Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
зі спеціальності 113 «Прикладна математика»

на тему

ТЕОРІЯ ВІДНОВЛЕННЯ НА ДЕРЕВАХ (ПРОМІЖНІ РІВНІ)

студента 4 курсу
Корнілевського Євгена Ігоровича

Науковий керівник:
професор, доктор фізико-математичних наук
Іксанов Олександр Маратович

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій
та рекомендована до захисту в ЕК, протокол № __ від
_____________2021р.

Завідувач кафедри ДО проф. Іксанов О.М.

Київ - 2021

ЗМІСТ

Вступ

Нехай $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots$ – незалежні копії випадкового вектора (ξ, η) з додатними як завгодно залежними координатами. Випадкова послідовність $(S_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, що визначається так

$$S_0 := 0, \quad S_k := \xi_1 + \ldots + \xi_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

називається *випадковим блуканням*, що стартує в нулі. Покладемо

$$T_k := S_{k-1} + \eta_k = \xi_1 + \ldots + \xi_{k-1} + \eta_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Будемо називати випадкову послідовність $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *збуреним випадковим блуканням*. Покладемо $N(t) := \sum\limits_{i \geq 1} 1_{\{T_i \leq t\}}$ і $V(t) := \mathbb{E}N(t)$ при $t \geq 0$.

Розглянемо популяцію індивідуумів, що еволюціонує так. В момент часу 0 популяція зароджується одним індивідуумом – початковим предком (початковий предок є єдиною представницею нульового покоління). В моменти часу $T_1, T_2, \ldots$ вона народжує потомство, що утворює перше покоління популяції. Кожен індивідуум першого покоління, незалежно від інших, також народжує потомство. Діти індивідуума, народженого у момент часу T_i, народжуються у моменти часу $T_i + T_k^{(i)}$, $k \in \mathbb{N}$, де послідовність $(T_k^{(i)})_{k \in \mathbb{N}}$ не залежить від T_i та має той самий розподіл, що і $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Крім того, послідовності $(T_k^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}$, $(T_k^{(2)})_{k \in \mathbb{N}}, \ldots$ є незалежними. Подальша еволюція аналогічна: зсув моментів народження індивідуумів $(k+1)$-го покоління відносно моментів народження їх матерів, які знаходяться в k-му поколінні, задаються копією $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$, при чому для різних матерів ці копії незалежні. Також ці копії є незалежними у різних поколіннях.

Для $t \geq 0$ та $k \in \mathbb{N}$ позначимо через $N_k(t)$ число індивідуумів k -го покоління, які народжені до момента часу t включно. Зокрема, $N_1(t) = N(t)$ для $t \geq 0$. Покладемо $V_k(t) = \mathbb{E}N_k(t), t \geq 0$.

Фіксовані рівні (покоління) $k(2, 7, 102, 1000, \ldots)$ будемо називати *початковими.* Рівні $k = k(t)$, що залежать від t та задовольняють співвідношення $\lim_{t\to\infty} k(t) = \infty$ та $k(t) = o(t)$ при $t \to \infty$, будемо називати *проміжними.* Рівні $k = k(t)$, що мають порядок t, будемо називати *пізніми.* Метою даної дипломної роботи є знаходження асимптотики першого порядку для V_k для проміжних рівнів $k = k(t)$, що задовольняють $\lim_{t\to\infty} k(t) = \infty$ та $k(t) = o(t^{1/2})$ при $t \to \infty$. Отримані в роботі результати є аналогами елементарної теореми відновлення для збурених випадкових блукань. Ми не торкаємося початкових та пізніх рівнів. Дослідження початкових рівнів є більш простим, а аналіз пізніх рівнів потребує ідей та методів, абсолютно відмінних від тих, що використовуються у даній дипломній роботі.

Основні результати

Сформулюємо основні результати даної дипломної роботи. Теореми 1 та 2 є аналогами елементарної теореми відновлення для V_k у деяких проміжних рівнях k. У згаданих теоремах розглядаються випадки $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ та $\mathbb{E}\xi^2 = \infty$ відповідно.

Теорема 1. *Припустимо, що $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ та $\mathbb{E}\eta < \infty$. Тоді для довільної функції $k = k(t)$, що набуває натуральних значень та задовольняє $\lim_{t\to\infty} k(t) = \infty$ та $k(t) = o(t^{1/2})$ при $t \to \infty$,*

$$V_k(t) \ \sim \ \frac{t^k}{\mu^k k!}, \quad t \to \infty, \tag{3}$$

де $\mu := \mathbb{E}\xi < \infty$.

Теорема 2. *Припустимо, що $\mathbb{E}\xi^r < \infty$ та $\mathbb{E}(\eta \wedge t) = O(t^{2-r})$ при $t \to \infty$ для деякого $r \in (1, 2)$. Тоді для довільної функції $k = k(t)$, що набуває натуральних значень та задовольняє $\lim_{t\to\infty} k(t) = \infty$ та $k(t) = o(t^{(r-1)/2})$ при $t \to \infty$, виконується співвідношення* (3).

Можна перевірити, що граничне співвідношення (3) виконується для кожного фіксованого k. Тому можна очікувати, що воно продовжує виконуватися і для деяких $k = k(t)$, що повільно розбігаються на ∞ при $t \to \infty$. Фактично теореми 1 та 2 забезпечують кількісну оцінку для фрази "повільно розбігаються".

Цікавим наслідком теорем 1 та 2 є те, що набір рівнів k, для яких асимптотика (3) є справедливою, звужується при переході від розподілів ξ з більш легкими хвостами до розподілів ξ з більш важкими хвостами.

Допоміжні результати

У цьому розділі ми встановимо допоміжні результати, необхідні для доведень теорем 1 та 2.

Спочатку ми покажемо, що для $t \geq 0$ випадкова величина $N(t)$ є майже напевно (м.н.) скінченною, та що $V(t) = \mathbb{E}N(t) < \infty$.

Перше твердження випливає з таких рівностей та нерівностей, що виконуються м.н.

$$N(t) = \sum_{i\geq 1} 1_{\{T_i\leq t\}} = \sum_{i\geq 1} 1_{\{S_{i-1}+\eta_i\leq t\}} \leq \sum_{i\geq 1} 1_{\{S_{i-1}\leq t\}} =: N^*(t) < \infty.$$

Тут перша нерівність забезпечується додатністю випадкових величин η_i. Внаслідок альтернативного зображення

$$N^*(t) = \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > t\}, \quad t \geq 0$$

випадковий процес $(N^*(t))_{t\geq 0}$ називається *процесом першого проходження рівня.* При цьому м.н. скінченність величин $N^*(t)$ є добре відомою [1].

Перейдемо до доведення скінченності $V(t)$ для кожного $t \geq 0$. Вона перевіряється так. Запишемо $V(t)$ за означенням, скористаємось теоремою Фубіні та тим, що індикатори подій є невід'ємними:

$$V(t) = \mathbb{E}N(t) = \mathbb{E}\sum_{i\geq 1} 1_{\{T_i\leq t\}} = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}\{T_i \leq t\}.$$

Зафіксуємо довільне $z > 0$. Застосуємо експоненційну функцію до лівої та правої частини нерівності під знаком останньої ймовірності. В силу того, що функція $z \mapsto e^{-z}$ неперервна та монотонно спадає, знак нерівності зміниться на протилежний. Далі використовуємо нерівність Маркова:

$$\sum_{i\geq 1}\mathbb{P}\{T_i\leq t\}=\sum_{i\geq 1}\mathbb{P}\{e^{-zT_i}\geq e^{-zt}\}\leq e^{zt}\sum_{i\geq 1}\mathbb{E}e^{-zT_i}=e^{zt}\sum_{i\geq 1}\mathbb{E}\prod_{k=1}^{i-1}e^{-z\xi_k}e^{-z\eta_i}$$
$$=e^{zt}\sum_{i\geq 1}\prod_{k=1}^{i-1}\mathbb{E}e^{-z\xi_k}\mathbb{E}e^{-z\eta_i}=e^{zt}\sum_{i\geq 1}(\mathbb{E}e^{-z\xi})^{i-1}\mathbb{E}e^{-z\eta}=\frac{e^{zt}\mathbb{E}e^{-z\eta}}{1-\mathbb{E}e^{-z\xi}}<\infty.$$

Друга рівність є наслідком незалежності випадкових величин ξ_k та η_i для $k\leq i-1$. Отриманий вираз буде скінченним внаслідок того, що $\mathbb{E}e^{-z\xi}<1$. Це гарантується додатністю випадкової величини ξ.

Нагадаємо, що $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ є випадковим блуканням, що стартує в нулі та має додатні кроки. Функція U, що визначається так $U(t):=\sum\limits_{k\geq 0}\mathbb{P}\{S_k\leq t\}$ для $t\in\mathbb{R}$, називається функцією відновлення. Позначимо через G функцію розподілу випадкової величини η, тобто $G(t):=\mathbb{P}\{\eta\leq t\}$ для $t\in\mathbb{R}$. Зазначимо, що $G(t)=0$ для $t<0$ внаслідок додатності η.

У лемах 3 та 5 ми отримуємо зображення функцій V_k, що дозволяють зручне аналітичне трактування.

Лема 3. *Для $t\geq 0$ виконується рівність $V(t)=\int_{[0,\,t]}U(t-y)dG(y)$.*

Доведення. Скориставшися означенням V, отримуємо

$$V(t)=\mathbb{E}N(t)=\mathbb{E}\sum_{k\geq 1}1_{\{T_k\leq t\}}=\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\{T_k\leq t\}=\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\{S_{k-1}+\eta_k\leq t\}.$$

У першій рівності нижче використовуємо формулу повної ймовірності в інтегральній формі, в другій – теорему Фубіні і означення функцій U та G:

$$\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\{S_{k-1}+\eta_k\leq t\}=\sum_{k\geq 1}\int_{[0,\,\infty)}\mathbb{P}\{S_{k-1}+\eta_k\leq t|\eta_k=y\}\mathrm{d}\mathbb{P}\{\eta_k\leq y\}$$
$$=\int_{[0,\,t]}\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\{S_{k-1}\leq t-y\}\mathrm{d}\mathbb{P}\{\eta_k\leq y\}=\int_{[0,\,t]}U(t-y)\mathrm{d}G(y).$$

$\square$

Перед формулюванням наступного результату наведемо означення *згортки функцій*, що буде корисне нам у майбутньому.

Означення 4. Нехай $W : [0,\infty) \to [0,\infty)$ - неперервна справа неспадна функція. Тоді n - *кратною згорткою функції* W називається функція, що визначена так:

$$W^{*(n)}(x) := \begin{cases} \int_{[0,x]} W^{*(n-1)}(x-y)\mathrm{d}W(y), & n \geq 2 \\ W(x), & n = 1. \end{cases}$$

Лема 5. *Для $k \in \mathbb{N}$ та $t \geq 0$ виконується рівність $V_k(t) = V^{*(k)}(t)$.*

Доведення. Доведення буде базуватися на представленні

$$N_k(t) = \sum_{r\geq 1} N_{k-1}^{(r)}(t - T_r)1_{\{T_r<t\}}, \quad k \geq 2, t \geq 0, \tag{4}$$

де $N_{k-1}^{(r)}(t)$ – це число індивідуумів $(k-1)$-го покоління з моментами народження у відрізку $[T_r, T_r+t]$. Зазначимо, що випадкові процеси $(N_{k-1}^{(1)})_{t\geq 0}$, $(N_{k-1}^{(2)})_{t\geq 0}, \ldots$ є незалежними копіями процесу $(N_{k-1})_{t\geq 0}$, що не залежать від $(T_r)_{r\in\mathbb{N}}$.

Скористаємося методом математичної індукції. При $k = 1$ рівність $V_1 = V^{*(1)}$ виконується за означенням згортки. Припустимо, що $V_k = V^{*(k)}$ для $k = n$, $n \in \mathbb{N}$ та покажемо, що ця рівність виконується і для $k = n+1$. Використовуючи (4) та теорему Фубіні, отримуємо

$$V_{n+1}(t) = \mathbb{E}N_{n+1}(t) = \mathbb{E}\sum_{r\geq 1} N_n^{(r)}(t-T_r)1_{\{T_r<t\}} = \sum_{r\geq 1}\mathbb{E}N_n^{(r)}(t-T_r)1_{\{T_r<t\}}.$$

Згідно з формулою повного математичного сподівання у інтегральній формі та припущенням індукції маємо

$$\begin{aligned}
&\sum_{r\geq 1}\mathbb{E}N_n^{(r)}(t-T_r)1_{\{T_r<t\}} \\
&\qquad = \sum_{r\geq 1}\int_{[0,\infty)} \mathbb{E}[N_n^{(r)}(t-T_r)1_{\{T_r<t\}} | T_r = y]\mathrm{d}\mathbb{P}\{T_r \leq y\} \\
&= \sum_{r\geq 1}\int_{[0,t]} \mathbb{E}N_n^{(r)}(t-y)\mathrm{d}\mathbb{P}\{T_r \leq y\} = \int_{[0,t]} \mathbb{E}N_n(t-y)\mathrm{d}\sum_{r\geq 1}\mathbb{P}\{T_r \leq y\} \\
&\qquad = \int_{[0,t]} V^{*(n)}(t-y)\mathrm{d}V(y) = V^{*(n+1)}(t).
\end{aligned}$$

□

Леми 6 та 7 дають корисні рівності, які будуть використанні у майбутньому.

Лема 6. *Для* $t \geq 0$ *виконуєтьcя рівність* $\int_0^t G(x)\mathrm{d}x = \int_{[0,\,t]}(t-x)\mathrm{d}G(x)$.

Доведення. Запишемо функцію $G(x)$ у вигляді $\mathbb{E}1_{\{\eta\leq x\}}$. Далі, використовуючи те, що $\eta \leq x \leq t$, змінимо межі інтегрування і скористаємось теоремою Фубіні:

$$\int_0^t \mathbb{E}1_{\{\eta\leq x\}}\mathrm{d}x = (\mathbb{E}\int_\eta^t \mathrm{d}x)1_{\{\eta\leq t\}} = \mathbb{E}(t-\eta)1_{\{\eta\leq t\}} = \int_{[0,\,t]}(t-x)\mathrm{d}G(x).$$

В останній рівності математичне сподівання записано у вигляді інтеграла Лебега-Стілт'єса. $\square$

Лема 7. *Для* $m \in \mathbb{N}$ *та* $t \geq 0$

$$\int_{[0,\,t]}(t-z)^m\mathrm{d}V(z) - \frac{t^{m+1}}{(m+1)\mu} = m\int_0^t \Big(\int_{[0,\,s]}(s-z)^{m-1}\mathrm{d}V(z) - \frac{s^m}{m\mu}\Big)\mathrm{d}s.$$

Доведення. Достатньо перевірити виконання рівності

$$\int_{[0,\,t]}(t-z)^m\mathrm{d}V(z) = m\int_0^t \Big(\int_{[0,\,s]}(s-z)^{m-1}\mathrm{d}V(z)\Big)\mathrm{d}s, \quad t \geq 0.$$

Перетворимо праву частину

$$m\int_0^t \Big(\int_{[0,\,s]}(s-z)^{m-1}\mathrm{d}V(z)\Big)\mathrm{d}s = \int_0^t \Big(\int_{[0,\,s]} m(s-z)^{m-1}\mathrm{d}V(z)\Big)\mathrm{d}s =$$

$$\int_0^t \Big(\int_{[0,s]}((s-z)^m)'_s\mathrm{d}V(z)\Big)\mathrm{d}s.$$

Покладемо $f(s) := s^m$ для $s \geq 0$. Далі внутрішній інтеграл запишемо як згортку похідної f' і функції V та скористаємось формулою для похідної згортки:

$$\int_0^t \Big(\int_{[0,\,s]}((s-z)^m)'_s\mathrm{d}V(z)\Big)\mathrm{d}s = \int_0^t (f' * V)(s)\mathrm{d}s =$$

$$\int_0^t (f * V)'(s)\mathrm{d}s = (f * V)(t) = \int_{[0,\,t]}(t-z)^m\mathrm{d}V(z).$$

$\square$

Також у цьому розділі ми встановимо один результат для важливого окремого випадку, що буде корисним для інтерпретації наших подальших результатів.

Твердження 8. *Припустимо додатково, що для кожного $i \in \mathbb{N}$ ξ_i та η_i незалежні випадкові величини з одним і тим же показниковим розподілом, тобто $\mathbb{P}\{\xi_i > x\} = \mathbb{P}\{\eta_i > x\} = e^{-\lambda x}$ для $x \geq 0$ та деякого $\lambda > 0$. Тоді*

$$V_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0.$$

Доведення. Покажемо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ T_k має той самий розподіл, що і S_k. Дійсно, для $k \in \mathbb{N}$ та $t \geq 0$

$$\mathbb{P}\{S_{k-1} + \eta_k \leq t\} = \int_{[0,\,t]} \mathbb{P}\{\eta_k \leq t - x\} \mathrm{d}\mathbb{P}\{S_{k-1} \leq x\}$$
$$= \int_{[0,\,t]} \mathbb{P}\{\xi_k \leq t - x\} \mathrm{d}\mathbb{P}\{S_{k-1} \leq x\} = \mathbb{P}\{S_{k-1} + \xi_k \leq t\} = \mathbb{P}\{S_k \leq t\}.$$

Використовуючи те, що $V(t) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\{S_k \leq t\} = \lambda t$ (див. [1]), та елементарні перетворення, отримуємо те, що й потрібно було довести:

$$V_k(t) = \int_{[0,\,t]} \frac{\lambda^{k-1}(t-y)^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{d}(\lambda y) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_{[0,\,t]} (t-y)^{k-1} \mathrm{d}y = \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

□

Для доведення теореми 2 нам знадобляться деякі допоміжні леми та твердження. Наведемо їх та їхні доведення у цьому розділі.

Лема 9. *Нехай S_0^* – випадкова величина з розподілом $\mathbb{P}\{S_0^* \leq x\} = \frac{1}{\mu} \int_0^x \mathbb{P}\{\xi > y\} dy$, де $\mu = \mathbb{E}\xi$. Тоді для будь-якого $r > 1$*

$$\mathbb{E}(S_0^*)^{r-1} < \infty \Longleftrightarrow \mathbb{E}\xi^r < \infty.$$

Доведення. Зрозуміло, що $f(x) := \frac{1}{\mu}\mathbb{P}\{\xi > x\}$ є щільністю випадкової величини S_0^*. За означенням математичного сподівання випадкової величини з абсолютно неперервним розподілом та теоремою Фубіні

$$\mathbb{E}(S_0^*)^{r-1} = \int_0^\infty x^{r-1} f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty x^{r-1} \mathbb{P}\{\xi > x\} \mathrm{d}x =$$
$$\frac{1}{\mu} \int_0^\infty x^{r-1} \mathbb{E} 1_{\{\xi > x\}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\mu} \mathbb{E} \int_0^\xi x^{r-1} \mathrm{d}x = \frac{\mathbb{E}\xi^r}{\mu r}.$$

□

Лема 10. *Нехай $r > 0$, та θ є додатною випадковою величиною з $\mathbb{E}\theta^r < \infty$. Тоді*

$$\lim_{x\to\infty} x^r \mathbb{P}\{\theta > x\} = 0.$$

Доведення. Спочатку переконаємось у тому, що умова $\mathbb{E}\theta^r < \infty$ гарантує $\lim\limits_{x\to\infty} \mathbb{E}\theta^r 1_{\{\theta>x\}} = 0$. Дійсно, якщо прибрати математичне сподівання, то границя буде дорівнювати нулю майже напевно

$$\theta^r 1_{\{\theta>x\}} \ \to \ \theta^r 1_{\{\theta=\infty\}} = 0, \quad x \to \infty \ \text{ м.н.}$$

Тепер покажемо, що у останньому граничному співвідношенні можна перейти до математичних сподівань. Скористаємось теоремою Лебега про мажоровану збіжність. Потрібно знайти інтегровну мажоранту, що не залежить від x. Візьмемо у якості мажоранти θ^r. Справді, для будь-якого x виконується

$$\theta^r 1_{\{\theta>x\}} \leq \theta^r \quad \text{м.н.}$$

Отже,

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{E}\theta^r 1_{\{\theta>x\}} = 0.$$

Звідси остаточно отримуємо нерівність, що і доводить лему

$$0 \leq x^r \mathbb{P}\{\theta > x\} \leq \mathbb{E}\theta^r 1_{\{\theta>x\}} \ \to 0 \ , x \to \infty.$$

□

Тепер, користуючись лемами 9 та 10, доведемо твердження 11.

Твердження 11. *Нехай $\mathbb{E}\xi^r < \infty$ для деякого $r \in (1, 2)$. Тоді*

$$U(t) - \frac{t}{\mu} = o(t^{2-r}), \quad t \to \infty, \tag{5}$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi$.

Доведення. Скориставшися представленням

$$\frac{t}{\mu} = \mathbb{E}U(t - S_0^*)1_{\{S_0^* \leq t\}}, \tag{6}$$

доведення якого можна знайти у [1], отримуємо

$$\begin{aligned} U(t) - \frac{t}{\mu} = U(t) - \mathbb{E}(U(t - S_0^*))1_{\{S_0^* \leq t\}} = \\ U(t)\mathbb{P}\{S_0^* > t\} + \mathbb{E}(U(t) - U(t - S_0^*))1_{\{S_0^* \leq t\}} \leq \\ \leq U(t)\mathbb{P}\{S_0^* > t\} + \mathbb{E}U(S_0^*)1_{\{S_0^* \leq t\}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Остання нерівність випливає з субадитивності функції відновлення U.

Розглянемо детально другий доданок правої частини нерівності. За елементарною теоремою відновлення (див. [1])

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists t_0 > 0 : \Big(\frac{1}{\mu} - \epsilon\Big)x \le U(x) \le \Big(\frac{1}{\mu} + \epsilon\Big)x, \quad \forall x \ge t_0. \tag{8}$$

Тому для $t \ge t_0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}U(S_0^*)1_{\{S_0^* \le t\}} = \int_{[0,\,t]} U(x)\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_0^* \le x\} = \\ \int_{[0,\,t_0]} U(x)\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_0^* \le x\} + \int_{(t_0,\,t]} U(x)\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_0^* \le x\} \le \\ \le \mathrm{const} + \Big(\frac{1}{\mu} + \epsilon\Big) \int_{[0,\,t]} x\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_0^* \le x\} = \\ \mathrm{const} + \mathbb{E}S_0^* 1_{\{S_0^* \le t\}}\Big(\frac{1}{\mu} + \epsilon\Big). \end{aligned} \tag{9}$$

Аналогічно для $t \ge t_0$

$$U(t)\mathbb{P}\{S_0^* > t\} \le \Big(\frac{1}{\mu} + \epsilon\Big)t\mathbb{P}\{S_0^* > t\}. \tag{10}$$

Отже, використовуючи формули (10) і (9) запишемо оцінку правої частини формули (7): для $t \ge t_0$

$$\begin{aligned} U(t) - \frac{t}{\mu} \le \mathrm{const} + \Big(\frac{1}{\mu} + \epsilon\Big)(\mathbb{E}S_0^* 1_{\{S_0^* \le t\}} + t\mathbb{P}\{S_0^* > t\}) = \\ = \mathrm{const} + \Big(\frac{1}{\mu} + \epsilon\Big)\mathbb{E}(S_0^* \wedge t), \end{aligned}$$

де $S_0^* \wedge t = \min\{S_0^*, t\}$.

Тепер залишилось показати, що $\mathbb{E}(S_0^* \wedge t) = o(t^{2-r})$ при $t \to \infty$. Розіб'ємо інтеграл на дві частини і застосуємо лему 10:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_0^* \wedge t) = \int_0^t \mathbb{P}\{S_0^* > y\}\mathrm{d}y = \int_0^{t_0} \mathbb{P}\{S_0^* > y\}\mathrm{d}y + \int_{t_0}^t \mathbb{P}\{S_0^* > y\}\mathrm{d}y \le \\ \mathrm{const} + \epsilon \int_{t_0}^t y^{1-r}\mathrm{d}y = \mathrm{const} + \frac{\epsilon}{2-r}t^{2-r}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\int_0^t \mathbb{P}\{S_0^* > y\}\mathrm{d}y}{t^{2-r}} \le \frac{\epsilon}{2-r}.$$

Остаточно

$$\lim_{t\to\infty} t^{r-2}\int_0^t \mathbb{P}\{S_0^* > y\}\mathrm{d}y = 0.$$

Оскільки

$$U(t) - \frac{t}{\mu} \ge 0, \quad \forall t \ge 0$$

(доведення цього факту можна знайти в [1]), то співвідношення (5) доведено. $\square$

Доведення теореми 1

У цьому розділі ми наведемо доведення теореми 1, а також всіх лем та тверджень, що будуть використані у ньому.

Розпочнемо з лем 12 та 13. На них буде базуватися твердження, що відіграє ключову роль в доведенні теореми 1.

Лема 12. *Нехай ξ та η – додатні випадкові величини з скінченними другим та першим моментами відповідно, тобто $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ і $\mathbb{E}\eta < \infty$. Тоді для деякого $c > 0$ та $\mu = \mathbb{E}\eta$ виконується нерівність*

$$\left|V(t) - \frac{t}{\mu}\right| \le c.$$

Доведення. Доведемо спочатку, що $V(t) - \frac{t}{\mu} \le c$. З того, що $V(t) \le U(t)$ і для $U(t)$ виконується нерівність Лордена (див. [1]), маємо

$$V(t) - \frac{t}{\mu} \le U(t) - \frac{t}{\mu} \le \frac{\mathbb{E}\xi^2}{\mu^2}.$$

Для отримання протилежної нерівності скористаємось лемою 6 і тим, що інтеграл у першій рівності нижче невід'ємний,

$$\begin{aligned} V(t) - \frac{t}{\mu} &= \int_{[0,\,t]} \Big(U(t-x) - \frac{(t-x)}{\mu}\Big)\mathrm{d}G(x) + \frac{1}{\mu}\int_0^t G(x)\mathrm{d}x - \frac{t}{\mu} \ge \\ &\ge \frac{1}{\mu}\Big(\int_0^t G(x)\mathrm{d}x - \int_0^t \mathrm{d}x\Big) = -\frac{1}{\mu}\int_0^t (1-G(x))\mathrm{d}x \ge \\ &\quad -\frac{1}{\mu}\int_{[0,\,\infty)}(1-G(x))\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mu}\int_{[0,\,\infty)} \mathbb{E}1_{\{\eta > x\}}\mathrm{d}x = \\ &\quad -\frac{1}{\mu}\mathbb{E}\int_0^\eta \mathrm{d}x = -\frac{\mathbb{E}\eta}{\mu}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\left|V(t) - \frac{t}{\mu}\right| \le \max\Big(\frac{\mathbb{E}\xi^2}{\mu^2}, \frac{\mathbb{E}\eta}{\mu}\Big) = c.$$

□

Лема 13. *Для* $m \in \mathbb{N}$ *і* $c > 0$

$$\Big| \int_{[0,\,t]} (t-z)^m \mathrm{d}V(z) - \frac{t^{m+1}}{(m+1)\mu} \Big| \le ct^m.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. При $m = 1$ скористаємось лемою 6 для перетворення інтегралу у більш зручний вигляд і лемою 12 для отримання останньої нерівності:

$$\Big| \int_{[0,\,t]} (t-z) \mathrm{d}V(z) - \frac{t^2}{2\mu} \Big| = \Big| \int_0^t V(z) \mathrm{d}z - \frac{t^2}{2\mu} \Big| =$$

$$\Big| \int_0^t \Big(V(z) - \frac{z}{\mu} \Big) \mathrm{d}z \Big| \le \Big| \int_0^t c \mathrm{d}z \Big| = ct.$$

Припустимо, що нерівність виконується для $k = n$, де $n \in \mathbb{N}$, тобто

$$\Big| \int_{[0,t]} (t-z)^n \mathrm{d}V(z) - \frac{t^{n+1}}{(n+1)\mu} \Big| \le ct^n,$$

та покажемо, що вона виконується для $k = n+1$. Користуючись лемою 7 для перетворення інтегралу і припущенням індукції, маємо

$$\Big| \int_{[0,\,t]} (t-z)^{n+1} \mathrm{d}V(z) - \frac{t^{n+2}}{(n+2)\mu} \Big| =$$

$$(n+1) \Big| \int_0^t \Big(\int_{[0,s]} (s-z)^n \mathrm{d}V(z) - \frac{s^{n+1}}{(n+1)\mu} \Big) \mathrm{d}s \Big| \le$$

$$\le (n+1) \int_0^t cs^n \mathrm{d}s = ct^{n+1}.$$

Лема 13 доведена. □

Твердження 14. *Нехай* $j \in \mathbb{N}$, $V_j = \mathbb{E}N_j$ *та* $\mu = \mathbb{E}\eta$. *Тоді для деякого* $c > 0$ *справедлива нерівність*

$$\Big| V_j(t) - \frac{t^j}{j!\mu^j} \Big| \le \sum_{i=0}^{j-1} C_j^i \frac{c^{j-i} t^i}{i!\mu^i}, \quad t \ge 0. \tag{11}$$

Доведення. Скористаємось методом математичної індукції. При $j = 1$ нерівність (11) має вигляд $|V(t) - \frac{t}{\mu}| \leq c$ для $t \geq 0$ і, отже, виконується згідно з лемою 12. Припустимо, що для $j = n$, $n \in \mathbb{N}$ виконується

$$\Big|V_n(t) - \frac{t^n}{n!\mu^n}\Big| \leq \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{c^{n-i}t^i}{i!\mu^i}, \quad t \geq 0.$$

Покажемо, що така нерівність виконується і після заміни n на $n+1$. Для цього віднімемо і додамо $\int_{[0,\,t]} \frac{(t-y)^n}{n!\mu^n} \mathrm{d}V(y)$ і скористаємося нерівністю трикутника

$$\Big|V_{n+1}(t) - \frac{t^{n+1}}{(n+1)!\mu^{n+1}}\Big| \leq \int_{[0,\,t]} \Big|V_n(t-y) - \frac{(t-y)^n}{n!\mu^n}\Big| \mathrm{d}V(y) + \\ \Big|\int_{[0,\,t]} \frac{(t-y)^n}{n!\mu^n} \mathrm{d}V(y) - \frac{t^{n+1}}{(n+1)!\mu^{n+1}}\Big|,$$

Скориставшися припущенням індукції для першого доданку і лемою 13 для другого, отримуємо таку оцінку зверху для останнього виразу

$$\int_{[0,\,t]} \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{c^{n-i}(t-y)^i}{i!\mu^i} \mathrm{d}V(y) + \frac{ct^n}{n!\mu^n} = \\ \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{c^{n-i}}{i!\mu^i} \int_{[0,\,t]} (t-y)^i \mathrm{d}V(y) + \frac{ct^n}{n!\mu^n}.$$

Знову скористаємось лемою 13 і перегрупувавши доданки в сумах, отримаємо те, що й потрібно було довести

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{c^{n-i}}{i!\mu^i}\Big(\frac{t^{i+1}}{(i+1)\mu} + ct^i\Big) + \frac{ct^n}{n!\mu^n} = \\ \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{c^{n-i}t^{i+1}}{(i+1)!\mu^{i+1}} + \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{c^{n+1-i}t^i}{i!\mu^i} + \frac{ct^n}{n!\mu^n} =$$

$$c^{n+1} + \Big(\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i \frac{c^{n+1-i}t^i}{i!\mu^i} + \sum_{i=0}^{n-2} C_n^i \frac{c^{n-i}t^{i+1}}{(i+1)!\mu^{i+1}}\Big) + \frac{nct^n}{n!\mu^n} + \frac{ct^n}{n!\mu^n} = \\ \sum_{i=0}^{n} C_{n+1}^i \frac{c^{n+1-i}t^i}{i!\mu^i}.$$

$\square$

Тепер, маючи леми 12, 13 та твердження 14, ми можемо перейти до доведення теореми 1. Зараз за умов теореми 1 ми встановимо співвідношення

$$V_j(t) = \frac{t^j}{j!\mu^j} + O\Big(\frac{jt^{j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}}\Big)$$

та

$$\frac{jt^{j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}} = o\Big(\frac{t^j}{j!\mu^j}\Big)$$

при $t \to \infty$, наслідком яких буде шукане співвідношення

$$V_j(t) \sim \frac{t^j}{j!\mu^j}, \quad t \to \infty.$$

На цьому доведення теореми 1 буде завершене.

Почнемо з першої рівності.

Твердження 15. *Нехай функція $j = j(t)$ набуває натуральних значень та задовольняє співвідношення $\lim_{t\to\infty} j(t) = \infty$ та $j(t) = o(t^{1/2})$ при $t \to \infty$. Тоді*

$$V_j(t) = \frac{t^j}{j!\mu^j} + O\Big(\frac{jt^{j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}}\Big), \quad t \to \infty.$$

Доведення. Внаслідок твердження 14 достатньо довести, що для кожного $t > 0$ і $j \in \mathbb{N}$, що задовольняють $j \le \big(\frac{t}{2c\mu}\big)^{1/2}$,

$$\sum_{i=0}^{j-1} C_j^i \frac{(j-1)!c^{j-i-1}\mu^{j-i-1}}{i!t^{j-i-1}} \le 2j \tag{12}$$

Для оцінки виразу в лівій частині (12) скористаємось нерівністю для біноміального коефцієнта $C_j^i \le \frac{j!}{i!} \le j^{j-i}$. Запишемо

$$\sum_{i=0}^{j-1} C_j^i \frac{(j-1)!c^{j-i-1}\mu^{j-i-1}}{i!t^{j-i-1}} = \frac{1}{j}\sum_{i=0}^{j-1} C_j^i \frac{j!}{i!}\Big(\frac{c\mu}{t}\Big)^{j-i-1}$$
$$\le \frac{1}{j}\sum_{i=0}^{j-1} \frac{(j!)^2}{(i!)^2}\Big(\frac{c\mu}{t}\Big)^{j-i-1} \le \frac{1}{j}\sum_{i=0}^{j-1} (j^{j-i})^2\Big(\frac{c\mu}{t}\Big)^{j-i-1} =$$
$$j\sum_{i=0}^{j-1}\Big(\frac{c\mu j^2}{t}\Big)^{j-i-1}.$$

Використання нерівності $j \le (\frac{t}{2c\mu})^{1/2}$ завершує доведення

$$j \sum_{i=0}^{j-1} \left(\frac{c\mu j^2}{t}\right)^{j-i-1} \le j \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = 2j.$$

$\square$

Перейдемо до доведення другої рівності.

Твердження 16. *Нехай функція $j = j(t)$ набуває натуральних значень та задовольняє співвідношення $\lim_{t\to\infty} j(t) = \infty$ та $j(t) = o(t^{1/2})$ при $t \to \infty$. Тоді*

$$\frac{jt^{j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}} = o\Big(\frac{t^j}{j!\mu^j}\Big), \quad t \to \infty.$$

Доведення. Покажемо, що відношення лівої частини до виразу під знаком $o(\cdot)$ прямує до нуля при $t \to \infty$:

$$\frac{jt^{j-1}j!\mu^j}{(j-1)!\mu^{j-1}t^j} \;\sim\; \frac{j^2\mu}{t} \;\sim\; \frac{(o(t^{1/2}))^2\mu}{t} \;\to\; 0.$$

$\square$

Доведення теореми 2

У цьому розділі ми доведемо теорему 2, а також всі допоміжні твердження, необхідні для цього.

Почнемо з узагальнення твердження 11 для збурених випадкових блукань.

Твердження 17. *Нехай $r \in (1,2)$, а ξ та η – випадкові величини, для яких $\mathbb{E}\xi^r < \infty$ та $\mathbb{E}(\eta \wedge t) = O(t^{2-r})$ при $t \to \infty$. Тоді*

$$V(t) - \frac{t}{\mu} = O(t^{2-r}) \quad \textit{при} \quad t \to \infty.$$

Доведення. Зазначимо, що t можна подати у такому вигляді: `Исправлена ошибка, см. закомментированный текст!`

$$t = \int_0^t (t-y)\mathrm{d}G(y) + \int_0^t (1-G(y))\mathrm{d}y. \tag{13}$$

Справді,

$$\int_0^t (t-y)\mathrm{d}G(y) + \int_0^t (1-G(y))\mathrm{d}y = \mathbb{E}(t-\eta)1_{\{\eta\le t\}} + \mathbb{E}(\eta\wedge t) =$$
$$t\mathbb{P}\{\eta \le t\} - \mathbb{E}\eta 1_{\{\eta\le t\}} + \mathbb{E}\eta 1_{\{\eta\le t\}} + t\mathbb{P}\{\eta > t\} =$$
$$t(\mathbb{P}\{\eta\le t\} + \mathbb{P}\{\eta > t\}) = t.$$

Використовуючи це, запишемо

$$V(t) - \frac{t}{\mu} = \int_{[0,\,t]} U(t-y)\mathrm{d}G(y) - \frac{t}{\mu} =$$
$$\int_{[0,\,t]} \Big(U(t-y) - \frac{t-y}{\mu}\Big)\mathrm{d}G(y) - \frac{1}{\mu}\mathbb{E}(\eta\wedge t).$$

Отже,

$$\Big|V(t) - \frac{t}{\mu}\Big| \le \int_{[0,\,t]} \Big|\Big(U(t-y) - \frac{t-y}{\mu}\Big)\Big|\mathrm{d}G(y) + \frac{1}{\mu}\mathbb{E}(\eta\wedge t). \tag{14}$$

Залишилось довести, що

$$\int_{[0,\,t]} \Big|\Big(U(t-y) - \frac{t-y}{\mu}\Big)\Big| \mathrm{d}G(y) = O(t^{2-r}).$$

Згідно з твердженням 11 для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться значення $t_0 > 0$ таке, що

$$|U(t) - \frac{t}{\mu}| \le \varepsilon t^{2-r}$$

для всіх $t \ge t_0$. Розіб'ємо тепер інтеграл на дві частини і скористаємося останньою нерівністю для оцінки першої частини: для $t \ge t_0$

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\,t]} \Big|U(t-y) - \frac{(t-y)}{\mu}\Big| \mathrm{d}G(y) = \\
&\int_{[0,\,t-t_0]} \Big|U(t-y) - \frac{(t-y)}{\mu}\Big| \mathrm{d}G(y) + \int_{(t-t_0,\,t]} \Big|U(t-y) - \frac{t-y}{\mu}\Big| \mathrm{d}G(y) \le \\
&\qquad \le \epsilon \int_{[0,\,t-t_0)} (t-y)^{2-r} \mathrm{d}G(y) + \big(U(t_0) + \frac{t_0}{\mu}\big) \le \varepsilon t^{2-r} + \big(U(t_0) + \frac{t_0}{\mu}\big).
\end{aligned}$$

Остаточно

$$\begin{aligned}
\Big|V(t) - \frac{t}{\mu}\Big| \le \int_{[0,\,t]} \Big|\Big(U(t-y) - \frac{(t-y)}{\mu}\Big)\Big| \mathrm{d}G(y) + \frac{1}{\mu}\mathbb{E}(\eta \wedge t) = \\
o(t^{2-r}) + O(t^{2-r}) = O(t^{2-r}), \quad t \to \infty.
\end{aligned}$$

□

Покладемо $\alpha = 2 - r$ та зазначимо, що $\alpha \in (0, 1)$. При цьому згідно з твердженням (17)

$$-c(t+1)^{\alpha} \le V(t) - \frac{t}{\mu} \le c(t+1)^{\alpha}, \quad t \ge 0 \tag{15}$$

для деякого $c > 0$. Знайдемо аналог нерівності (15) для V_j, $j \in \mathbb{N}$.

Твердження 18. *Нехай $j \in \mathbb{N}$, $V_j = \mathbb{E}N_j$ та $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$. Тоді для тих самих $\alpha \in (0, 1)$ та $c > 0$, що і у нерівності* (15)

$$\Big|V_j(t) - \frac{t^j}{j!\mu^j}\Big| \le \sum_{i=0}^{j-1} C_j^i \frac{c^{j-i}(t+1)^{\alpha(j-i)+i}}{i!\mu^i}, \quad t \ge 0.$$

Доведення. Скористаємось методом математичної індукції.
При $j=1$ твердження 18 перетворюється в нерівність (15). Припустимо, що твердження 18 виконується для $j=n$, $n\in\mathbb{N}$, тобто

$$\Big|V_n(t)-\frac{t^n}{n!\mu^n}\Big|\le\sum_{i=0}^{n-1}C_n^i\frac{c^{n-i}(t+1)^{\alpha(n-i)+i}}{i!\mu^i}.$$

Покажемо, що остання нерівність залишається справедливою і після заміни n на $n+1$.

Віднімемо і додамо $\int_{[0,\,t]}\frac{(t-y)^n}{n!\mu^n}\mathrm{d}V(y)$ і за правилом трикутника запишемо

$$\Big|V_{n+1}(t)-\frac{t^{n+1}}{(n+1)!\mu^{n+1}}\Big|\le\Big|\int_{[0,\,t]}\Big(V_n(t-y)-\frac{(t-y)^n}{n!\mu^n}\Big)\mathrm{d}V(y)\Big|+$$
$$\Big|\int_{[0,t]}\frac{(t-y)^n}{n!\mu^j}\mathrm{d}V(y)-\frac{t^{n+1}}{(n+1)!\mu^{n+1}}\Big|.$$

Позначимо перший доданок правої частини нерівності через $A_n(t)$, а другий – через $B_n(t)$. Спочатку запишемо оцінку для $A_n(t)$. Скористаємось припущенням індукції, теоремою Фубіні та лемою 13 у другій нерівності:

$$A_n(t)=\Big|\int_{[0,\,t]}\Big(V_n(t-y)-\frac{(t-y)^n}{n!\mu^n}\Big)\mathrm{d}V(y)\Big|\le$$
$$\int_{[0,\,t]}\Big|\sum_{i=0}^{n-1}C_n^i\frac{c^{n-i}(t-y+1)^{\alpha(n-i)+i}}{i!\mu^i}\Big|\mathrm{d}V(y)$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}C_n^i\frac{c^{n-i}(t+1)^{\alpha(n-i)}}{i!\mu^i}\int_{[0,\,t]}(t-y)^i\mathrm{d}V(y)\le$$
$$\sum_{i=0}^{n-1}C_n^i\frac{c^{n-i}(t+1)^{\alpha(n-i)}}{i!\mu^i}\Big(\frac{t^{i+1}}{(i+1)\mu}+c(t+1)^\alpha t^i\Big)\le\sum_{i=0}^{n-1}C_n^i\frac{c^{n-i}(t+1)^{\alpha(n-i)+i+1}}{(i+1)!\mu^{i+1}}+$$
$$\sum_{i=0}^{n-1}C_n^i\frac{c^{n+1-i}(t+1)^{\alpha(n+1-i)+i}}{i!\mu^i}.$$

Тепер запишемо оцінку для $B_n(t)$. Використаємо комутативність згортки у третій рівності і лему 15 у передостанній нерівності:

$$B_n(t) = \int_{[0,\,t]} \Big| \frac{(t-y)^n}{n!\mu^n} \mathrm{d}V(y) - \frac{t^{n+1}}{(n+1)!\mu^{n+1}} \Big| =$$

$$\frac{1}{n!\mu^n} \Big| \Big(\int_{[0,\,t]} (t-y)^n \mathrm{d}V(y) - \frac{1}{\mu} \int_{[0,\,t]} (t-y)^n \mathrm{d}y \Big) \Big| =$$

$$\frac{1}{n!\mu^n} \Big| \Big(\int_{[0,\,t]} V(t-y) \mathrm{d}(y^n) - \frac{1}{\mu} \int_{[0,\,t]} (t-y) \mathrm{d}(y^n) \Big) \Big| \le$$

$$\frac{1}{n!\mu^n} \int_{[0,\,t]} \Big| V(t-y) - \frac{t-y}{\mu} \Big| \mathrm{d}(y^n) \le \frac{1}{n!\mu^n} \int_{[0,\,t]} (c(t-y+1)^\alpha) \mathrm{d}(y^n)$$

$$\le \frac{1}{n!\mu^n} (c(t+1)^\alpha t^n) = \frac{c(t+1)^{\alpha+n}}{n!\mu^n}.$$

Підставляємо замість $A_n(t)$ і $B_n(t)$ їх оцінки

$$\Big| V_{n+1}(t) - \frac{t^{n+1}}{(n+1)!\mu^{n+1}} \Big| \le A_n(t) + B_n(t) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{c^{n-i}(t+1)^{\alpha(n-i)+i+1}}{(i+1)!\mu^{i+1}} + \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{c^{n+1-i}(t+1)^{\alpha(n+1-i)+i}}{i!\mu^i} + \frac{c(t+1)^{\alpha+n}}{n!\mu^n} =$$

$$\sum_{i=0}^{n} C_{n+1}^i \frac{c^{n+1-i}(t+1)^{\alpha(n+1-i)+i}}{i!\mu^i}.$$

$\square$

Тепер ми можемо перейти до доведення теореми 2. Зараз за умов теореми 2 ми встановимо співвідношення

$$V_j = \frac{t^j}{j!\mu^j} + O\Big(\frac{j(t+1)^{\alpha+j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}} \Big)$$

і

$$\frac{j(t+1)^{\alpha+j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}} = o\Big(\frac{t^j}{j!\mu^j} \Big)$$

при $t \to \infty$, наслідком яких буде шукане співвідношення

$$V_j(t) \sim \frac{t^j}{j!\mu^j}, \quad t \to \infty.$$

На цьому доведення теореми 2 буде завершене.

Твердження 19. *Нехай* $\alpha \in (0,1)$, *а функція* $j = j(t)$ *набуває натуральних значень та задовольняє співвідношення* $\lim_{t\to\infty} j(t) = \infty$ *та* $j(t) = o(t^{\frac{1-\alpha}{2}})$ *при* $t \to \infty$. *Тоді*

$$V_j(t) = \frac{t^j}{j!\mu^j} + O\Big(\frac{j(t+1)^{\alpha+j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}}\Big), \quad t \to \infty.$$

Доведення. Доведення почнемо з оцінки, яка виконується для кожного $t > 0$ і $j \in \mathbb{N}$, $j \le (\frac{t^{1-\alpha}}{2c\mu})^{1/2}$:

$$\frac{1}{j^2}\sum_{i=0}^{j-1} C_j^i \frac{c^{j-i-1} j!(t+1)^{\alpha(j-i)i-\alpha-j+1}\mu^{j-i-1}}{i!} \le 2. \tag{16}$$

Оцінимо зверху ліву частину. Скористаємось тим, що $C_j^i \le \frac{j!}{i!} \le j^{j-i}$ та нерівністю для j:

$$\frac{1}{j^2}\sum_{i=0}^{j-1} C_j^i \frac{c^{j-i-1} j!(t+1)^{\alpha(j-i)i-\alpha-j+1}\mu^{j-i-1}}{i!} \le$$

$$\frac{1}{j^2}\sum_{i=0}^{j-1} (j^2)^{j-i}(c\mu)^{j-i-1}(t+1)^{\alpha(j-i)i-\alpha-j+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{j-1} (j^2 c\mu)^{j-i-1}(t+1)^{\alpha(j-i)i-\alpha-j+1} \le \sum_{i=0}^{j-1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{j-i-1}.$$

Тепер скористаємось формулою суми нескінченної геометричної прогресії і для будь-якого $j \in \mathbb{N}$ отримаємо:

$$\sum_{i=0}^{j-1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{j-i-1} \le 2\Big(1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^j\Big) \le 2.$$

Тепер співвідношення

$$V_j = \frac{t^j}{j!\mu^j} + O\Big(\frac{j(t+1)^{\alpha+j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}}\Big), \quad t \to \infty$$

випливає з (16) та твердження 18. □

Твердження 20. *Нехай* $\alpha \in (0,1)$, *а функція* $j = j(t)$ *набуває натуральних значень та задовольняє співвідношення* $\lim_{t\to\infty} j(t) = \infty$ *та* $j(t) = o(t^{\frac{1-\alpha}{2}})$ *при* $t \to \infty$. *Тоді*

$$\frac{j(t+1)^{\alpha+j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}} = o\Big(\frac{t^j}{j!\mu^j}\Big), \quad t \to \infty.$$

Доведення. Покажемо, що відношення лівої частини до виразу під знаком $o(\cdot)$ прямує до нуля при $t \to \infty$:

$$\frac{j(t+1)^{\alpha+j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}j!\mu^j}(j-1)!\mu^{j-1}t^j \sim \frac{o(t^{1-\alpha})(t+1)^{\alpha+j-1}}{t^j} \sim o(t^{-j+1-\alpha})(t+1)^{\alpha+j-1} \to 0.$$

□

Висновки

В дипломній роботі сформульовано і доведено низку лем, тверджень та теорем пов'язаних з аналогами елементарної теореми відновлення для збурених випадкових блукань. Зокрема, детально доведено теореми 1 та 2 для випадків $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ і $\mathbb{E}\xi^2 = \infty$ відповідно.

Бібліоґрафія

[1] О. М. Іксанов (2021). Елементи теорії відновлення. Електронний курс лекцій доступний за адресою http://do.unicyb.kiev.ua/index.php/uk/2011-01-03-10-24-53/11-2011-01-03-10-44-09