

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА
ШЕВЧЕНКА**

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття ступеня магістра
зі спеціальності 113 «Прикладна математика»
на тему:

**КОМП'ЮТЕРНО-АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ**

Виконав студент 2-го курсу магістратури

Літвін Дмитро Васильович

Науковий керівник:

доктор фіз.-мат. наук, професор

Стоян Володимир Антонович

Засвідчую, що в цій роботі
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань.

Студент

Роботу розглянуто й допущено до
моделювання складних систем

« ____ » _____ 2020 р.,

протокол № ____

Завідувач кафедри Д. І. Черній

Зміст

1. Математичні основи моделювання стану лінійних динамічних систем	1
1.1 Проблеми дослідження динаміки неповно визначених лінійних динамічних систем.....	1
1.2 Математичні моделі динаміки неповно спостережуваних просторово розподілених систем.....	2
Диференціальні математичні моделі розподілених просторово-часових систем.....	3
Інтегральні моделі динаміки розподілених просторово-часових систем...	4
1.3 Початково-крайові спостереження за станом просторово розподілених динамічних систем.....	4
1.4 Ідейні принципи та алгоритми розв'язання задач моделювання динаміки неповно спостережуваних просторово розподілених систем.....	5
1.5 Ідейні принципи математичного моделювання початково-крайових спостережень.....	6
1.6 Математичне моделювання динаміки дискретно спостережуваних систем в обмежених просторово-часових областях.....	8
1.7 Задача математичного моделювання неперервно визначеного початково-крайового збурення розподілених динамічних систем.....	9
1.8. Псевдообернення лінійних алгебраїчних систем.....	10
1.9 Лінійні дискретно підсумовуючі системи.....	11
1.10 Лінійні дискретно розподіляючі системи.....	12
1.11 Псевдообернення лінійних інтегральних систем:.....	13
1.12. Псевдообернення лінійних функціональних систем.....	14
2. Моделювання стану лінійних динамічних систем	16
2.2 Розв'язок задач математичного моделювання стану дискретно спостережуваних ЛДС.....	17
3. Моделювання динаміки лінійно розподілених систем.....	23
3.1 Задача неперервно-аналітичного моделювання дискретно визначеного початкового збурення.....	23

3.2 Множини моделюючих функцій для дискретно визначеного початково-крайового стану	23
3.3 Задачі математичного моделювання дискретизованих початкових-крайових умов у необмежених просторових і часових областях.	25
4. Тестування розв'язків задач математичного моделювання стану ЛДС	27
Висновки.....	32
Література.....	33

1. Математичні основи моделювання стану лінійних динамічних систем

1.1. Проблеми дослідження динаміки неповно визначених лінійних динамічних систем

Дана робота спрямована на дослідження математичних моделей диференціального та інтегрального типів для процесів і явищ, природа та особливості функціонування яких не дозволяють ці моделі зробити математично коректними, як цього вимагають класично відомі методи диференціальних рівнянь, математичної фізики та обчислювальної математики. Зауважимо, що некоректність математичної моделі при цьому будемо бачити в неузгодженості кількості та якості спостережень за процесом з вимогами класичного математичного та обчислювального апарату, який міг би бути використаний для дослідження останньої.

В роботі розглядаються задачі за умов неповноти інформації про їх початково-крайовий стан. Критерієм розв'язання розглядуваних задач є середньоквадратичне узгодження змодельованої функції з наявними спостереженнями за нею. Як на кількість, так і на форму спостережень обмежень не будемо накладати. Для кожної із розв'язаних таким чином задач формулюються умови точності та однозначності отриманих розв'язків.

В розділі „Тестування розв'язків задач математичного моделювання стану ЛДС” будуть наведені результати роботи програмно-аналітичного комплексу на конкретних прикладах.

1.2. Математичні моделі динаміки неповно спостережуваних просторово розподілених систем

Розглянемо деякий просторово-розподілений процес, який визначається деякою функцією $y(s)$, що залежить від кількох параметрів. В залежності від явища, процесу параметри, описані вище, можуть мати різну фізико-технічну, економічну, соціальну інтерпретацію. Надалі під параметром s функції $y(s)$ будемо розуміти $s \in R^{n+1}$. Одну із змінних будемо позначати t – часова змінна, інші змінні позначимо через $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – просторові змінні. Функція $y(s)$ визначається, як стан досліджуваної системи, в якій $s = (x, t) = (x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, а системи, які будуть описані в розділі 1 є просторово-часовими, або просторово-розподіленими динамічними системами.

Частинними випадками таких систем є системи з наступними наборами параметрів:

1. просторово зосереджені динамічні системи, коли x – проста змінна;
2. просто динамічні системи, коли змінна x відсутня;
3. статичні системи (змінна t – відсутня) із зосередженими (x – проста змінна) та розподіленими (x – набір змінних) параметрами.

Досліджувані системи будемо розглядати в наступних областях:

1. $S_\infty = \{s = (x, t): x \in R^n, -\infty < t < \infty\}$;
2. $S_0^T = \{s = (x, t): x \in S_0 \subset R^n, t \in [0, T]\}$;
3. $S_0^\infty = S_0 \times (-\infty, \infty), S_\infty^T = R^n \times [0, T]$.

Також будемо визначати початково-крайові збурення, під впливом яких функціонує система. Важливим чинником, що впливає на динаміку системи є просторово-часові збурення. Їх будемо позначати функцією $u(s)$ і будемо вважати, що вона наперед задана. В деяких задачах вона буде набувати вигляду вектора: $\bar{u} = \text{col}(u_1, \dots, u_m)$ значень $u_m = u(s_m)$ функції $u(s)$.

Диференціальні математичні моделі розподілених просторово-часових систем

Для дослідження стану вище наведених процесів і явищ, необхідно мати математичну залежність функції стану $y(s)$ від зовнішньо-динамічних збурень $u(s)$, тобто математичну модель процесу, явища. Для багатьох процесів, явищ такі моделі побудовані. Деякі процеси і явища є не повністю вивченими з точки зору фізики процесу і потрібні математичні методи для їх побудови на основі спостережень за станом процесу і зовнішньо-динамічними збурюючими факторами, які цей процес ініціюють. Для деяких процесів існує модель, але точність її є не досить високою і потрібні математичні засоби для уточнення першого наближення моделі.

Розглянемо моделі, які є найбільш зручними для побудови і описуються диференціальним рівнянням вигляду:

$$L(\partial_s)y(s) = u(s), \quad (1.1)$$

де $\partial_s = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}, \partial_t)$ – вектор похідних за просторовими змінними x_1, \dots, x_n та часом t , $L(\partial_s)$ – лінійний диференціальний оператор, який має вигляд:

$$L(\partial_s) = \sum_{k_0, k_1, \dots, k_n \leq n} a_{i_0 i_1 \dots i_n}^{k_0 k_1 \dots k_n} \partial_{x_1}^{k_1} \dots \partial_{x_n}^{k_n} \partial_t^{k_0}. \quad (1.2)$$

Тут $a_{i_0 i_1 \dots i_n}^{k_0 k_1 \dots k_n}$ – задані коефіцієнти, а n – порядок диференціального рівняння (1.1).

До класу диференціальних математичних моделей належать:

1) класичні рівняння математичної фізики:

$$[\partial_t^2 - \alpha^2 (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)]y(s) = u(s), \quad (1.3)$$

(гіперболічні рівняння),

$$[\partial_t - \alpha^2 (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)]y(s) = u(s), \quad (1.4)$$

(параболічні рівняння),

$$(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)y(s) = -u(s) \quad (1.5)$$

(еліптичні рівняння);

2) класичні рівняння аналітичної механіки та механіки твердого деформованого тіла:

$$\left(FE\partial_x^2 + \xi\partial_x^2\partial_t - \frac{\gamma F}{g}\partial_t^2 \right) y(x, t) = u(x, t) \quad (1.6)$$

(рівняння повздовжніх затухаючих (ξ – коефіцієнт затухання) коливань пружного (E – модуль пружності, γ – вага одиниці об'єму) стержня),

$$\left(\partial_{x_1}^4 + 2\partial_{x_1}^2\partial_{x_2}^2 + \partial_{x_2}^4 + \frac{q}{gD}\partial_t^2 \right) y(x_1, x_2, t) = u(x_1, x_2, t) \quad (1.7)$$

(поперечні коливання пружної (D – циліндрична жорсткість) прямокутної плити (q – вага плити, віднесена до одиниці поверхні)), тут та вище g – прискорення вільного падіння.

Інтегральні моделі динаміки розподілених просторово-часових систем

Іншим типом представлення вище описаної залежності функцій $y(s)$ стану досліджуваного процесу від функцій зовнішньо-динамічних збурень $u(s)$ є інтегральна модель, яка має вигляд:

$$y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s-s')u(s')ds', \quad (1.8)$$

де $G(s-s')$ – функція Гріна в необмеженій просторово-часовій області.

Інтегральні моделі складніші при побудові, але являються простішими при дослідженні і можуть бути розв'язком рівняння (1.1). Побудова (1.8) на базі (1.1) є справою складною і не завжди може бути розв'язана.

1.3. Початково-крайові спостереження за станом просторово розподілених динамічних систем

Представлені співвідношеннями (1.1), (1.8) математичні моделі просторово-розподіленого динамічного процесу є не повними. Вони описують залежність функцій $y(s)$ стану процесу від розподіленого зовнішньо-динамічного збурення $u(s)$ без врахування дії інших збурюючих

факторів. Але цього достатньо, коли дослідження процесу виконується в необмеженій просторово-часовій області – без впливу зовнішньо-динамічних збурюючих факторів.

Нехай Γ границя просторової області S_0 , початком досліджень є час $t = 0$, то початково-граничний стан вище наведеного процесу описується співвідношеннями:

$$L_r^0(\partial_t)y(s)|_{t=0} = Y_r^0(x) \quad (x \in S_0, r = \overline{1, R_0}), \quad (1.9)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)|_{x=x^\Gamma \in \Gamma} = Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma, t) \quad (t \in [0, T], \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \quad (1.10)$$

де: $L_r^0(\partial_t)$ ($r = \overline{1, R_0}$) та $L_\rho^\Gamma(\partial_x)$ – лінійні диференціальні оператори, а $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) та $Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma, t)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) – відомі функції.

Частинним випадком початково-крайових спостережень за процесом є випадок дискретних спостережень, тобто коли співвідношення (1.9), (1.10) мають вигляд:

$$L_r^0(\partial_t)y(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} = Y_{rl}^0 \quad (x_l^0 \in S_0, l = \overline{1, L_0}, r = \overline{1, R_0}), \quad (1.11)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)|_{s=s_l^\Gamma} = Y_{\rho l}^\Gamma \quad (s_l^\Gamma \in \Gamma \times [0, T], l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \quad (1.12)$$

де:

$$Y_{rl}^0 = Y_r^0(x_l^0), \quad Y_{\rho l}^\Gamma = Y_\rho^\Gamma(x_l^\Gamma, t_l^\Gamma).$$

1.4. Ідейні принципи та алгоритми розв'язання задач моделювання динаміки неповно спостережуваних просторово розподілених систем

Нехай функції $G(s-s')$, $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ – відомі та задані наступні стани системи:

1. початковий стан, викликаний невідомою нам функцією $u_0(s)$, визначеною в області $S^0 = S_0 \times (-\infty, 0]$;
2. крайовий стан системи викликаний функцією $u_\Gamma(s)$ такою, що $s \in S^\Gamma = (R^n \setminus S_0) \times [0, T]$.

Якщо вважати, що природа функції $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ така ж, як і функції $u(s)$, то вплив цих функцій на стан досліджуваного процесу визначатиметься функцією $G(s-s')$, а доля цього впливу – функціями:

$$y_0(s) = \int_{S_0} G(s-s')u_0(s')ds' \quad (1.13)$$

та

$$y_\Gamma(s) = \int_{S_\Gamma} G(s-s')u_\Gamma(s')ds' \quad (1.14)$$

відповідно. Остання означає, що стан процесу, динаміка якого викликана розподіленням в області S_0^T , зосередженим на контурі Γ цієї області та в початковий момент часу $t=0$, буде визначатися функцією:

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) + y_\Gamma(s). \quad (1.15)$$

Функції $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ будемо знаходити з умов найкращого (за деяким критерієм) моделювання початкових та крайових зовнішньо-динамічних збурень. Процес знаходження цих функцій будемо називати моделюванням динаміки процесу.

1.5. Ідейні принципи математичного моделювання початково-крайових спостережень

Нехай функція стану $y(s)$ розподілена в області $S_0^T = S_0 \times [0, T]$ динамічної системи. $s = (x, t) = (x_1, \dots, x_n, t) \in S_0^T$ – просторово-часова змінна, $\partial_s = (\partial_x, \partial_t) = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}, \partial_t)$ – вектор частинних похідних за просторовими змінними x_1, \dots, x_n та часом t , $L(\partial_s)$ – лінійний диференціальний оператор, а $u(s)$ – функція розподілення у S_0^T просторово-часових зовнішньодинамічних збурень. Також задані початкові та крайові спостереження вигляду (1.9), (1.10) або (1.11), (1.12). На кількості R_0 та R_Γ початково-крайових співвідношень (1.9)–(1.12) обмежень накладати не будемо. З урахуванням вище сказаного поставимо задачу побудови $y(s)$, яка є розв'язком співвідношення (1.1) за середньоквадратичним критерієм, а саме:

$$\Phi_1 = \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} \left(L_r^0(\partial_t)y(s) \Big|_{t=0} - Y_r^0(x) \right)^2 + \sum_{p=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma \times [0, T]} \left(L_p^\Gamma(\partial_x)y(s) - Y_p^\Gamma(s) \right)^2 ds \rightarrow \min_{y(s)} \quad (1.16)$$

1. за неперервних спостережень (1.9), (1.10)

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t) y(s) \Big|_{t=0} - Y_{rl}^0)^2 + \\ & + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s) \Big|_{s=x_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma)^2 \rightarrow \min_{y(s)} \end{aligned} \quad (1.17)$$

2. за дискретних спостережень.

Зважаючи на три фактори впливу на стан системи $y(s)$, подамо $y(s)$ у вигляді суми трьох компонент:

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) + y_\Gamma(s), \quad (1.18)$$

Для побудови функцій $y_\infty(s)$, $y_0(s)$, $y_\Gamma(s)$ уведемо функцію $G(s-s')$ – функцію Гріна системи (1.1), розглядуваної в необмеженій просторово-часовій області, співвідношенням:

$$L(\partial_s)G(s-s') = \delta(s-s'), \quad (1.19)$$

де $\delta(s-s')$ – δ -функція Дірака. Потім отримуємо:

$$y_\infty(s) = \int_{S_0^T} G(s-s')u(s')ds', \quad (1.20)$$

$$y_0(s) = \int_{S^0} G(s-s')u_0(s')ds', \quad (1.21)$$

$$y_\Gamma(s) = \int_{S^\Gamma} G(s-s')u_\Gamma(s')ds', \quad (1.22)$$

де $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ – функції, відповідно з областей $S^0 = S_0 \times (-\infty, 0]$ та $S^\Gamma = (R^n \setminus S_0) \times (0, T]$. Моделюючі функції $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$, як і функція $u(s)$, можуть бути подані у вигляді векторів своїх значень в точках s_m, s_m^0, s_m^Γ :

$$u = \text{col}(u(s_m), m = \overline{1, M}) \quad (s_m \in S_0^T), \quad (1.23)$$

$$u_0 = \text{col}(u_0(s_m^0), m = \overline{1, M_0}) \quad (s_m^0 \in S^0), \quad (1.24)$$

$$u_\Gamma = \text{col}(u_\Gamma(s_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma}) \quad (s_m^\Gamma \in S^\Gamma), \quad (1.25)$$

У цьому випадку $y_\infty(s)$, $y_0(s)$, $y_\Gamma(s)$ набувають вигляду:

$$y_\infty(s) = \sum_{m=1}^M G(s - s_m) u_m, \quad (1.26)$$

$$y_0(s) = \sum_{m=1}^{M_0} G(s - s_m^0) u_{0m}, \quad (1.27)$$

$$y_\Gamma(s) = \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s - s_m^\Gamma) u_{\Gamma m}, \quad (1.28)$$

Отже, для того, щоб побудувати функцію $y(s)$ потрібно знайти функції

$u_0(s) (s \in S^0)$, $u_\Gamma(s) (s \in S^\Gamma)$, або вектори u_0, u_Γ їхніх значень, моделюючих згідно з (1.16), (1.17) початково-крайові збурення (1.9) – (1.12).

1.6. Математичне моделювання динаміки дискретно спостережуваних систем в обмежених просторово-часових областях

Виходячи з вище описаних проблем математичного моделювання просторового розподілених систем, розглянемо алгоритм побудови функції $y(s) \quad s \in S_0^T = S_0 \times [0, T]$ (1.1) за умови, що спостереження за нею визначені згідно з (1.13), (1.14). Пошук у (1.24), (1.25) векторів u_0, u_Γ таких, щоб при визначеному згідно з (1.18), (1.26) – (1.28) $y(s)$ виконувався критерій (1.17), зведеться до розв'язання задачі.

$$\Phi_2 \rightarrow \min_{u_0, u_\Gamma}. \quad (1.29)$$

А це еквівалентно середньоквадратичному відносно $u_{0m} (m = \overline{1, M_0})$ та $u_{\Gamma m} (m = \overline{1, M_\Gamma})$ оберненню системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку отримаємо із (1.11), (1.12) після підстановки до них розв'язку (1.18), (1.26) – (1.28):

$$A\bar{u} = \bar{Y}, \quad (1.30)$$

$$\text{де } \bar{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_\Gamma \end{pmatrix}, \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_\Gamma \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Компоненти матриці A та векторів \bar{Y}, \bar{u} мають вигляд:

$$\begin{aligned} Y_0 &= \text{col}((Y_{rl}^0 - L_r^0(\partial_t)y_\infty(s))\Big|_{t=0, x=x_l^0}, \quad l = \overline{1, L_0}, \quad r = \overline{1, R_0}), \\ Y_\Gamma &= \text{col}((Y_{\rho l}^\Gamma - L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s))\Big|_{x=x_l^\Gamma}, \quad l = \overline{1, L_\Gamma}, \quad \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \\ A_{11} &= \text{col}((\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^0))\Big|_{t=0, x=x_l^0}, \quad m = \overline{1, M_0}, \quad l = \overline{1, L_0}, \quad r = \overline{1, R_0}), \\ A_{12} &= \text{col}((\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^\Gamma))\Big|_{t=0, x=x_l^0}, \quad m = \overline{1, M_\Gamma}, \quad l = \overline{1, L_0}, \quad r = \overline{1, R_0}), \\ A_{21} &= \text{col}((\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^0))\Big|_{s=s_l^\Gamma}, \quad m = \overline{1, M_0}, \quad l = \overline{1, L_\Gamma}, \quad \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \end{aligned}$$

$$A_{22} = \text{col}((\text{str}(L_p^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^\Gamma)|_{s=s_l^\Gamma}), m = \overline{1, M_\Gamma}), l = \overline{1, L_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}).$$

1.7. Задача математичного моделювання неперервно визначеного початково-крайового збурення розподілених динамічних систем

Нехай задано область S_0^T просторово-часової системи, описаної рівнянням (1.1), функція $y(s)$ стану якої задовольняє неперервні умови (1.15), (1.16). Вважатимемо, що функція $u(s)$ – відома, кількість R_0, R_Γ умов не обов'язково узгоджена з порядком диференціального оператора $L(\partial_s)$ рівняння (1.1), а просторова область і часовий інтервал, на якому вони задані, не обов'язково збігаються із просторовою областю S_0 і часовим інтервалом $[0, T]$, на якому досліджувана система функціонує. Вище поставлені умови унеможливають розв'язати задану задачу аналітичними або числовими методами, тому побудуємо функцію $y(s)$, яка буде розв'язком рівняння (1.1), умови (1.12), (1.13) задовольнятиме середньоквадратично. Функцію $y(s)$ подамо у вигляді (1.18), (1.20), (1.27), (1.28), де вектори $u_0 = (u_{0m}, m = \overline{1, M_0})^T$, $u_\Gamma = (u_{\Gamma m}, m = \overline{1, M_\Gamma})^T$ невідомих фіктивних зовнішньодинамічних збурень u_{0m} ($m = \overline{1, M_0}$) та $u_{\Gamma m}$ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$) виберемо з умови середньоквадратичного виконання початково-крайових співвідношень (1.9), (1.10), тобто з умови, щоб:

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} (L_r^0(\partial_t)y(s)|_{t=0} - Y_r^0(x))^2 dx + \\ & + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma} dx \int_0^T (L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s) - Y_\rho^\Gamma(x,t))^2 dt \rightarrow \min_{u_0, u_\Gamma} \end{aligned} \quad (1.31)$$

або, що еквівалентно:

$$\Phi \rightarrow \min_{y(s)}. \quad (1.32)$$

Вектори u_0 та u_Γ називатимемо моделюючими відносно початково-крайових умов (1.9), (1.10).

1.8. Псевдообернення лінійних алгебраїчних систем

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$Ax = b \quad (1.33)$$

$$A \in R^{m \times n}, b \in R^m, x \in R^n.$$

Система (1.33) є базою для дослідження більш складних моделей реальних процесів та явищ. В рамках лінійної алгебри досліджуються умови існування розв'язку системи (1.33), будується цей розв'язок та оцінюється його однозначність. Поза увагою лінійної алгебри залишається питання визначення вектора x , який би за відсутності розв'язку системи (1.33) при заданих A та b найкраще (за певним критерієм) задовольняв співвідношення (1.33). Зважаючи на важливість дослідження системи (1.33) за довільних A та b побудуємо вектор $x \in R^n$, який би:

1. точно задовольняв рівняння (1.33), якщо воно має розв'язок;
2. був елементом множини розв'язків, якщо таких розв'язків багато;
3. був однозначним середньоквадратичним наближенням до розв'язку системи (1.33);
4. був елементом множини таких наближень, за умов неоднозначності обернення (1.33).

Розглянемо загальну формулу, яка дасть змогу знайти розв'язок для будь-яких $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$. Крім цього, запишемо умови, коли x – наближення до розв'язку. Для цього потрібно побудувати множину:

$$\Omega_x = \left\{ x : \|Ax - b\|^2 \rightarrow \min_x \right\}. \quad (1.34)$$

За умов неоднозначності множини (1.34) віділомо з неї вектор \hat{x} , який є мінімальним за нормою, а саме:

$$\hat{x} = \operatorname{argmin}_{x \in \Omega_x} \|x\|^2. \quad (1.35)$$

Побудована множина Ω_x має наступний вигляд:

$$\Omega_x = \left\{ x : x = A^+b + \mathcal{G} - A^+A\mathcal{G} \right\} \forall \mathcal{G} \in R^n, \quad (1.36)$$

а вектор \hat{x} :

$$\hat{x} = A^+b, \quad (1.37)$$

де A^+ – псевдообернена матриця, для якої виконується співвідношення:

$$A^+ = A_2^T (A_2 A_2^T)^+ (A_1^T A_1)^+ A_1^T. \quad (1.38)$$

При заданих $A_1 \in R^{m \times r}$ та $A_2 \in R^{r \times n}$, де r – ранг матриці A .

$$A = A_1 A_2$$

$$A^+ = A^T (A A^T)^+, \quad (1.39)$$

$$A^+ = (A^T A)^+ A^T. \quad (1.40)$$

Візьмемо один з елементів, а саме $\hat{x} = A^+ b$ і знайдемо точність, з якою елемент, побудований вище, близький до розв'язку системи (1.1):

$$\varepsilon^2 = \min_{x \in \Omega_x} \|Ax - b\|^2 = b^T b - b^T A A^+ b. \quad (1.41)$$

При $\varepsilon^2 = 0$ – знайдено множину точних розв'язків, інакше якщо $\varepsilon^2 > 0$ – знайдена множина є множиною середньоквадратичного наближення до розв'язку системи (1.33).

Умова однозначності побудованої множини Ω_x – умова, за виконання якої $\mathcal{G} \equiv 0$. Для системи (1.33) розклад вектора x – однозначний, якщо всі стовпчики матриці A – лінійно-незалежні, умову запишемо так: $\det(A^T A) > 0$ – стовпчики матриці A – лінійно-незалежні, розклад вектора x – однозначний, множина Ω_x – однозначна і $\mathcal{G} \equiv 0$. $\det(A^T A) = 0$ – множина Ω_x є неоднозначна і $\mathcal{G} \neq 0$.

1.9. Лінійні дискретно підсумовуючі системи

Розглянемо узагальнення розв'язку (1.34)–(1.35) системи (1.33) на випадок, коли вихідний вектор $b \in R^m$ отримується після підсумовування N лінійно перетворених n -вимірних векторів x_1, \dots, x_N , що описуються співвідношенням:

$$\sum_{i=1}^N A_i x_i = b, \quad (1.42)$$

в якому $A_i (i = \overline{1, N})$ – задані $(m \times n)$ – вимірні матриці.

Як і система (1.33) так і (1.42) може мати:

1. однозначне обернення;
2. множину обернень, а може і не мати.

Як і в останньому випадку для системи (1.33), обмежимося середньоквадратичним наближенням до такого обернення.

Згідно вищесказаного для системи (1.42) побудуємо множину:

$$\Omega_x = \left\{ (x_1, \dots, x_N) : \left\| \sum_{i=1}^N A_i x_i - b \right\|^2 \rightarrow \min_{(x_1, \dots, x_N)} \right\}. \quad (1.43)$$

За умов неоднозначності множини (1.43) віділомо з неї x_i ($i = \overline{1, N}$), такі щоб:

$$x_i = \operatorname{argmin}_{x_i \in \Omega_x} \|x_i\|^2 \quad (1.44)$$

Розв'язком задачі (1.42) – (1.44) буде множина векторів:

$$\Omega_x = \{x_i : x_i = A_i^T P_1^+ b + \mathcal{G}_i - A_i^T P_1^+ A_g\} \quad (i = \overline{1, N}), \quad (1.45)$$

в яких:

$$P_1 = \sum_{i=1}^N A_i A_i^T,$$

$$A_g = \sum_{i=1}^N A_i \mathcal{G}_i$$

за довільних n -вимірних $\mathcal{G}_i = 0$ ($i = \overline{1, N}$), якщо $\det [A_i^T A_j]_{i,j=1}^N > 0$ та

$$x_i = A_i^T P_1^+ b. \quad (1.46)$$

Точність розв'язання задачі визначається наступною величиною:

$$\varepsilon^2 = \min_{(x_1, \dots, x_N) \in \Omega_x} \left\| \sum_{i=1}^N A_i x_i - b \right\|^2 = b^T b - b P_1 P_1^+ b. \quad (1.47)$$

1.10. Лінійні дискретно розподіляючі системи

Наступним узагальненням результату (1.34) – (1.35) псевдообернення системи (1.33) може бути задача побудови псевдорозв'язку лінійної системи вигляду:

$$B_i x = b_i \quad (i = \overline{1, N}), \quad (1.48)$$

яка n -вимірний вектор x матрицями $B_i \in R^{m \times n}$ ($i = \overline{1, N}$) перетворює в послідовність n -вимірних векторів b_i ($i = \overline{1, N}$). Якщо B_i, b_i ($i = \overline{1, N}$) – відомі, то множина

$$\Omega_x = \left\{ x \in R^n : \left\| \sum_{i=1}^N B_i x_i - b \right\|^2 \rightarrow \min_x \right\} (i = \overline{1, N}), \quad (1.49)$$

а вектори

$$\hat{x} = \operatorname{argmin}_{x \in \Omega_x} \|x\|^2 \quad (1.50)$$

визначатимуться співвідношеннями:

$$\Omega_x = \left\{ x(t) = P_2^+ B_b + \vartheta - P_2^+ P_2 A \vartheta \forall \vartheta \in R^n \right\}, \quad (1.51)$$

$$\hat{x} = P_2^+ B_b, \quad (1.52)$$

в яких:

$$P_2 = \sum_{i=1}^N B_i^T B_i, \quad (1.53)$$

$$B_b = B_i^T b_i. \quad (1.54)$$

Довільний n -вимірний вектор $\vartheta \equiv 0$, якщо $\det(P_2) > 0$. Точність розв'язку оцінюватиметься величиною:

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^N b_i^T b_i - B_b^T P_2^+ B_b. \quad (1.55)$$

1.11. Псевдообернення лінійних інтегральних систем

Розглянемо інтегральну систему вигляду:

$$\int_0^T A(t) x(t) dt = b, \quad (1.56)$$

де $A(t) \in R^{m \times n}$ – матрична функція, $x(t) \in R^n$, $b \in R^m$, $A(t), b$ – відомі, $x(t)$ – шукана вектор функція. Система (1.56) як і СЛАР (1.33) може мати:

1. однозначний розв'язок;
2. множину розв'язків або може їх немати;
3. однозначне середньоквадратичне наближення до розв'язку;
4. множину середньоквадратичних розв'язків.

Щоб розв'язати дану задачу потрібно знайти Ω_x і $\hat{x}(t)$, які задовольняють наступним співвідношенням:

$$\Omega_x = \left\{ x(t) : \left\| \int_0^T A(t)x(t) dt - b \right\|^2 \rightarrow \min_{x(t)} \right\}, \quad (1.57)$$

$$\hat{x}(t) = \operatorname{argmin}_{x(t) \in \Omega_x} \|x(t)\|^2. \quad (1.58)$$

Множина Ω_x має вигляд:

$$\Omega_x = \left\{ x(t) = A(t)^T P_1^+ b + \vartheta(t) - A(t)^T P_1^+ A_\vartheta \right\}, \quad (1.59)$$

Виділений розв'язок з множини Ω_x має вигляд:

$$\hat{x}(t) = A(t)^T P_1^+ b. \quad (1.60)$$

При цьому:

$$P_1 = \int_0^T A(t)A(t)^T dt,$$

$$A_\vartheta = \int_0^T A(t)\vartheta(t) dt \quad \forall \vartheta(t) \in R^n.$$

Для множини (1.57) залишається визначити умови точності та однозначності:

$$\varepsilon^2 = \left\| \int_0^T A(t)x(t) dt - b \right\|^2 = b^T b - b^T P_1 P_1^+ b. \quad (1.61)$$

Якщо $\varepsilon^2 = 0$ – знайдено точний розв'язок, інакше якщо $\varepsilon^2 > 0$ – знайдено середньоквадратичне наближення до розв'язку.

Для системи (1.24) маємо наступне: Ω_x буде однозначною множиною, якщо:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \det \left(\begin{array}{c} \left(A(t_1)^T \right) \\ \vdots \\ \left(A(t_N)^T \right) \end{array} \left(A(t_1), A(t_2), \dots, A(t_N) \right) \right) > 0,$$

у випадку: $\lim_{N \rightarrow \infty} \det \left(\begin{array}{c} \left(A(t_1)^T \right) \\ \vdots \\ \left(A(t_N)^T \right) \end{array} \left(A(t_1), A(t_2), \dots, A(t_N) \right) \right) = 0$ – неоднозначною.

1.12. Псевдообернення лінійних функціональних систем

Розглянемо функціональну систему вигляду:

$$A(t)x = b(t), \quad (1.62)$$

де $t \in [0, T]$, $A(t)$ – матрична функція розмірності $R^{m \times n}$, $x \in R^n$, $b(t) \in R^m$.

Система (1.30) є СЛАР зі змінними коефіцієнтами і як СЛАР з постійними коефіцієнтами може мати:

1. однозначний розв'язок;
2. множину розв'язків або їх немати;
3. однозначне середньоквадратичне наближення до розв'язку;
4. множину середньоквадратичних розв'язків.

Для знаходження розв'язку системи (1.62) потрібно побудувати множину:

$$\Omega_x = \left\{ x : \int_0^T \|A(t)x - b(t)\|^2 dt \rightarrow \min_x \right\}. \quad (1.63)$$

З множини Ω_x виділимо

$$\hat{x} = \operatorname{argmin}_{x \in \Omega_x} \|x\|^2. \quad (1.64)$$

Побудована Ω_x має вигляд:

$$\Omega_x = \left\{ x : x = P_2^+ A_b + \mathcal{G} - P_2^+ P_2 \mathcal{G} \forall \mathcal{G} \in R^n \right\}. \quad (1.65)$$

Виділений розв'язок з множини Ω_x має вигляд:

$$\hat{x} = P_2^+ A_b, \quad (1.66)$$

де

$$P_2 = \int_0^T A(t)^T A(t) dt,$$

$$A_b = \int_0^T A(t)^T b(t) dt.$$

Точність визначається наступною величиною:

$$\varepsilon^2 = \int_0^T \|A(t)x(t) - b(t)\|^2 dt = b^2 - A_b^T P_2^+ A_b, \quad (1.67)$$

де

$$b^2 = \int_0^T b(t)^T b(t) dt.$$

Таким чином при $\varepsilon^2 = 0$, Ω_x – множина точних розв'язків, коли $\varepsilon^2 > 0$, Ω_x – множина середньоквадратичних розв'язків.

При $\det(P_2) > 0$ – розв'язок однозначний, $\det(P_2) = 0$ – розв'язок неоднозначний.

2. Моделювання стану лінійних динамічних систем

(випадок з однією змінною)

2.1. Постановки задач математичного моделювання ЛДС

Задача Коші

Нехай задано:

1. рівняння $L(\partial_t)x(t) = u(t)$, де $L(\partial_t)$ – диференціальний оператор;
2. часовий інтервал $[0, T]$ – інтервал, на якому досліджується динаміка системи;
3. $G(t-t'), u(t)$ будемо вважати відомими;
4. для задачі Коші відомий при $t = 0$ стан системи, що ми зафіксуємо наступним співвідношенням:

$$L_r^0(\partial_t)x(t)|_{t=0} = X_r^0, r = \overline{1, R_0}, \quad (2.1)$$

в якому $L_r^0(\partial_t)$ – лінійний диференціальний оператор, $X_r^0, r = \overline{1, R_0}$ – задані величини.

Крайова задача

Нехай задано:

1. рівняння $L(\partial_t)x(t) = u(t)$, де $L(\partial_t)$ – диференціальний оператор;
2. стан досліджуваної системи визначається як в початковий момент часу $t = 0$, так і в $t = T$, тобто співвідношеннями:

$$L_r^1(\partial_t)x(t)|_{t=0} = X_r^1, r = \overline{1, R_1}, \quad (2.2)$$

$$L_r^2(\partial_t)x(t)|_{t=T} = X_r^2, r = \overline{1, R_2}, \quad (2.3)$$

де $L_r^1(\partial_t), L_r^2(\partial_t)$ – лінійні диференціальні оператори, $r = \overline{1, R_1}, r = \overline{1, R_2}$

X_r^1, X_r^2 – задані числа.

Задача з поточними спостереженнями

Нехай задано:

1. рівняння $L(\partial_t)x(t) = u(t)$, де $L(\partial_t)$ – диференціальний оператор;
2. окрім того, що стан досліджуваної системи визначається в початковий момент часу $t = 0$ і в $t = T$, він ще визначається в точках $t_k, k = \overline{1, N-1}$,

де $t < t_1 < t_2, \dots, t_{N-1} < t_N = T$, наступними співвідношеннями:

$$L_r^0(\partial_t)x(t)|_{t=0} = X_r^0, r = \overline{1, R_0}, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} L_r^1(\partial_t)x(t)|_{t=t_1} &= X_r^1 \quad r = \overline{1, R_1} \\ &\vdots \\ L_r^{N-1}(\partial_t)x(t)|_{t=t_{N-1}} &= X_r^{N-1} \quad r = \overline{1, R_{N-1}}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$L_r^N(\partial_t)x(t)|_{t=T} = X_r^N \quad r = \overline{1, R_N}, \quad (2.6)$$

де $L_r^0(\partial_t), \dots, L_r^N(\partial_t)$ – диференціальні оператори, X_r^0, \dots, X_r^N – задані числа.

Зауважимо, що на порядок диференціальних операторів $L_r^0(\partial_t), \dots, L_r^N(\partial_t)$, як і на їх кількість особливих обмежень не будемо накладати.

При розв'язанні задачі Коші будемо вимагати, щоб:

$$\Phi_0 = \sum_{r=1}^{R_0} \|L_r^0(\partial_t)x(t)|_{t=0} - X_r^0\|^2 \rightarrow \min_{x(t)} \quad (2.7)$$

Для крайової задачі будемо вимагати, щоб:

$$\Phi_1 = \sum_{r=1}^{R_1} \|L_r^1(\partial_t)x(t)|_{t=0} - X_r^1\|^2 \quad (2.8)$$

$$\Phi_2 = \sum_{r=1}^{R_2} \|L_r^2(\partial_t)x(t)|_{t=T} - X_r^2\|^2 \quad (2.9)$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 \rightarrow \min_{x(t)} \quad (2.10)$$

При розв'язанні задачі з поточними спостереженнями будемо вимагати, щоб:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \sum_{r=1}^{R_0} \|L_r^0(\partial_t)x(t)|_{t=0} - X_r^0\|^2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\Phi_N = \sum_{r=1}^{R_N} \|L_r^N(\partial_t)x(t)|_{t=T} - X_r^N\|^2$$

$$\Phi_0 + \dots + \Phi_N \rightarrow \min_{x(t)} \quad (2.12)$$

2.2. Розв'язок задач математичного моделювання стану дискретно спостережуваних ЛДС

Математичне моделювання розв'язку задачі Коші для лінійних динамічних систем

Розглянемо задачу побудови функції $x(t)$ ($t > 0$). Критерієм узгодженості розв'язку з умовами (2.1) виберемо співвідношення (2.7).

Нехай $x(t)$ подамо у вигляді:

$$x(t) = x_\infty(t) + x_0(t), \quad (2.13)$$

в якій:

$$x_{\infty}(t) = \int_0^t G(t-t')u(t')dt', \quad (2.14)$$

$$x_0(t) = \int_{-\infty}^0 G(t-t')u_0(t')dt'. \quad (2.15)$$

Для визначення функції $u_0(t)$ підставимо (2.13) в (2.1). Отримаємо систему рівнянь:

$$\int_{-\infty}^0 L_r^0(\partial_t)G(t-t')|_{t=0} u_0(t')dt' = \overline{X_r^0}, \quad (2.16)$$

де:

$$\overline{X_r^0} = X_r^0 - L_r^0(\partial_t)x_{\infty}(t)|_{t=0}, r = \overline{1, R_0}. \quad (2.17)$$

Знайдена множина Ω_0 має вигляд:

$$\Omega_0 = \{u_0(t) \in R^1 : u_0(t) = G_0^T(t)P_0^+X_0 + \mathcal{G}_0(t) - G_0^T(t)P_0^+X_g \forall \mathcal{G}_0(t)\} \quad (2.18)$$

при $t < 0$, у якій:

$$G_0(t') = col(L_r^0(\partial_t)G(t-t')|_{t=0}, r = \overline{1, R_0}), \quad (2.19)$$

$$X_0 = col(X_r^0 - L_r^0(\partial_t)x_{\infty}(t)|_{t=0}, r = \overline{1, R_0}), \quad (2.20)$$

$$P_0 = \int_{-\infty}^0 G_0(t)G_0^T(t)dt, \quad (2.21)$$

$$X_g = \int_{-\infty}^0 G_0(t)\mathcal{G}_0(t)dt. \quad (2.22)$$

Середньоквадратична точність, з якою визначена згідно (2.18) функція $u_0(t)$ моделюватиме початкові умови (2.1), визначатиметься множиною:

$$\varepsilon^2 = \min_{x(t)} \sum_{r=1}^{R_0} \|L_r^0(\partial_t)x(t)|_{t=0} - X_r^0\|^2 = X_0^T X_0 - X_0^T P_0 P_0^+ X_0. \quad (2.23)$$

Моделювання буде однозначним, якщо:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \det(G_0^T(t_i)G_0(t_j))_{i,j=1}^N > 0, \forall t_i, t_j < 0. \quad (2.24)$$

Математичне моделювання розв'язку крайової задачі для лінійних динамічних систем

Розглянемо задачу побудови функції $x(t)$ ($0 \leq t \leq T$) за відомої функції $u(t)$ ($0 \leq t \leq T$) та виконання крайових умов (2.2), (2.3). Критерієм розв'язання даної задачі виберемо співвідношення (2.10).

Як і вище розв'язок задачі подамо сумою:

$$x(t) = x_{\infty}(t) + x_2(t), \quad (2.25)$$

де:

$$x_{\infty}(t) = \int_0^T G(t-t')u(t')dt', \quad (2.26)$$

та:

$$x_2(t) = \int_{S_2} G(t-t')u_2(t')dt' \quad S_2 = [-\infty, 0] \cup [T, +\infty] \quad (2.27)$$

визначають вплив розподілених зовнішньо-динамічних збурень $u(t)$ та крайових умов (2.2), (2.3) на стан розглядуваної системи. Функцію $u_2(t)$ визначимо з умови (2.10) середньоквадратичного виконання крайових співвідношень (2.2), (2.3), яка в цьому випадку матиме вигляд:

$$\Phi_2 = \min_{u_2(t)}. \quad (2.28)$$

$u_2(t)$ визначається нижче наведеним співвідношенням:

$$u_2(t) = \begin{cases} u_{21}(t), & t < 0 \\ u_{22}(t), & t > T \end{cases}, \quad (2.29)$$

в якому:

$$\Omega_i = \{u_{2i}(t) \in R^1 : u_{2i}(t) = G_{2i}^T(t)P_2^+ X_2 + g_{2i}(t) - G_{2i}(t)P_2^+ X_g\} \quad (3.30)$$

$$i = 1, 2$$

за довільних інтегрованих при $t < 0$ та $t > T$ одновимірних функціях $u_{21}(t)$ та $u_{22}(t)$, де

$$G_{21}(t) = \begin{cases} G_{211}(t), & t < 0 \\ G_{221}(t), & t < 0 \end{cases}, \quad (2.31)$$

$$G_{22}(t) = \begin{cases} G_{212}(t), & t > T \\ G_{222}(t), & t > T \end{cases}, \quad (2.32)$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} X_{21} \\ X_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} P_{11} \in R^{R_1 \times R_1} & P_{12} \in R^{R_1 \times R_2} \\ P_{21} \in R^{R_2 \times R_1} & P_{22} \in R^{R_2 \times R_2} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

$$X_g = \begin{pmatrix} X_{g1} \\ X_{g2} \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

При цьому:

$$G_{z1i}(t') = \text{col} \left(L_r^1(\partial_t) G(t-t') \Big|_{t=0}, r = \overline{1, R_1} \right), \quad (2.36)$$

$$G_{z2i}(t') = \text{col} \left(L_r^2(\partial_t) G(t-t') \Big|_{t=T}, r = \overline{1, R_2} \right), \quad (2.37)$$

$$X_{z1} = \text{col} \left(X_r^1 - L_r^1(\partial_t) x_\infty(t) \Big|_{t=0}, r = \overline{1, R_1} \right), \quad (2.38)$$

$$X_{z2} = \text{col} \left(X_r^2 - L_r^2(\partial_t) x_\infty(t) \Big|_{t=T}, r = \overline{1, R_2} \right), \quad (2.39)$$

$$P_{ij} = \int_{-\infty}^0 G_{zi1}(t) G_{zj1}(t)^T dt + \int_T^{+\infty} G_{zi2}(t) G_{zj2}(t)^T dt, \quad (2.40)$$

$$i, j = 1, 2$$

$$X_{gi} = \int_{-\infty}^0 G_{zi1}(t) \mathcal{G}_{i1}(t) dt + \int_T^{+\infty} G_{zi2}(t) \mathcal{G}_{i2}(t) dt \quad (2.41)$$

$$i, j = 1, 2$$

Середньоквадратична точність, з якою визначена згідно (2.29), (2.30) функція $u_z(t)$ моделюватиме крайові умови (2.2), (2.3) визначатиметься величиною:

$$\varepsilon^2 = \min_{x(t)} \left(\sum_{r=1}^{R_1} \|L_r^1(\partial_t) x(t) \Big|_{t=0} - X_r^1\|^2 + \sum_{r=1}^{R_2} \|L_r^2(\partial_t) x(t) \Big|_{t=T} - X_r^2\|^2 \right) = X_z^T X_z - X_z^T P_z P_z^+ X_z. \quad (2.42)$$

(2.42)

Моделювання буде однозначним, якщо:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \det \left(\left(G_{z1}(t_i) G_{z2}(t_i) \right)^T \left(G_{z1}(t_j) G_{z2}(t_j) \right) \right)_{i,j=1}^N > 0 \quad (2.43)$$

Для отримання $u_{z1}(t), u_{z2}(t)$ підставимо (2.25) в (2.2), (2.3) і отримаємо наступне:

$$\int_{-\infty}^0 G_{zi1}(t) u_{z1}(t) dt + \int_T^{+\infty} G_{zi2}(t) u_{z2}(t) dt = X_{zi}, i = 1, 2 \quad (2.44)$$

або, що еквівалентно:

$$\int_{\Omega} G_z(t) \overline{u_z(t)} dt = X_z. \quad (2.45)$$

Для розв'язання даної системи інтегральних рівнянь було використано результат псевдообернення систем інтегральних рівнянь.

Математичне моделювання розв'язку задачі з поточними спостереженнями для лінійних динамічних систем
Нехай у нас є задача з поточними спостереженнями:

$$L_r^0(\partial_t)x(t)|_{t=0} = X_r^0, r = \overline{1, R_0}, \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} L_r^1(\partial_t)x(t)|_{t=t_1} &= X_r^1, r = \overline{1, R_1}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$L_r^{N-1}(\partial_t)x(t)|_{t=t_{N-1}} = X_r^{N-1}, r = \overline{1, R_{N-1}}$$

$$L_r^N(\partial_t)x(t)|_{t=T} = X_r^N, r = \overline{1, R_N}, \quad (2.48)$$

де: $L_r^0(\partial_t), \dots, L_r^N(\partial_t)$ – диференціальні оператори, X_r^0, \dots, X_r^N – задані числа.

Зауважимо, що на порядок диференціальних операторів $L_r^0(\partial_t), \dots, L_r^N(\partial_t)$, як і на їх кількість особливих обмежень не будемо накладати. Візьмемо довільну функцію і подіємо на неї диференціальним оператором. В наслідок цього отримаємо праву частину даного диференціального рівняння $u(t)$. Введемо до розгляду загальне подання розв'язку, а саме:

$$x(t) = x_\infty(t) + x_2(t), \quad (2.49)$$

де:

$$x_\infty(t) = \int_0^T G(t-t')u(t')dt', \quad (2.50)$$

$$x_2(t) = \int_{S_2} G(t-t')u_2(t')dt', S_2 = [-\infty, 0] \cup [T, +\infty], \quad (2.51)$$

$$u_2(t) = \begin{cases} u_{21}(t), & t < 0 \\ u_{22}(t), & t > T \end{cases} \quad (2.52)$$

Для знаходження функції $u_2(t)$ потрібно функцію $x(t)$ підставити в умови (2.46), (2.47), (2.48). Підставивши в $x(t)$ (2.46), (2.47), (2.48), отримаємо систему рівнянь, в якій справа будуть числові значення:

$$X_{z_0} = col\left(X_r^0 - L_r^0(\partial_t)x_\infty(t)|_{t=0}, r = \overline{1, R_1}\right), \quad (2.53)$$

$$X_{z_{N-1}} = col\left(X_r^{N-1} - L_r^{N-1}(\partial_t)x_\infty(t)|_{t=t_{N-1}}, r = \overline{1, R_{N-1}}\right), \quad (2.54)$$

$$X_{\varepsilon N} = \text{col} \left(X_r^N - L_r^N (\partial_t) x_\infty(t) \Big|_{t=T}, r = \overline{1, R_N} \right), \quad (2.55)$$

а зліва інтегральні співвідношення:

$$\begin{aligned} & L_r^0 (\partial_t) \int_{-\infty}^0 G(t-t') u_{\varepsilon 1}(t') dt' \Big|_{t=0} + L_r^0 (\partial_t) \int_T^{+\infty} G(t-t') u_{\varepsilon 2}(t') dt' \Big|_{t=0} \\ & \quad r = \overline{1, R_1} \\ & \quad \vdots \\ & L_r^N (\partial_t) \int_{-\infty}^0 G(t-t') u_{\varepsilon 1}(t') dt' \Big|_{t=t_N} + L_r^N (\partial_t) \int_T^{+\infty} G(t-t') u_{\varepsilon 2}(t') dt' \Big|_{t=t_N} \\ & \quad r = \overline{1, R_N} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Для зручності утворимо наступні матричні та векторні функції:

$$G_{\varepsilon 1} = \begin{cases} G_{\varepsilon 11}(t) & t < 0 \\ G_{\varepsilon 21}(t) & t < 0, \\ G_{\varepsilon 31}(t) & t < 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

$$G_{\Gamma 2} = \begin{cases} G_{\varepsilon 12}(t) & t > T \\ G_{\varepsilon 22}(t) & t > T, \\ G_{\varepsilon 32}(t) & t > T \end{cases} \quad (2.58)$$

$$P_\varepsilon = \begin{pmatrix} P_{11} \in R^{R_1 \times R_1} & P_{12} \in R^{R_1 \times R_2} & P_{13} \in R^{R_1 \times R_3} \\ P_{21} \in R^{R_2 \times R_1} & P_{22} \in R^{R_2 \times R_2} & P_{23} \in R^{R_2 \times R_3} \\ P_{31} \in R^{R_3 \times R_1} & P_{32} \in R^{R_3 \times R_2} & P_{33} \in R^{R_3 \times R_3} \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

де:

$$P_{ij} = \int_{-\infty}^0 G_{\varepsilon i1}(t) G_{\varepsilon j1}(t)^T dt + \int_T^{+\infty} G_{\varepsilon i2}(t) G_{\varepsilon j2}(t)^T dt, \quad (2.60)$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

$$X_{\varepsilon i} = \int_{-\infty}^0 G_{\varepsilon i1}(t) \mathcal{G}_{\varepsilon 1}(t) dt + \int_T^{+\infty} G_{\varepsilon i2}(t) \mathcal{G}_{\varepsilon 2}(t) dt, \quad (2.61)$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$G_{\varepsilon 1i}(t') = \text{col} \left(L_r^1 (\partial_t) G(t-t') \Big|_{t=0}, r = \overline{1, R_1} \right), \quad (2.62)$$

$$G_{\varepsilon 2i}(t') = \text{col} \left(L_r^2 (\partial_t) G(t-t') \Big|_{t=t_k}, r = \overline{1, R_2} \right), \quad (2.63)$$

$$G_{\varepsilon 3i}(t') = \text{col} \left(L_r^3 (\partial_t) G(t-t') \Big|_{t=T}, r = \overline{1, R_3} \right), \quad (2.64)$$

$$0 < t_k < T, k = 1, 2, \dots$$

$$u_{\varepsilon i}(t) = \Omega_i = \{ u_{\varepsilon i}(t) \in R^1 : u_{\varepsilon i}(t) = G_{\varepsilon i}^T(t) P_\varepsilon^+ X_\varepsilon + \mathcal{G}_{\varepsilon i}(t) - G_{\varepsilon i}(t) P_\varepsilon^+ X_\varepsilon \} \quad (2.65)$$

$$i = 1, 2$$

$u_{zi}(t)$, отримані на базі результату псевдообернення систем інтегральних рівнянь.

3. Моделювання динаміки лінійно розподілених систем

3.1. Задача неперервно-аналітичного моделювання дискретно визначеного початкового збурення

Нехай задана просторово розподілену систему:

$$L(\partial_s)y(s) = u(s), \quad (3.1)$$

динаміка якої зумовлена визначеними в області S_0^T зовнішньо динамічними збуреннями $u(s)$ і заданими згідно (1.11), (1.12) початково-крайовими збурювальними факторами Y_{rl}^0 ($l = \overline{1, L_0}$; $r = \overline{1, R_0}$) та $Y_{\rho l}^\Gamma$ ($l = \overline{1, L_\Gamma}$; $\rho = \overline{1, R_\Gamma}$). Вплив моделюючих факторів на функцію $y(s)$ стану розглядуваного процесу врахуємо, подаючи останню у вигляді: $y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) + y_\Gamma(s)$, складові $y_0(s)$, $y_\Gamma(s)$ якої подамо у вигляді (1.21) (1.22) при заданій передавальній функції $G(s-s')$. Функція $y(s)$ задовольняє рівняння (3.1) точно за будь-яких $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$. Обмеженнями на вибір $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ накладають лише умови (1.11) (1.12). Для знаходження останніх скористаємось наступним критерієм:

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t)y(s) \Big|_{t=0, x=x_l^0} - Y_{rl}^0)^2 + \\ & + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s) \Big|_{s=x_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma)^2 \rightarrow \min_{y(s)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для зручності запишемо вище наведений критерій у наступному вигляді:

$$\Phi_2 \rightarrow \min_{u_0(s), u_\Gamma(s)}. \quad (3.3)$$

3.2. Множини моделюючих функцій для дискретно визначеного початково-крайового стану

Розв'язком задачі (3.3) будуть функції $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$, якими згідно (3.2) моделюється функція стану $y(s)$ розглядуваного процесу при спостереженнях (1.11), (1.12) за нею можна отримати середньоквадратичним оберненням системи інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \int_{S^0} L_r^0(\partial_t)G(s-s') \Big|_{t=0, x=x_l^0} u_0(s') ds' + \\ & + \int_{S^\Gamma} L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s') \Big|_{s=x_l^\Gamma} u_\Gamma(s') ds' = \bar{Y}_{rl} \quad (l = \overline{1, L_0}; r = \overline{1, R_0}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\int_{S^0} L_p^\Gamma(\partial_x)G(s-s')\Big|_{s=s_l^\Gamma} u_0(s')ds' + \int_{S^\Gamma} L_p^\Gamma(\partial_x)G(s-s')\Big|_{s=s_l^\Gamma} u_\Gamma(s')ds' = \bar{Y}_{\rho l} \quad (l = \overline{1, L_\Gamma}; \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \quad (3.5)$$

де:

$$\bar{Y}_{rl} = Y_{rl} - L_r^0(\partial_t)y_\infty(s)\Big|_{t=0, x=x_l^0}, \quad (3.6)$$

$$\bar{Y}_{\rho l} = Y_{\rho l} - L_p^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma}.$$

Для використання методики псевдо обернення систем інтегральних рівнянь запишемо (3.4), (3.5) у вигляді:

$$\int_{\Omega} A(s)\bar{u}(s)ds = \bar{Y}, \quad (3.7)$$

де інтегрування ведеться по області зміни аргументу s вектор функції:

$$\bar{u}(s) = \text{col}(u_0(s) \quad (s \in S^0), \quad u_\Gamma(s) \quad (s \in S^\Gamma))$$

і матричної функції:

$$A(s) = \begin{pmatrix} A_{11}(s) \quad (s \in S^0), & A_{12}(s) \quad (s \in S^\Gamma) \\ A_{21}(s) \quad (s \in S^0), & A_{22}(s) \quad (s \in S^\Gamma) \end{pmatrix},$$

при цьому:

$$A_{li} = \text{col}((L_r^0(\partial_t)G(s-s')\Big|_{t=0, x=x_l^0}), \quad l = \overline{1, L_0}, \quad r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{2i} = \text{col}((L_p^\Gamma(\partial_x)G(s-s')\Big|_{s=s_l^\Gamma}), \quad l = \overline{1, L_\Gamma}, \quad \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

де $s' \in S^0$ при $i=1$ та $s' \in S^\Gamma$ при $i=2$.

Розв'язком $\bar{u}(s)$ рівняння (3.7) таким, щоб:

$$\left\| \int_{\Omega} A(s)\bar{u}(s)ds - \bar{Y} \right\|_{u(s)}^2 \rightarrow \min, \quad (3.8)$$

буде:

$$\bar{u}(s) = A^T(s)P^+(\bar{Y} - A_y) + v(s), \quad (3.9)$$

$v(s)$ – довільна інтегровна в області зміни своїх аргументів вектор-функція:

$$v(s) = \text{col}(v_0(s) \quad (s \in S^0), \quad v_\Gamma(s) \quad (s \in S^\Gamma)). \quad (3.10)$$

З урахуванням визначення $\bar{u}(s)$ та $A(s)$ із (3.9) знаходимо:

$$u_0(s) = A_0(s)P^+(\bar{Y} - A_y) + v_0(s), \quad (3.11)$$

$$u_\Gamma(s) = A_\Gamma(s)P^+(\bar{Y} - A_y) + v_\Gamma(s),$$

де:

$$\begin{aligned} A_0(s) &= (A_{11}^T(s), A_{21}^T(s)) \quad (s \in S^0), \\ A_\Gamma(s) &= (A_{12}^T(s), A_{22}^T(s)) \quad (s \in S^\Gamma), \\ P &= \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad A_v = \begin{pmatrix} A_{v_0} \\ A_{v_\Gamma} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а

$$P_{ij} = \int_{S^0} A_{i1}(s)A_{j1}^T(s)ds + \int_{S^\Gamma} A_{i2}(s)A_{j2}^T(s)ds \quad (i, j = \overline{1,2}),$$

$$A_{v_0} = \int_{S^0} A_{11}(s)v_0(s)ds + \int_{S^\Gamma} A_{12}(s)v_\Gamma(s)ds,$$

$$A_{v_\Gamma} = \int_{S^0} A_{21}(s)v_0(s)ds + \int_{S^\Gamma} A_{22}(s)v_\Gamma(s)ds.$$

Функція стану $y(s)$ задовольняє початково-крайові умови (1.11), (1.12) з

точністю $\varepsilon^2 = \min_{u_0(s), u_\Gamma(s)} \Phi = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T P P^+ \bar{Y}$ і визначається однозначно, якщо

$\lim_{N \rightarrow \infty} \det \left[A^T(s_i)A(s_j) \right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0$. За інших умов розв'язок буде не однозначним.

3.3. Задачі математичного моделювання дискретизованих початкових-крайових умов у необмежених просторових і часових областях

Розглянемо задачу моделювання дискретно-визначеного початково-крайового стану (1.11), (1.12) розподіленої просторово-часової системи (3.1) за умов її функціонування в необмеженій просторовій області або на необмеженому часовому інтервалі. Для систем досліджуваних у необмеженій просторовій області при початкових збуреннях (1.11), функцію стану $y(s)$ визначимо співвідношенням:

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) \quad (s \in S_0 \times [0, T]),$$

із визначеними згідно (1.20), (1.21) складовими $y_\infty(s)$, $y_0(s)$. Для систем, що перебувають під впливом крайових збурень (1.12) і не залежать від початкового стану, функцію $y(s)$ визначимо співвідношенням:

$$y(s) = y_\infty(s) + y_\Gamma(s) \quad (s \in S_0 \times [0, T]),$$

складові $y_\infty(s)$ та $y_\Gamma(s)$ якого визначимо згідно із (1.20), (1.22). Для знаходження функцій $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$, виходитимемо зі співвідношень (3.4), (3.5), відповідно, які тепер набудуть вигляду:

$$\int_{S^0} A_{11}(s)u_0(s)ds = Y_0, \quad (3.12)$$

$$\int_{S^\Gamma} A_{22}(s)u_\Gamma(s)ds = Y_\Gamma, \quad (3.13)$$

Із (3.11), (3.12) отримуємо $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$, які матимуть наступний вигляд:

$$u_0(s) \in \Omega_0 = \{u_0(s) : u_0(s) = A_{11}^T(s)P_0^+(Y_0 - A_{v_0}) + v_0(s)\}, \quad (3.14)$$

$$u_\Gamma(s) \in \Omega_\Gamma = \{u_\Gamma(s) : u_\Gamma(s) = A_{22}^T(s)P_\Gamma^+(Y_\Gamma - A_{v_\Gamma}) + v_\Gamma(s)\}, \quad (3.15)$$

де $v_0(s)$, $v_\Gamma(s)$ – довільні інтегровні в S^0 та S^Γ функції. Компоненти $P_0, P_\Gamma, A_{v_0}, A_{v_\Gamma}$ визначаються наступними співвідношеннями:

$$P_0 = \int_{S^0} A_{11}(s)A_{11}^T(s)ds, \quad (3.16)$$

$$P_\Gamma = \int_{S^\Gamma} A_{22}(s)A_{22}^T(s)ds, \quad (3.17)$$

$$A_{v_0} = \int_{S^0} A_{11}(s)v_0(s)ds, \quad (3.18)$$

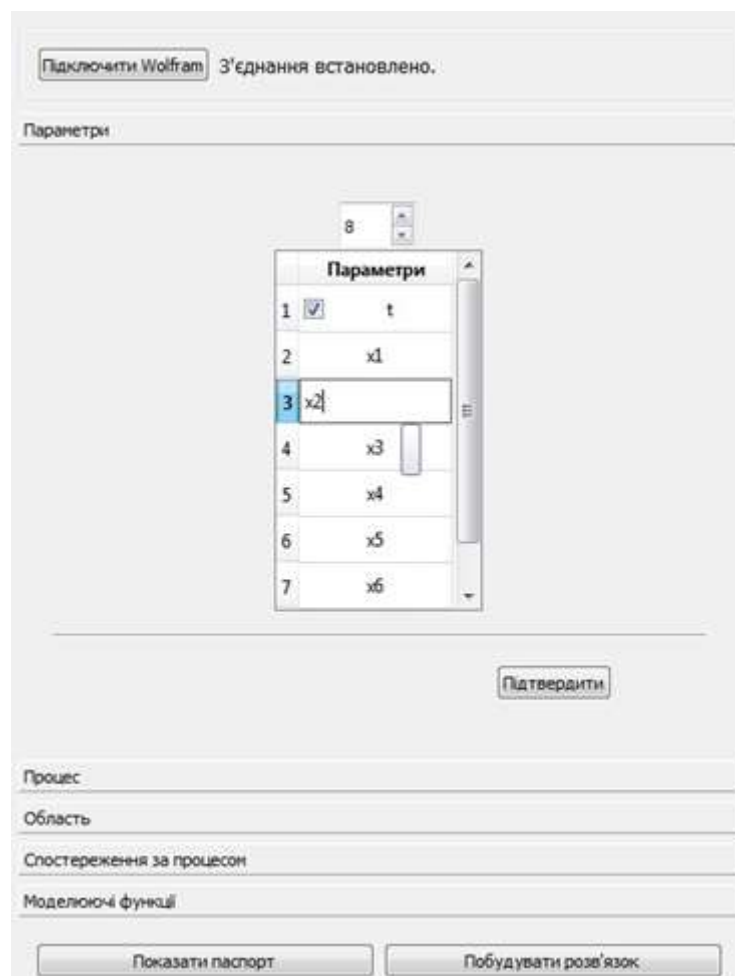
$$A_{v_\Gamma} = \int_{S^\Gamma} A_{22}(s)v_\Gamma(s)ds. \quad (3.19)$$

Точність моделювання функціями $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ початкових та крайових умов (1.11), (1.12) визначимо величинами:

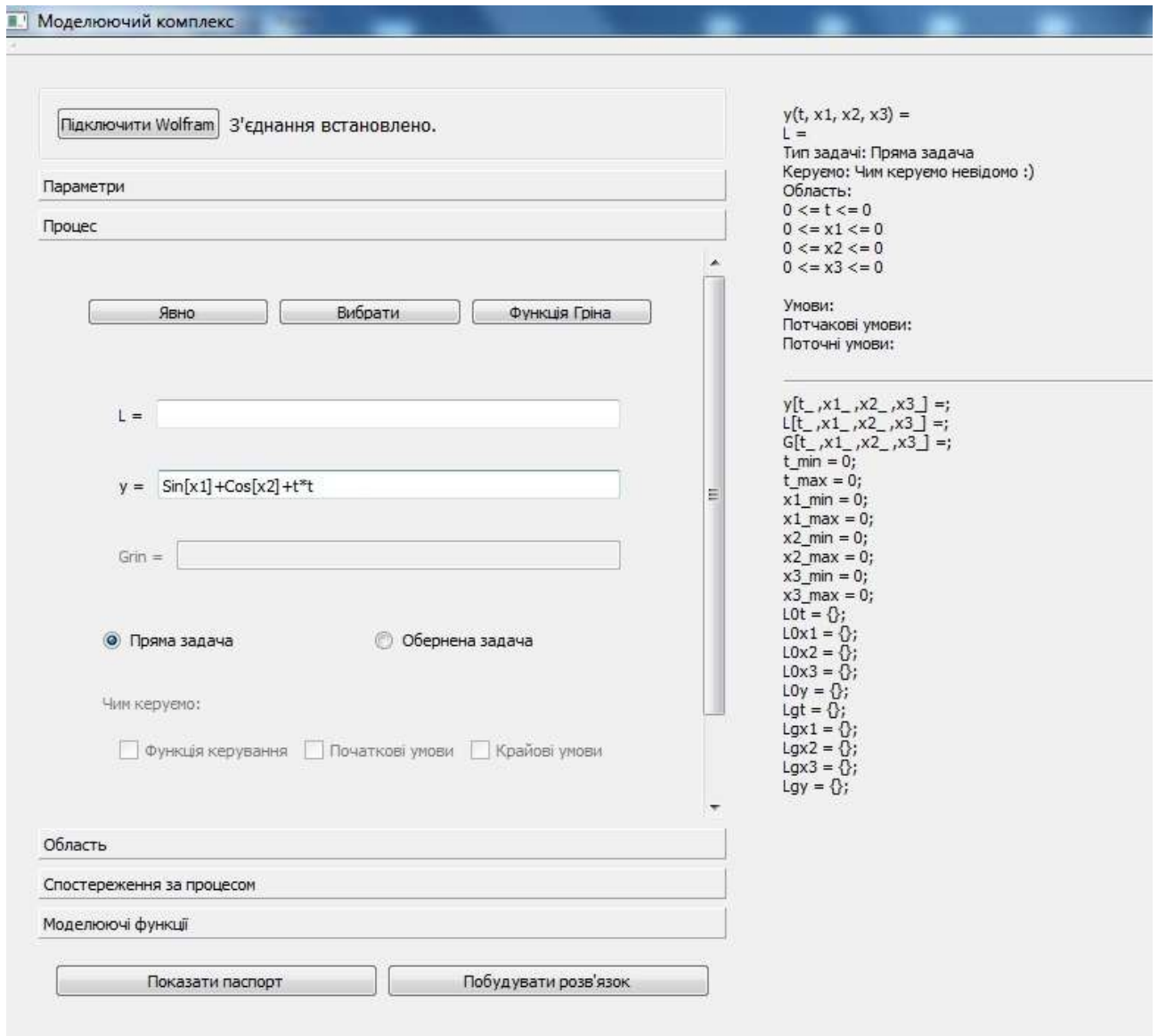
$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2 &= \min_{u_0(s) \in \Omega_0} \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t)y(s) \Big|_{t=0} - Y_{rl}^0)^2 = \\ &= \min_{u_0(s) \in \Omega_0} \left\| \int_{S^0} A_{11}(s)u_0(s)ds - Y_0 \right\|^2 = (Y_0)^T Y_0 - (Y_0)^T P_0 P_0^+ Y_0, \\ \varepsilon_\Gamma^2 &= \min_{u_\Gamma(s) \in \Omega_\Gamma} \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s) \Big|_{s=s_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma)^2 = \\ &= \min_{u_\Gamma(s) \in \Omega_\Gamma} \left\| \int_{S^\Gamma} A_{22}(s)u_\Gamma(s)ds - Y_\Gamma \right\|^2 = (Y_\Gamma)^T Y_\Gamma - (Y_\Gamma)^T P_\Gamma P_\Gamma^+ Y_\Gamma. \end{aligned} \quad (3.20)$$

4. Тестування розв’язків задач математичного моделювання стану ЛДС

З самого початку треба налаштувати з’єднання з математикою. Для цього в верхньому лівому куті екрану знаходимо кнопку “Підключити Wolfram” (праворуч від якої є напис “Wolfram Mathematica 8.0 не підключена”) та відкриваємо потрібний файл “MathKernel.exe”, що знаходиться в корені Wolfram Mathematica. Після проведення цих дій має з’явитися повідомлення “З’єднання встановлено”. Далі ми обираємо параметри нашої задачі. Їх кількість може бути довільною (як і їх імена можуть задаватися користувачем самостійно), також за бажанням можна задати стаціонарну чи нестаціонарну задачу (залежно від того, включається змінна t до списку параметрів чи ні). Для підтвердження натискаємо відповідну кнопку.



На наступному кроці задається процес. Тут можна обрати один з трьох можливих варіантів задачі.



Задачу можна задати в явному вигляді (ввести власноруч оператор L та функцію y , яка залежить від вищезаданих параметрів). Або задати функцію Гріна. Також є можливість “Вибрати” задачу з деякого переліку готових задач. Далі вибираємо тип задачі: пряму чи обернену. В разі вибору другого варіанту ми також маємо задати параметр керування зі списку: функція керування, початкові умови, крайові умови. Крім цього права сторона екрану до горизонтальної лінії відображає всі існуючі значення, які задаються користувачем. Під лінією висвітлюються ті ж самі значення, тільки у вигляді, який вимагає Wolfram Mathematica 8.0.

Задаємо область. Тут обираємо бажані проміжки для кожного параметра. Програмою передбачено, що ліве обмеження не може перевищувати праве значення. По завершенню натискаємо кнопку “Підтвердити”.

Моделюючий комплекс

Підключити Wolfram З'єднання встановлено.

Параметри

Процес

Область

0,00 t 5,00

0,00 x1 5,00

0,00 x2 4,00

0,00 x3 5,00

Підтвердити

Спостереження за процесом

Моделюючі функції

Показати паспорт

Побудувати розв'язок

$y(t, x_1, x_2, x_3) = \text{Sin}[x_1] + \text{Cos}[x_2] + t * t$
 $L =$
 Тип задачі: Обернена задача
 Керуємо: функція керування; початкові умови;
 Область:
 $0 \leq t \leq 0$
 $0 \leq x_1 \leq 0$
 $0 \leq x_2 \leq 0$
 $0 \leq x_3 \leq 0$

Умови:
 Початкові умови:
 Поточні умови:

$y[t_, x1_, x2_, x3_] = \text{Sin}[x1] + \text{Cos}[x2] + t * t;$
 $L[t_, x1_, x2_, x3_] = ;$
 $G[t_, x1_, x2_, x3_] = ;$
 $t_{\text{min}} = 0;$
 $t_{\text{max}} = 0;$
 $x1_{\text{min}} = 0;$
 $x1_{\text{max}} = 0;$
 $x2_{\text{min}} = 0;$
 $x2_{\text{max}} = 0;$
 $x3_{\text{min}} = 0;$
 $x3_{\text{max}} = 0;$
 $L0t = \{ \};$
 $L0x1 = \{ \};$
 $L0x2 = \{ \};$
 $L0x3 = \{ \};$
 $L0y = \{ \};$
 $Lgt = \{ \};$
 $Lgx1 = \{ \};$
 $Lgx2 = \{ \};$
 $Lgx3 = \{ \};$
 $Lgy = \{ \};$

Процес

Область

Спостереження за процесом

Моделюючі функції

Дискретні Неперервні

Задати точки Задати проміжки поза областю

	t	x1	x2	x3	y
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0

0,00 t 0,00

0,00 x1 0,00

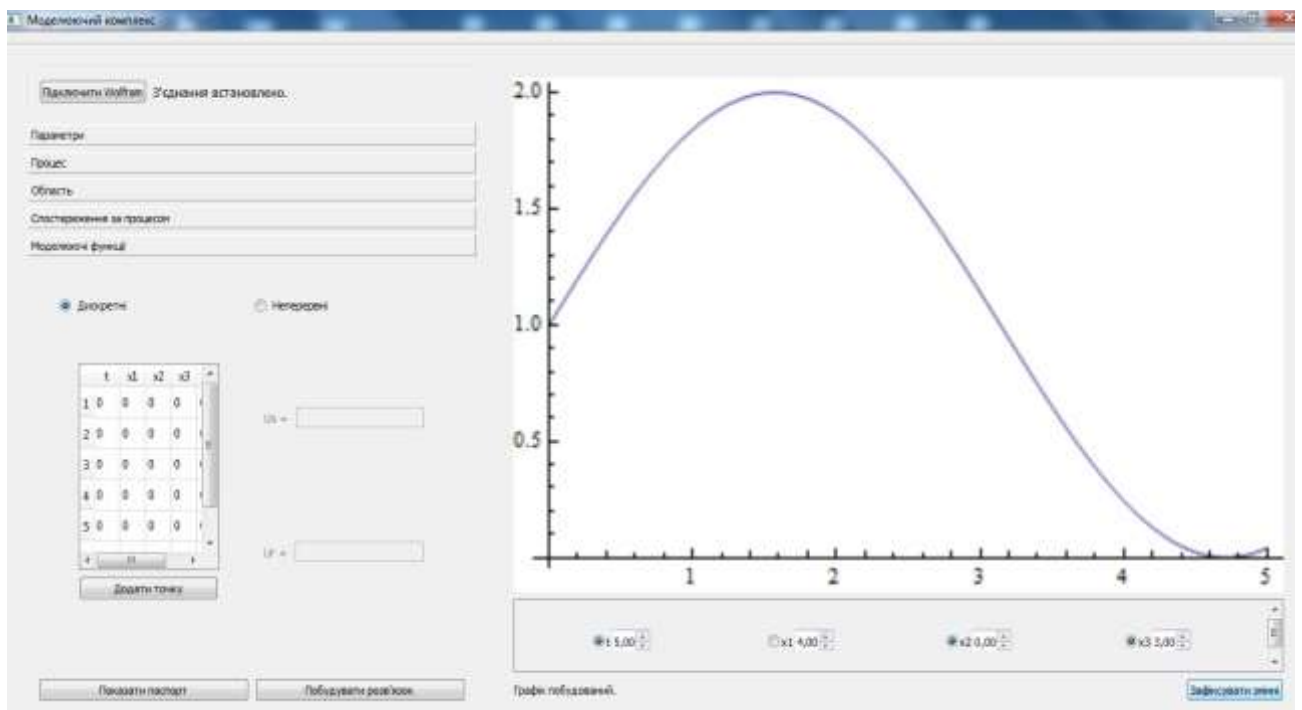
0,00 x2 0,00

0,00 x3 0,00

Uo : 0,00 t

Додати точки

Кінцевим етапом є показ паспорта (але він і так доступний протягом всього часу редагування задачі) та побудова розв'язку.



Оскільки графік розв'язку завжди зображується в двовимірній системі координат, то необхідною умовою є фіксування всіх параметрів, крім одного (без виконання цієї умови графік не будується).

Висновки

1. Таким чином були розглянуті неklasичні, нестандартні підходи до знаходження розв'язку неповно визначених задач, а саме: задачі Коші, крайової задачі, задачі з поточними спостереженнями.
2. Був створений програмно-аналітичний комплекс , який дає можливість розв'язувати задачі наведені в п. 1.
3. Теоретичний матеріал був підкріплений розв'язаними прикладами і графічними даними.

Література

1. Стоян В.А. моделювання та ідентифікація динаміки систем із розподіленими параметрами. Київський університет, 2003. –187с.
2. Стоян В.А. основи лабораторного моделювання просторово розподілених динамічних систем. КНУ. – Київ : ВПЦ “Київський університет”, 2017. – 118с.
3. Стоян В.А. Курс лекцій по моделюванню динаміки систем з розподіленими параметрами. К.: ТОВ “ВІТУС”. – 2001, 131 с.
4. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. Мир, 1999. – 548с.
5. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. Мир, 1991. – 370с.