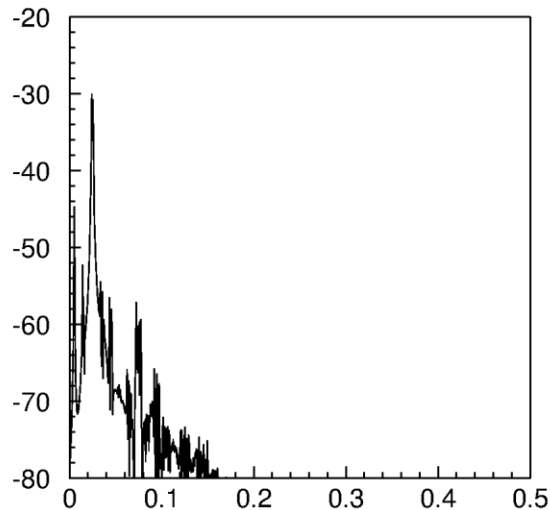
б)

Рис. 5.9. Проекція фазового портрету а) та спектральна щільність б) при частоті $\omega = 45 \text{ rad}/c$

Нагадаємо, що у системі (4.40) в моделі без попередніх напружень хаотичні усталені режими почалися при зменшенні частоти до $\omega = 47 \text{ рад/с}$. У системі (4.47) ці режими знайдені при частоті $\omega = 43 \text{ рад/с}$ тому, що при цій частоті розв'язок має старший обчислений показник Ляпунова додатний і рівний 0.002. На Рис. 5.10 а показана відповідна проекція фазового портрету усталеного режиму коливань стрижня, а спектральна щільність показана на Рис. 5.10 б. Ще раз зауважимо, що урахування попередніх напружень призводить к реалізації хаотичних режимів при менших частотах коливань закріплення. Також зменшуються амплітуди коливань по третій формі.



а)

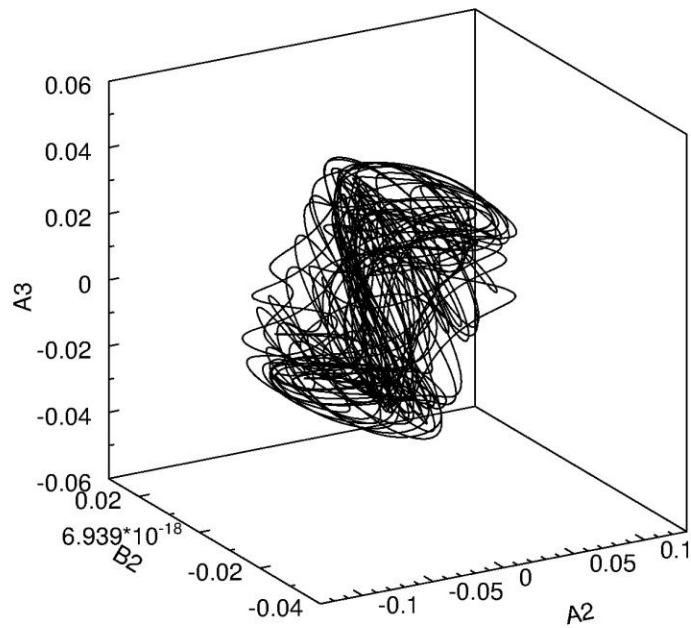


б)

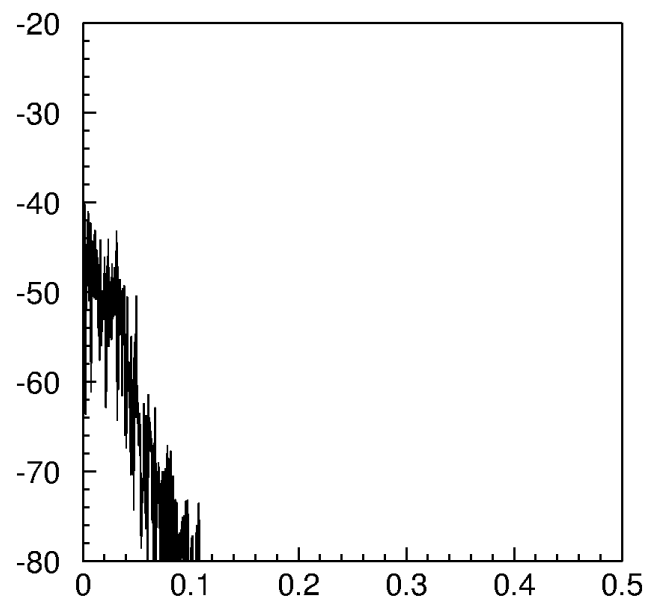
Рис. 5.10. Проекція фазового портрету а) та спектральна щільність б) при

$$\text{частоті } \omega = 43 \text{ rad/s}$$

Хаотичний режим усталених режимів буде спостерігатися до частоти коливань закріплення $\omega = 33 \text{ rad/s}$. На Рис. 5.11 а наведена проекція хаотичного атрактора при таких самих початкових умовах, що і раніше для $\omega = 33 \text{ rad/s}$. Як видно, траєкторія атрактора вже більше не покриває двовимірний тор, а блукає у трьохвимірному просторі. Старший показник Ляпунова додатний і дорівнює 0.0063. Спектральна щільність показана на Рис. 5.11 б для цього режиму і не має лише дискретні піки (як на Рис. 5.9 б), а є неперервною функцією, що є ще однією ознакою хаотичного атрактора [2, 27, 31].



а)



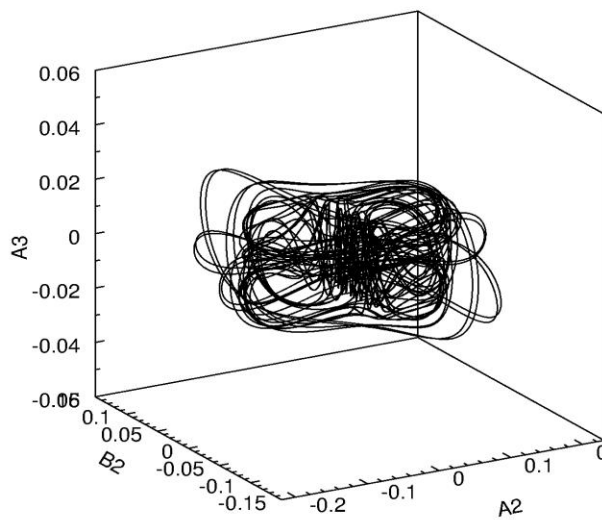
б)

Рис. 5.11. Проекція фазового портрету а) та спектральна щільність б) при частоті $\omega = 33 \text{ рад/с}$

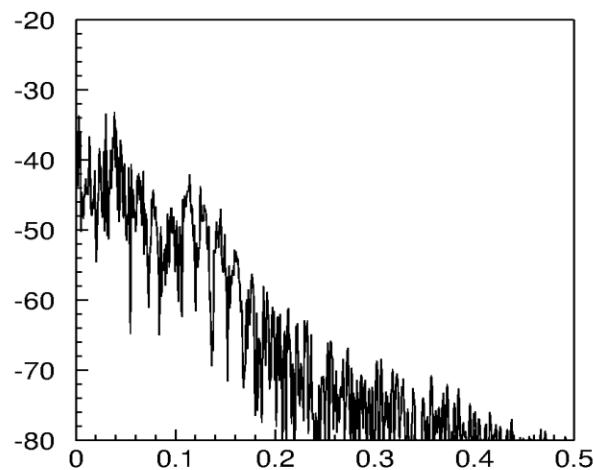
На Рис. 5.12 а показана проекція чотиривимірного атратора на тривимірний простір для системи (4.47) при інших початкових умовах, а саме для тих, які використовувались для побудови Рис. 5.7 та Рис. 5.8.

$$A_2 0 = 0.06, B_2 0 = 0.1, A_3 0 = 0.01, B_3 0 = 0.0, a_0 = 3A_2 0$$

На Рис. 5.12 а траекторія атрактора блукає хаотично по простору. Графік щільності на Рис. 5.12 б є неперервним, що свідчить про хаотичність атрактора. Всі графіки усталених режимів коливань в системі (4.47), які приведені у цьому розділі, аналізували та будували після закінчення перехідних режимів, принаймні, після більше 500000 кроків у часі, коли старші показники Ляпунова стабілізуються біля усталених значень.



а)



б)

Рис. 5.12. Проекція фазового портрету а) та спектральна щільність б) при частоті $\omega = 43 \text{ рад/с}$

Таким чином, у даному параграфі роботи проведено ряд чисельних експериментів і виявлено та проаналізовано два основні класи усталених режимів: регулярні (які відповідають квазіперіодичним коливанням) та хаотичні (які мають позитивні старші показники Ляпунова та неперервні спектральні щільності). Хаотичні усталені режими в системі (4.47), яка відповідає взаємодії двох власних форм коливань при урахуванні початкових напружень, реалізуються при менших частотах коливань закріплення приблизно на 10 % від частоти ω . Крім того, урахування напружень призводить до зменшення амплітуд коливань по третій формі.

Висновки

В даному **Розділі 5** дисертаційної роботи методами сучасної теорії динамічних систем встановлені основні режими усталених коливань в моделях нелінійних резонансних параметричних коливань закритичного стрижня при двомодовій їх апроксимації для двох випадків: не враховуючи та враховуючи початкові напруження. Аналізуючи показники Ляпунова, фазові портрети, спектральні щільності усталених режимів доведено існування і визначені характеристики регулярних і хаотичних режимів в цих моделях.

Показано, що урахування початкових напружень призводить до зменшення частот, коли реалізуються хаотичні усталені режими та до зменшення амплітуд коливань по третій формі.

Матеріали досліджень, приведених у **Розділі 5**, відображені в публікаціях [31, 35, 46, 79] та доповідях [71, 80].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено наукову задачу встановлення закономірностей регулярних і хаотичних режимів коливань стрижня з закритичним статичним станом при двохмодовій апроксимації згинних деформацій.

Таким чином, на захист дисертаційної роботи виносяться наступні наукові результати:

1. Побудовані математичні моделі нелінійних резонансних параметричних коливань закритичного стрижня при двохмодовій їх апроксимації, яка обумовлена внутрішнім резонансом власних частот та результатами експериментальних спостережень, як при урахуванні початкових напружень, так і при їх відсутності.

2. Методами сучасної теорії динамічних систем встановлені основні класи режимів усталених коливань в побудованих моделях: регулярні та хаотичні.

3. Аналізуючи показники Ляпунова, фазові портрети, спектральні щільності усталених режимів доведено існування і визначенні характеристики регулярних і хаотичних режимів моделей.

4. Показано, що урахування початкових напружень призводить до зменшення частот, коли реалізуються хаотичні усталені режими та до зменшення амплітуд коливань по третій формі.

5. Визначені та проаналізовані власні форми і власні частоти згинних коливань стрижня із закритичним статичним станом, що консольно закріпленій.

6. Показано, що ефекти стабілізації і резонансних згинних коливань стрижня із закритичним статичним станом підтверджуються експериментальними результатами. Експериментально отримані частоти стабілізації добре співпадають з обрахованими по теоретичному критерію стабілізації, аналітично побудованому в роботах Шамні і Фрейсера.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аврамов К. В. Нелинейная динамика упругих систем. Т. 1 / К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин. – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.
2. Анищенко В. С. Знакомство с нелинейной динамикой / В. С. Анищенко. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 142 с.
3. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний. Учебное пособие для вузов./ В. Л. Бидерман. М.: Высшая школа, 1972, 416 с.
4. Блехман И. И. Вибрационная механика./ И. И. Блехман. М.: Физматлит, 1994, 394 с.
5. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний : Монография / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М. : Наука, 1974. – 504 с.
6. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем / В. В. Болотин. – М. : Гостехиздат, 1956. – 600 с.
7. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. – Физматгиз, М., 1961. – 340 с.
8. Болотин Ю. Л. Конструктивный хаос / Ю. Л. Болотин, А. В. Тур, В. В. Яновский. – Харьков : Институт монокристаллов, 2005. – 420 с.
9. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – «Наука», М., 1967. – 984 с.
10. Ганиев Р. Ф. Колебания твердых тел : Монография / Р. Ф. Ганиев, В. О. Кононенко. – М. : Наука, 1976. – 432 с.
11. Головкин В. А. Нейросетевой метод оценки спектра Ляпунова по наблюдаемым реализациям / В. А. Головкин, Н. Ю. Чумерин, Ю. В. Савицкий // Вестник Брестского гос. тех. Университета. – 2002. – № 4. – С. 66–70.

12. Гринченко В. Т. Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы : Монография / В. Т. Гринченко, В. Т. Мацыпура, А. А. Снарский. – К. : Наукова думка, 2005. – 263 с.
13. Гринченко В. Т. Фракталы. От удивления к рабочему инструменту / В. Т. Гринченко, В. Т. Мацыпура, А. А. Снарский. – К. : Наукова думка, 2013. – 270 с.
14. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – К. : Наукова думка, 1981. – 284 с.
15. Гринченко В. Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Равновесие упругих тел канонической формы. / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко. – К. : Наукова думка, 1985. – 280 с.
16. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел / А. Н. Гузь – К. Вища шк. 1986. – 511 с.
17. Гуськов А. М., Пановко Г. Я. Вибрационная стабилизация вертикальной оси гибкого стержня / Гуськов А. М., Пановко Г. Я. // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2006. – № 5. – С. 13–19.
18. Директор С. Введение в теорию систем / С. Директор, Р. Рорер. – М. : Мир, 1974. – 464 с.
19. Жук Я. А. О линеаризации жесткостных характеристик гибких балок из физически нелинейных материалов / Жук Я. А., Сенченков И. К. // Прикл. механика. – 2006. – 42, № 2. – С. 85–92.
20. Жук Я. А. Влияние диссипативного виброразогрева на работоспособность трехслойной шарнирно опертой балки с пьезоактивными слоями // Теоретическая и прикладная механика. – 2010. – Вып. 1(47). – С. 86–94.
21. Жук Я. О. Застосування методу моногармонічного наближення до розв'язування задач про коливання гнучких тонкостінних елементів конструкцій з п'єзоактивними шарами // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011. – Вип. 17. – С. 137–144.

22. Жук Я.А., Сенченков И.К. Моделирование стационарных диссипативного разогрева тонкостенных неупругих элементов, содержащих пьезоактивные слои // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 5. – С. 80–91.
23. Жук Я.А. Решение задачи о колебаниях балки с пьезоактивными слоями при механическом или электрическом нагружении // Теор. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 131–138.
24. Ильгамов М. А. Зависимость динамического выпучивания стержня от начальных условий // Известия Уфимского науч. Центра РАН, 2013, № 2, С. 5–10.
25. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. ЖЭТФ, 1951, Т. 21, Вып. 5, С. 588–597.
26. Краснопольская Т. С. Параметрический резонанс в системе “жидкость в баке – электродвигатель” / Т. С. Краснопольская, А. Ю. Швец // Прикл. механика. – 1993. – Т. 29, № 9. – С. 52–61.
27. Краснопольская Т. С. Акустический хаос в бесконечном полупространстве, порожденный эффектом Зоммерфельда-Кононенко / Т. С. Краснопольская // Акуст. Вісник. – 2002. – Т. 5, № 3. – С. 35–45.
28. Краснопольская Т. С. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением : [Монография] / Т. С. Краснопольская, А. Ю. Швец. – М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2008. – 278 с.
29. Краснопольська Т.С. Динамічні характеристики консольного закріпленого стрижня з малою жорсткістю на згин / Т.С. Краснопольська, Д. Ф. Приходько, О. А. Гуржій // Вісн. Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки.– 2012. – № 4. – С. 52–55.
30. Краснопольська Т. С. Нелінійні моделі коливань консольного стрижня з малою жорсткістю на згин / Т. С. Краснопольская, Д. Ф. Приходько, О. А. Гуржій. // Вісн. Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки, 2013. – № 3. – С. 158 – 161.

31. Краснопольська Т. С. Сталі режими коливань консольно закріпленого стрижня малої жорсткості на згин / Т. С. Краснопольская, Д. Ф. Приходько, О. А. Гуржій. // Вісн. Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки, 2014. – № 2. – С. 67–70.
32. Кубенко В. Д. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек./ В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук П. С., Краснопольская Т. С. : Монография. – К. : Наукова думка, 1984. – 220 с.
33. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. – ГТТИ, 1950. – 470 с.
34. Мелешко В. В. Смешивание вязких жидкостей / Вячеслав Мелешко, Татьяна Краснопольская // Нелинейная динамика. – 2005. – Т. 1, № 1. – С. 69–1089.
35. Мелешко В. В. Хаотичні коливання П-подібного маятника / В. В. Мелешко, Д. Ф. Приходько // Вісн. Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки, 2011. – № 4. – С. 95–98.
36. Мелешко В. В. Теорія хвилеводів / В. В. Мелешко, В. Т. Маципура, І. А. Улітко. – К. : Вид. “Київський універ.”, 2013. – 415 с.
37. Мольченко Л. В. Магнитоупругость нелинейных токонесущих оболочек / Л. В. Мольченко // Новое в науке и технике. Магнитоупругость нелинейных токонесущих оболочек и газодинамика струйных течений. – К. : Вища школа, 1989. – Вып. 8. – С. 3-60.
38. Мяло Е. В. Гашение параметрических колебаний вертикального стержня подвижной массой / Е. В. Мяло // Машиностроение и инженерное образование. – 2008. – № 2. – С. 43–52.
39. Неймарк Ю. И. Стохастические и хаотические колебания : Монография / Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда. – М. : Наука, 1987. – 424 с.
40. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. / Я. Г. Пановко. – [3-е изд.] – М: Наука, М., 1991. – 256 с.

41. Пановко Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – [6-е изд.] – М. : КомКнига, 2007, 352 с.
42. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. / Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. – Киев: Наукова думка, 1975. – 459 с.
43. Приходько Д. Ф. Хаотичні режими коливань П-подібного маятника / Д. Ф. Приходько, // Матеріали міжнар. наук. конф. Шевченкова весна 19-23 березня, 2012, Київ, Україна
44. Приходько Д. Ф. Явище стабілізації у пружних механічних системах при вертикальних високочастотних вібраціях / Д. Ф. Приходько // Сучасні математичні методи досліджень в механіці, Міжнародна наукова школа–семінар, 8-11 жовтня, 2012, Київ, Україна.
45. Приходько Д. Ф. Стабілізація та нелінійні коливання консольного стрижня з малою жорсткістю на згин / Д. Ф. Приходько, Т. С. Краснопольська, А. М. Кір'єв, О. А. Гуржій // III Міжнарод. наук. конф. «Сучасні проблеми механіки», 27–29 серпня, 2015, Київ, Україна.
46. Приходько Д. Ф. Стабілізація закритичного стрижня при вертикальній вібрації / Д. Ф. Приходько, А. М. Кір'єв, Т. С. Краснопольська // Вісн. Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки, 2015, № 5. – С. 219–222.
47. Пуанкаре А. Избранные труды / А. Пуанкаре Том 2. – М. : Наука. – 1000 с.
48. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем / А. Р. Ржаницын. – ГТТИ, М., 1955. – с.
49. Сенченков И. К., Жук Я. А., Карнаухов В. Г. Моделирование термомеханического поведения физически нелинейных материалов при моногармоническом приближении / В кн.: Успехи механики: В 6-ти томах / Под ред. А.Н. Гузя. Том 5. – К.: Літера ЛТД, 2009. – 752 с. – ISBN 978-966-2032-46-8. – С. 432–462.

50. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем / С. П. Тимошенко. – ГТТИ, 1946. – 532 с.
51. Тимошенко С.П. Курс теории упругости / С. П. Тимошенко. – Киев.: Наукова думка, 1972. – 506 с.
52. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций / Г. Циглер. – Москва, издательство «Мир», 1971. – 191 с.
53. Челомей В. Н. Динамическая устойчивость элементов авиационных конструкций. – К. : Аэрофлот, 1939.
54. Челомей В. Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций. ДАН СССР, 1956, Т. 110, Вып. 3, С. 345–347.
55. Челомей В. Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // ДАН СССР. – 1983. – Т. 270, № 1.
56. Шустер Г. Детерминированный хаос : Пер. с нем. / Г. Шустер. – М. : Мир, 1988. – 240 с.
57. Яновский В. В. Лекции о нелинейных явлениях. В 2 т. Т. 1 / В. В. Яновский. – Харьков : Институт монокристаллов, 2006. – 456 с.
58. Яновский В. В. Лекции о нелинейных явлениях. В 2 т. Т. 2 / В. В. Яновский. – Харьков : Институт монокристаллов, 2007. – 456 с.
59. Abramian A.K. On oscillations of a beam with small rigidity and a time-varying mass / A.K. Abramian, W.T. van Horssen, S.A. Vakulenko // Nonlinear Dynamics, –2013, 71(1-2). – P. 291–312.
60. Acheson D. A pendulum theorem. / Acheson D. // Proc. R. Soc. Lond. – 1993. – P. 239–245.
61. Acheson D. Multiple-nodding oscillations of a driven inverted pendulum. / Acheson D. // Proc. R. Soc. Lond. –1995 – P. 89–95.
62. Benettin G. Kolmogorov entropy and numerical experiments / G. Benettin, L. Galgani, J. M. Strelcyn // Phys. Rev. – 1976. – Vol. A4. – P. 2338–2342.
63. Budiansky B. Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures / B. Budiansky // Advances in applied mechanics. – 1974. – Vol. 14. – P. 1–66.

64. Champneys A. The ‘Indian rope trick’ for a parametrically excited flexible rod: linearized analysis / A. Champneys, B. Fraser // Proc. R. Soc. London, 2000. – P. 553–570.
65. Cartwright M. L. On nonlinear differential equations of the second order / M. L. Cartwright, J. E. Littlewood // J. Lond. Math. Soc. – 1945. – Vol. 20. – P. 180–189.
66. Chen P. P. Entity-relationship modeling: historical events, future trends, and lessons learned / P. P. Chen // Entity-Relationship Approach to Software Engineering: international conference, November 27–30, 2001, Yokohama, Japan: proceedings. – 2001. – P. 71–77.
67. Chicone C. Ordinary differential equations with applications. / C. Chicone. – New York: Shringger-Verlag, 1999. – 352 p.
68. Coddington E.A. Theory of ordinary differential equations / E.A. Coddington, N. Levinson. – New York: McGraw-Hill, 1955. – 687 p.
69. Dormand J. R. A family of embedded Runge-Kutta formula / J. R. Dormand, P. I. Prince // J. Comp. Appl. Math. – 1980. – Vol. 6. – P. 19–27.
70. Farmer J. D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamic system / J. D. Farmer // Physica. – 1982. – Vol. 4D. – P. 366–393.
71. Gourjii A. A. Chaos in parametrically excited continuous systems / A. A. Gourjii, V. M. Spektor, D. F. Prykhodko // Abstracts of the Sixth chaotic modeling and simulation international conference, 11–14 June 2013, Istanbul, Turkey.
72. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields / J. Guckenheimer, P. Holmes. – New York : Springer, 1983. – 459 p.
73. Guskov A.M., Panovko G.Ya. Vibrational stabilization of the vertical axis of a flexible shaft / A.M. Guskov, G.Ya. Panovko // J. of Machinery Manufacture and Reliability, 2006. – № 5.

74. Hamdan M. N., Al-Qaisia A. A., Al-Bedoor B. O. Comparison of analytical techniques for nonlinear vibrations of a parametrically excited cantilever // *Int. J. of Mechanical Sciences*, 2001, V. 43, P. 1521–1542.
75. Kauderer H. *Nichtlineare mechanik*. – Springer, Berlin, 1958.
76. Krasnopolskaya T. S. Acoustic chaos caused by Sommerfeld effect / T. S. Krasnopolskaya // *J. Fluids & Structures*. – 1994. – Vol. 8. – P. 803–815.
77. Krasnopolskaya T. S. Chaotic interaction between fluid vibration in a cylindrical tank and electromotor / T. S. Krasnopolskaya, A. Yu. Shvets // *Flow-Induced Vibration*. – Rotterdam : Balkema, 1995. – P. 269–280.
78. Krasnopolskaya T. S. petroleum patch transport in marine and coastal zones / T. S. Krasnopolskaya, V. V. Meleshko // *Sedimentation and Sediment Transport*, (ed. A. Gyr and W. Kinzelbach). – Dordrecht : Kluwer, 2003. – P. 245–248.
79. Krasnopolskaya T.S. Chaos in parametrically excited continuous systems. / T.S. Krasnopolskaya, A.A. Gourjii, V.M. Spektor, D.F. Prykhodko // *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)* – 2013. – № 3. – P. 413–422.
80. Krasnopolskaya T.S. Modelling of parametric resonance oscillations by two coupled modes / T. S. Krasnopolskaya, V. M. Spektor, D. F. Prykhodko, A. A. Gourjii // *Abstracts of the 8th European Nonlinear Oscillations Conference*, July 6–11, 2014, Vienna, Austria.
81. Krasnopolskaya T. S. Chaos at Cross-waves in Fluid Free Surface / T. S. Krasnopolskaya V. M. Spektor, E. D. Pechuk // *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)* – 2015. – № 2. – P. 105–115.
82. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow / E. N. Lorenz // *J. Atmos. Sci.* – 1963. – Vol. 20. – P. 130–141.
83. Mallon N. J. Dynamic buckling of a shallow arch under shock loading considering the effects of the arch shape / N. J. Mallon, R. H. B. Fey, H. Nijmeijer, G. Q. Zhang // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 2006. – Vol. 41 (9) : P. 1065–1075.

84. Mandelbrot B. *The Fractal Geometry of Nature* / B. Mandelbrot. – San Francisco : Freeman, 1992. – 320 p.
85. Meleshko V. V. A blinking rotlet model for chaotic advection / V. V. Meleshko, H. Aref // *Phys. Fluids*. – 1996. – Vol. 8. – P. 3215–3217.
86. Nolte D. D. The tanglet tale of phase space / D. D. Nolte // *Physics today*. – 2010. – № 4. – P. 33–38.
87. *Numerical Recipes in FORTRAN : the Art of Scientific Computing* / W. H. Press, S. A. Teukolsky, T. Vetterling, B. P. Flannery – Cambridge : Cambridge University Press, 1992. – 963 p.
88. Ott E. *Chaos in dynamical systems* / E. Ott. – New York : Cambridge University Press, 1993. – 385 p.
89. Stephenson A. Of a new type of dynamic stability/ A. Stephenson // – *Mem. Proc. Manchester Lit. Phil. Soc.* 1908. –52(8) . – P. 1–10.
90. Stephenson A. On induced stability./A. Stephenson// *Phil. Mag.* –1909–17, P. 765–766.
91. Tabeling P. *Introduction to microfluidics* / P. Tabeling. - Oxford university press, 2005. – 301 p.
92. Timoshenko S. *Theory of elastic stability* / S. Timoshenko, J. Gere // McGRAW-HILL, New York, 1961.
93. Ulam S. M. On combination of stochastic and deterministic processes / S. M. Ulam, J. von Neumann // *Bull. Amer. Math. Soc.* – 1947. – Vol. 53, № 11. – P. 1112–1120.
94. Vakakis A. F., Manevich L. I., Mikhlin Yu. V. *Normal modes and localization in nonlinear systems* / A. F. Vakakis, L. I. Manevich, Yu. V. Mikhlin. – New York : Wiley. – 1996. – 207 p.