Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Зеленська Ірина Олександрівна

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ

Спеціальність 111 — "Математика"

Галузь знань 11 — "Математика та статистика"

Подається на здобуття наукового ступеня *доктора філософії*

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

____________________ *І. О. Зеленська*

Науковий керівник *Собчук Валентин Володимирович, доктор технічних наук, професор*

Київ – 2025

Анотація

Зеленська І. О. Асимптотичне інтегрування систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 "Математика та статистика" за спеціальністю 111 "Математика". – Київський національний університет імені Тараса Шевченка. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2025.

Дисертаційна робота присвячена асимптотичному інтегруванню системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту..

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, трьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел та додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, встановлено мету і завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження, наведено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, охарактеризовано особистий внесок здобувача, наведено список конференцій та наукових семінарів, на яких дисертаційна робота пройшла апробацію, та короткий зміст роботи.

У першому розділі дисертаційної роботи наведено огляд літератури за тематикою дисертаційної роботи та результатів, отриманих іншими авторами. Також цей розділ містить порівняльний аналіз із деякими роботами, що містять подібні результати.

У другому розділі дисертації досліджується питання про побудову рівномірної асимптотики розв'язку для стабільної диференціальної точки звороту за різних умов на коефіцієнти основної матриці.

Отримано необхідні умови для забезпечення існування рівномірної асимптотики розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Окремо розглянуто випадок, коли коефіцієнти основної матриці мають різні знаки. Також досліджено випадок, коли коефіцієнти матриці мають однакові знаки.

У третьому розділі дисертації досліджується питання про побудову рівномірної асимптотики розв'язку для нестабільної диференціальної точки звороту за різних умов на коефіцієнти основної матриці.

Також у дисертаційній роботі наведені приклади застосування методу істотно особливих функцій до дослідження систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з конкретно заданими коефіцієнтами основної матриці та правої частини сиситеми.

У дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати:

– розроблено метод побудови рівномірної асимптотики розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту, яку отримано з відповідного сингулярно збуреного диференціального рівняння третього порядку типу Ліувілля;

– для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь розглянуто випадок диференціальної точки звороту для різних значень коефіцієнтів матриці, а саме коли коефіцієнти обидва додатні, обидва від'ємні та обидва, відповідно почергово, різних знаків;

– отримано необхідні умови регуляризації системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту;

– розроблено алгоритм, який включає вісім етапів інтегрування систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту;

– побудовано асимптотику розв'язків для різних значень коефіцієнтів матриці, а саме коли коефіцієнти обидва додатні, обидва від'ємні та обидва, відповідно почергово, різних знаків;

– наведено приклади побудови асимтотики розв'язків системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту за умов, коли значення коефіцієнтів матриці почергово, різних знаків.

Дисертаційна робота має теоретичне значення. Результати роботи доповнюють теорію сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту та можуть бути використані в подальшому для розробки нових методів асимптотичного аналізу, які дозволять досліджувати більш складні класи систем сингулярно збурених рівнянь. Одержані в роботі результати також можуть мати прикладне значення, зокрема, при моделювання потоків рідини, визначення характеристик хвиль та інших параметрів гідродинамічних систем.

Ключові слова: диференціальне рівняння, асимптотична поведінка, збурення, сингулярно збурені диференціальні рівняння, сингулярно збурена система диференціальних рівнянь, асимптотичний розв'язок, істотно особливі функції, простір безрезонансних розв'язків, рівномірна асимптотика, малий параметр, ε, сингулярні збурення, асимптотики, точка звороту, дифереціальна точка звороту, функції Ейрі, функції Ейрі–Лангера, рівняння Ліувілля. .

Abstract

Zelenska I. O. Asymptotic integration of systems of singularly perturbed differential equations with a turning point. – Qualifying scientific work on the rights of manuscript.

Doctor of Philosophy thesis for the degree of Doctor of Philosophy in the field of knowledge 11 ‘Mathematics and Statistics’, speciality 111 ‘Mathematics.’ – Taras Shevchenko National University of Kyiv. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2025.

Doctor of Philosophy thesis is devoted to the asymptotic integration of a system of singularly perturbed differential equations with a differential turning point.

Doctor of Philosophy thesis consists of abstracts in Ukrainian and English, an introduction, three chapters of the main part, conclusions, a list of references and an appendix.

The introduction substantiates the relevance of the topic, indicates the connection of the work with scientific programmes, plans, topics, sets out the purpose and objectives, object, subject and methods of the study, presents the scientific novelty and practical significance of the results obtained, describes the personal contribution of the applicant, provides a list of conferences and scientific seminars where the dissertation was tested, and a brief summary of the work.

The first chapter of the dissertation provides a review of the literature on the subject of the thesis and the results obtained by other authors. This section also contains a comparative analysis with some papers that contain similar results.

In the second chapter of the dissertation, we study the question of constructing a uniform asymptotic solution for a stable differential turning point under various conditions on the coefficients of the underlying matrix.

Necessary conditions for ensuring the existence of a uniform asymptotic solution of a system of singularly perturbed differential equations are obtained.

In the third chapter of the dissertation, the question of constructing a uniform asymptotic solution for an unstable differential turning point under different conditions on the coefficients of the main matrix is investigated.

Doctor of Philosophy thesis also provides examples of the application of the method of essentially special functions to the study of systems of singularly

perturbed differential equations with specifically defined coefficients of the main matrix and the right-hand side of the system.

The following new scientific results have been obtained in this dissertation:

- A method for constructing a uniform asymptotic solution to a system of singularly perturbed differential equations with a turning point obtained from the corresponding third-order singularly perturbed differential equation of the Liouville type was developed;
- for a system of singularly perturbed differential equations, the case of a differential turning point for different values of the matrix coefficients is considered, namely, when the coefficients are both positive, both negative and both, respectively, of different signs;
- the necessary conditions for regularisation of the system of singularly perturbed differential equations with a differential turning point are obtained;
- an algorithm is developed that includes eight stages of integration of systems of singularly perturbed differential equations with a turning point;
- the asymptotics of solutions for different values of the matrix coefficients are constructed, namely, when the coefficients are both positive, both negative and both, respectively, of different signs;
- examples of construction of the asymptotics of solutions of the system of singularly perturbed differential equations with a differential turning point are given under the conditions when the values of the matrix coefficients are of alternate signs.

Doctor of Philosophy thesis is of theoretical importance. The results of the work complement the theory of singularly perturbed differential equations with a turning point and can be used in the future to develop new methods of asymptotic analysis that will allow us to study more complex classes of systems of singularly perturbed equations. The results obtained in this work can also be of practical importance, in particular, in modelling fluid flows, determining wave characteristics and other parameters of hydrodynamic systems.

Keywords: differential equation, asymptotic behavior, perturbation, singularly perturbed differential equations, singularly perturbed system of differential equations, asymptotic solution, essentially singular functions, space of resonance-free solutions, uniform asymptotics, small parameter, ε, singular perturbations, *asymptotics, turning point, differential turning point, Airy functions, functions Airy–Langer, Liouville equation.*

Список опублікованих праць за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Собчук В.В., Зеленська І.О., *Побудова асимптотики розв'язку системи СЗДР 4-го порядку з диференціальною точкою звороту методом істотно особливих функцій,* Науковий вісник Ужгородського університету, Т. 41, № 2, (2022), С. 78–90, DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).78-90.

2. Valentyn Sobchuk, Iryna Zelenska, Oleksandr Laptiev *Algorithm for solution of systems of singularly perturbed differential equations with a differential turning point,* Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences, Vol. 71, No.3, (2023), Article number: e145682, DOI: 10.24425/bpasts.2023.145682.

3. Собчук, В. В., Зеленська І. О., *Особливості побудови асимптотики розв'язку систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту при додатних коефіцієнтах матриці,* Дослідження в математиці і механіці, Т. 28, № 1-2(41-42), (2023). С. 120–138, DOI: 10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305266.

4. Sobchuk V. V., Zelenska I.O., *Construction of asymptotics of the solution for a system of singularly perturbed equations by the method of essentially singular functions,* Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics, No.2, (2023). С. 184–192, https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.34.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. V.Sobchuk, I.Zelenska Problem for Singular Perturbed Systems of Differential Equations with Nonstable First-Order Turning Point // International Workshop QUALITDE – 2021. Tbilisi, Georgia, 2021. P. 190-193.

2. Sobchuk V., Zelenska I. Systems of Differential Equations With Turning Point as a Mathematical Models // Nonlinear Analysis And Applications, 5th International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine Valery Sergeevich Melnik 4–6 April, 2022, Ukraine, Kyiv, P.44.

3. Собчук В. В, Зеленська І.О. Умови існування розв'язку систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту I роду // Математика. Інформаційні технології. Освіта. Тези допов. учасник. XI Міжнар. наук.–практ. конф., 4–6 червня 2022 р. Луцьк–Світязь: СНУ імені Лесі Українки, 2022. С. 37-38.

4. V.V. Sobchuk, I.O. Zelenska On the conditions for the existence of a uniform asymptotic solution systems of singularly perturbed differential equations with differential turning point // The international online conference "Current trends in abstract and applied analysis". Ivano-Frankivsk, May 12-15, 2022. Ukraine, P. 78-80

5. В. Собчук, І. Зеленська Побудова рівномірної асимптотики розв'язку систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту // Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації: матеріали III Міжнародної наук.-практ. інтернет-конф. (м. Запоріжжя, 30 вересня 2022 р.). С. 34 – 39.

6. Valentyn Sobchuk, Iryna Zelenska Algorithm for Constructing Uniform Asymptotics of a Solution for Problem for Singular Perturbed Systems of Differential Equations with Differential Turning Point. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2022". December 17 - 19, 2022, Tbilisi, Georgia. P. 194-199.

7. Собчук В.В., Зеленська І.О. Поняття "точки звороту" в сучасній теорії сингулярно збурених диференціальних рівнянь // Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання: матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції, 18-20 січня 2023 року. – К. : Вид-во УДУ імені Михайла Драгоманова, 2023. С. 49-50.

8. Собчук В. В., Зеленська І. О., Шовкопляс Т. В. Побудови рівномірної асимптотики розв'язку ССЗДР з диференціальною точкою звороту // Математика. Інформаційні технології. Освіта. Тези доповідей XII Міжнар. наук.–практ. конф., 2–4 червня 2023 р. Луцьк–Світязь: СНУ імені Лесі Українки, 2023. С. 38-39.

9. Собчук В. В., Зеленська І. О. Особливості структури розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь для побудови рівномірної асимптотики // Математика та інформаційні технологіїю Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики, 28-30 вересня 2023 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т,

2023. – С. 315-316.

10. Valentyn Sobchuk, Iryna Zelenska A system of singularly perturbed diferential equations with an unstable turning point of the rst kind // 10.Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2023 December 9 - 11, 2023. Andrea Razmadze Mathematical Institute of Ivane Javakhishvili Tbilisi State University Tbilisi, Georgia. REPORTS OF QUALITDE, Volume 2, P 187-191.

11. Зеленська І.О. Стабільна точка звороту в системі сингулярно збурених диференціальних рівнянь // Матеріали XXII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2024». К.: Київський університет, 2024. С. 24-25.

12. Собчук В. В., Зеленська І. О. Метод істотно особливих функцій для побудови асимптотики розв'язку системи сингулярно збурених диференнціальних рівнянь з від'ємними елементами матриці // Математика. Інформаційні технології. Освіта. Тези доповідей XIII Міжнар. наук.–практ. конф., 31 травня – 2 червня 2024 р. Луцьк–Світязь: СНУ імені Лесі Українки, 2024. С 67-68.

13. Собчук В. В., Зеленська І.О. Структура розв'язку системи сингулярно збурених диференнціальних рівнянь на випадок матриці з від'ємними коефіцієнтами // V Міжнародна конференція присвячена 145 річчю Ганса Гана, 23-27 вересня 2024 р. Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. Чернівці. 2024. С. 99-100.

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ССЗДР – система сингулярно збурених диференціальних рівнянь

СЗЗ – сингулярно збурена задача

АР – асимптотика розв'язку (асимптотичний розв'язок)

ІОФ – істотно особлива функція

ФСР – фундаментальна система розв'язків

ПБР – простір безрезонансних розв'язків

ФАР – формальний асимптотичний розв'язок

ФР – формальний розв'язок

РАР – рівномірна асимптотика розв'язку (рівномірний асимптотичний розв'язок)

метод ІОФ – метод істотно особливих функцій

$C^\infty[a;b]$ – простір нескінченно диференційованих функцій на відрізку $[a;b]$

$\bigoplus\limits_{i=1}^{n} Y_i$ – пряма сума підпросторів Y_i

$O_\delta(x_0)$ – δ-окіл точки x_0, тобто, множина точок $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$

$O^*_\delta(x_0)$ – проколотий δ-окіл точки x_0, тобто, множина точок $x \in (x_0 - \delta; x_0) \bigcup (x_0; x_0 + \delta)$

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена асимптотичному інтегруванню системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту.

Обгрунтування вибору теми дослідження.

В прикладній сфері виникають задачі з порушенням стабільності спектру. Одним з різновидів такого виду порушень стабільності є задачі з точками звороту. Диференціальні рівняння з точками звороту є потужним і ефективним математичним апаратом для вивчення широкого класу проблем, що виникать в різних галузях математики, механіці, фізиці, геофізиці, інформатиці та інших ланках природничих наук. Грунтовні дослідження та розуміння особливостей природи таких математичних моделей, дають нам можливість вивчати широкий клас явищ, які виникать в математичній фізиці, радіоелектроніці та інших галузях науки та технологіях. Слід зауважити, що такого виду математичні моделі, поки що, не можливо розглядати з точки зору загальних теоретичних засад. Кожна задача потребує індивідуального підходу з метою побудови рівномірної асимптотики розв'язку, включаючи особливу точку.

На даний час грунтовно вивчене рівняння Ліувілля та диференціальні рівняння третього та четвертого порядків з алгебраїчною точкою звороту, то системи диференціальних рівнянь другого порядку з алгебраїчною точкою звороту.

Важливими внесками в побудову теорії сингулярно збурених рівнянь з точками звороту були роботи Ж. Ліувілля[76], Р. Лангера[60, 70], В. Вазова[28], А. А. Дородніцин [30], С. О. Ломова[77], А. М. Самойленка[96], М. О. Перестюка[6], В. М. Бобочко [7–12] та їх учнів. З Аналіз сучасних досліджень [33, 41, 82, 97, 98] вказує на те, що фундаментальні результати у побудові рівномірної асимптотики розв'язку для задач з диференціальною точкою звороту для рівнянь типу Ліувілля наразі не отримані.

В роботі викладено базові положення теорії асимптотичних збурень, методи побудови асимпотики розв'язків систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точками звороту, зокрема, використовуючи перетворення Ліувілля–Гріна, метод регуляризації Ломова та формалізм методу фундаментальних функцій. Описано властивості точок звороту та наведено їх класифікацію. Окрему увагу приділено застосуванню теорії модельних рівнянь Ейрі для побудови асимптотики розв'язків сингулярно збурених рівнянь.

Також в роботі представлено повне дослідження побудови асимптотики розв'язків методом істотно особливих функцій системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь, яку отримано з сингулярно збуреного рівняння третього порядку типу Луівілля. Встановлено необхідні умови регуляризації системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точками звороту. Для випадку стабільної диференціальної точки звороту, коли коефіцієнти матриці $\tilde{a}(x) > 0$ та $b(x) < 0$, використовуючи метод істотно особливих функцій, побудовано формальні розв'язки однорідної системи, формальні частинні розв'язки неоднорідної системи, оцінено залишкові члени асимптотики розв'язків та отримано загальний розв'язок системи сингулярно збурених рівнянь у вигляді суперпозиції формальних розв'язків відповідних однорідної та неоднорідної систем. Розроблено алгоритм, який включає вісім етапів асимптотичного інтегрування систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту.

На прикладі явно заданих значень коефіцієнтів $\tilde{a}(x) > 0$ та $b(x) < 0$, використовуючи розроблений алгоритм побудовано асимптотику розв'язку для конкретного випадку сингулярно збуреного рівняння третього порядку типу Луівілля з явно заданою правою частиною у вигляді многочлена першого порядку. Для випадку стабільної диференціальної точки для випадку, коли коефіцієнти матриці $\tilde{a}(x) > 0$ та $b(x) > 0$, поетапно повторюючи кроки алгоритму, побудовано формальні розв'язки однорідної системи, формальні частинні розв'язки неоднорідної системи, оцінено залишкові члени асимтотики розв'язку та отримано загальний розв'язок системи сингулярно збурених рівнянь як суперпозицію формальних розв'язків відповідних однорідної та неоднорідної систем.

В третьому розділі роботи продовжено дослідження нестабільної диференціальної точки для випадку, коли коефіцієнти матриці $\tilde{a}(x) < 0$ та $b(x) > 0$, слідуючи кроками алгоритму, побудовано формальні розв'язки однорідної системи, формальні частинні розв'язки неоднорідної системи, оцінено залишкові члени асимтотики розв'язку та отримано загальний розв'язок системи сингулярно збурених рівнянь як суперпозицію формальних розв'язків відповідних однорідної та неоднорідної систем. Наведено приклад побудови асимтотики розв'язку для конкретного випадку сингулярно збуреного рівняння третього порядку типу Луївілля з явно заданою правою частиною у вигляді многочлена першого порядку та явно заданих значень коефіцієнтів $\tilde{a}(x) < 0$ та $b(x) > 0$.

Також побудовано формальні розв'язки однорідної системи, формальні частинні розв'язки неоднорідної системи, оцінено залишкові члени асимтотики розв'язку та отримано загальний розв'язок системи сингулярно збурених рівнянь як суперпозицію формальних розв'язків відповідних однорідної та неоднорідної систем для випадку нестабільної диференціальної точки для випадку, коли коефіцієнти матриці $\tilde{a}(x) < 0$ та $b(x) < 0$.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження виконане відповідно до індивідуального плану аспірантки кафедри диференціальних та інтегральних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка, затвердженого вченою радою механіко-математичного університету і в рамках державної бюджетної дослідницької наукової теми 21БНН-06 «Виконання завдань перспективного плану розвитку наукового напряму "Математичні науки і природничі науки"» Київського національного університету імені Тараса Шевченка (номер державної реєстрації 0121U112941) та НДР № 24БФ038-01 "Асимптотична поведінка, стійкість та керованість у нескінченновимірних еволюційних системах із детермінованими та випадковими збуреннями"(Державний реєстраційний номер: 0124U001412).

Мета і завдання дослідження відповідно до предмета та об'єкта дослідження.

Метою дисертаційної роботи є розробка методів та алоритмів асимптотичного інтегрування систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту.

Об'єктом дослідження є системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту.

Предметом дослідження є методи асимптотичного інтегрування, алгоритми побудови асимптотичних розв'язків систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь.

Основними завданнями даної роботи є:

— провести аналіз існуючих методів асимптотичного інтегрування сингулярно збурених диференціальних рівнянь

— розробити метод побудови рівномірної асимптотики розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту, яку отримано з відповідного сингулярно збуреного диференціального рівняння третього порядку типу Ліувілля;

— для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь побудувати асимптотичні розв'язки для випадку диференціальної точки звороту для різних значень коефіцієнтів матриці, а саме коли коефіцієнти обидва додатні, обидва від'ємні та обидва, відповідно почергово, різних знаків;

— отримати необхідні умови регуляризації системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту;

— розробити алгоритм асимптотичного інтегрування систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту;

— побудувати асимптотику розв'язків для різних значень коефіцієнтів матриці, а саме коли коефіцієнти обидва додатні, обидва від'ємні та обидва, відповідно почергово, різних знаків;

— навести приклади побудови асимтотики розв'язків системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту за умов, коли значення коефіцієнтів матриці почергово, різних знаків.

Методи дослідження. У процесі дослідження, проведеного у дисертаційній роботі, використано: методи теорії сингулярних збурень, методи асимптотичного інтегрування систем сингулярних рівнянь [15–20], метод регуляризації [77], метод фундаментальних функцій [6].

Наукова новизна отриманих результатів. Всі результати, отримані в дисертаційній роботі, є новими та математично обґрунтованими. Основні з них такі:

– розроблено метод побудови рівномірної асимптотики розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту, яку отримано з відповідного сингулярно збуреного диференціального рівняння третього порядку типу Ліувілля;

– для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь розглянуто випадок диференціальної точки звороту для різних значень коефіцієнтів матриці, а саме коли коефіцієнти обидва додатні, обидва від'ємні та обидва, відповідно почергово, різних знаків;

– отримано необхідні умови регуляризації системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту;

– розроблено алгоритм, який включає вісім етапів інтегрування систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту;

– побудовано асимптотику розв'язків для різних значень коефіцієнтів матриці, а саме коли коефіцієнти обидва додатні, обидва від'ємні та обидва, відповідно почергово, різних знаків;

– наведено приклади побудови асимтотики розв'язків системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту за умов, коли значення коефіцієнтів матриці почергово, різних знаків.

Теоретичне та практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Одержані в роботі результати можуть мати прикладне значення, зокрема, при моделюванні потоків рідини, дослідженнні характеру поведінки відповідних гідродинамічних систем.

Особистий внесок здобувача. Основні результати роботи, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Визначення основного плану дослідження, постановка задач та загальне керівництво роботою належить науковому керівнику В. В. Собчуку. За результатами дисертації здобувачем було опубліковано у 17 наукових праць, з яких чотири роботи у фахових виданнях у співавторстві з науковим керівником В. В. Собчуком [1 – 4] та 13 тез у матеріалах наукових конференцій [5 – 17]. У статтях [1], [3] та [4], написаних у співавторстві з В.В. Собчуком, науковому керівнику належить постановка задачі та обговорення результатів. У статті [2] Собчуку В.В. належить постановка задачі та обговорення основних результатів, Лаптєву О.А. належить ознайомлення автора з деякими допоміжними результатами теорії сингулярно збурених диференціальних рівнянь та обговорення результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідалися та обговорювалися на таких наукових конференціях та наукових семінарах різного рівня:

1. International Workshop QUALITDE – 2021, December 18 – 20, 2021, Tbilisi, Georgia.

2. XI Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», червень 3-5, 2022, Луцьк, Україна.

3. The international online conference "Current trends in abstract and applied analysis", May 12-15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine.

4. III Міжнародної наук.-практ. інтернет-конф., 30 вересня, 2022, Запоріжжя, Україна.

5. Всеукраїнська науково-практичної конференції, 18-20 січня, 2023, Київ, Україна.

6. XII Міжнародна науково–практична конференція "Математика. Інформаційні технології. Освіта 2–4 червня, 2023, Луцьк–Світязь, Україна.

7. Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики, 28-30 вересня, 2023, Чернівці, Україна.

8. International Workshop QUALITDE – 2023, December 17 – 19, 2023, Tbilisi, Georgia.

9. XXII Міжнародна наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна - 2024», 11 квітня, 2024, Київ, Україна.

10. XIII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», 31 травня –2 червня, 2024, Луцьк–Світязь, Україна.

11. V Міжнародна конференція присвячена 145 річчю Ганса Гана, 23-27 вересня, 2024, Чернівці, Україна.

12. Науковий семінар з диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Керівники семінару – професор, доктор фізико-математичних наук О. М. Станжицький та професор, доктор фізико-математичних наук О. В. Капустян. За участі професорів, докторів фізико-математичних наук – М. Ф. Городнього, І. О. Парасюка та О. В. Мартинюк. (Київ, Україна, 05 лютого 2025 р.)

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у сімнадцяти наукових працях, з яких три статті [1 – 4] та тринадцять тез у матеріалах наукових конференцій [5 – 18]. Статтю [1] опубліковано у виданні, що внесено до переліку наукових фахових видань України категорії "Б". Статтю [2] опубліковано у міжнародному журналі, який індексується у наукометричній базі Scopus та Web of Science та входить до квартиля Q3 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank. Статтю [3] надруковано у науковому фаховому виданні України категорії "Б". Статтю [4] надруковано у науковому фаховому виданні України категорії "Б", що індексується у наукометричній базі Scopus.

Обсяг і структура дисертації. Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, трьох розділів, розбитих на підрозділи, висновку, списку використаних джерел та додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Загальний обсяг роботи становить 201 сторінка. Обсяг основного тексту дисертації 187 сторінок. Список використаної літератури займає 10 сторінок і налічує 116 найменувань. Додатки займають 4 сторінки і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Зміст роботи. У **вступі** визначено мету, об'єкт, предмет, завдання та методи дослідження, наведено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, охарактеризовано особистий внесок здобувача, наведено список конференцій та наукових семінарів, на яких дисертаційна робота пройшла апробацію, та короткий зміст роботи.

У **першому розділі** наведено огляд літератури за тематикою дисертаційної роботи та результатів, отриманих іншими авторами. Також цей розділ містить порівняльний аналіз із деякими роботами, що містять подібні результати, характеристики методів досліджень, властивості розв'язків модельних рівнянь.

У **другому розділі** дисертації досліджується питання про методи асимптотичного інтегрування систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь для стабільної диференціальної точки звороту за різних умов на коефіцієнти основної матриці.

Досліджено систему

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = H(x),$$

де $A(x,\varepsilon)$ має таку структуру

$$A(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1,$$

а $A_0(x)$ і A_1 матриці вигляду

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a(x), b(x), H(x) \in C^{\infty}[0,l]$$

Отримано необхідні умови існування рівномірної асимптотики розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь.

Розглянуто випадок, коли коефіцієнти основної матриці мають різні знаки, тобто виконуються умови:

C 1. $A_0(x)$, $H(x) \in C^{\infty}[0,l]$.

C 3. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) < 0$.

Для даного випадку побудовано асимптотику формального розв'язку відповідної однорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь зі стабільною диференціальною точкою звороту; асимптотику формального розв'язку неоднорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь зі стабільною диференціальною точкою звороту; зроблено оцінку отриманої асимптотики розв'язку; наведено приклад для явного випадку $\tilde{a}(x)$, $b(x)$.

Побудовано асимптотику розв'язку для умов, коли коефіцієнти матриці мають однакові знаки для однорідної та неоднорідної системи.

C 1. $A_0(x)$, $H(x) \in C^{\infty}[0,l]$.

C 4. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) > 0$.

Для даного випадку побудовано асимптотику формального розв'язку відповідної однорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь зі стабільною диференціальною точкою звороту; асимптотику формального розв'язку неоднорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь зі стабільною диференціальною точкою звороту; зроблено оцінку отриманої асимптотики розв'язку.

У **третьому розділі** дисертації досліджується питання про побудову рівномірної асимптотики розв'язку для нестабільної диференціальної точки звороту за різних умов на коефіцієнти основної матриці.

C 2. $A_0(x)$, $H(x) \in C^\infty[-l, 0]$.

C 5. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) < 0, \quad b(x) < 0$.

Для даного випадку побудовано асимптотику формального розв'язку відповідної однорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з нестабільною диференціальною точкою звороту; асимптотику формального розв'язку неоднорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з нестабільною диференціальною точкою звороту; зроблено оцінку отриманої асимптотики розв'язку; наведено приклад для явного випадку $\tilde{a}(x)$, $b(x)$.

Також було проаналізовано випадок, коли коефіцієнти матриці мають однакові знаки.

C 2. $A_0(x)$, $H(x) \in C^\infty[-l, 0]$.

C 6. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) < 0, \quad b(x) > 0$.

Для даного випадку побудовано асимптотику формального розв'язку відповідної однорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з нестабільною диференціальною точкою звороту; асимптотику формального розв'язку неоднорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з нестабільною диференціальною точкою звороту; зроблено оцінку отриманої асимптотики розв'язку.

У **висновках** сформульовано основні результати дисертаційної роботи.

Подяка. *Автор дисертації висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику – доктору технічних наук, професору Собчуку Валентину Володимировичу – за постановку розглянутих у дисертації задач, постійну підтримку, увагу та допомогу в роботі.*

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Цей розділ присвячений огляду відомих результатів, що стосуються тематики дисертації, короткій характеристиці підходів до асимптотичного інтегрування сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точками звороту, наведено класифікацію точок звороту, властивості розв'язків модельних рівнянь та інші теоретичні відомості необхідні в подальшій роботі.

1.1 Асимптотична теорія сингулярно збурених рівнянь у скалярній формі

В прикладній сфері виникають задачі з порушенням стабільності спектру. Одним з різновидів такого виду порушень стабільності є задачі з точками звороту. Диференціальні рівняння з точками звороту є потужним і ефективним математичним апаратом для вивчення широкого класу проблем, що виникать в різних галузях математики, механіці, фізиці, геофізиці, інформатиці та інших ланках природничих наук. Грунтовні дослідження та розуміння особливостей природи таких математичних моделей, дають нам можливість вивчати широкий клас явищ, які виникать в математичній фізиці, радіоелектроніці та інших галузях науки та технологіях. Слід зауважити, що такого виду математичні моделі, поки що, не можливо розглядати з точки зору загальних теоретичних засад. Кожна задача потребує індивідуального підходу з метою побудови рівномірної асимптотики розв'язку, включаючи особливу точку.

Вивченню та дослідженню питання побудови рівномірного розв'язку задач з точкою звороту присвячений широкий спектр наукових робіт. Основи цього напрямку досліджень були закладені в роботах [38, 76]. Недоліки одержаних результатів у [76] дали початок для розвитку цілої теорії. Так, одночасне вивчення рівняння другого порядку

$$y''(x,\lambda) + [\lambda^2 \cdot r(x) + p(x)]y(x,\lambda) = h(x), \tag{1.1}$$

декількома науковцями стало наслідком відкриття нового методу, який згодом одержав назву методу WBKJ (Wentzel,Brillouin,Kramers,Jeffreys) або методу зшивання. WBKJ метод не відноситься до асимптотичних методів [47], які дозволять побудувати рівномірну асимптотику рівняння Ліувілля, тобто рівняння (1.1), але він є одним із основних методів побудови розв'язку сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Сформулюємо коротко особливості техніки зшивання.

- В рівнянні (1.1) покладемо

  $$r(x) = x\tilde{r}(x),$$

  для всіх x з відрізка $[-a, a]$.

- Для $r(x) > 0$ розв'язок буде мати вигляд

  $$y^+(x,\lambda) \cong [r(x)]^{-\frac{1}{4}} \cdot [C_1 cos\lambda\varphi_1(x) + C_2 sin\lambda\varphi_1(x)].$$

- Для $r(x) < 0$ розв'язок запишеться у вигляді

  $$y^-(x,\lambda) \cong [r(x)]^{-\frac{1}{4}} \cdot [C_3 exp\lambda\varphi_2(x) + C_4 exp\lambda\varphi_2(x)].$$

  Ці наближення називають зовнішніми наближеннями до розв'язку.

  З побудованих наближень бачимо, що при переході через точку $x = 0$ характер розв'язку змінюється з експоненціального на коливний, або навпаки. Тому нулі функції $r(x)$ називають ***точками звороту*** рівняння (1.1).

- Коли аргумент прямує до нуля (до точки звороту) одержані розв'язки є непридатними, тому згідно методу необхідно ввести заміну

  $$t = x \cdot \lambda^\nu, \qquad \nu > 0.$$

Тоді рівняння (1.1) прийме вигляд

$$\frac{d^2y(t,\lambda)}{dt^2} + \{\lambda^{2-3\nu}t\tilde{r}(t\lambda^{-\nu}) + \lambda^{-2\nu}p(t\lambda^{-\nu})\} \cdot y(t,\lambda) = h(x).$$

Якщо $\lambda \to \infty$, то головна частина одержаного рівняння має вигляд

$$\omega(t) = 0, \quad \nu < \frac{2}{3}, \quad \omega''(t) = 0, \quad \nu > \frac{2}{3},$$

$$\frac{d^2W(t)}{dt^2} + t\tilde{r}(0)W(t) = 0, \quad \nu = \frac{2}{3}.$$

Аналізуючи отримані три рівняння приходимо до висновку, що розв'язки перших двох рівнянь не можна використати для зшивання зовнішніх наближень. В третьому рівнянні виконаємо заміну

$$z = -t\sqrt[3]{\tilde{r}(0)}.$$

Тоді третє рівняння перейде у рівняння вигляду

$$TW(z) \equiv W''(z) - zW(z) = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$W(z) = \gamma_1 Ai(z) + \gamma_2 Bi(z).$$

$Ai(z), Bi(z)$– два лінійно незалежні розв'язки рівняння, які називаються функціями Ейрі. Функція $W(z)$ є нульовим наближенням до розв'язку рівняння (1.1) в околі точки звороту. Одержане наближення є внутрішнім наближенням до розв'язку рівняння (1.1).

- Наступним етапом цієї техніки є процес зшивання внутрішніх і зовнішніх наближень. Для цього кожен вид наближень виражають через змінну t.

$$W(-t\sqrt[3]{\tilde{r}(0)}) \cong t^{-\frac{1}{4}}\pi^{-\frac{1}{2}}[\tilde{r}(0)]^{-\frac{1}{12}} \cdot \Big[\gamma_1 sin\Big(\frac{2}{3}\sqrt{\tilde{r}(0)}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\Big) +$$

$$+\gamma_1 cos\Big(\frac{2}{3}\sqrt{\tilde{r}(0)}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\Big)\Big].$$

$$y^{+}(x,\lambda) \cong [r(x)]^{-\frac{1}{4}}\Big[a_1 cos\Big(\lambda\int_0^x \sqrt{r(x)}dx + \frac{\pi}{4}\Big)+$$

$$+b_1 sin\Big(\lambda\int_0^x \sqrt{r(x)}dx + \frac{\pi}{4}\Big)\Big],$$

$$y^{-}(x,\lambda) \cong [r(x)]^{-\frac{1}{4}}\Big[a_1 exp\Big(-\lambda\int_0^x \sqrt{-r(x)}dx\Big)+$$

$$+b_1 exp\Big(\lambda\int_0^x \sqrt{-r(x)}dx\Big)\Big],$$

де

$$a_1 = \frac{[\tilde{r}(0)]^{\frac{1}{6}}}{\lambda^{\frac{1}{6}}\sqrt{\pi}}\gamma_2, \qquad b_1 = \frac{[\tilde{r}(0)]^{\frac{1}{6}}}{\lambda^{\frac{1}{6}}\sqrt{\pi}}\gamma_1.$$

Отже, нульове наближення до розв'язку задачі (1.1) було одержано у вигляді суми двох зовнішніх наближень і одного внутрішнього наближення.

Подальший розвиток такого підходу для одержання наближених розв'язків відбувався у двох напрямках:

- „комплексний метод" Цваана;
- техніка „рівномірних наближень" Лангера.

„Комплексний метод" передбачає дослідження задачі з точкою звороту у двох областях (одна з яких є комплексною, що знаходиться на відстані від точки звороту), і поєднуються траєкторією, вздовж якої ВКБ розв'язки існують [3]. Цей метод був винайдений Цвааном у 1929 році. В роботі [116] він запропонував ідею виходу в комплексну область з метою одержання розв'язку задачі з точкою звороту. Таким чином Цваану вдалося одержати продовження для наближень, уникаючи точки звороту вцілому, зосередивши увагу на характері коефіцієнтів в одержаних розв'язках. Цей метод вдало був застосований до ряду задач Кемпелом [49, 50]. Furry W. H. в роботі [32] для одержання формул зв'язку також використав цей метод, але при доведенні врахував той факт, що розв'язки диференціального рівняння мають бути однозначними, чим спростив висновки. Його ідеї були підхоплені J. Heading [39] і об'єднані в загальну теорію, яка застосовувалась до класу задач з довільною кількістю точок звороту будь-якого порядку для різного типу рівнянь більш загальних ніж рівняння Шрьодінгера. Умови застосування „комплексного методу" були ретельно проаналізовані в публікаціях Fröman [35, 36].

Незважаючи на те, що „комплексний метод” є дуже вдалим інструментом для одержання зв'язку між формулами і технічно досить простим, але для практичного застосування неефективним. Труднощі при використанні метода Цваана виникають в тих задачах, які містять декілька точок звороту, оскільки математичні викладки є досить громіздкими.

В основі другого напрямку лежить техніка „рівномірного наближення”, для якої характерне зображення шуканого розв'язку вихідного рівняння через розв'язок простішого (близького) рівняння, яке зберґіає головні властивості першого.

Теоретичні основи для побудови рівномірної асимптотики розв'язків рівнянь типу (1.1), тобто розв'язків, які включають і точку звороту, були закладені в роботах [2, 66, 67, 73, 81, 91, 111]. Проте слід зауважити, що всі ці дослідження застосовувались лише до однорідних задач.

Базовою платформою для сингулярно збурених рівнянь вищих порядків є теорія Лангера-МакКелвея (для класу рівнянь другого порядку) і Лангера-Брега (для класу рівнянь третього порядку) [80].

Рудольф Лангер винайшов метод побудови рівномірної асимптотики розв'язку для рівнянь другого порядку з простою точкою звороту. Ідея Лангера полягає у тому, щоб представити розв'язки рівняння, досліджується через розв'язки спорідненого „related” або порівняльного „comparison” рівняння. Вона була запропонована в роботі [60] і використана рядом авторів таких як Ф. Олвер, Т. Черрі та іншими математиками [95, 115]. Згідно методу Лангера рівномірна асимптотика розв'язку для рівняння другого порядку представляється як лінійна комбінація розв'язку спорідненого рівняння і його похідної. Але на відміну від методу Ліувілля-Гріна і WBKJ методів він вибирає функцію $\varphi(x)$ як розв'язок задачі

$$\varphi(x)[\varphi'(x)]^2 = r(x), \quad \varphi(0) = 0,$$

і в результаті одержує

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} -\left(-\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{-r(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}, & \text{коли } x \le 0; \\ \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{r(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}, & \text{коли } x \ge 0. \end{cases}$$

Подальші дослідження дозволили розширити метод порівняльних рівнянь, розроблений для класу рівнянь другого порядку, на клас рівнянь третього порядку. В роботах [2, 66, 67] була використана ідея Р. Лангера, яка полягає у спрощенні диференціального рівняння за допомогою послідовних перетворень, які діють в обмеженій області, що містить точку звороту. Перетворення виконуються до тих пір, поки поставлена задача не буде зведена до деякого спеціального диференціального рівняння з відомою асимптотикою. При чому має виконуватись наступна умова: асимптотичні розв'язки цих двох задач мають бути асимптотично рівні. Отже, така методика результативна в тому випадку, якщо таке спрощене „еталонне" рівняння існує.

Метод „еталонних" рівнянь та його модифікації виявились дуже ефективними для асимптотичного аналізу багатьох задач [7, 8, 21–24]. Він полягає у тому, що розв'язок даного диференціального рівняння виражають за допомогою вже дослідженого рівняння або використовують для регуляризації досліджуваної задачі.

Для простих точок звороту еталонним є рівняння Ейрі [95, 99]. Воно дозволяє описати поведінку асимптотичного розв'язку, який рівномірно наближений до вихідного рівняння, в околі точки звороту.

Існує дві форми рівняння Ейрі, якими користуються в сучасному асимптотичному аналізі при дослідженні задач з алгебраїчною точкою звороту [6]. Перша з них – це рівняння Ейрі вигляду

$$TU(t) \equiv U''(t) + tU(t) = 0.$$

Його властивості вперше були вивчені А.А. Дородніциним в роботі [30]. Такою формою запису користувались А.А. Дородніцин, С.О. Ломов, В.М. Бобочко, В.О. Болілий.

У своїй монографії С.О. Ломов[77] вперше дослідив неоднорідні рівняння з точками звороту. Він застосував метод регуляризації для побудови рівномірного асимптотичного розв'язку до задач з нестабільним спектром. Для побудови частинного розв'язку було використано зчисленну кількість істотно особливих функцій $\psi_k(t)$ та їх похідних, де

$$\psi_{-1}(t) \equiv \psi(t),$$

$$\psi_k(t) \equiv \int_{\infty}^{t} K(t,\tau)\psi_{k-1}(\tau)d\tau,$$

де $K(t,\tau) \equiv W_2(t)W_1(\tau) - W_1(t)W_2(\tau)$, $W_k(t), k = 1,2$–два лінійно незалежні розв'язки рівняння Ейрі-Дородніцина. При цьому частинні розв'язки з кожним ітераційним кроком містять все нові і нові ІОФ $\psi_k(t)$, при цьому їх структура ускладнється з кожно ітерацією. Цей факт є одним з основних недоліків методу, запропонованого С.О. Ломовим [77].

Метод фундаментальних функцій, запропонований В.О. Бобочко у монографії [6], дозволив побудувати рівномірний асимптотичний розв'язок для рівняння Ліувілля з точками звороту різного типу. При цьому для побудови частинного розв'язку було використано лише одну ІОФ $\psi(t)$ та її похідну. Також розглянуто випадки різних точок звороту: стабільної, нестабільної, внутрішньої, сильної, кратної та комплексної.

Іншою формою запису користувались Р. Лангер, В. Вазов, В.Ф. Федорюк [6]

$$TW(t) \equiv U''(t) - tU(t) = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$W(t) = \gamma_1 \mathbf{Ai}(t) + \gamma_2 \mathbf{Bi}(t),$$

де $\mathbf{Ai}(t)$,$\mathbf{Bi}(t)$–два лінійно незалежні розв'язки рівняння, які називаються функціями Ейрі.

У монографії [100] для випадку кратної і дробової точки звороту запропоновано модельне рівняння виду

$$U''(t) + t^{m-2}U(t) = 0,$$

де $m > 0$. Досліджено асимптотику розв'язків цього рівняння, коли m є парним або непарним числом.

Дослідження показали, що при вивченні скалярних задач з диференціальною точкою звороту краще застосовувати диференціальний оператор Ейрі-Дородніцина [7, 8]

$$\tilde{\mathbf{T}} \equiv \frac{\partial^3}{\partial t^3} \pm t\frac{\partial}{\partial t} \equiv \mathbf{T}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Наступним важливим кроком для розвитку задач з точками звороту стали фізичні задачі, в яких малий параметр ε відповідає малій в'язкості або високій швидкості. На практиці такого роду задачі дають можливість спрогнозувати в який саме момент малі збурення є причиною переходу потоку від ламінарного до турбулентного. Найбільш відомим типом таких рівнянь є рівняння Орра-Зоммерфельда, яке являє собою найпростішу фізично прийнятну модель у дослідженнях, що мають врахувати додаткові впливи (тривимірність, кривизна стін, нелінійність, нестаціонарність, температура, магнітне та електричне поле, стисливість тощо)[37]:

$$\frac{1}{\alpha R}\big(\phi'(4) - 2\alpha^2\phi^{(2)} + \alpha^{4\phi}\big) = i\big([w(x) - c][\phi^{(2)} - \alpha^2\phi] - w^2(x)\phi\big),$$

де $w(x)$-задана функція, α, R-дійсні параметри, c-комплексний параметр.

Рівняння Орра-Зоммерфельда - це звичайне диференціальне рівняння 4-го порядку зі змінними коефіцієнтами, які залежать від профілю швидкості основного потоку. Його спектральний аналіз ще не завершений, навіть для простих профілів швидкості. У зв'язку з цим було розроблено велику кількість асимптотичних методів [40, 72, 74, 108, 109]. Теоретичні основи закладені в роботах Гейзенберга, Туллмена і Ліна. Незважаючи на недоліки у дослідженнях, їм вдалося дослідити всі основні аспекти цього питання, що у майбутньому стало підгрунттям для побудови повних рівномірних наближень. Так, для рівняння виду

$$\varepsilon^2 U^{(4)} + x\psi(x,\varepsilon)U'' + b(x,\varepsilon)U = 0,$$

Гейзенберг [40] одержав чотири функції, які можна було вважати наближеними розв'язками цього рівняння при малих ε

$$\hat{U}_j(x,\varepsilon) = x^{-\frac{5}{4}} exp\Big\{(-1)^{j-1}\frac{i}{\varepsilon}\int_0^x (t\psi(t,0))^{\frac{1}{2}}dt\Big\}, \quad j = 1,2$$

$$\hat{U}_j = \hat{U}_{j0}(x) + \hat{U}_{j1}(x)\varepsilon. \qquad\qquad j = 3,4.$$

Де функції $\hat{U}_{j0}$, $\hat{U}_{j1}$ – це внутрішні розв'язки. Функції U_{j0}, $j = 3,4$ – два незалежні розв'язки виродженого рівняння

$$x\psi(x,0)U_0'' + b(x,0)U_0 = 0.$$

Але ці чотири розв'язки не утворюють фундаментальну систему розв'язків в повному комплексному околі точки $x = 0$. Тому Гейзенберг ввів нову змінну $\tau = \varepsilon^{-\frac{2}{3}}x$ і одержав нове диференціальне рівняння

$$\frac{d^4U}{d\tau^4} + \tau\psi(\tau\varepsilon^{\frac{2}{3}}, \varepsilon)\frac{d^2}{d\tau^2} + \varepsilon\frac{2}{3}b(\tau\varepsilon^{\frac{2}{3}}, \varepsilon)U = 0.$$

Для цього рівняння, йому вдалося одержати фундаментальну систему розв'язків, які є голоморфними по $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ в точці $\varepsilon = 0$ в обмеженій області τ-простору.

Теорія Гейзенберга була критично розглянута, дещо змінена і додатково опрацьована американським математиком і механіком китайського походження Лінь Цзя-Цзяо [72].

Альтернативний напрям був використаний Туллменом [108, 109].

Застосування вище вказаних методів до рівняння Орра-Зоммерфельда, дозволяє одержати розв'язки у вигляді рядів за степенями малого параметра $\varepsilon = (\alpha \cdot Re)^{-1}$. Ці ряди неперервні для $\varepsilon > 0$ і дискретні для $\varepsilon = 0$, що є причиною виникнення такого математичного феномена як лінії Стокса, які з'являються з точок звороту [74, 75].

Ретельний аналіз точок звороту для такого типу рівнянь був розпочатий В. Вазовим. Дослідженням рівняння Орра-Зоммерфельда з декількома точками звороту займався В. Рейд. З метою застосування класичної асимптотичної теорії, розробленої для диференціальних рівнянь другого порядку.

Теорія рівнянь четвертого порядку представлена роботами [69, 70, 73, 87, 88, 91, 111]. Актуальною для дослідження на той час була проблема побудови асимптотичних наближень до розв'язків у вузькому околі точки звороту, використовуючи метод споріднених рівнянь, техніку узгодження асимптотичних розвинень або багатомасштабний метод.

Теорія Р. Лангера для задач гідродинамічної стійкості будується на його попередніх роботах, присвячених рівнянням третього порядку. Так, для лінійного диференціального рівняння четвертого порядку [69, 70]

$$\frac{d^4w}{dz^4} + \lambda^2\left\{P(z,\lambda)\frac{d^2w}{dz^2} + Q(z,\lambda)\frac{dw}{dz} + R(z,\lambda)w\right\} = 0, \tag{1.2}$$

було підібране споріднене рівняння виду

$$V''' + \lambda^2(zv' + \alpha v) = 0,$$

де α–це параметр, який залежить від λ і розкладається в ряд

$$\alpha = \Sigma_0^\infty \lambda^{-n} \alpha^{(n)}.$$

Необхідно зауважити, що характерною особливістю методу Лангера є той факт, що перетворене рівняння стає формально простішим, але воно зберігає всі істотні особливості розв'язків, характерних для розглядуваного диференціального рівняння.

Асимптотична теорія рівнянь другого порядку і частково третього пов'язана з так званою алгебраїчною точкою звороту. Дослідження рівнянь вищих порядків вимагають вивчення більш складних задач, які містять диференціальну точку звороту [6].

В останні десятиліття фундаментальні дослідження рівнянь з точками звороту суттєво розширили наукові знання в цій області. Так, В.О. Болілий разом з В.М. Бобочко в ряді робіт [21–24] розглянули клас сингулярно збурених диференціальних рівнянь, для яких точка звороту $x = 0$ є псевдодиференціальною точкою звороту.

Методом фундаментальних функцій досліджено різні випадки точок звороту [6], побудовано асимптотику розв'язків і дано оцінки залишкових членів асимптотик.

В роботах [7, 8] досліджуються сингулярно збурені диференціальні рівняння, для яких вироджені рівняння є диференціальними і точка звороту є множником біля старшої похідної у виродженому рівнянні

$$L_\varepsilon(x, \varepsilon) \equiv \varepsilon^3 y'''(x, \varepsilon) + x\tilde{a}(x)y'(x, \varepsilon) + b(x)y(x, \varepsilon) = h(x),$$

$$\varepsilon y''(x, \varepsilon) + x\tilde{a}(x)y'(x, \varepsilon) + b(x)y(x, \varepsilon) = h(x),$$

а також рівняння типу Орра-Зоммерфельда

$$\varepsilon y^{(4)}(x, \varepsilon) + x\tilde{a}(x)y''(x, \varepsilon) + b(x)y'(x, \varepsilon) + c(x)y(x, \varepsilon) = h(x).$$

Дано означення диференціальної точки звороту. Автор, зауважує, що структура розв'язків суттєво залежить від знаків коефіцієнтів $\tilde{a}(x)$ та $b(x)$. Тому він наголошує на тому, що слід розрізняти чотири випадки в залежності від знаків цих функцій [8]. В. Бобочко узагальнює розроблений ним метод для рівнянь з алгебраїчною точкою звороту, запропонований ним у [10? –12] на рівняння з диференціальною точкою звороту. Так, наприклад, для розв'язків рівняння третього порядку були отримані наступні асимптотичні рівності при $k = 1, 2$

$$Y_k(x,t,\varepsilon) = U_k(t)\big[\Sigma_{s=0}^{p}\varepsilon^s V_{sk}(x) + O(\varepsilon^{p+1})\big] + U_k'(t)\big[\Sigma_{s=0}^{p}\varepsilon^s Q_{sk}(x) + O(\varepsilon^{p+1})\big],$$

$$Y_3(x,t,\varepsilon) = \Psi(t)\big[\Sigma_{s=0}^{p}\varepsilon^s f_s(x) + O(\varepsilon^{p+1})\big] + \Psi'(t)\big[\Sigma_{s=0}^{p}\varepsilon^s g_s(x) + O(\varepsilon^{p+1})\big],$$

$$Y_4(x,\varepsilon) = \Sigma_{s=0}^{p}\varepsilon^s f_s(x) + O(\varepsilon^{p+1}),$$

де $U_k(t)$, $\Psi(t)$–істотно особливі функції, описані в [6]. А також подано оцінки для залишкових членів виду

$$\|\xi_{k(p+1)}(x,t,\varepsilon)\| \le A_{p+1}\varepsilon^{-\frac{1}{4}}, \qquad p \ge 1, \qquad \|\xi_{3(p+1)}(x,t,\varepsilon)\| \le A_{p+1}, \qquad p \ge 0,$$

$$\|\xi_{k1}(x,t,\varepsilon)\| \le A_1, \qquad p = \overline{1,3}, \qquad \|\xi_{4(p+1)}(x,t,\varepsilon)\| \le A_{p+1}, \qquad p \ge 0,$$

де A_{p+1} і A_1 – сталі, які не залежать від x.

У монографії [44] досліджено віртуальні точки звороту. Наголошується, що сучасний асимптотичний аналіз дозволяє побудувати WBKJ-розв'язки для рівнянь вищих порядків за допомогою „нових" кривих Стокса, які виходять із віртуальних точок звороту. Поверхнєве дослідження звичайних WBKJ-розв'язків не дає змоги виявити такого виду точки звороту, тому Т. Аокі, Т. Каваі та Ю. Акеі застосували мікролокальний аналіз до перетворення Бореля для рівняння виду

$$P\psi = \Big(\frac{d^m}{dx^m} + q_1(x)\eta\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots + q_m(x)\eta^m\Big)\psi = 0,$$

де $q_j(x)$–поліноми, η–додатнє велике число.

1.2 Методи побудови асимптотики розв'язку систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точками звороту

В теорії диференціальних рівнянь важливе місце займають системи диференціальних рівнянь з малим параметром біля похідних, які ще називають системами сингулярно збурених диференціальних рівнянь (ССЗДР). Дослідженню таких систем присвячена значна кількість наукових публікацій, розроблені різноманітні методи побудови розв'язків цих систем. Асимптотичну теорію систем першого порядку виду:

$$\varepsilon^{\sigma}\overrightarrow{y}' = A(z,\varepsilon)\overrightarrow{y}, \tag{1.3}$$

де $A(z,\varepsilon)$–матриця розмірності $n \times n$, яка має асимптотичне розвинення

$$A(z,\varepsilon) \approx A_0(z) + \varepsilon A_1(z) + \cdots ,$$

як зазначено в роботі [43], можна поділити на три класи:

- класична теорія систем без точок звороту;
- теорія систем, які підлягають пониженню порядка або блочній діагоналізації;
- теорія систем з точками звороту, які не можна спростити.

Розвиток асимптотичної теорії для задач, спектр виродженого оператора яких має просту структуру розпочався з робіт Шльозінгера [105], Біркгофа [5]. В цих роботах було розглянуто випадок, коли корені характеристичного рівняння залишались простими на всьому відрізку, який пробігає змінна. Подальші дослідження і узагальнення попередніх результатів відображені в роботах Я.Д. Тамаркіна. Зокрема, в роботі [106] він частково розглянув випадок кратних коренів характеристичного рівняння і побудував асимптотичний розв'язок для лінійної системи другого порядку. Недоліком теорії Шльозінгера-Біркгоффа-Тамаркіна був той факт, що їх дослідження були зосереджені на однорідних лінійних диференціальних рівняннях [31].

Дослідження задач, які зводяться до систем диференціальних рівнянь, що містять малі параметри біля похідних з'явились в роботах А.М. Тихонова [26] для систем виду:

$$\begin{aligned} &\mu\tfrac{dz}{dt} = F(z, y, t), \\ &\tfrac{dy}{dt} = f(z, y, t), 0 \le t \le 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

z та y–вектор-функції довільної розмірності.

Задачі на побудову асимптотичного наближення для $z(t, \mu)$, яке б було придатне на всьому відрізку $[0, T]$, а також задача на побудову наближення більш високої точності для системи (1.4) були успішно розв'язані ученицею А.М. Тихонова - А.Б. Васильєвою [107]. Нею був розроблений ефективний алгоритм побудови рівномірного асимптотичного розв'язку для (1.4), а також для систем виду

$$\begin{aligned} &\mu\tfrac{dz}{dt} = -a(t)z + b(t)y + g(t), \\ &\tfrac{dy}{dt} = c(t)z + d(t)y + h(t), \end{aligned} \tag{1.5}$$

де $t \in [0, T]$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$–аналітичні функції.

Зауважимо, що метод погранфукцій, розроблений А.Б. Васильєвой та її учнями, наприклад, В.Ф. Бутузовим вдало застосовується не тільки для задач типу (1.5), але й для інтегро-диференціальних рівнянь, диференціально-різницевих рівнянь, рівнянь в частинних похідних [26]. Продовженням досліджень в цьому напрямку стала робота [27], в якій автори описують методику дослідження крайових задач для звичайних рівнянь, а потім узагальнюють одержані результати на n-мірний випадок. Для крайових задач рівнянь в частинних похідних розроблено метод Вішика-Люстерника, який було описано в роботі [27]. Методи Вішика-Люстерника і Васильєвой дозволяють асимптотично розв'язувати крайові задачі, в яких розв'язки експоненційіально спадають у напрямку від границі [77].

Зауважимо, що асимптотичне подання розв'язків сингулярно збурених задач визначається поведінкою коренів характеристичного рівняння, яке їм відповідає. Розвиток асимптотичних методів в теорії систем диференціальних рівнянь відбувався від випадку простого спектра характеристичного рівняння до більш складних задач з кратними і знакозміннимим коренями.

Асимптотична теорія побудови асимптотичних розв'язків систем з точками звороту є узагальненням досліджень сингулярно збурених диференціальних рівнянь в скалярній формі. Розглянемо основні методи, описані в роботах

[6, 77, 100, 102, 112].

Головна ідея досліджень В.Вазова зводиться до ідеї Р. Лангера і узагальнюється на системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь [113]. У своїй роботі [110] він зауважує, що задачі пов'язані із системами сингулярно збурених диференціальних рівнянь, які мать найпростішу форму, придатні для найпростіших перетворень лише в окремих випадках. Тому в цій роботі він намагається спростити, а не одержати повний розв'язок системи вигляду

$$\varepsilon\frac{dy}{dz} = A(z,\varepsilon)y. \tag{1.6}$$

Тут $A(z,\varepsilon)$–матриця розмірності $n\times n$ ід двох змінних z і ε, які визначаться нерівностями вигляду

$$|z|\leq z_0, \qquad |\varepsilon|\leq \varepsilon_0, \qquad |arg\varepsilon|\leq\theta,$$

і яка має асимптотичне розвинення

$$A(z,\varepsilon)\sim\Sigma_0^\infty A_r(z)\varepsilon^r, \qquad \varepsilon\to 0$$

з голоморфними коефіцієнтами.

Застовуючи теорему Сибуйя, і перетворення вигляду

$$y = T(z,\varepsilon)y^*,$$

яке переводить систему (1.6) у систему

$$\varepsilon\frac{dy^*}{dz} = A^*(z,\varepsilon)y^*,$$

при чому матриці $A^*_j(z,\varepsilon)$ має аимптотичні розкладання по ε з голоморфними коефіцієнтами рівномірно збіжними в області, яка визначається нерівностями. Вазов доводить, що рівняння вигляду (1.6) завжди можна звести до випадку, коли $A(0,0)$ є нільпотентною Жорданово матрицею у спрощеній формі

$$\varepsilon\frac{du}{dz} = [B(z) + \varepsilon^{m+1}\tilde{B}_m(z,\varepsilon)]u,$$

де m –довільне ціле, $\tilde{B}_m(z,\varepsilon)$ обмежена в заданій області, $B(z)$–спрощена

матриця
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 1 \\ a_n(z)z & 1 & 0 & \ldots a_2(z)z & 0 \end{pmatrix},$$
де $a(z)$ голоморфні у $|z| \leq z_1$.

Основний результат, який отримав В. Вазов у своїх дослідженнях можна сформулювати наступним чином. У системі виду
$$\varepsilon y'(x,\varepsilon) - A(x)y(x,\varepsilon) = h(x,\varepsilon),$$
де $\varepsilon \to 0$, $x\epsilon[0,l]$, $A(x) = (a_{ij(x)})^2_{i,j=1}$–відома матриця другого порядку, $h(x) = colomn(h_1(x), h_2(x))$–задана вектор-функція, $y(x) = colomn(y_1(x,\varepsilon), y_2(x,\varepsilon))$. Матрицю $A(x)$ відомими перетвореннями можна звести до матриці вигляду
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

В такому випадку можна побудувати асимптотику розв'язку однорідної системи диференціальних рівнянь зі спрощеною матрицею. Але у [111] головною ідеєю таких перетворень є те, що „не обмежуючи загальності, можна вважати $trA(x,0) \equiv 0$". Як зазначається, у [9] такі перетворення і умовності допустимі лише для дослідження однорідної системи. Якщо мова йде про неоднорідну систему, то є сенс накладати більш складні умови
$$trA(x,0) \equiv a_{11}(x) + a_{22}(x) \equiv 0,$$
$$detA(0,0) = 0, \qquad detA'(0,0) \neq 0.$$

Вагомий внесок у дослідження систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точками звороту належить М.І. Шкілю [102, 103] та його учням. В роботі [104] було встановлено достатню умову для побудови формального розв'язку системи вигляду
$$\varepsilon^{\frac{1}{r}} \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon) \cdot x, \tag{1.7}$$

при умові, що вона містить точку звороту. При чому $A(t,\varepsilon)$–матриця розмірності $n\times n$, для якої існує розкладання вигляду

$$A(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i A_i(t),$$

де $A(t,\varepsilon)$–шуканий n–вимірний вектор; $r\epsilon$ $\mathbb{N}$, $t\epsilon$ $[0,L]$. Наслідки досліджень, проведених у [104] було сформульовано у вигляді теореми:

Теорема. Якщо виконуються умови:

$$\forall i=\overline{0,\infty},\qquad A_i(t)\epsilon C^{\infty}[0,L],\qquad L<\infty,$$

система (1.7) має на $[0,L]$ точку звороту; існує таке число $K>0$, що корені рівняння

$$det\|A_0(t)+\varepsilon A_1(t)+\ldots+\varepsilon^k A_k(t)-\lambda E\|=0,$$

$\forall$ t $[0,L]$ та ε ϵ $(0,L]$ прості. Тоді існує формальний вектор розв'язок системи (1.7) вигляду

$$\varphi(t,\varepsilon,h)=U(t,\varepsilon,h)\Psi(t,\varepsilon,h),$$

де U–$n\times n$–матриця; Ψ–n-вимірний вектор, що визначається системою диференціальних рівнянь

$$h\frac{d\psi(t,\varepsilon,h)}{dt}=\Lambda(t,\varepsilon,h)\Psi(t,\varepsilon,h);$$

тут Λ–діагональна $n\times n$-матриця, що разом з $U(t,\varepsilon,h)$ зображується рядом за степенями h:

$$U(t,\varepsilon,h)=\Sigma_{s=0}^{\infty}h^sU_s(t,\varepsilon),\qquad \Lambda(t,\varepsilon,h)=\Sigma_{s=0}^{\infty}h^s\Lambda_s(t,\varepsilon),\qquad h=\varepsilon^{\frac{1}{r}}.$$

Запропонований метод було розвинуто Г.В. Завізіоном у [114] і одержано оцінку

$$\|X-X_m\|\le const\varepsilon^{m+1-\frac{n+1}{n}},$$

де X–точний розв'язок системи (1.7), X_m–m-наближення [31].

При цьому вимагалось виконання умови

$$Re\Lambda_m<0.$$

Інший підхід до розв'язання вказаної проблеми запропоновано В.П. Яковцем і розвинено у роботах Ю.І. Карпенка [48]. Специфіка цього методу полягає у тому, що розв'язок можна записати за допомогою розбиття одиниці. При доведенні асимптотичного характеру накладається умова:

$$Re\Lambda_0 < 0.$$

В обох випадках асимптотика розв'язку рівняння виражена в елементарних функціях.

Значний внесок у розвиток асимптотичних методів при дослідження задач нелінійної механіки зробила всесвітньовідома Київська математична школа Крилова-Боголюбова-Митропольського-Самойленка [83–86]. Ю.О. Митропольський разом із А.М. Самойленко розробили аксіоматичну теорію методу усереднення. Цікавим є підхід А.М. Самойленко та І.Г. Ключник, які у ряді робіт [52–55, 96] запропонували асимптотичний метод інтегрування систем диференціальних рівнянь з простою і кратною точкою звороту. Для такого виду систем були отримані умови і доведено існування розв'язку шляхом зведення системи до канонічної форми з нескінченно диференційовною матрицею перетворення.

$$y' = A(x)y + A_1(x)y_1. \tag{1.8}$$

$$\varepsilon y' = (B(x)y + \varepsilon B_1)(x)y_1 + \varepsilon B_2(x)y,$$

де $y \epsilon R^p$, $y_1 \epsilon R^2$, матриці $A(x)$, $A_1(x)$, $B(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ голоморфні при

$$|x| \leq x_0.$$

$B(x)$–матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що питання кратної точки звороту раніше розглядалось такими авторами як Р. Лангер, Ф. Олвер, В. Бобочко [6]. За допомогою перетворення

$$\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x,\varepsilon) \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

система (1.8) зводиться до системи вигляду

$$U' = C_1(\varepsilon)V, \qquad \varepsilon v' = B(x)C + \varepsilon D_1(\varepsilon)U,$$

де $\Phi(x,\varepsilon)$–блочна матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} U(x,\varepsilon) & V_1(x,\varepsilon) \\ U_1(x,\varepsilon) & V(x,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

яка містить нескінченно диференційовні матриці $C_1(\varepsilon)$, $D_1(\varepsilon)$ при $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$.

Для систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь виду

$$\varepsilon^2 W''(x,\varepsilon) - A(x)W(x,\varepsilon) = h(x),$$

М.О. Перестюк, В.М. Бобочко запропонували ефективний метод побудови рівномірної асимптотики розв'язку при наявності точок звороту [6]. Але, одержані результати не було узагальнено на системи рівнянь першого порядку

$$\varepsilon W'(x,\varepsilon) - A(x)W(x,\varepsilon) = h(x),$$

Отже, є сенс узагальнити одержані результати на випадок систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь, що містять як парні так і непарні похідні.

1.3 Класичні підходи до асимптотичних методів

1.3.1 Перетворення Ліувілля–Гріна

Розглянемо рівняння Ліувілля

$$L_\varepsilon y(x,\lambda) = y''(x,\lambda) + [\lambda^2 r(x) + q(x)]y(x,\lambda) = 0, \tag{1.9}$$

коли $l \to +\infty$, $\quad x \in I = [0,l]$, де $r(x), q(x) \in C^\infty[I]$.

Замість незалежної та залежної змінних x і y введемо відповідно нові не-залежну та залежну змінні z і V згідно з формулами

$$z = \varphi(x), \quad V(z,l) = \Psi(x) \cdot y(x,l), \tag{1.10}$$

де функції $\varphi(x)$ та $\Psi(x)$ підлягають визначенню. Перетворення (1.10) називають ***перетворенням Ліувілля–Гріна***.

З врахуванням перетворення (1.10) рівняння (1.23) перейде в рівняння

$$V''(z,l) + \frac{1}{[\varphi'(x)]^2}\left(\varphi''(x) - \frac{2\varphi'(x)\Psi'(x)}{\Psi(x)}\right)V'(z,l) +$$

$$+\frac{1}{[\varphi'(x)]^2}\left[l^2 r(x) + q(x) - \Psi(x)\left(\frac{\Psi'(x)}{\Psi^2(x)}\right)'\right]V(z,l) = 0. \tag{1.11}$$

Для того, щоб у рівнянні (1.11) позбутись першої похідної, треба, щоб виконувалась рівність

$$\varphi''(x) - \frac{2\varphi'(x)\Psi'(x)}{\Psi(x)} = 0. \tag{1.12}$$

Нехай $r(x) > 0$. Тоді для одержання найпростішого модельного рівняння, що відповідає рівнянню (1.11), можна взяти $[\varphi'(x)]^2 = \pm r(x)$. Оскільки з умови $r(x) > 0$ випливає, що корені характеристичного рівняння будуть уявними, то для отримання модельних функцій синус і косинус потрібно взяти знак $+$, тобто взяти рівняння $[\varphi'(x)]^2 = r(x)$. З цієї умови і (1.12) визначимо функції

$$\varphi(x) = \int \sqrt{r(x)}dx, \qquad \Psi(x) = [r(x)]^{1/4}. \tag{1.13}$$

Перетворення (1.13) і є перетворення Ліувілля–Гріна у випадку, коли $r(x) > 0$ для всіх $x \in [-l; l]$.

Таким чином, за допомогою перетворення Ліувілля–Гріна (1.13) рівняння (1.11) зводиться до рівняння вигляду

$$V''(z) + \lambda^2 V(z) = \delta V(z), \tag{1.14}$$

де

$$\delta = -\frac{1}{[\varphi'(x)]^2}\left[q(x) - \Psi(x)\left(\frac{\Psi'(x)}{\Psi^2(x)}\right)'\right] \equiv \frac{r''(x)}{4r^2(x)} - \frac{5r'^2(x)}{16\,r^3(x)} - \frac{q(x)}{r(x)}.$$

Оскільки δ мале в порівнянні з великим параметром $\lambda \to +\infty$, то у першому наближенні функцію $V(z)$ можна взяти як розв'язок однорідного рівняння (1.14).

Отже, якщо $r(x) > 0$, то маємо нульове наближення

$$y(x, \lambda) \cong \frac{1}{\sqrt[4]{r(x)}}\Big\{C_1 \cos[\lambda \int \sqrt{r(x)}dx] + C_2 \sin[\lambda \int \sqrt{r(x)}dx]\Big\} \equiv$$

$$\equiv C_1 Y_1(x, \lambda) + C_2\, Y_2(x, \lambda). \tag{1.15}$$

Коли $r(x) < 0$, то маємо два дійсні корені характеристичного рівняння, а отже, регуляризуючу функцію вибираємо як розв'язок рівняння $[\varphi'(x)]^2 = -r(x)$ з початковою умовою $f(0) = 0$. У цьому випадку можна отримати нульове наближення

$$y(x, \lambda) \cong \frac{1}{\sqrt[4]{-r(x)}}\Big\{C_3 \exp[\lambda \int \sqrt{-r(x)}dx] +$$

$$+ C_4 \exp[-\lambda \int \sqrt{-r(x)}dx]\Big\} \equiv C_3 Y_3(x, l) + C_4 Y_4(x, \lambda). \tag{1.16}$$

Ідея перетворення Ліувілля–Гріна полягала в тому, щоб отримати неоднорідне рівняння (1.14), яке має такі властивості:

1) відома фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння, яке пізніше почали називати модельним рівнянням;

2) правою частиною неоднорідного рівняння можна знехтувати в нульовому наближенні.

Формальні розвинення розв'язку неоднорідного рівняння (1.23) будуються у вигляді рядів

$$Y_k(x, l) = \exp\{\lambda \varphi_k(x)\} Z(x, l) \equiv \exp\{\lambda \varphi_k(x)\} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n z_{kn}(x), \tag{1.17}$$

де функції $f_k(x)$, $k = 1, 2$, і $Z(x, l)$ підлягають визначенню.

Підставимо (1.17) у рівняння (1.23). Маємо

$$\exp\{\lambda f_k(x)\} \cdot \{\lambda^2 \ [[\varphi_k'(x)]^2 + r(x)]\, Z(x, l) + \lambda\big[2\varphi_k'(x) Z'(x, \lambda) +$$

$$+\varphi_k''(x)Z(x,\lambda)\big] + Z''(x,\lambda) + q(x)Z(x,\lambda)\big\} \equiv 0. \tag{1.18}$$

Перетворення Ліувілля–Гріна наводить на думку, що нульове наближення у розв'язку (1.17) повинно співпадати з результатами цього перетворення. Необхідно, щоб у рівності (1.18) множник біля найбільшого степеня перетворився в тотожний нуль. Для цього скористаємось довільністю функції $f(x)$, тобто виберемо її як розв'язок рівняння

$$[\varphi'(x)]^2 = -r(x). \tag{1.19}$$

Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Нехай $r(x) < 0$. Тоді розв'язками диференціального рівняння (1.19) будуть такі дві функції:

$$\varphi_{1,2}(x) = \pm \int \sqrt{-r(x)}dx.$$

Для визначення коефіцієнтів $z_{kn}(x)$ одержимо таку рекурентну серію диференціальних рівнянь:

$$\begin{gathered} ddz_{k0}(x) \equiv 2\varphi_k'(x)z_{k0}(x) + \varphi_k''(x)z_{k0}(x) = 0, \\ ddz_{kn}(x) = q(x)z_{k(n-1)}(x) - z''_{k(n-1)}(x), \quad n \geq 1. \end{gathered} \tag{1.20}$$

Підставимо розв'язки диференціальних рівнянь (1.20) у рівність (1.17). Отримано наступні два формальні розв'язки рівняння (1.23):

$$\begin{gathered} y_k(x,\lambda) \cong \exp\big\{(-1)^k\lambda \int \sqrt{-r(x)}dx\big\} \sum_{r=0}^{+\infty} \bigg\{ \frac{C_{kr}}{\sqrt[4]{-r(x)}} + \\ +\frac{1}{2}\int \left[q(x)z_{k(n-1)}(x) - z''_{k(n-1)}(x)\frac{1}{\sqrt[4]{-r(x)}} \right] dx \bigg\}. \end{gathered} \tag{1.21}$$

Бачимо, що нульове наближення розв'язків (1.21) співпадає з відповідним нульовим наближенням [90] .

Випадок 2. Нехай $r(x) > 0$. Тоді, за аналогією з попереднім випадком, визначимо єдину регуляризуючу функції $\varphi(x) = \int \sqrt{-r(x)}dx \equiv i \int \sqrt{r(x)}dx$

і одержимо загальний розв'язок диференціального рівняння (1.23) вигляду

$$y(x,\lambda) \cong \cos\{l\int\sqrt{r(x)}dx\}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big\{\frac{C_1n}{\sqrt[4]{r(x)}}+\int\Big[q(x)z_{1(n-1)}(x)-$$

$$-z''_{1(r-1)}(x)\frac{1}{\sqrt[4]{r(x)}}\Big]dx\Big\}+\sin\Big\{l\int\sqrt{r(x)}dx\Big\}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big\{\frac{C_2n}{\sqrt[4]{r(x)}}+$$

$$+\int\Big[q(x)\,z_{2(n-1)}(x)-z''_{2(r-1)}(x)\frac{1}{\sqrt[4]{r(x)}}\Big]dx\Big\}. \qquad (1.22)$$

Знову, як і в першому випадку, бачимо, що нульове наближення загального розв'язку (1.22) співпадає з відповідним нульовим наближенням [90].

Зауваження 1. Для одержання формальних розв'язків (1.21) і (1.22) було використано методику Шлезінгера–Біркгоффа–Ноайона [5, 94, 105].

Метод Дородніцина

Метод, описаний у [30], у деякій мірі ізольований від інших методів побудови рівномірного асимптотичного розв'язку сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точками звороту.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\mathbf{L_e}y(x,l) = y''(x,l)+[l^2r(x)+q(x)]y(x,l)=0, \qquad (1.23)$$

де $\lambda \to +\infty$, а

$$r(x), q(x) \in C^\infty[-l;l], \quad r(x)=x\tilde{r}(x), \quad \tilde{r}(x)>0, \quad x\in I=[-l;l]. \qquad (1.24)$$

Розв'язок рівняння (1.23) за умов (1.24) шукаємо у вигляді

$$y=\sum_{k=1}^{2}A_k(x)U_k[l^pf(x)] \equiv \sum_{k=1}^{2}A_k(x)U_k(s) \equiv \sum_{k=1}^{2}Y_k(x,l), \qquad (1.25)$$

де $U_k[\lambda^pf(x)] \equiv U_k(s)$, $k=1,2$ – два лінійно незалежні розв'язки рівняння

$$\mathcal{T}U(s) = U''(s)+sU(s)=0, \qquad (1.26)$$

які відповідно задовольняють початковим умовам

$$U_1(0) = U_2'(0) = 1, \quad U_1'(0) = U_2(0) = 0. \tag{1.27}$$

Рівняння (1.26) називається рівнянням Ейрі–Дородніцина, а розв'язки задачі (1.26)–(1.27) – функціями Ейрі–Дородніцина [30].

Підставимо $Y_k(x,\lambda)$ у рівняння (1.23). Отримаємо рівність

$$\mathbf{L}_\varepsilon Y_k(x,\lambda) \equiv A_k(x)\left\{\lambda^{2p}[\varphi'(x)]^2 U_k''(s) + \lambda^2 r(x) U_k(s)]\right\}+$$

$$+\lambda^p U_k'(s)\cdot[2A_k'(x)\varphi'(x) + A_k(x)\varphi(x)]+ \tag{1.28}$$

$$+U(s)\cdot[A_k''(x) + q(x)A_k(x)] \equiv 0.$$

Виконаємо наступні перетворення:

$$\lambda^{2p}\,[f'(x)]^2 U_k''(s) + \lambda^2 r(x) U_k[\lambda^p f(x)] \equiv$$

$$\equiv \lambda^{2p}[f'(x)]^2\big\{U_k''(s) + \frac{\lambda^{2(1-p)} r(x)}{\lambda^{2p}\,[\varphi'(x)]^2} U_k(s)\big\}. \tag{1.29}$$

Для того щоб вираз (1.29) тотожно дорівнював нулю, функцію $\varphi(x)$ потрібно вибрати таким чином, щоб у фігурних дужках виразу (1.29) ми мали оператор Ейрі–Дородніцина. Для одержання бажаного потрібно ввести позначення

$$\frac{\lambda^{2(1-p)} r(x)}{[\varphi'(x)]^2} \equiv s \equiv \lambda^p \varphi(x).$$

З цієї рівності знайдемо показник $p = 2/3$, а функцію $\varphi(x)$ визначимо як розв'язок задачі

$$[\varphi'(x)]^2 \cdot \varphi(x) = r(x), \qquad f(0) = 0. \tag{1.30}$$

Розв'язком цієї задачі є функція

$$\varphi(x) = \left\{\frac{3}{2}\int\limits_0^x \sqrt{r(x)}dx\right\}^{2/3}. \tag{1.31}$$

З визначенням показника $p = 2/3$ та функції $f(x)$ у вигляді (1.31), ми позбулись у тотожності (1.28) найбільшого доданка. Далі в цій тотожності позбудемось доданків з першою похідною. З цією метою скористаємось довільністю функцій $A_k(x)$, тобто виберемо їх як розв'язки диференціальних рівнянь

$$2\varphi'(x)A_k'(x) + A_k(x)\varphi(x), \quad k = 1, 2. \tag{1.32}$$

З врахуванням (1.31) розв'язками рівнянь (1.32) є функції

$$A_k(x) = \frac{C_k}{\sqrt{\varphi'(x)}}, \quad k = 1, 2, \tag{1.33}$$

де C_k – довільні сталі.

Висновок 1. Скориставшись довільністю функцій $\varphi(x)$ і $A_k(x)$, які містяться у формулі (1.25), ми в тотожності (1.28) змогли позбутись доданків з множниками λ^2 і $\lambda^{2/3}$. Оскільки у формулі (1.25) більше немає довільних функцій, то в рівності (1.28) ми не зможемо позбутись доданку $U(s)\cdot[A_k''(x)+q(x)A_k(x)]$. Ця обставина і є одним з недоліків запропонованого методу.

Не маючи більше довільності в побудові розв'язку рівняння (1.23), Дородніцин пішов таким шляхом.

Нехай функція $q(x)$ така, що мвиконується рівність

$$q(x) \equiv q_0(x) \equiv \frac{-A_k''(x)}{A_k(x)}.$$

Тоді в тотожності (1.28) знищаться всі доданки, а отже, функція (1.25) буде точним загальним розв'язком шуканого рівняння (1.23).

Оскільки це дуже частинний випадок, то для побудови наступних наближень розв'язку рівняння (1.23), Дородніцин використав ту саму ідею, що і Лангер, яку він реалізував таким чином.

Запишемо рівняння (1.23) у вигляді

$$\mathbf{L_0}y(x,\lambda) \equiv y''x + [\lambda^2 r(x) + q_0(x)]y(x,\lambda) = -f(x)y(x,\lambda), \tag{1.34}$$

де $f(x) \equiv q(x) - q_0(x)$.

Для цього диференціального рівняння відома фундаментальна система розв'язків ((1.25), (1.31), (1.33)). До певного часу будемо вважати, що права частина рівняння (1.34) – відома функція. Тоді розв'язок цього рівняння шукаємо методом послідовних наближень, тобто візьмемо

$$\mathbf{L_0} y_0(x,\lambda) = 0, \qquad \mathbf{L_0} y_{n+1}(x,\lambda) = -f(x)\, y_n(x,\lambda).$$

Два лінійно незалежні розв'язки рівняння (1.34) будуємо у вигляді

$$Z_k(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{f'(x)}} \cdot U_k[\lambda^{2/3} f(x)] + u_k(x,\lambda) \equiv$$

$$\equiv Y_k(x,\lambda) + u_k(x,\lambda). \tag{1.35}$$

Будемо вимагати, щоб $u_k(0,\lambda) = u_k'(0,\lambda) = 0, \quad k = 1,2.$

Підставимо (1.35) у рівняння (1.34). Врахувавши відому фундаментальну систему розв'язків рівняння (1.34), для визначення невідомих доданків $u_k(x,l)$ отримаємо диференціальні рівняння

$$\mathbf{L_0} u_k(x,\lambda) = -f(x) \cdot [Y_k(x,\lambda) + u_k(x,\lambda)], \quad k = 1,2. \tag{1.36}$$

Зведемо диференціальні рівняння (1.36) до інтегральних рівнянь Вольтера. В результаті маємо такі інтегральні рівняння:

$$u_1(x,\lambda) - \lambda^{-2/3} \int_0^x K(x,\xi,l)\, u_1(\xi,\lambda) d\xi =$$

$$= \lambda^{-2/3} \int_0^x K(x,\xi,\lambda)\, Y_1(\xi,\lambda) d\xi, \tag{1.37}$$

$$u_2(x,\lambda) - l^{-2/3} \int_0^x K(x,\xi,\lambda)\, u_2(\xi,\lambda)\, d\xi =$$

$$= l^{-2/3} \int_0^x K(x,\xi,\lambda)\, Y_2(\xi,\lambda) d\xi. \tag{1.38}$$

Тут

$$K(x,\xi,\lambda) \equiv \left[Y_1(x,\lambda)\, Y_2(\xi,\lambda) - Y_2(x,\lambda)\, Y_1(\xi,\lambda)\right] \cdot f(\xi).$$

Методом послідовних наближень будуються розв'язки інтегральних рівнянь (1.37), (1.38) у вигляді таких збіжних рядів:

$$u_k(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} V_{kn}(x,\lambda), \quad k = 1,2, \tag{1.39}$$

де

$$V_{k0}(x,\lambda) \equiv l^{-2/3} \int\limits_0^x K(x,\xi)\, Y_k(\xi) d\xi, \quad k = 1,2, \tag{1.40}$$

$$V_{k(n+1)}(x,l) = \lambda^{-2/3} \int\limits_0^x K(x,\xi) V_{kn}(\xi) d\xi, \quad k = 1,2. \tag{1.41}$$

Далі дамо оцінку поправок $u_k(x,l)$. Розглянемо окремо випадки, коли $x > 0$ і $x < 0$.

Нехай $x > 0$. Потрібно оцінити інтеграли, які містяться у формулах (1.39)–(1.41). За допомогою певних, неочевидних, перетворень, автор одержує наступні оцінки:

$$\int\limits_0^x Y_1^2(\xi) f(\xi) d\xi = \gamma_k \cdot \lambda^{-1/3} \int\limits_0^x \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{r(\xi)}} +$$

$$+\lambda^{-2/3} \frac{f(x)}{[f'(x)]^2}\, V_{11}[\lambda^{2/3} f(x)] + o(\lambda^{-2/3}), \tag{1.42}$$

$$\int\limits_0^x Y_2^2(\xi) f(\xi) d\xi = \gamma_k \cdot \lambda^{-1/3} \int\limits_0^x \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{r(\xi)}} +$$

$$+\lambda^{-2/3} \left\{ \frac{f(x)}{[f'(x)]^2} V_{22}[l^{2/3} f(x)] - \frac{f(0)}{[f'(0)]^2} \right\} + o(l^{-2/3}), \tag{1.43}$$

$$\int\limits_0^x Y_1(\xi) Y_2(\xi) f(\xi) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{3}} l^{-1/3} \int\limits_0^x \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{r(\xi)}} +$$

$$+\lambda^{-2/3} \frac{f(x)}{[f'(x)]^2} V_{12}[l^{2/3} f(x)] + o(\lambda^{-2/3}), \tag{1.44}$$

де

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt[3]{3}}{2\pi}, \qquad \gamma_2 = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{2\pi\sqrt[3]{3}},$$

а

$$V_{11}(s)=\int_0^s\big[U_1^2(s)-\gamma_1 s^{-1/2}\big]ds;\quad V_{22}(s)=1+\int_0^s\big[U_2^2(s)-\gamma_1 s^{-1/2}\big]ds;$$

$$V_{12}(s)=\int_0^s\big[U_1(s)U_2(s)-\frac{1}{2\sqrt{3s}}\big]ds. \tag{1.45}$$

Врахувавши оцінки (1.39)–(1.41) та (1.42)–(1.45), отримаємо наступні формули:

$$V_{10}(x,l)=\lambda^{-1}\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}Y_1(x)-\gamma_1 Y_2(x)\right]\int\limits_0^x\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{r(\xi)}}+$$

$$+l^{-4/3}\left[Y_1(x)V_{12}(\lambda^{-2/3})-Y_2(x)V_{11}(l^{-2/3})\right]\frac{f(x)}{[f'(x)]^2}+o(\lambda^{-4/3}Y(x)),$$

$$V_{20}(x,l)=\lambda^{-1}\left[\frac{-1}{2\sqrt{3}}Y_2(x)+\gamma_2\,Y_1(x)\right]\int\limits_0^x\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{r(\xi)}}+$$

$$+\lambda^{-4/3}\left\{\left[Y_1(x)V_{22}(\lambda^{-2/3})-Y_2(x)V_{12}(\lambda^{-2/3})\right]\frac{f(x)}{[f'(x)]^2}-\right.$$

$$\left.-Y_1(x)\frac{f(0)}{[f'(0)]^2}\right\}+o(l^{-4/3}Y(x)),$$

де $Y(x)=\sqrt{Y_1^2(x)+Y_2^2(x)}$.

Надалі в [30] були наведені такі оцінки:

$$V_{kn}(x,\lambda)=O\big(\lambda^{\frac{-(6+2n)}{3}}\big),\quad k=1,2;\quad n\in N. \tag{1.46}$$

Оскільки нульові наближення $V_{k0}(x)$ обчислені з точністю до величин порядку $o\big(\lambda^{-4/3}Y(x)\big)$, а наступні наближення мають порядок не меньше $O(\lambda^{-2})$ (див.(1.46)), то можемо записати в кінцевому вигляді побудовану асимптотику ФСР рівняння (1.23). Маємо

$$Z_1(x)=\frac{U_1(\lambda^{2/3}f(x))}{\sqrt{f'(x)}}+$$

$$+\frac{\lambda^{-1}}{\sqrt{f'(x)}}\cdot\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}U_1(l^{2/3}\varphi(x))-\gamma_1 U_2(l^{2/3}f(x))\right\}\int\limits_0^x\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{r(\xi)}}+$$

$$+\frac{\lambda^{-4/3}fx)}{\sqrt{f'^5(x)}}\Big\{U_1\ll V_{12}\ll- \tag{1.47}$$

$$-U_2\ll V_{11}\ll\Big\}+o[\lambda^{-4/3}U],$$

$$Z_2(x)=\frac{U_2(\lambda^{2/3}f(x))}{\sqrt{f'(x)}}+$$

$$+\frac{\lambda^{-1}}{\sqrt{f'(x)}}\cdot\left\{\frac{-1}{2\sqrt{3}}U_1(\lambda^{2/3}\varphi(x))+\gamma_2 U_1(\lambda^{2/3}f(x))\right\}\int\limits_0^x\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{r(\xi)}}+$$

$$+\frac{\lambda^{-4/3}f(x)}{\sqrt{f'^5(x)}}\Big\{U_1\ll V_{22}\ll- \tag{1.48}$$

$$-U_2\ll V_{12}\ll-\frac{f(0)}{f'^2(0)}\Big\}+o[l^{-4/3}U].$$

При необхідності можна записати і відповідні асимптотичні формули для похідних від цих функцій. Зауважимо тільки, що ці формули не простіші від відповідних формул (1.47) і (1.48).

З використанням цих формул було складено довідник [99], в якому наведено таблиці числових значень функцій Ейрі–Дородніцина і розглянуто такий приклад.

Знайти розв'язок рівняння $y''(x,\lambda)+\lambda^2 x(1+x^2)y(x,\lambda)=0$ для значень параметра $l=20$, що задовольняє початкові умови $y(0)=0,\quad y'(0)=1$. Згідно з формулами, наведеними в [30], було побудовано розв'язок

$$y(x,20)=\frac{0,13572}{\sqrt{\varphi'(x)}}U_2[20^{2/3}\varphi(x),1].$$

З використанням отриманої формули, знайдені значення розв'язку цієї задачі для $0<x<0,502$.

Висновок 2. Асимптотичні формули (1.47) і (1.48) виконуються тільки з точністю до величин порядку $o[\lambda^{-4/3}U\lambda^{2/3}\varphi(x)]$, причому вони є досить громіздкими. Недоліком цього методу є ще той факт, що коефіцієнти $V_k(x,\lambda)$

залежать від параметра λ і на практиці їх визначають з певною точністю відносно параметра λ.

Надалі цей метод не отримав розвинення і узагальнення. Проте, ця праця[30] заслуговує на увагу через те, що:

1) у ній були введені, описані та вивчені властивості нових модифікацій функцій Ейрі;

2) хоча з певною точністю, на цей час тільки у цій праці [30] побудована рівномірна асимптотика розв'язку рівняння Ліувілля з кратною точкою звороту.

Побудовані формальні розв'язки рівняння (1.23) дають погані наближення в тому випадку, коли коєфіцієнт $r(x)$ прямує до нуля. Іншими словами, ці розв'язки не можна застосовувати в теорії та на практиці в околі нулів функції $r(x)$.

1.3.2 Метод регуляризації (метод Ломова)

Фундаментом методу побудови рівномірного асимптотичного розв'язку сингулярно збурених рівнянь з точками звороту, запропонованого в монографії [6], є метод регуляризації, розроблений С.О. Ломовим для досить широкого класу задач із стабільним спектром виродженого оператора [77].

Розглянемо задачу [77]

$$\begin{gathered}\mathbf{L}_\varepsilon y(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^6 y''(x,\varepsilon) + [xk(x) + \varepsilon^3 p(x)]y(x,\varepsilon) = h(x),\\ y(0,\varepsilon) = y^0, \qquad y'(0) = y^1,\end{gathered} \tag{1.49}$$

коли $\varepsilon \to +0$, $k(x), p(x), h(x) \in C^\infty[0,a]$. Задачу будемо досліджувати у випадку, коли $k(x) > 0$ і $h(0) \neq 0$. В своїх дослідженнях С.О. Ломов вперше звернув увагу на те, що у випадку, коли $h(0) \neq 0$, то розв'язок задачі (1.49) необмежено зростає, коли $\varepsilon \to +0$. Проте, якщо на початкові умови накласти певні обмеження, то розв'язок цієї задачі вже буде обмеженим відносно малого параметра $\varepsilon > 0$.

Оскільки точка $\varepsilon = 0$ є особливою точкою для рівняння (1.49), то вона в розв'язкові задачі (1.49) породжує деякі ІОФ. Для їх виділення, описання і збереження як єдиних цілих, поряд із незалежною змінною $x \in I = [0,a]$, введемо у розгляд нову змінну t згідно із формулою $t = \varepsilon^{-2}\varphi(x)$, де регуляризуюча функція $\varphi(x)$ є розв'язком рівняння $[\varphi'(x)]^2 \cdot \varphi(x) = r(x)$ з початковою умовою $\varphi(0) = 0$, тобто вона визначається формулою $\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\int\limits_0^x \sqrt{r(x)}dx\right)^{2/3}$. Як бачимо, регуляризуюча функція $\varphi(x)$ співпадає з відповідними регуляризуючими функціями методів Лангера і Дородніцина.

Тоді замість невідомої функції $y(x, \varepsilon)$ будемо вивчати так звану ***розширену функцію*** $\tilde{y}(x, t, \varepsilon)$ причому розширення проводимо таким чином, щоб виконувалась тотожність

$$\tilde{y}(x, t, \varepsilon) \mid_{t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)} \equiv y(x, \varepsilon), \tag{1.50}$$

яку, згідно з методом регуляризації, називають необхідною умовою цього метода.

Скориставшись тотожністю (1.50), знайдемо повні похідні по x першого та другого порядків від розширеної функції $\tilde{y}(x, t, \varepsilon)$ і підставимо їх значення в задачу (1.49). Тоді для визначення розширеної функції $\tilde{y}(x, t, \varepsilon)$ отримаємо наступну розширену задачу:

$$\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon \, \tilde{y}(x, t, \varepsilon) = h(x), \quad \tilde{y}(0, t(0), \varepsilon) = y^0, \quad \frac{d\tilde{y}(0, t(0), \varepsilon)}{dx} = y^1, \tag{1.51}$$

де

$$\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon \equiv \varepsilon^6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \varepsilon^4 \mathbf{d} \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 [\varphi'(x)]^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + xk(x) + \varepsilon^3 p(x), \tag{1.52}$$

а

$$\mathbf{d} \equiv 2\varphi'(x) \frac{\partial}{\partial x} + \varphi''(x).$$

У розширеному операторі (1.52) виділимо оператор Ейрі–Дородніцина таким чином:

$$\varepsilon^2 [\varphi'(x)]^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + xk(x) \equiv \varepsilon^2 [\varphi'(x)]^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{xk(x)}{\varepsilon^2 [\varphi'(x)]^2}\right] \equiv \varepsilon^2 [\varphi'(x)]^2 \mathcal{T}.$$

З урахуванням цієї тотожності, розширений оператор $\mathbf{L}_\varepsilon$ запишеться у вигляді

$$\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon \equiv \varepsilon^2 [\varphi'(x)]^2 \mathbf{T} + \varphi^3 p(x) + \varepsilon^4 \mathbf{d} \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^6 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{1.53}$$

Розв'язок однорідного розширеного рівняння (1.51) будуємо у вигляді ряду

$$\tilde{Z}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \sum_{k=0}^{2} \left[V_{kr}(x) U_k(t) + \varepsilon Q_{kr}(x) U_k'(t) \right], \tag{1.54}$$

де $U_k(t)$ – функції Ейрі–Дородніцина ([30]).

Підставимо ряд (1.54) у розширене рівняння (1.51). Тоді для визначення коефіцієнтів ряду (1.54) з врахуванням (1.53) і властивостей функцій Ейрі–Дородніцина, одержимо наступну рекурентну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \mathbf{d}V_{kr}(x) + p(x)\, Q_{kr}(x) = 0, \quad k = 1, 2 \\ \mathbf{D}Q_{kr}(x) - p(x)\, V_{kr}(x) = 0, \quad r = 0, 1, 2, \end{cases} \tag{1.55}$$

$$\begin{cases} \mathbf{d}V_{kr}(x) + p(x)Q_{kr}(x) = -Q_{kr}''(x), \quad k = 1, 2, \\ \mathbf{D}Q_{kr}(x) - p(x)V_{kr}(x) = V_{kr}''(x), \quad r \geq 3, \end{cases} \tag{1.56}$$

де

$$\mathbf{D} \equiv \varphi(x)\mathbf{d} \equiv 2\varphi(x)\varphi'(x)\frac{\partial}{\partial x} + [\varphi'(x)]^2 + \varphi(x)\varphi''(x). \tag{1.57}$$

Оскільки коефіцієнт біля похідної в диференціальному операторі (1.57) обертається в нуль у точці $x = 0$, то рекурентні системи (1.55) і (1.56) потрібно розв'язувати за умов $\mid Q_{kr}(0) \mid < \infty, \quad r \geq 0$. У цьому випадку існує розв'язок кожної рекурентної системи диференціальних рівнянь (1.55) і (1.56), причому функції $V_{kr}(x)$ містять довільні сталі V_{kr}^0.

Підставивши знайдені розв'язки в ряд (1.54), одержимо формальний ряд розв'язку однорідного розширеного рівняння (1.51).

Одержаний формальний розв'язок однорідного розширеного рівняння (1.51) значною мірою співпадає з відповідними результатами, які буде описано у наступному розділі. Однак автор монографії [77] не зміг правильно і повністю описати ІОФ, які містяться в розв'язку неоднорідного розширеного рівняння (1.51). Тому побудова частинного формального розв'язку неоднорідного розширеного рівняння (1.51) має недосконалий і складний вигляд. Цей недолік пізніше був усунутий одним із авторів монографії [6], про що, як вже згадувалось, буде йти мова в наступному розділі.

Не зважаючи на сказане, побудований асимптотичний розв'язок задачі

(1.49) є рівномірно неперервним на всьому відрізку $[0, a]$, що є дуже цінним у теорії сингулярно збурпених диференціальних рівнянь з точками звороту. Крім того, згадані результати стали базою для подальших узагальнень і розробки методу побудови рівномірного асимптотичного розв'язку сингулярно збурених задач з точками звороту як для скалярних, так і для векторних сингулярно збурених диференціальних рівнянь [13–21].

Тут ми схематично опишемо алгоритм побудови частинного розв'язку неоднорідного розширеного рівняння (1.51), запропонованого в [77]. Цей розв'язок будується у вигляді ряду

$$\tilde{g}(x, t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r g_r(x, t). \tag{1.58}$$

Для визначення коефіцієнтів ряду (1.58) отримаємо таку рекурентну систему диференціальних рівнянь:

$$[\varphi'(x)]^2 \mathbf{T} g_{-2}(x, t) = h(x), \tag{1.59}$$

$$[\varphi'(x)]^2 \mathbf{T} g_{-1}(x, t) = -p(x)\, g_{-2}(x, t), \tag{1.60}$$

$$[\varphi'(x)]^2 \mathbf{T} g_0(x, t) = -p(x) g_{-1}(x, t) - \mathbf{d}\frac{\partial g_{-2}(x, t}{\partial t}), \tag{1.61}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Нехай $W_k(t)$, $k = 1,\ 2,$ – два лінійно незалежні розв'язки рівняння Ейрі–Дородніцина.

Введемо позначення

$$\Psi\left(t\right) \equiv \int\limits_{\infty}^{t} K\left(t, \tau\right) d\tau, \tag{1.62}$$

де

$$K\left(t, \tau\right) \equiv W_2\left(t\right)\, W_1\left(\tau\right) - W_1\left(t\right)\, W_2\left(\tau\right).$$

Тоді частинний розв'язок рівняння (1.59) можна записати у вигляді

$$g_{-2}(x, t) = [\varphi'(x)]^{-2} h(x) \Psi(t), \tag{1.63}$$

де $\Psi(t)$ – істотно особлива функція.

З врахуванням отриманого розв'язку (1.63) обчислимо праву частину рівняння (1.60). Маємо

$$-p(x)\,g_{-2}(x,t) \equiv -p(x)[\varphi'(x)]^{-2}h(x)\Psi(t) \equiv H_{-1}(x)\Psi(t).$$

Тоді частинним розв'язком рівняння (1.60) буде функція

$$g_{-1}(x,t) = [\varphi'(x)]^{-2}H_{-1}(x)\Psi_{-1}(t),$$

де

$$\Psi_{-1}(t) \equiv \int\limits_{\infty}^{t} K\left(t,\tau\right)\Psi(\tau)d\tau. \tag{1.64}$$

За аналогією з попереднім, обчислимо праву частину рівняння (1.61) і знову знайдемо частинний розв'язок цього рівняння. Маємо

$$g_0(x,t) = H_{00}(x)\int\limits_{\infty}^{t} K\left(t,\tau\right)\ \Psi_{-1}(\tau)\,d\tau\ + H_{01}(x)\int\limits_{\infty}^{t} K\left(t,\tau\right)\Psi'(\tau)\,d\tau, \tag{1.65}$$

де $H_{0k}(x)$ – відомі, досить гладкі функції.

Продовжуючи далі розв'язувати ітераційні рівняння, бачимо, що хоча ми і отримали гладкі розв'язки ітераційних рівнянь, проте з кожним ітераційним кроком частинні розв'язки містять все нові і нові ІОФ $\Psi_k(t)$, причому їх структура надалі стає складнішою від попередніх (1.62) і (1.64). Це і є одним з основних недоліків методу побудови частинного розв'язку СЗДР з точкою звороту, запропонованого С.О. Ломовим [77].

Як вже згадувалось, С.О. Ломов вперше звернув увагу на те, що для одержання рівномірного асимптотичного розв'язку задачі Коші для рівняння (1.49) за малим параметром, необхідне спеціальне задання частини початкових умов.

Таким чином, розв'язок розширеної задачі (1.51), що відповідає СЗЗ (1.49), С.О. Ломов отримав у такому вигляді:

$$\tilde{y}\left(x,t,\varepsilon\right) \equiv \sum_{r=-2}^{+\infty} \varepsilon^r y_r\left(x,t\right) \equiv \tilde{Z}\left(x,t,\varepsilon\right) + \tilde{g}\left(x,t,\varepsilon\right),$$

де

$$y_r(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{2} \left[V_{rk}(x)\, W_k(t) + \varepsilon Q_{rk}(x)\, W_k'(t)\right] +$$

$$+ g_r(x,t) \equiv Z_r(x,t) + g_r(x,t)\,.$$

Тут $\tilde{Z}(x,t,\varepsilon)$ – загальний розв'язок однорідного розширеного рівняння (1.51); а $\tilde{g}(x,t,\varepsilon)$ – частинний розв'язок неоднорідного розширеного рівняння (1.51). Частинний розв'язок має таку структуру:

$$\begin{gathered}\tilde{g}(x,t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{-2} f_{-2}(x)\, \Psi(t) + \varepsilon^{-1} f_{-1}(x)\, \Psi_{-1}(t) + \\ + g_0(x,t) + \varepsilon g_1(x,t) + \cdots\,,\end{gathered} \tag{1.66}$$

де функція $g_0(x,t)$ визначена формулою (1.65), а наступні доданки ряду (1.66) мали ще більш складний вигляд і кожний з них теж складався з декількох доданків, причому різного порядку малості. Для описання частинного розв'язку було використано зчисленну кількість ІОФ $\Psi_r(t)$, та їх похідних, де

$$\Psi_{-1}(t) \equiv \Psi(t)\,, \quad \Psi_r(t) \equiv \int_{\infty}^{t} K(t,\tau)\, \Psi_{r-1}(\tau)\, d\tau.$$

Згадані результати і були основними в С.О. Ломова по вивченню сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точками звороту.

1.3.3 Формалізм методу фундаментальних функцій

Асимптотичний метод, за допомогою якого можна побудувати рівномірну асимптотика розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту, запропоновано у монографії [6] для рівняння Ліувілля з різними типами точок звороту. У роботах [7, 8, 12, 22–24] цим методом проінтегровані диференціальні рівнняння з малим параметром вищих порядків. Рівномірну асимптотику розв'язку неоднорідної системи двох диференціальних рівнянь з алгебраїчною точкою звороту побудовано в роботі [9]. Метод істотно обливих функцій складається з декількох етапів. Сформулюємо основні пункти цього методу для систем диференціальних рівнянь.

I етап. *Розширення сингулярно збуреної задачі.*

В сингулярно збуреній системі

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = H(x), \tag{1.67}$$

з точкою звороту поряд із незалежною змінною x вводиться нова вектор-змінна $t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x)$. Тоді замість шуканої вектор-функції $Y(x,\varepsilon)$ вивчається нова „розширена вектор-функція" $\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)$. При чому розширення проводиться таким чином, щоб виконувалась умова як в методі регуляризації [77]

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)|_{t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)} \equiv Y(x,\varepsilon).$$

p і $\varphi(x)$ визначається для кожного конкретного випадку. Відбувається перехід від задачі з однією змінною, до задачі з двома змінними t і x.

II етап. *Простір безрезонансних розв'язків.* Для регуляризації вводиться конкретний простір функцій, цей простір називають *простором безрезонансних розв'язків* і для кожної конкретної задачі цей простір має свою специфіку.

III етап. *Регуляризація сингулярно збуреної задачі.* Розширена задача вивчається у просторі безрезонансних розв'язків і зводиться до рівняння, до якого малий параметр $\varepsilon > 0$ входить регулярно.

IV етап. *Формалізм побудови розв'язку задачі.* Оскільки розширена задача є регулярно збуреною відносно малого параметра в просторі безрезонансних розв'язків, то розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду

$$\tilde{Y}(x,t,\mu) = \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r Y(x), \tag{1.68}$$

де $\mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$–малий параметр.

Побудову асимптотичного ряду розпочинаємо з від'ємних степенів малого параметра з метою одержання рівномірної асимптотики розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Права частина системи буде мати розрив другого роду в точці звороту. Тому в загальному випадку вона не належатиме множині значень головного розширеного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$. Підставивши ряд (1.68) в систему (1.67), для визначення коефіцієнтів цього ряду, отримаємо деяку систему рекурентних рівнянь з точковими початковими чи крайовими умовами.

V етап. *Побудова формальних розв'язків однорідної розширеної системи.* Отримані в попередньому пункті рекурентні рівняння для визначення коефіцієнтів ряду (1.68) є рівняннями в частинних похідних з точковими крайовими умовами. Покажемо, що ця система рівнянь є асимптотично коректною у ПБР D_k. На цьому етапі розробляється теорія існування ітераційного рівняння виду

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{kr}(x),$$

де $\Phi(x)$–матриця розширеної та регуляризованої системи (1.67), $Z_{kr}(x)$–вектор-стовпець складений з аналітичних функцій $\theta_1(x,\varepsilon)$. І будуються перші члени асимптотичного розв'язку однорідної дослуджуваної задачі.

VI етап. *Побудова формальних розв'язків неоднорідної розширеної системи.* На цьому етапі будується розв'язок неоднорідної задачі за допомогою рекурентного рівняння

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{kr}(x),$$

де $\Phi(x)$–матриця розширеної системи (1.67), $Z_{kr}(x)$–вектор-стовпець складений з аналітичних функцій $\theta_2(x,\varepsilon)$.

VII етап. *Оцінка залишкового члена асимптотичного розв'язку.* Після того як знайдені всі коефіцієнти ряду (1.68), необхідно виконати оцінку залишкового члена розв'язку досліджуваної задачі. Оскільки для задач з точками звороту не існує оберненого оператора до оператора $\tilde{L}_\varepsilon$, то відомі методи оцінювання застосувати не можна. Тому будемо використовувати метод істотно особливих функцій запропонований в [6].

1.4 Типи точок звороту

Розглянемо задачу

$$\begin{gathered}\mathbf{L}_\varepsilon U(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^3 U''(x,\varepsilon) + \big[r(x) + \varepsilon^3 q(x)\big] U(x,\varepsilon) = h(x), \\ U(0,\varepsilon) = A(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\alpha + \hat{W}_0, \quad \tfrac{dU(0,\varepsilon)}{dx} = B(\varepsilon) = \varepsilon^{-2}\beta + \varepsilon^{-1}\hat{W}_1,\end{gathered} \tag{1.69}$$

коли $\varepsilon \to +0$, $x \in I = [0, l]$. Тут $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$ – відомі величини, які не залежать від змінної x.

Задачу (1.69) вивчаємо при виконанні таких умов:

$$r(x), q(x), h(x) \in C^{\infty}[I], \quad r(x) = x\tilde{r}(x), \quad \tilde{r}(x) > 0, \quad x \in I. \tag{1.70}$$

Скористаємось такою гіпотезою Лангера: найпростішим диференціальним рівнянням 2-го порядку, що зберігає всі особливості однорідного рівняння (1.69), є рівняння Ейрі, яке має дві загальноприйняті модифікації. За умов (1.70) скористаємось модифікацією вигляду

$$\mathbf{T}W(t) \equiv \frac{\partial^2 W(t)}{\partial t^2} + t\,W(t) = 0, \tag{1.71}$$

тобто, рівнянням Ейрі–Дородніцина.

Модельне диференціальне рівняння (1.71) має обидва обмежені розв'язки, коли $t \geq 0$. Тому точку звороту $x = 0$ будемо називати **стабільною точкою звороту**.

Якщо задачу (1.69) вивчати за таких умов:

$$r(x), q(x), h(x) \in C^{\infty}[I], \quad r(x) = x\tilde{r}(x), \quad \tilde{r}(x) < 0, \tag{1.72}$$

коли $x \in I = [-l, 0]$, то модельний оператор, який буде використано для побудови аисмптотики розв'язку буде мати вигляд

$$\mathbf{T}W(t) \equiv \frac{\partial^2 W(t)}{\partial t^2} - t\,W(t) = 0, \tag{1.73}$$

тобто, рівнянням Ейрі–Лангера.

Оскільки для $\tilde{r}(x) < 0$ один з лінійно незалежних розв'язків однорідного рівняння (1.69) необмежено зростає, коли $\varepsilon \to +0$, то точку звороту x=0 у цьому випадку будемо називати ***нестабільною точкою звороту***.

1.5 Істотно особливі функції, які виникають у розв'язках

Розглянемо рівняння

$$\mathbf{L}_{\varepsilon} y\left(x, \varepsilon\right) \equiv \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^{k} a_{m+k}\left(x\right) y^{(m+k)}\left(x, \varepsilon\right)+\sum_{j=0}^{m-1} a_{j}\left(x\right) y^{(j)}\left(x, \varepsilon\right)=0. \qquad (1.74)$$

Тут $a_i(x) \in C^{\infty}[0, l]$, $i=\overline{0, m+n}$ – відомі функції, а $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Точка $\varepsilon=0$ є особливою точкою рівняння (1.74), а тому для цього рівняння не виконується класична теорема про аналітичну залежність розв'язку від малого параметра. У розв'язкові рівняння (1.74) ця точка породжує деякі особливості, які будемо називати ***істотно особливими функціями*** (ІОФ), тобто функціями, які не є аналітичними відносно малого параметра $\varepsilon>0$.

Аналогічне явище спостерігаємо, розв'язуючи рівняння Бесселя

$$x^{2} y''\left(x\right)+x y'\left(x\right)+\left(x^{2}-\nu^{2}\right) y\left(x\right)=0$$

в околі точки $x=0$.

Відомо, що два частинні розв'язки рівняння Бесселя можна подати у вигляді

$$y_{1}\left(x\right)=x^{\nu} z_{1}\left(x\right), \quad y_{2}\left(x\right)=x^{-\nu} z_{2}\left(x\right),$$

де $z_{i}\left(x\right), i=1,2$ – аналітичні функції в околі точки $x=0$.

Один із множників $x^{\pm \nu}$ з від'ємним показником степеня є особливою функцією для рівняння Бесселя в околі точки $x=0$.

Таким чином, основна трудність при знаходженні розв'язку рівняння (1.74) буде полягати у виділенні, описанні та збереженні як єдиних цілих всіх істотно особливих функцій, що породжуються особливою точкою $\varepsilon=0$ в шуканому розв'язку.

Зведемо сингулярно збурене диференціальне рівняння (1.74) до системи рівнянь першого порядку. Для простоти спочатку розглянемо випадок, коли $m=0$. Отримаємо систему

$$\varepsilon W'(x, \varepsilon)-A\left(x\right) W(x, \varepsilon)=\mathrm{H}\left(x\right),$$

де $W(x,\varepsilon)$ – невідома вектор-функція, а $\mathrm{H}(x)$ – відома вектор-функція. Матриця цієї системи має вигляд

$$\mathrm{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & ... & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}.$$

Ототожнимо матрицю $\mathrm{A}(x)$ з оператором $\mathbf{A}$ у n–вимірному векторному просторі [42]. Оператором $\mathbf{A}$ є виродженим оператором для збуреного оператора $\varepsilon\frac{d}{dx} - \mathrm{A}(x)$. Визначимо спектр виродженого оператора $\mathbf{A}$, тобто знайдемо корені характеристичного рівняння $\det(A(x) - \lambda E) = 0$. Множину його коренів $\lambda(x) = \{\lambda_i(x)\}$ називають ***спектром*** оператора $\mathbf{A}$.

Якщо $m > 0$, то рівняння (1.74) зводиться до такої системи рівнянь:

$$\varepsilon V'(x,\varepsilon) - \mathrm{A}_0(x)\, V(x,\varepsilon) + \mathrm{A}_1(x)\, Z(x,\varepsilon) = \mathrm{H}_1(x),$$

$$Z'(x,\varepsilon) + \mathrm{B}_0(x)\, V(x,\varepsilon) + \mathrm{B}_1(x)\, Z(x,\varepsilon) = \mathrm{H}_2(x).$$

Для цієї системи одним із основних операторів буде оператор

$$\tilde{\mathbf{A}}_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ . & . & . & . \\ -a_m(x) & -a_{m+1}(x) & \cdot & -a_{m+n-1}(x) \end{pmatrix}$$

Дослідження показують, що інформація про кількість і структуру істотно особливих функцій для досліджуваної задачі закладена у властивостях коренів характеристичного рівняння на досліджуваному проміжку незалежної змінної. Якщо два або кілька коренів характеристичного рівняння злипаються в деяких точках (точках звороту), то умови теореми Шлезінгера–Біркгоффа не виконуються. Для такого роду задач описати ІОФ і побудувати АР неоднорідного рівняння значно важче. Оскільки вироджене рівняння для рівнянні Ліувілля є алгебраїчним, то точку звороту у цьому рівнянні будемо називати ***алгебраїчною точкою звороту***.

У теорії сингулярних збурень, поряд з рівнянням Ліувілля, важливе місце займає рівняння Орра–Зоммерфельда. З математичної точки зору це рівняння має такий вигляд:

$$\mathbf{L}_\varepsilon y(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^3 y^{(4)}(x,\varepsilon) + x\tilde{a}(x)y''(x,\varepsilon) + b(x)y(x,\varepsilon) = h(x). \tag{1.75}$$

Вироджене рівняння, що відповідає (1.75) є диференціальним рівнянням. Оскільки точка звороту у цьому рівнянні знаходиться біля похідної, то її будемо називати ***диференціальною точкою звороту***.

Проблема побудови рівномірної асимптотики розв'язку рівняння Орра–Зоммерфельда налічує більше півстоліття [112]. Певні результати побудови розв'язку рівняння Орра–Зоммерфельда, особливо методом зшивання, вже отримано [81, 92, 93]. Хоча на цю проблему звернута увага багатьох дослідників [20, 66, 81, 92, 93, 110, 112] та ін., однак проблема побудови рівномірної асимптотики розв'язку рівняння Орра–Зоммерфельда, яка була б придатна і в точці звороту, повністю не розв'язана до тепер.

1.6 Рівняння Ейрі та його розв'язки

Відомо, що диференціальні рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами не інтегруються в квадратурах. Тому розв'язки таких рівнянь виражають через розв'язки найпростіших диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами (так звані *"модельні рівняння"*).

При дослідженні рівнянь з простою точкою звороту, одним з найбільш вдалих модельних рівнянь є рівняння вигляду

$$U''(t) \pm tU(t) = 0,$$

які називають рівняннями Ейрі, а їх розв'язки – функціями Ейрі.

Історично так склалося, що рівняння Ейрі та його ФСР має дві форми.

Випадок 1. Розглянемо спочатку рівняння Ейрі вигляду

$$\mathcal{T}U(t) \equiv U''(t) + tU(t) = 0. \tag{1.76}$$

Розв'язок цього рівняння в околі точки $t = 0$ шукаємо у вигляді ряду

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \tag{1.77}$$

Продиференціюємо формально два рази цей ряд і підставимо відповідні ряди в рівняння (1.76).

Використовуючи формули асимптотичного зображення функції Бесселя для великих значень аргументу [99], можна одержати такі асимптотичні рівності, коли $t \to +\infty$ [30]:

$$U_1(t) \cong A\,t^{-1/4}\left\{\cos\,\alpha\left[1 - O\left(t^{-3}\right)\right] + \frac{5}{48}\,t^{-3/2}\,\sin\alpha\left[1 - O\left(t^{-3}\right)\right]\right\},$$

$$U_2\,(t) \cong B\,t^{-1/4}\left\{\sin\beta\left[1 - O\left(t^{-3}\right)\right] - \frac{5}{48}\,t^{-3/2}\,\cos\,\beta\left[1 - O\left(t^{-3}\right)\right]\right\}. \quad (1.78)$$

$$U_1'\,(t) \cong A\,t^{1/4}\left\{\sin\alpha\left[1 - O\left(t^{-3}\right)\right] + \frac{7}{48}t^{-3/2}\cos\alpha\left[1 - O\left(t^{-3}\right)\right]\right\},$$

$$U_2'\,(t) \cong Bt^{1/4}\left\{\cos\beta\left[1 - O\left(t^{-3}\right)\right] - \frac{7}{48}t^{-3/2}\sin\beta\left[1 - O\left(t^{-3}\right)\right]\right\}.$$

Тут

$$A = \frac{\sqrt[6]{3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\pi}}; \quad B = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt[6]{3}\,\sqrt{\pi}}; \quad \alpha = \frac{2}{3}\,t^{3/2} - \frac{\pi}{12}; \quad \beta = \frac{2}{3}\,t^{3/2} + \frac{\pi}{12}. \quad (1.79)$$

Асимпотичні рівності (1.78) і (1.79) ми будемо використовувати далі. Цією формою запису функцій Ейрі користувались А.А. Дородніцин, С.О. Ломов, В.М. Бобочко [6, 30, 77].

Рівняння (1.76) та його властивості вперше були досконало вивчені А.А. Дородніциним [30]. Тому ці функції, як вже було сказано, будемо називати ***функціями Ейрі – Дородніцина*** .

Оскільки графіки функцій Ейрі – Дородніцина та їх похідних рідко зустрічаються в науковій літературі, то доцільно навести відповідні графіки (Рис.1.1, Рис. 1.2). Маємо наступні зображення:

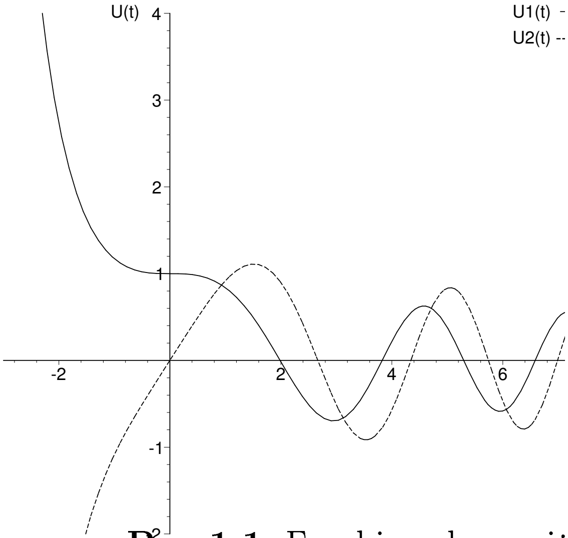

Рис.1.1. Графіки функцій Ейрі–Дородніцина.

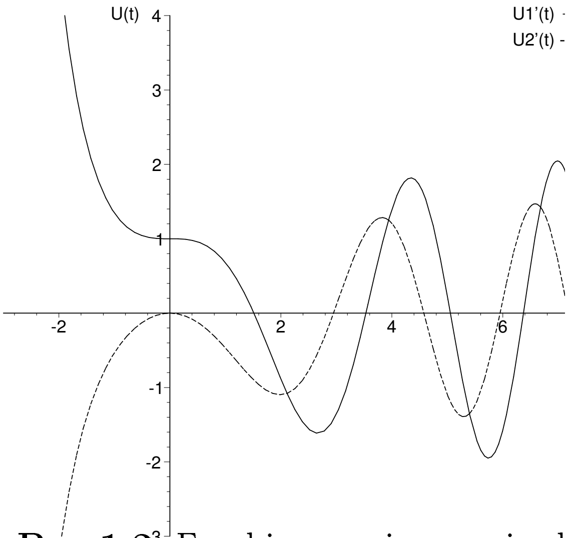

Рис.1.2. Графіки похідних від функцій Ейрі–Дородніцина.

Випадок 2. Іншою формою запису рівняння Ейрі є рівняння

$$\mathcal{T}U \equiv U''(t) - tU(t) = 0. \tag{1.80}$$

Розв'язок цього рівняння в околі точки $t = 0$ теж будемо шукати у вигляді ряду

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n t^n. \tag{1.81}$$

Підставимо цей ряд у рівняння (1.80) і знову зрівняємо коефіцієнти біля однакових степенів змінної t.

Легко перевірити, що функція

$$\mathrm{Ai}\,(\mathrm{t}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos\left(\frac{\mathrm{s}^3}{3} + \mathrm{st}\right)\mathrm{ds} \tag{1.82}$$

є розв'язком рівняння (1.80).

Інтеграл (1.82), який називають ***інтегралом Ейрі***, вперше ввів у розгляд Ейрі [29] у 1838 р. при дослідженнях, зв'язаних з оптикою.

Скориставшись відомою формулою диференціювання під знаком інтеграла, маємо

$$\mathrm{Ai}'\,(\mathrm{t}) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{s}\,\sin\,\left(\frac{\mathrm{s}^3}{3} + \mathrm{s}\,\mathrm{t}\right)\,\mathrm{ds}.$$

Тоді

$$\mathrm{Ai}'(0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{s}\sin\frac{\mathrm{s}^3}{3}\mathrm{ds} = \frac{1}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \equiv \frac{\sqrt[6]{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2\,\pi}. \tag{1.83}$$

Ототожнимо один із розв'язків рівняння (1.80) з функцією (1.82).

Другий розв'язок $W_2(t) \equiv \mathrm{Bi}(\mathrm{t})$ виберемо таким чином, щоб:

1) $W_2\,(t)$ була лінійно незалежною до функції $W_1\,(t) \equiv \mathrm{Ai}\,(\mathrm{t})$;

2) функція $\mathrm{Bi}\,(\mathrm{t})$ при великих від'ємних значеннях змінної t повинна мати ту саму амплітуду, що функція $Ai(t)$, а їх фази повинні відрізнятись на $\pi\cdot 2^{-1}$.

Такою є функція

$$\mathrm{Bi}\,(\mathrm{t}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left\{\exp\left[-\frac{\mathrm{s}^3}{3} + \mathrm{ts}\right] + \sin\left[\frac{\mathrm{s}^3}{3} + \mathrm{ts}\right]\right\}\mathrm{ds}, \tag{1.84}$$

яка теж є розв'язком рівняння (1.80). Тут

$$\mathrm{Hi}(\mathrm{t}) \equiv \pi^{-1}\int\limits_0^\infty \exp\left[\frac{-\mathrm{s}^3}{3} + \mathrm{ts}\right]\mathrm{ds}$$

– функція Скорера .

Для функції (1.84) маємо

$$\begin{gathered}\mathrm{Bi}\,(0)=3^{-1/6}\,\Gamma^{-1}\left(\tfrac{2}{3}\right)=\sqrt{3}\,\mathrm{Ai}\,(0)\,,\\[2ex] \mathrm{Bi}'\,(0)=\sqrt[6]{3}\,\Gamma^{-1}\left(\tfrac{1}{3}\right)=-\sqrt{3}\,\mathrm{Ai}\,'\,(0)\,.\end{gathered}\tag{1.85}$$

Функцію (1.84) можна ще записати у вигляді

$$\mathrm{Bi(t)}=\sqrt{3}\left[\mathrm{a_0}\,\tilde{\mathrm{f}}(\mathrm{t})+\mathrm{a_1}\,\tilde{\varphi}(\mathrm{t})\right],\tag{1.86}$$

Легко перевірити, що

$$W_{\mathrm{Bp}}\left[\mathrm{Ai\,(t)\,,Bi\,(t)}\right]=\pi^{-1}.\tag{1.87}$$

За аналогією з попереднім, рівняння (1.80) і побудований розв'язок цього рівняння, будемо відповідно називати ***рівнянням і функціями Ейрі–Лангера***.

Для великих значень аргументу, тобто, коли $t\to+\infty$, мають місце такі асимптотичні рівності:

$$\mathrm{Ai\,(t)}=\frac{\mathrm{e}^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}\,\sqrt[4]{t}}\sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty}(-1)^{\mathrm{k}}\,\mathrm{c_k}\,\xi^{-\mathrm{k}},\quad \mathrm{Bi\,(t)}=\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt[4]{t}}\sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty}\mathrm{c_k}\,\xi^{-\mathrm{k}},\tag{1.88}$$

та

$$\begin{gathered}\mathrm{Ai\,(-t)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt[4]{t}}\left\{\sin\gamma\cdot\sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty}\left(-1\right)^{\mathrm{k}}\,\mathrm{c_{2k}}\,\xi^{-2\mathrm{k}}-\right.\\ \left.-\cos\gamma\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^{k}\,c_{2k+1}\,\xi^{-2k-1}\right\},\end{gathered}\tag{1.89}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{Bi\,(-t)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt[4]{t}}\left\{\cos\gamma\cdot\sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty}\left(-1\right)^{\mathrm{k}}\,\mathrm{c_{2k}}\,\xi^{-2\mathrm{k}}+\right.\\ \left.+\sin\gamma\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^{k}\,c_{2k+1}\,\xi^{-2k-1}\right\},\end{gathered}\tag{1.90}$$

де

$$c_0=1,\quad \xi=\frac{2}{3}\,t^{3/2};\quad c_k=\frac{(2k+1)\,(2k+3)\ldots(6k-1)}{216^k\cdot k!};\quad \gamma=\frac{2}{3}\,t^{3/4}+\frac{\pi}{4}.$$

Для наочності наведемо графіки функцій Ейрі-Лангера (Рис. 1.3).

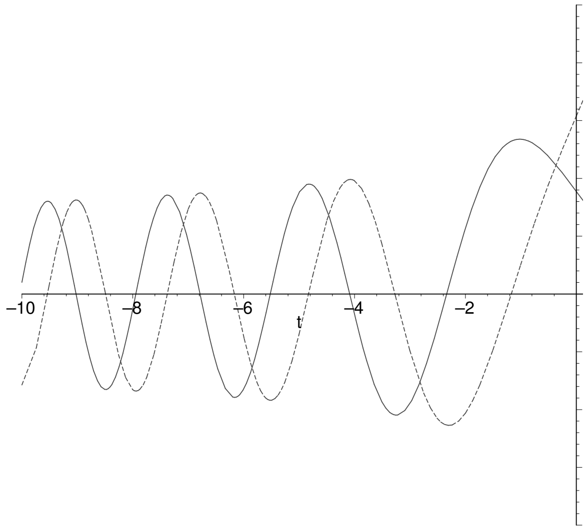

Рис.1.3. Графіки функцій Ейрі–Лангера.

Асимптотичні рівності для похідних від функцій Ейрі–Лангера подано у довіднику [99]. Проте, оскільки надалі буде використано похідні від функцій Ейрі–Лангера для додатних значень аргументу. Запишемо ці рівності

$$\mathrm{Ai}'(\mathrm{t}) = \frac{-\mathrm{t}^{1/4}\,\mathrm{e}^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} (-1)^{\mathrm{k}}\, \mathrm{d}_{\mathrm{k}}\, \xi^{-\mathrm{k}}, \quad \mathrm{Bi}'(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{t}^{1/4}\,\mathrm{e}^{\xi}}{\sqrt{\pi}} \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \mathrm{d}_{\mathrm{k}}\, \xi^{-\mathrm{k}}, \qquad (1.91)$$

де $d_0 = 1; d_k = -\frac{6k+1}{6k-1}$, $k \in N$.

Графіки похідних від функцій Ейрі–Лангера мають такий вигляд:

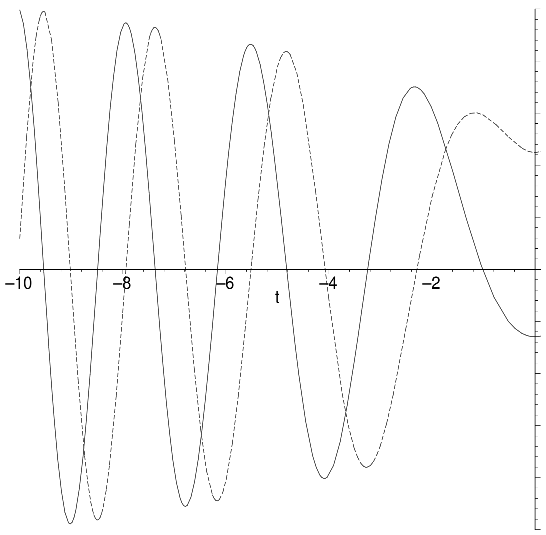

Рис. 1.4. Графіки похідних від функцій Ейрі–Лангера.

У наукових дослідженнях використовують функції Ейрі обох типів, розглянутих вище в першому та другому випадках. Тому є сенс знайти формули зв'язку між цими функціями.

Отже, нехай $U_k(x)$, $k = 1, 2$ – два лінійно незалежні розв'язки рівняння

$$U''(x) + xU(x) = 0, \tag{1.92}$$

що задовольняють певним початковим умовам.

Врахувавши рівності (1.85), формули зв'язку між функціями Ейрі–Лангера і Ейрі–Дородніцина ще можна записати в таких формах:

$$\begin{gathered} \mathrm{Ai}(-\mathrm{t}) = [\mathrm{Ai}(0)\,\mathrm{U}_1(\mathrm{t}) - \mathrm{Ai}'(0)\,\mathrm{U}_2(\mathrm{t})], \\ \mathrm{Bi}\,(-\mathrm{t}) = \sqrt{3}\,[\mathrm{Ai}(0)\,\mathrm{U}_1(\mathrm{t}) - \mathrm{Ai}'(0)\,\mathrm{U}_2(\mathrm{t})]. \end{gathered} \tag{1.93}$$

З (1.93) легко одержати обернені співвідношення

$$\begin{gathered} U_1(t) \equiv \tfrac{1}{2}3^{2/3}\Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right)\left[\mathrm{Ai}(-\mathrm{t}) + \tfrac{\mathrm{Bi}(-\mathrm{t})}{\sqrt{3}}\right], \\ U_2(t) \equiv \tfrac{1}{2}3^{1/3}\Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right)\left[\mathrm{Ai}(-\mathrm{t}) - \tfrac{\mathrm{Bi}(-\mathrm{t})}{\sqrt{3}}\right]. \end{gathered} \tag{1.94}$$

1.7 Невласні інтеграли від функцій Ейрі

Для побудови частинних розв'язків неоднорідних рівнянь з точками звороту нам будуть необхідні істотно особливі функції, які є частинними розв'язками таких неоднорідних рівнянь:

$$U''(t) + t\,U(t) = 1, \tag{1.95}$$

$$U''(t) - t\,U(t) = \pi^{-1}. \tag{1.96}$$

Випадок 1. Легко перевірити, що частинним розв'язком рівняння (1.95) для всіх $t \in [0; \infty]$ буде функція

$$\Psi(t) = \int_{+\infty}^{t} K(t, \tau)d\tau. \tag{1.97}$$

Тут

$$K\left(t,\tau\right)\equiv U_2\left(t\right)\cdot U_1\left(\tau\right)-U_1\left(t\right)\cdot U_2\left(\tau\right),$$

де $U_k\left(t\right), \quad k=1,2$ – функції Ейрі–Дородніцина.

Для більшої наочності зобразимо графік ІОФ $\Psi(t)$ (Рис.1.5). Маємо

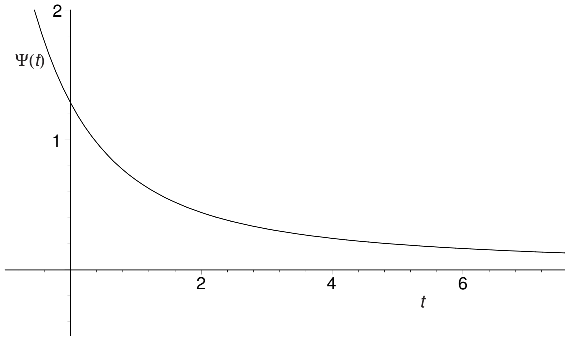

Рис. 1.5. Графік функції $\Psi(t)$.

Справедлива така асимптотична рівність:

$$\Psi(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\pi}\,t^{-1}\left[1+O(t^{-3/2})\right]. \tag{1.98}$$

Скориставшись відомою формулою $\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(1-z\right)=\pi\cdot\operatorname{cosec}\pi z$, маємо

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\pi\cdot\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \tag{1.99}$$

Підставивши (1.99) у (1.98), отримаємо таку асимптотичну рівність, коли $t\to+\infty$:

$$\Psi(t)=t^{-1}\left[1+O(t^{-3/2})\right]. \tag{1.100}$$

Одержаний результат (1.100) співпадає з оцінкою, наведеною в монографії [77].

Істотно особливу функцію $\Psi(t)$ вперше було використано С.О. Ломовим для побудови частинного розв'язку неоднорідної задачі з точкою звороту. Проте для побудови асимптотичного розв'язку неоднорідної задачі з точкою звороту однієї ІОФ (1.100) замало. Проведені дослідження показали, що для побудови рівномірно придатного розв'язку неоднорідної задачі з точкою звороту потрібно використати і функцію, яка є похідною від функції $\Psi(t)$, тобто функцію

$$\Psi'\left(t\right)\equiv U_2'\left(t\right)\int\limits_{\infty}^{t}U_1\left(\tau\right)\,d\tau-U_1'\left(t\right)\int\limits_{\infty}^{t}U_2\left(\tau\right)d\tau. \tag{1.101}$$

Графік функції (1.101) наведено на Рис.1.6.

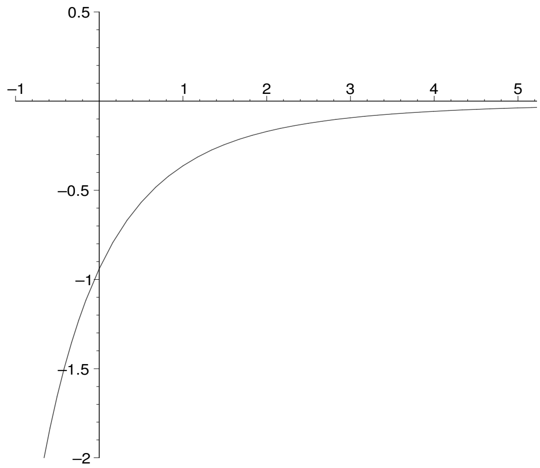

Рис. 1.6. Графік функції $\Psi'(t)$.

Випадок 2. Розглянемо рівняння (1.96). У цьому випадку функцію, аналогічну до функції (1.97), тобто, частинний розв'язок рівняння (1.96), коли $t \in (-\infty, 0]$, можна записати таким чином:

$$\mathrm{Hi(t)} = \mathrm{Bi\,(t)} \int\limits_{-\infty}^{\mathrm{t}} \mathrm{Ai}\,(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \mathrm{Ai\,(t)} \int\limits_{-\infty}^{\mathrm{t}} \mathrm{Bi}\,(\tau)\;\mathrm{d}\tau, \tag{1.102}$$

яку називають ***функцією Скорера*** [95].

Дослідимо функцію $Hi(t)$, коли $t \to -\infty$.

В результаті будемо мати

$$\mathrm{Hi(-t)} = \mathrm{Bi\,(-t)} \int\limits_{+\infty}^{\mathrm{t}} \mathrm{Ai}\,(\tau)\;\mathrm{d}\tau - \mathrm{Ai\,(-t)} \int\limits_{+\infty}^{\mathrm{t}} \mathrm{Bi}\,(\tau)\;\mathrm{d}\tau \equiv$$

$$\equiv \sqrt{3}\,\mathrm{Ai\,(0)}\;\mathrm{U_1\,(t)} \int\limits_{-\infty}^{-\mathrm{t}} \left[\mathrm{Ai}\,(\tau) - \frac{\mathrm{Bi}\,(\tau)}{\sqrt{3}}\right] \mathrm{d}\,\tau + \tag{1.103}$$

$$+\sqrt{3}\,\mathrm{Ai}\,'(0)\,\mathrm{U_2(t)} \int\limits_{-\infty}^{-\mathrm{t}} \left[\mathrm{Ai}\,(\tau) + \frac{\mathrm{Bi}(\tau)}{\sqrt{3}}\right] \mathrm{d}\tau = \pi^{-1}\,\Psi(\mathrm{t}).$$

Справедливість цієї рівності можна перевірити безпосередньо, тобто має місце

$$\mathrm{Hi(t)} = -\pi^{-1}\,\mathrm{t}^{-1}\,\left[1 + \mathrm{O}\left(\mathrm{t}^{-3/2}\right)\right], \quad \mathrm{t} \to -\infty. \tag{1.104}$$

Випадок 3. Дослідимо функцію

$$\nu(t) = \mathrm{Bi(t)} \int\limits_{+\infty}^{\mathrm{t}} \mathrm{Ai}(\tau)\mathrm{d}\tau - \mathrm{Ai(t)} \int\limits_{0}^{\mathrm{t}} \mathrm{Bi}(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{1.105}$$

коли $t \in [0; +\infty)$.

Ця функція буде нами використана нижче при дослідженні системи з нестабільною точкою звороту.

Легко перевірити, що ця функція має таке інтегральне зображення:

$$\nu\,(t) = -\pi^{-1} \int\limits_{0}^{\infty} \sin\left(\frac{s^3}{3} + st\right)\,ds. \tag{1.106}$$

Проінтегруємо цей інтеграл за частинами, коли $t \to +\infty$. Одержимо

$$\nu\,(t) = -\pi^{-1} \lim_{t\to\infty} \int^{t} \sin\left(\frac{s^3}{3} + st\right)\,ds =$$

$$= -\pi^{-1}\left\{t^{-1} - \lim_{t\to\infty} \int^{t} \left(\frac{s}{s+t} + st\right) \cos\left(\frac{s^3}{3} + st\right)\,d\,\left(\frac{s^3}{3} + st\right)\right\}.$$

Якщо ще один раз проінтегрувати частинами, то отримаємо

$$\nu\,(t) = -\pi^{-1}\left[t^{-1} + 2\int^{\infty} \frac{5s^2 - t}{\left(s^2 + t\right)^4} \sin\left(\frac{s^3}{3} + st\right)\,ds\right]. \tag{1.107}$$

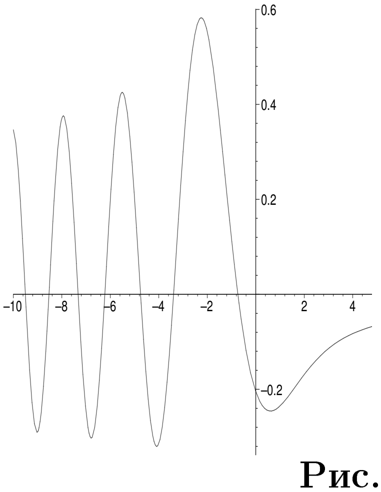

Рис. 1.7. Графік функції $\nu(t)$.

Графік функції $\nu(t)$ наведено на Рис. 1.7.

Не важко показати, що інтеграл у правій частині рівності (1.107) є величина порядку $O\left(t^{-4}\right)$, коли $t \to +\infty$. Тоді для $t \to +\infty$ маємо асимптотичну рівність

$$\nu(t) = -\pi\, t^{-1}\, [1 + O(t^{-3})]. \tag{1.108}$$

Оскільки $\nu\,(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \tilde{\nu}\,(t)$, то

$$\nu'\,(t) = -\pi^{-1} \int\limits_0^\infty s \, \cos\left(\frac{1}{3}s^3 + st\right) ds.$$

Інтегруючи частинами, можна показати, що коли $t \to +\infty$, то має місце асимптотична рівність

$$\nu'\,(t) = \frac{1}{\pi t^2}\left[1 + O\left(t^{-5}\right)\right]. \tag{1.109}$$

Графіком функції $\nu'(t))$ (Рис.1.8) буде зображена крива:

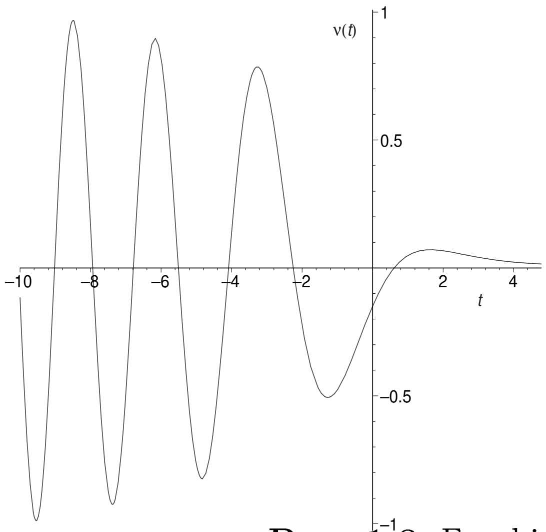

Рис. 1.8. Графік функції $\nu'(t))$.

1.8 Висновки до розілу I

Цей розділ є допоміжним і не містить нових результатів. У ньому проведено огляд літератури, який свідчить, що на даний час побудова загального розв'язку сингулярно збуреиних систем диференціальних рівнянь у випадку нестабільності спектра залишається малодослідженим питанням.

Для побудови асимптотики розв'язку систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь важливо мати інструментарій безпосередньої побудови відповідного асимптотичного розвинення шуканого розв'язку задачі з малим параметром при старшій похідній і точкою звороту.

Наведено методи асимптотичного інтегрування, а саме метод Дородніцинка, метод регуляризації Ломова. Наведено властивості та графіки функцій Ейрі, які є розв'язками відповідних модельних рівнянь та класифікація точок звороту.

Розділ 2

ПОБУДОВА АСИМПТОТИКИ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАБІЛЬНОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЮ ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ МЕТОДОМ ІСТОТНО ОСОБЛИВИХ ФУНКЦІЙ

Теорія сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точками звороту бере свій початок з досліджень Р. Лангера. На сьогодні отримано основні результати щодо побудови рівномірних асимптотик для рівняння Ліувілля та систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь типу Ліувілля з точкою звороту. Характерною рисою більшості цих робіт з цього напрямку було те, що вироджені рівняння були алгебраїчними, тобто точка звороту була алгебраїчною.

Однак теорія і практика вимагають досліджень сингулярно збурених диференціальних рівнянь, для яких вироджені рівняння є диференціальними, і точка звороту знаходиться у вигляді множника при старшій похідній виродженого рівняння [7].

Класичними прикладами таких рівнянь є рівняння виду

$$\varepsilon^3 y'''(x,\varepsilon) + x\tilde{a}(x)y'(x,\varepsilon) + b(x)y(x,\varepsilon) = h(x),$$

$$\varepsilon y''(x,\varepsilon) + x\tilde{a}(x)y'(x,\varepsilon) + b(x)y(x,\varepsilon) = h(x),$$

та рівняння Орра-Зоммерфельда

$$\varepsilon y^{(4)}(x,\varepsilon) + x\tilde{a}(x)y''(x,\varepsilon) + b(x)y'(x,\varepsilon) + c(x)y(x,\varepsilon) = h(x).$$

У цьому розділі досліджується задача про побудову рівномірного асимптотичного розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь зі стабільною диференціальною точкою звороту у просторі безрезонансних розв'язків.

2.1 Стабільна диференціальна точка звороту з коефіцієнтами матриці $\tilde{a}(x) > 0$ і $b(x) < 0$

2.1.1 Постановка задачі

Природній інтерес викликає розвиток результатів, отриманих для скалярних рівнянь на випадок векторних рівнянь. Розвиваючи ідеї представлені в роботах [9, 10], ми будуватимемо рівномірну асимптотику розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту першого роду, яка відповідає рівнянню виду

$$\varepsilon^3 y'''(x,\varepsilon) + x\tilde{a}(x)y'(x,\varepsilon) + b(x)y(x,\varepsilon) = h(x), \qquad (2.1)$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $\tilde{a}(x), b(x), h(x) \in C^\infty[0; l]$.

При $\varepsilon = 0$ з рівняння (2.1) одержимо вироджене рівняння:

$$L_0\omega(x) \equiv x\tilde{a}(x)\omega'(x) + b(x)\omega(x) = h(x). \qquad (2.2)$$

В (2.2) точка звороту $x = 0$ є *диференціальною точкою звороту.*

Виконаємо низку перетворень, які дозволять виконати перехід рівняння (2.1) до системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Зокрема, перейдемо від скалярної форми рівняння до векторної

$$\begin{gathered} y = y_1, \\ y' = y_1' = y_2, \\ \varepsilon y'' = \varepsilon y_1'' = \varepsilon y_2' = y_3, \\ \varepsilon(\varepsilon y''') = \varepsilon(\varepsilon y_1''') = \varepsilon(\varepsilon y_2'') = \varepsilon(y_3'). \end{gathered}$$

Тоді

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ \varepsilon y_2' = y_3, \\ \varepsilon y_3' = -a(x)y_2 - b(x)y_1 + h(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon y_1' = \varepsilon y_2, \\ \varepsilon y_2' = y_3, \\ \varepsilon y_3' = -a(x)y_2 - b(x)y_1 + h(x). \end{cases} \tag{2.3}$$

Систему (2.3) можна записати у векторній формі:

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = H(x), \tag{2.4}$$

де $A(x,\varepsilon)$ має таку структуру

$$A(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1,$$

а $A_0(x)$ і A_1 матриці вигляду

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\varepsilon \to 0$, $x \in [0,l]$, $Y(x,\varepsilon) = colomn(y_1(x,\varepsilon), y_2(x,\varepsilon), y_3(x,\varepsilon))$ - шукана вектор-функція, $(x) = colomn(0,0,h(x))$ – задана вектор-функція.

Як було зазначено в першому розділі, розв'язок системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь не може бути представлений в термінах елементарних функцій. Тому при побудові розв'язків таких систем зручно використовувати так звані "модельні рівняння". При дослідженні рівнянь з простою точкою звороту одним з найбільш вдалих модельних рівнянь є рівняння вигляду

$$\ddot{U}(t) \pm tU(t) = 0, \tag{2.5}$$

яке називають рівняннями Ейрі. Зазначимо, що рівняння Ейрі описує коливання для $t < 0$ і неколивні процеси для $t > 0$. Тому його зручно використовувати як "модель"для явищ з переходом (у початку координат) від коливних процесів до процесів інших типів, які є характерними для задач з точками звороту, і його розв'язки здатні описати ті особливості, які властиві задачам такого типу. Звичайно, рівняння Ейрі має два лінійно незалежні розв'язки, які позначаються $U_1(t) = \mathbf{A}i(t)$ і $U_2(t) = \mathbf{B}i(t)$ і є відомими функціями Ейрі, які ретельно вивчались, а їх властивості описані у науковій літературі [99]. Розв'язки рівняння Ейрі також можуть бути описані в термінах функцій Бесселя порядку $\frac{1}{3}$.

Дослідимо задачу про побудову рівномірної асимптотики розв'язків сингулярно збуреної системи (2.4) для якої виконуються умови:

C 1. $A_0(x),\ H(x) \in C^\infty[0, l]$.

C 3. $a(x) = x\tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) < 0.$

Тобто з матрицею вигляду матриці вигляду

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Тобто виконання умов **C 1** та **C 3** дозволяє будувати асимптотику розв'язку системи (2.4) в околі так званої стабільної точки звороту [10].

Запишемо характеристичне рівняння, що відповідає системі сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4). Воно має вигляд:

$$|A(x,0) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ b(x) & -a(x) & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - x\tilde{a}(x)\lambda = 0.$$

Коренями даного характеристичного рівняння є

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{x\tilde{a}(x)}.$$

Далі дослідимо випадок коли корінь λ_1 тотожно рівен нулеві, а корені λ_2 і λ_3 злипаються в точці звороту. Оскільки корені характеристичного рівняння уявні, це вказує на стабільність точки звороту $x = 0$ [9]. Дану задачу будемо вивчати виходячи із гіпотези, що після регуляризації векторного рівняння, розширений оператор повинен містить модельний оператор Ейрі-Дородніціна [6].

2.1.2 Розширення системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь

Точка $\varepsilon = 0$ є особливою точкою для рівняння (2.4), а тому для цього рівняння не виконується класична теорема про аналітичну залежність розв'язку від малого параметра. У розв'язкові ця точка породжує деякі особливості, які називають *істотно особливими функціями* (ІОФ), тобто функціями, які не є аналітичними відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ [6]. Основна трудність при знаходженні розв'язку полягає у виділенні, описанні та збереженні як єдиних цілих всіх істотно особливих функцій, що породжуються особливою точкою $\varepsilon = 0$ в шуканому розв'язку.

Для виділення всіх істотно особливих функцій та збереження їх як єдиних цілих в системі (2.4), введемо регуляризуючу змінну

$$t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x), \tag{2.6}$$

де показник p і регуляризуюча функція $\varphi(x)$ власне й і мають бути визначені.

Згідно методу істотно особливих функцій, необхідною умовою розширення задачі є справедливість співвідношення

$$\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon)|_{t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)} \equiv Y_k(x, \varepsilon).$$

Знайдемо частинну похідну для функції $\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial t}\Big[\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon)\Big]|_{t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)} = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi'(x)\frac{\partial \tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon)}{\partial x}$$

Підставимо одержану частинну похідну для розширеної функції в рівняння (2.4). Тоді для визначення розширенної функції $\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon)$ одержимо розширене векторне рівняння

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon) \equiv \varepsilon^{1-p}\varphi'\frac{\partial \tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial \tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon)}{\partial x} - A(x, \varepsilon)\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon) = H(x). \tag{2.7}$$

Випишемо окремо розширений оператор $\tilde{L}_\varepsilon(Y)$

$$\tilde{L}_\varepsilon(Y) = \varepsilon^{1-p} \cdot \varphi(x)\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x} - A(x, \varepsilon) = H(x).$$

Згідно метода істотно особливих функцій необхідно виділити множини функцій (підпростори), в яких розв'язок задачі, що досліджується, містить всі істотно особливі функції і сама задача буде регулярно залежати від малого параметра ε.

Простір безрезонансних розв'язків

Виділимо таку множину функцій, в якій розширена задача (2.7) буде регулярно збуреною відносно малого параметра. Для цього розглянемо множини (підпростори) функцій

$$\begin{gathered} D_{1k} = \alpha_{1k}(x,\varepsilon)U_1(t) + \varepsilon^\gamma \beta_{1k}(x,\varepsilon)U_1'(t), \\ D_{2k} = \alpha_{2k}(x,\varepsilon)U_2(t) + \varepsilon^\gamma \beta_{2k}(x,\varepsilon)U_2'(t), \\ D_{3k} = f_k(x,\varepsilon)\psi(t) + \varepsilon^\gamma g_k(x,\varepsilon)\psi'(t), \\ D_{4k} = \omega_k(x,\varepsilon), \end{gathered} \tag{2.8}$$

де $U_i(t), (i = \overline{1,2})$ – функції Ейрі [6].

Підпростори D_{1k} та D_{2k} містять розв'язки однорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь, в структурі яких містяться істотно особливі функції $U_i(t)$. Підпростір D_{3k} містить розв'язки неоднорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь, в структурі яких міститься істотно особлива функція $\psi(t)$ та її похідна [6]. Підпростір D_{4k} містить розв'язки однорідної та неоднорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь, які відповідають кореню характеристичного рівняння $\lambda_1 = 0$ і не містить істотно особливих функцій.

Тоді з підпросторів (2.8), складемо як пряму суму новий простір

$$D_k = \Big[\sum_{i=1}^{2}\{D_{ik}\} \oplus D_{3k} \oplus D_{4k}\Big].$$

Елемент $\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)$ простору D_k має таку структуру:

$$\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2} D_{ik}(x,t,\varepsilon) + f_k(x,\varepsilon)\psi(t) + \varepsilon^\gamma g_k(x,\varepsilon)\psi'(t) + \omega_k(x,\varepsilon), \tag{2.9}$$

де

$$\sum_{k=1}^{2} D_i k(x,t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{s1}\alpha_{k1}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon^{s2}\alpha_{k2}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon^{s3}\alpha_{k3}(x,\varepsilon) \end{pmatrix} U_i(t) + \varepsilon^{\gamma} \begin{pmatrix} \varepsilon^{q1}\beta_{k1}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon^{q2}\beta_{k2}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon^{q3}\beta_{k3}(x,\varepsilon) \end{pmatrix} U_i'(t),$$

де $\alpha_{ik}(x,\varepsilon)$, $\beta_{ik}(x,\varepsilon)$, $f_k(x,\varepsilon)$, $g_k(x,\varepsilon)$, $\omega_k(x,\varepsilon)$, $k = \overline{1,3}$ – шукані аналітичні функції, які залежать від параметра $\varepsilon > 0$, що нескінченно диференційовні на проміжку $x \in [0;l]$.

Далі для того, щоб обчислити регуляризуючу змінну згідно з (2.6), необхідно визначити показник p і функцію $\varphi(x)$. Для цього подіємо розширеним оператором $\tilde{L}_\varepsilon$ на вектор функцію $D_k(x,t,\varepsilon)$. Підставимо результат в однорідне розширене рівняння (2.7), тобто при $H(x) = 0$. Отримаємо

$$\tilde{L}_\varepsilon(\alpha_{ik}(x,\varepsilon)U_{ik}(t) + \varepsilon^{\gamma}\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t)) = \varepsilon^{1-p}\alpha_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x)U_i'(t)+$$

$$+\varepsilon\alpha_{ik}'(x,\varepsilon)U_i(t) - A(x,\varepsilon)\alpha_{ik}(x,\varepsilon)U_i(t) + \varepsilon^{1-p+\gamma}\varphi'(x)\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i''(t)+$$

$$+\varepsilon^{1+\gamma}\beta_{ik}'(x,\varepsilon)U_i'(t) - \varepsilon^{\gamma}A(x,\varepsilon)\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t) = 0.$$

Для подальших міркувань та перетворень з компонентою $U''(t)$ використаємо модельний оператор Ейрі-Дородніцина

$$U''(t) + tU(t) = 0,$$

$$U''(t) = -tU(t), \quad t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi'(x).$$

Тоді результат дії розширеного оператора матиме вигляд

$$\tilde{L}_\varepsilon(\alpha_{ik}(x,\varepsilon)U_{ik}(t) + \varepsilon^{\gamma}\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t)) = \varepsilon^{1-p}\alpha_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x)U_i'(t)-$$

$$-\varepsilon^{1+\gamma-2p}\beta_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x)\varphi(x)U_i(t) - A(x,\varepsilon)\alpha_{ik}(x,\varepsilon)U_i(t)-$$

$$-\varepsilon^{\gamma}A(x,\varepsilon)\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t) + \varepsilon\alpha_{ik}'(x,\varepsilon)U_i(t) + \varepsilon^{1+\gamma}\beta_{ik}'(x,\varepsilon)U_i'(t) = 0.$$

Для того, щоб одержане співвідношення було тотожністю, необхідно, щоб коефіцієнти при істотно особливих функціях та їх похідних перетворились в нуль. Відтак випишемо коефіцієнти при істотно особливих функціях та їх похідних:

$$U_i'(t): \varepsilon^{1-p}\alpha_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x) - \varepsilon^{\gamma}[A_0(x)+\varepsilon A_1]\beta_{ik}(x,\varepsilon) = -\varepsilon^{1+\gamma}\beta_{ik}'(x,\varepsilon), \quad (2.10)$$

$$U_i(t): -\varepsilon^{1+\gamma-2p}\beta_k(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) - [A_0(x)+\varepsilon A_1]\alpha_{ik}(x,\varepsilon) = -\varepsilon\alpha_{ik}'(x,\varepsilon) \quad (2.11)$$

де $i=\overline{1,2}$.

Вимагатимемо, щоб одержані системи (2.10) і (2.11) були регулярно збуреними відносно малого параметра $\varepsilon > 0$. Для цього показники степенів малого параметра в кожному рівнянні мають бути однаковими. Після чого можна буде провести скорочення малого параметра. Тому запишемо однорідні рівняння (2.10) і (2.11), поки що з урахуванням тільки основної матриці $A_0(x)$, у вигляді системи алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} \varepsilon^{1-p+s_1}\alpha_{k1}(x,\varepsilon)\varphi'(x) = 0, \\ \varepsilon^{1-p+s_2}\alpha_{k2}(x,\varepsilon)\varphi'(x) - \varepsilon^{\gamma+s_3}\beta_{k3}(x,\varepsilon) = 0, \\ \varepsilon^{1-p+s_3}\alpha_{k3}(x,\varepsilon)\varphi'(x) - b(x)\varepsilon^{\gamma+s_1}\beta_{k1}(x,\varepsilon) + a(x)\varepsilon^{\gamma+s_2}\beta_{k2}(x,\varepsilon) = 0, \\ \varepsilon^{1+\gamma-2p+q_1}\beta_{k1}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) = 0, \\ \varepsilon^{1+\gamma-2p+q_2}\beta_{k2}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) + \varepsilon^{s_3}\alpha_{k3}(x,\varepsilon) = 0, \\ \varepsilon^{1+\gamma-2p+q_3}\beta_{k3}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) + b(x)\varepsilon^{s_1}\alpha_{k1}(x,\varepsilon) - a(x)\varepsilon^{s_2}\alpha_{k2}(x,\varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Функції $\alpha_{ik}(x,\varepsilon), \beta_{ik}(x,\varepsilon)$, $k = \overline{1;3}$ мають бути аналітичними вектор-функціями відносно малого параметра $\varepsilon > 0$. Вимагатимемо, щоб показники степенів малого параметра в кожному рівнянні повинні бути однаковими, тобто має пройти скорочення малого параметру за цими степенями. Одержимо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1-p+s_1 = 0, \\ 1-p+s_2 = \gamma+q_3, \\ 1-p+s_3 = \gamma+q_1 = \gamma+q_2, \\ 1+\gamma-2p+q_1 = 0, \\ 1+\gamma-2p+q_2 = s_3, \\ 1+\gamma-2p+q_3 = s_1 = s_2. \end{cases} \quad (2.13)$$

Розв'язавши систему (2.13) отримаємо

$$p = \frac{2}{3}, \qquad \gamma = \frac{1}{3}, \qquad q_1 = q_2 = s_3 = 0, \qquad s_1 = s_2 = q_3 = -\frac{1}{3}. \tag{2.14}$$

Таким способом справедливе твердження

Лема 2.1. *Щоб побудувати асимптотику розширеної системи (2.7) у вигляді рядів за степенями малого параметра необхідно, щоб $p = \frac{2}{3}$, $\gamma = \frac{1}{3}$. Тоді для визначення коефіцієнтів відповідного ряду отримаємо регулярно збурені системи рівнянь відносно малого параметра $\varepsilon > 0$.*

Векторні рівняння (2.10) і (2.11) запишемо у вигляді системи алгебраїчних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{i1}(x,\varepsilon) = \mu^3[\beta_{i2}(x,\varepsilon) - \beta'_{i1}(x,\varepsilon)], \\ \varphi'(x)\alpha_{i2}(x,\varepsilon) - \beta_{i3}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta'_{i2}(x,\varepsilon), \\ \varphi'(x)\alpha_{i3}(x,\varepsilon) - b(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon) + a(x)\beta_{i2}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta'_{i3}(x,\varepsilon), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon) = \mu^3[\alpha'_{i1}(x,\varepsilon) - \alpha_{i2}(x,\varepsilon)], \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i2}(x,\varepsilon) + \alpha_{i3}(x,\varepsilon) = \mu^3\alpha'_{i2}(x,\varepsilon), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i3}(x,\varepsilon) + b(x)\alpha_{i1}(x,\varepsilon) - a(x)\alpha_{i2}(x,\varepsilon) = \mu^3\alpha'_{i3}(x,\varepsilon). \end{cases} \tag{2.15}$$

Тут $i = \overline{1;2}$, $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{3}}$. В подальших міркуваннях, враховуватимо, що $\varepsilon = \mu^3$.

Таким способом, одержана система (2.15) є регуляризованою. Це означає, що в ході перетворень було правильно виділено, описано та збережено як єдину цілісність усі істотно особливі функції, які містяться у розв'язках системи (2.4).

2.1.3 Побудова формальних розв'язків однорідної системи

Варто відзначити, що особливістю розширеної задачі (2.15) є те, що вона регулярно збурена відносно малого параметра $\mu > 0$ у просторі безрезонансних розв'язків (2.8). Тоді всі компоненти вектор-функцій $\alpha_{ik}(x,\varepsilon)$ і $\beta_{ik}(x,\varepsilon)$ будемо шукати у вигляді рядів

$$\alpha_{ik}(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \alpha_{ikr}(x), \qquad \beta_{ik}(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \beta_{ikr}(x). \tag{2.16}$$

Підставимо ряди (2.16) у систему (2.15) для визначення вектор-функцій

$$\alpha_{ikr}(x) = colomn(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x)),$$

$$\beta_{ikr}(x) = colomn(\beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x)).$$

Підставивши ряди (2.16) у розширену задачу (2.7) і зрівнявши коефіцієнти біля однакових степенів малого параметра $\mu > 0$, для визначення коефіцієнтів рядів отримаємо рекурернтну систему задач:

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = 0, \qquad r = \overline{0,2}, \qquad \Phi(x) Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{k(r-3)}(x), \qquad r \geq 3, \tag{2.17}$$

за умови, що $Z_{kr}(x) = colomn(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x), \beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x))$, а

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \varphi'(x) & b(x) & a(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 \\ -b(x) & -a(x) & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

$$F \cdot Z_{k(r-3)}(x) = colomn\left(z_{i1(r-3)}, z_{i2(r-3)}, z_{i3(r-3)}, z_{i4(r-3)}, z_{i5(r-3)}, z_{i6(r-3)} \right),$$

де

$$z_{i1(r-3)} = (\beta_{i2(r-3)}(x) - \beta_{i1(r-3)}(x)),$$

$$z_{i2(r-3)} = -\beta_{i2(r-3)}(x),$$

$$z_{i3(r-3)} = -\beta_{i3(r-3)}(x),$$

$$z_{i4(r-3)} = (\alpha_{i1(r-3)}(x) - \alpha_{i2(r-3)}(x)),$$

$$z_{i5(r-3)} = \alpha_{i2(r-3)}(x),$$

$$z_{i6(r-3)} = \alpha_{i3(r-3)}(x).$$

Обчислимо визначник цієї системи (2.18)

$$\det \Phi(x) = \varphi'^2[\varphi(x)\varphi_2'(x)]^2 \cdot [\varphi(x)\varphi'^2(x) - a(x)]^2 = 0.$$

Зауважимо, що регуляризуюча функція $\varphi(x)$ поки не визначена. Тому визначимо її як розв'язок задачі:

$$\varphi(x)\varphi'^2(x) = a(x) \equiv x\tilde{a}(x), \qquad \varphi(0) = 0. \tag{2.19}$$

Розв'язавши (2.19) отримуємо

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{x\widetilde{a}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Запишемо систему рекурентних рівнянь (2.17) при $r = 0$

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{i10}(x,\varepsilon) = 0, \\ \varphi'(x)\alpha_{i20}(x,\varepsilon) - \beta_{i30}(x,\varepsilon) = 0, \\ \varphi'(x)\alpha_{i30}(x,\varepsilon) - b(x)\beta_{i10}(x,\varepsilon) + a(x)\beta_{i20}(x,\varepsilon) = 0, \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i10}(x,\varepsilon) = \mu^3[\alpha_{i10}'(x,\varepsilon) - \alpha_{i20}(x,\varepsilon)], \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i20}(x,\varepsilon) + \alpha_{i30}(x,\varepsilon) = 0, \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i30}(x,\varepsilon) + b(x)\alpha_{i10}(x,\varepsilon) - a(x)\alpha_{i20}(x,\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\det \Phi(x) \equiv 0$, то існує нетривіальний розв'язок системи (2.17), тобто $\Phi(x) \cdot Z_{kr} = 0$, $r = \overline{0,2}$ вигляду:

$$Z_{kr}(x) = colomn\left(0, \frac{1}{\varphi'(x)}\beta_{i2r}(x), -\varphi\varphi'(x)\beta_{i3r}(x), 0, \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x)\right), \tag{2.20}$$

де $\beta_{ikr}(x), i = \overline{1;2}, k = \overline{1;3}, r = \overline{0;2}$ – до певного часу довільні, достатньо гладкі функції при $x \in [0;l]$.

Таким способом, отримавши розв'язок системи $\Phi(x) \cdot Z_{kr} = 0$, $r = \overline{0;2}$, перейдемо до розв'язків неоднорідних систем (2.17) $\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{k(r-3)}(x)$, $r \geq 3$. Спочатку розглянемо ці системи при $r = 3$. З урахуванням розв'язку

(2.20), отримаємо системи

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k13}(x) = \beta_{k20}(x) - \beta'_{k10}(x) \equiv \beta_{k20}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{k23}(x) - \beta_{k33}(x) = -\beta'_{k20}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{k33}(x) - b(x)\beta_{k13}(x) + a(x)\beta_{k23}(x) = -\beta'_{k30}(x), \end{cases} \tag{2.21}$$

та

$$\begin{cases} \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k13}(x) = -\alpha'_{k10}(x) + \alpha_{k20}(x) \equiv \alpha_{k20}(x) \equiv [\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k23}(x) + \alpha_{k33}(x) = \alpha'_{k20}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x)), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x) + b(x)\alpha_{k13}(x) - a(x)\alpha_{k23}(x) = \alpha'_{k30}(x), \end{cases} \tag{2.22}$$

де $\alpha'_{k30}(x) \equiv \frac{d}{dx}[-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k20}(x)]$

З перших рівнянь систем (2.21) та (2.22) визначимо функції

$$\alpha_{k13}(x) = [\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k20}(x),$$

$$\beta_{k13}(x) = [\varphi'(x)]^{-2}[\varphi(x)]^{-1}\beta_{k30}(x).$$

Тоді системи (2.21) і (2.22) наберуть вигляду

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k23}(x) - \beta_{k33}(x) = -\beta'_{k20}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{k33}(x) + a(x)\beta_{k23}(x) = -\beta'_{k30}(x) + b(x)\beta_{k13}(x), \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k23}(x) + \alpha_{k33}(x) = \alpha'_{k20}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x)), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x) - a(x)\alpha_{k23}(x) = \frac{d}{dx}[-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k20}(x)] - b(x)\alpha_{k13}(x). \end{cases}$$

Запишемо ці системи таким способом:

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k23}(x) - \beta_{k33}(x) = -\beta'_{k20}(x), \\ -a(x)\alpha_{k23}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x) = [-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k20}(x)]' - b(x)\frac{\beta_{k20}(x)}{\varphi'(x)}, \end{cases} \tag{2.23}$$

та

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k33}(x) + a(x)\beta_{k23}(x) = -\beta'_{k30}(x) + b(x)\frac{\beta_{k30}(x)}{\varphi(x)\varphi'^2(x)}, \\ \alpha_{k33}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k23}(x) = [\frac{\beta_{k30}(x)}{\varphi'(x)}]'. \end{cases} \tag{2.24}$$

Запишемо ранги матриць систем (2.23) і (2.24). Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \varphi'(x) & -1 & -\beta'_{k20}(x) \\ -a(x) & \varphi(x)\varphi'(x) & (-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k20}(x))' + \frac{-b(x)}{\varphi'(x)}\beta_{k20} \end{array}\right), \tag{2.25}$$

та

$$\left(\begin{array}{cc|c} \varphi'(x) & -a(x) & -\beta'_{k30}(x) + b(x)\frac{\beta_{k30}(x)}{\varphi(x)\varphi'^2(x)} \\ 1 & -\varphi(x)\varphi'(x) & (\frac{\beta_{k30}(x)}{\varphi'(x)})' \end{array}\right). \tag{2.26}$$

Дослідимо більш детально праві частини (2.23) та (2.24). Зауважимо, що дані системи мають безліч розв'язків, коли для системи (2.23) виконується умова

$$-2a(x)\beta'_{i20}(x) + \Big[-b(x) - \varphi'(x)(\varphi(x)\varphi'(x))'\Big]\beta_{i20}(x) = 0, \tag{2.27}$$

а для системи (2.24), відповідно, умова

$$-2\beta'_{i30}(x) + \Big[\frac{\varphi''(x}{\varphi'(x}) + \frac{b(x)}{a(x)}\Big]\beta_{i30}(x) = 0. \tag{2.28}$$

З (2.27) одержимо

$$-2a(x)\beta'_{i20}(x) + [\varphi'^3(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x) + b(x)]\beta_{i20}(x) = 0.$$

Введемо позначення

$$b_2(x) = \frac{\varphi'^3(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x) + b(x)}{2\tilde{a}(x)}.$$

Тоді (2.27) запишеться у вигляді

$$\beta'_{i20}(x) + \frac{b_2(x)}{x}\beta_{k20}(x) = 0. \tag{2.29}$$

Розв'яжемо (2.29).

$$\beta_{i20}(x) = \int_0^x \frac{b_2(x)}{x}\beta_{k20}(x).$$

Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена

$$\frac{b_2(x)}{x\tilde{a}(x)} = \frac{b_2(0)}{x\tilde{a}(0)} + x \cdot \frac{b_2'(0)}{\tilde{a}'(0)} + x^2 \cdot \frac{b_2''(0)}{\tilde{a}''(0)} + \dots .$$

Тоді

$$\int \frac{b_2(x)}{x\tilde{a}(x)} = \int \frac{b_2(0)}{x\tilde{a}(0)} + \int \tilde{R}_2(x),$$

де

$$\tilde{R}_2(x) = x \cdot \frac{b_2'(0)}{\tilde{a}'(0)} + x^2 \cdot \frac{b''(0)}{\tilde{a}''(0)} + \dots,$$

звідки

$$\int \frac{b_2(x)}{x\tilde{a}(x)} = \ln |x|^{\frac{b_2(0)}{\tilde{a}(0)}} + \int \tilde{R}_2(x).$$

Тоді

$$\beta_{i20}(x) = \beta_{i20}^0 \cdot exp \int \frac{b_2(x)}{x}. \tag{2.30}$$

З (2.28) одержимо

$$\beta_{i30}'(x) - \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x) - b(x)}{x\tilde{a}(x)}\right]\beta_{i30}(x) = 0.$$

Введемо позначення

$$b_3(x) = \frac{\varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x) - b(x)}{2\tilde{a}(x)}.$$

Тоді

$$\beta_{i30}'(x) - \frac{b_3(x)}{x\tilde{a}(x)}\beta_{i30}(x) = 0. \tag{2.31}$$

$$\beta_{i30}(x) = \int_0^x \frac{b_3(x)}{x\tilde{a}(x)}\beta_{i30}(x) = 0.$$

Як і для вектор-функції $\beta_{i20}(x)$ розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена

$$\frac{b_3(x)}{x\tilde{a}(x)} = \frac{b_3(0)}{x\tilde{a}(0)} + x \cdot \frac{b_3'(0)}{\tilde{a}'(0)} + x^2 \cdot \frac{b_3''(0)}{\tilde{a}''(0)} + \dots .$$

Тоді

$$\int \frac{b_3(x)}{x\tilde{a}(x)} = \int \frac{b_3(0)}{x\tilde{a}(0)} + \int \tilde{R}_3(x),$$

де

$$\tilde{R}_3(x) = x \cdot \frac{b_3'(0)}{\tilde{a'}(0)} + x^2 \cdot \frac{b''(0)}{\tilde{a''}(0)} + \ldots,$$

звідки

$$\int \frac{b_3(x)}{x\tilde{a}(x)} = \ln|x|^{\frac{b_3(0)}{\tilde{a}(0)}} + \int \tilde{R}_3(x).$$

Отже, розв'язок для (2.31) запишемо у вигляді

$$\beta_{i30}(x) = \beta_{i30}^0 \cdot exp\{\int \frac{b_3(x)}{x}\}, \tag{2.32}$$

Тепер з умов (2.29) та (2.31) однозначно визначимо компоненти розв'язку (2.17) при $r = \overline{0,2}$, а саме

$$\beta_{ks0}(x) = \beta_{is0}^0 \cdot \tilde{\beta}_{is0}(x),$$

де $k = \overline{1;2}$, $s = \overline{2;3}$, $\beta_{ks0}^0(x)$ – довільні сталі, $\tilde{\beta}_{is0}(x)$ – частинні, достатньо гладкі розв'язки однорідних систем (2.23) та (2.24) при $x \in [0;l]$. При такому визначенні вектор-функцій $Z_{k0}(x)$ існують розв'язки неоднорідних систем (2.23) та (2.24) вигляду

$$Z_{i3}(x) = colomn\left(\; z_{i13}, z_{i23}, z_{i33}, z_{i43}, z_{i53}, z_{i63} \;\right),$$

$$z_{i13} = (\varphi'(x))^{-1}\beta_{i20}(x),$$

$$z_{i23} = \frac{-\beta_{i20}'(x) + \beta_{i33}(x)}{\varphi'(x)},$$

$$z_{33} = \frac{-\beta_{i30}'(x) - a(x)\beta_{i23}(x) + b(x)(\varphi(x))^{-1}(\varphi'(x))^{-2}\beta_{i30}}{\varphi'(x)},$$

$$z_{i43} = (\varphi(x))^{-1}(\varphi'(x))^{-2}\beta_{i20}(x),$$

$$z_{i53} = \beta_{i21}(x),$$

$$z_{i63} = \beta_{i31}(x).$$

Необхідно відмітити, що $\beta_{i21}(x)$ та $\beta_{i31}(x)$, як і в (2.20), до певного часу довільні, достатньо гладкі функції для всіх $x \in [0; l]$.

Продовжуючи далі розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь (2.23) та (2.24) при $r > 3$, знайдемо всі необхідні члени ряду для обох систем з точністю до двох довільних сталих $\beta_{i2q}(x)$ та $\beta_{i3q}(x)$, де $r = \overline{0; q}$.

Висновок 1. Таким чином, продовжуючи далі розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь (2.21) та (2.22), одержимо два лінійно незалежні розв'язки однорідної системи (2.4) вигляду

$$D_{ik}(x, t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ik}(x) U_i(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ik}(x, \varepsilon) U_i'(t)], \qquad i = \overline{1; 2}, k = \overline{1; 3}. \quad (2.33)$$

де

$$\alpha_{ik}(x) = colomn(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x)),$$

$$\beta_{ik}(x) = colomn(\beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x)).$$

Тут $\alpha_{ik}(x)$ та $\beta_{ik}(x)$ визначені вектор-функції, $i = \overline{1; 2}$, $k = \overline{1; 3}$.

Повертаючись до заміни $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$ одержимо розв'язки системи (2.4) у вигляді

$$D_{ik}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ik}(x) U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ik}(x, \varepsilon) U_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \varphi(x))], \quad (2.34)$$

$i = \overline{1; 2}, k = \overline{1; 3}$

Тоді, поступово розв'язуючи (2.4), отримаємо два формальні розв'язки однорідного рівняння

$$D_{ik}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ikr}(x) U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ikr}(x, \varepsilon) U_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \varphi(x))]. \quad (2.35)$$

Третій формальний розв'язок однорідного векторного рівняння (2.4) побудуємо у вигляді:

$$\omega(x, \varepsilon) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x) \equiv colomn \left(\sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{1r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{2r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{3r}(x) \right). \quad (2.36)$$

Підставивши (2.36) в (2.4), одержимо наступну систему рекурентних рівнянь:

$$A_0(x)\omega_0(x) = 0, \qquad A_r(x)\omega_r(x) = -A_1(x)\omega_{(r-1)}(x) - \omega'_{(r-1)}(x), \qquad r \geq 1. \tag{2.37}$$

Дослідимо розв'язок однорідного векторного рівняння $A_0(x)\omega_0(x) = 0$. В результаті отримаємо $\omega_{03}(x) \equiv 0$ і систему двох рівнянь

$$\begin{cases} \omega'_{01}(x) - \omega_{02}(x) = 0, \\ x\tilde{a}(x)\omega_{02} - b(x)\omega_{01}(x) = 0. \end{cases}$$

З цієї системи отримаємо наступне скалярне диференціальне рівняння

$$x\tilde{a}(x)\omega'_{01}(x) - b(x)\omega_{01}(x) = 0. \tag{2.38}$$

Розв'язок однорідного рівняння (2.38) запишемо у вигляді

$$\omega_{01}(x) = \omega_{01}^0 \cdot exp\left\{-\int \frac{-b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\}, \tag{2.39}$$

де ω_{01}^0 – довільна стала.

Зазначимо, що до цього часу ми не вимагали виконання умови, яку ми наклали на коефіцієнт $b(x)$. З урахуванням (**??**), тобто коли $b(x) < 0$, в (2.39) одержимо $\frac{b(0)}{\tilde{a}(0)} = \rho < 0$ [9]. Відтак розв'язок (2.39) є достатньо гладкою функцією на відрізку [0;l].

Використовуючи розв'язок (2.39), зможемо обчислити

$$\omega_{02}(x) = \omega'_{01}(x) = -\omega_{01}^0 \cdot \frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)} exp\left\{-\int \frac{-b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\}.$$

Таким способом побудовано нульове наближення для системи (2.4)

$$\omega_0(x) = colomn(\omega_{01}(x), \omega_{02}(x), \omega_{03}(x)) =$$

$$= colomn\left(\omega_{01}^0 \cdot exp\left\{-\int \frac{-b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\}, \omega_{01}^0 \cdot \frac{-b(x)}{x\tilde{a}(x)} exp\left\{-\int \frac{-b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\}, 0\right), \tag{2.40}$$

де ω_{01}^0 – довільна стала.

Висновок 2. Побудовано формальний розв'язок однорідної системи (2.4), який можна представити у вигляді

$$\tilde{Y}_{hom.}(x,t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^{r}\left[\left[\sum_{i=1}^{2}\left[\alpha_{ikr}(x)U_i(t)+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ikr}(x)U_i'(t)\right]\right]+\omega_{kr}(x)\right]. \quad (2.41)$$

Зауважимо, що в даному випадку $x = 0$ є так званою *стабільною точкою звороту* [6], оскільки модельне рівняння $U''(t) + tU(t) = 0$ має обидва обмежені розв'язки, коли $t \geq 0$.

Теорема 2.1.1. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:*

***C 1**. $H(x) \in C^{\infty}[0;l]$;*

***C 3**. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) > 0$, $\quad b(x) < 0$.*

Тоді при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ можна побудувати формальний розв'язок $\tilde{Y}_{hom.}(x,t,\varepsilon)$ відповідної однорідної системи у вигляді асимптотичного ряду

$$\tilde{Y}^{hom.}(x,t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^{r}\left[\left[\sum_{i=1}^{2}\left[\alpha_{ikr}(x)U_i(t)+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ikr}(x)U_i'(t)\right]\right]+\omega_{kr}(x)\right],$$

де $\alpha_{ikr}(x)$, $\beta_{ikr}(x)$ визначаються з (2.17), а $\omega_{kr}(x)$ визначається з (2.37).

Для побудови асимптотики розв'язку системи (2.4) необхідно знайти ще частинний розв'язок цієї системи.

2.1.4 Побудова формальних частинних розв'язків неоднорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь

Вивчимо дію розширенного оператора $\tilde{L}_{\varepsilon}$ на елементи простору безрезонансних розв'язків D_{3k} і D_{4k}, а саме

$$f_k(x,\varepsilon)\psi(t)+\varepsilon^{\gamma}g_k(x,\varepsilon)\psi'(t)+\bar{\omega}_k(x,\varepsilon).$$

Результат запишемо у вигляді

$$\psi'(t):\varphi'(x)f(x,\varepsilon)-[A_0(x)+\mu^3A_1]g(x,\varepsilon)=-\mu^3g'(x,\varepsilon), \quad (2.42)$$

$$\psi(t):\varphi(x)\varphi'(x)g_k(x,\varepsilon)+[A_0(x)+\mu^3A_1]f_k(x,\varepsilon)=\mu^3f'(x,\varepsilon), \quad (2.43)$$

$$\mu^3\bar{\omega}'(x,\varepsilon) - [A_0(x) + \mu^3 A_1]\bar{\omega}(x,\varepsilon) + \mu^2\varphi'(x)g_k(x,\varepsilon) = h(x). \qquad (2.44)$$

Вивчивши рівняння (2.42) та (2.43), бачимо, що вони мають таку ж структурою як і (2.10) та (2.11). Але скористатись прямим результатом (2.34) ми не можемо, оскільки в цьому випадку не отримаємо очікуваних результатів для системи(2.44). Для отримання рівномірної асимптотики системи (2.44) необхідно використати розв'язки (2.42) та (2.43), провівши аналогічні міркування як у (2.10) та (2.11). Дослідимо системи (2.42) та (2.43) і побудуємо їх розв'язки у вигляді рядів:

$$f_k(x,\varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r f_{kr}(x), \qquad g_k(x,\varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r g_{kr}(x). \qquad (2.45)$$

Зауважимо, що наявність від'ємних степенів малого параметра в ряді (2.45) випливає з того, що права частина рівняння (2.4), а відповідно й розширеної системи (2.7), у загальному випадку не належать множині значень оператора L_0 (L_0 є головним оператором розширеного оператора L_ε) [6]. Оскільки в подальшому ми хочемо будувати рівномірний асимптотичний розв'язок системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4), то нам необхідно буде, щоб системи ітераційних рівнянь (2.46), що відповідають елементам простору D_{3k} і D_{4k} обов'яково мали нуль першого порядку в точці $x = 0$. Для того, щоб згадана умова мала місце і для першого неоднорідного ітераційного рівняння, ряд (2.45) повинен містити від'ємний степінь малого параметра.

Для визначення компонент вектор-функцій

$$f_{kr}(x) = colomn(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x)),$$

$$g_{kr}(x) = colomn(g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x))$$

одержимо такі системи рекурентних рівнянь:

$$\Phi(x)\cdot Z_0^{part.}(x) = 0, \qquad r = -2; -1; 0, \qquad \Phi(x)\cdot Z_r^{part.}(x) = -Z_{r-3}^{part.}(x), \qquad r \geq 1. \qquad (2.46)$$

В одержаних рекурсіях (2.46) $\Phi(x)$– матриця, а

$$Z_r^{part.}(x) = colomn(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x), g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x))$$

невідома вектор-функція.

Оскільки $\det \Phi(x) = 0$, то проводячи агалогічні міркування як у випадку з дослідженням (2.17) одержимо розв'язки однорідної системи (2.46) вигляду

$$Z_0^{part.}(x) = colomn\left(0, \frac{1}{\varphi'(x)}g_{30}(x), -\frac{a(x)}{\varphi'(x)}g_{20}(x), 0, g_{20}(x), g_{30}(x)\right), \quad (2.47)$$

де $g_{k0}, k = \overline{2;3}$ – до певного часу довільні, достатньо гладкі функції $x \in [0;l]$.

Тоді частинний розв'язок розширеного векторного рівняння (2.7) визначається у вигляді рядів

$$\tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[f_{kr}(x)\psi(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} g_{kr}(x)\psi'(t)\right] + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \bar{\omega}_{kr}(x).$$

Повернувшись до заміни $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$, отримаємо розв'язок системи (2.7) у вигляді ряду

$$\tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[f_{kr}(x)\psi(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} g_{kr}(x) \frac{d\psi(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))}\right] + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \bar{\omega}_{kr}(x). \quad (2.48)$$

Відтак, співвідношенням (2.48) представлено частинний формальний розв'язк для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4).

Третій формальний розв'язок неоднорідного векторного рівняння (2.4) будуємо у вигляді ряду

$$\omega(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x) = colomn\left(\sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{1r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{2r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{3r}(x)\right). \quad (2.49)$$

Підставивши (2.49) у рівняння (2.4), отримаємо наступну рекурентну систему векторних рівнянь:

$$A_0(x) \cdot \omega_0(x) = 0, \qquad A_r(x) \cdot \omega_r(x) = -A_1(x)\omega_{(r-1)}(x) - \omega'_{(r-1)}(x), \qquad r \geq 1. \quad (2.50)$$

Дослідимо розв'язок однорідного векторного рівняння $A_0(x) \cdot \omega_0(x) = 0$. Запишемо праву частину в скалярній формі

$$\begin{cases} -\varphi'(x)g_{1(-2)}(x) = 0, \\ -\bar{\omega}_{30}(x) = -\varphi'(x)g_{2(-2)}(x), \\ b(x)\bar{\omega}_{10}(x) + a(x)\bar{\omega}_{20}(x) = h(x) - \varphi'(x)g_{3(-2)}(x). \end{cases} \tag{2.51}$$

При умові, що $\bar{\omega}_{10} = 0$ обчислимо

$$\bar{\omega}_{20}(x) = \frac{h(x) - \varphi'(x) \cdot g_{3(-2)}(x)}{a(x)}, \quad \bar{\omega}_{30}(x) = \varphi'(x) \cdot g_{2(-2)}(x).$$

Дослідимо систему (2.50) при $r = \overline{1,2}$. Для існування достатньо гладкого розв'язку цієї системи на всьому відрізку, включаючи і точку звороту $x = 0$, припустимо, що $g^0_{(-1)} = g^0_0 = 0$. Тоді система (2.50) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{3r}(x) = \varphi'(x) \cdot g_{2(r-2)}(x), \\ b(x)\bar{\omega}_{1r}(x) + a(x)\bar{\omega}_{2r}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{3(r-2)}(x), \\ 0 = -\varphi'(x) \cdot g_{1(r-2)}(x). \end{cases} \tag{2.52}$$

Дослідивши (2.52) отримаємо, що для неї існують достатньо гладкі розв'язки

$$\bar{\omega}_{1r}(x) = 0, \quad \bar{\omega}_{2r}(x) = \frac{-\varphi'(x) \cdot g_{3(r-2)}(x)}{a(x)}, \quad \bar{\omega}_{3r}(x) = \varphi'(x) \cdot g_{2(r-2)}(x).$$

Продовжуючи дослідженнння (2.50) при $r \geq 3$ одержимо систему

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{3r}(x) = \varphi'(x) \cdot g_{2(r-2)}(x) + \bar{\omega}'_{2(r-3)}(x), \\ b(x)\bar{\omega}_{1r}(x) + a(x)\bar{\omega}_{2r}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{3(r-2)} - \bar{\omega'}_{3(r-3)}(x), \\ 0 = -\varphi'(x) \cdot g_{1(r-2)} + \bar{\omega}(x)_{2(r-3)} - \bar{\omega'}_{1(r-3)}. \end{cases} \tag{2.53}$$

Точка звороту $x = 0$ є так званою регулярною особливою точкою, або особливою точкою першого роду [112]. Це означає, що при $x \to 0$ жоден розв'язок не зростає швидке, ніж деякий від'ємний степінь x. Тому є можливість визначити достатньо гладкі розв'язки системи (2.4) на всьому відрізку $[0; l]$. Продовжуючи ітераційний процес, отримаємо частинні розв'язки системи (2.53) у вигляді ряду

$$\tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\psi(t) + \mu g_{kr}(x)\psi'(t)\right] + \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r \bar{\omega}_{kr}(x). \qquad (2.54)$$

Теорема 2.1.2. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:*

C 1. *$H(x) \in C^{\infty}[0;l]$;*

C 3. *$a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) > 0$, $\quad b(x) < 0$.*

Тоді при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ можна побудувати частинний розв'язок $\tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon)$ відповідної неоднорідної системи у вигляді асимптотичного ряда

$$\tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\psi(t) + \mu g_{kr}(x)\psi'(t)\right] + \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r \bar{\omega}_{kr}(x),$$

де $f_{kr}(x)$ і $g_{kr}(x)$ визначаються з (2.46), а $\bar{\omega}_{kr}(x)$ визначається з (2.50).

Висновок 3. Побудовано формальний розв'язок системи (2.4), який можна представити у вигляді

$$\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon) = \tilde{Y}_{hom}(x,t,\varepsilon) + \tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon), \qquad (2.55)$$

де $\tilde{Y}_{hom.}(x,t,\varepsilon)$ – розв'язок відповідної однорідної системи (2.4), а $\tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon)$ частинний розв'язок, відповідно, неоднорідної системи, тобто

$$\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\left[\sum_{k=1}^{2} \left[\alpha_{kr}(x)U_i(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{kr}(x)U_i'(t)\right]\right] + \omega_{kr}(x)\right] + \qquad (2.56)$$

$$+ \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\psi(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} g_{kr}(x)\psi'(t)\right] + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \bar{\omega}_{kr}(x).$$

Повернувшись в (2.56) до заміни $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$, запишемо розв'язок системи (2.4) у вигляді ряду

$$\tilde{Y}_k(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x), \varepsilon) = \qquad (2.57)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\left[\sum_{k=1}^{2} \left[\alpha_{kr}(x)U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{kr}(x)\frac{dU_i(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))}\right]\right] + \omega_{kr}(x)\right]$$

$$+\sum_{r=-2}^{\infty}\varepsilon^r\left[f_{kr}(x)\psi(\varepsilon^{\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}g_{kr}(x)\frac{d\psi(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}\right]+\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\bar{\omega}_{kr}(x).$$

2.1.5 Оцінка залишкових членів асимптотики розв'язку

Побудувавши асимптотику розв'язку системи (2.7) у вигляді (2.166), необхідно зазначити, що дослідження було б неповним, якщо не проведена оцінка залишкових членів. Для отримання відповідних оцінок розв'язків системи оцінимо залишкові члени формальних рядів (2.16), (2.36), (2.45) для векторного рівняння (2.7) у вигляді:

$$\alpha_k(x,\varepsilon)\equiv\alpha_{kq}(x,\varepsilon)+\varepsilon^{q+1}\xi_{k\alpha(q+1)}(x,\varepsilon), \tag{2.58}$$

$$\beta_k(x,\varepsilon)\equiv\beta_{kq}(x,\varepsilon)+\varepsilon^{q+1}\xi_{k\beta(q+1)}(x,\varepsilon),$$

де $\alpha_{kq}(x,\varepsilon)$ і $\beta_{kq}(x,\varepsilon)$ – частинні q-суми рядів (2.16), а $\varepsilon^{1+q}\xi_{k\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)$ та $\varepsilon^{1+q}\xi_{k\beta(q+1)}(x,\varepsilon)$ – залишкові члени відповідних рядів.

Підставимо ряди (2.58) у векторні рівняння (2.10) та (2.11) і врахуємо, що коефіцієнти $\alpha_{kq}(x)$ та $\beta_{kq}(x)$ є розв'язками систем (2.23) та (2.24), тобто кожна з цих функцій $r=\overline{0;q-1}$, визначається з точністю до двох довільних скалярних множників β^0_{ikr}, які утворюють довільний вектор $\beta^0_{ikr}=colomn(\beta^0_{1kr},\beta^0_{2kr})$. Розв'язки систем (2.23) та (2.24) при $r=q$ залежать від двох довільних достатньо гладких функцій $\beta_{ikr}(x)$, $i=\overline{1,2}$.

З метою визначення залишкових членів розглянемо систему алгераїчних рівнянь

$$\begin{cases}\varepsilon\xi'_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-A(x,\varepsilon)\xi_{\beta(q+1)}(x,\varepsilon)+\varepsilon\xi_{\beta(q+1)}(x,\varepsilon)+\beta'_{kq}(x)=0,\\ \varepsilon\xi'_{\beta(q+1)}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-A(x,\varepsilon)\xi_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)+\varepsilon\xi_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)+\alpha'_{kq}(x)=0.\end{cases} \tag{2.59}$$

Система (2.59) має таку ж структуру як і система (2.10) та (2.11). З метою визначення координат невідомих функцій

$$\xi_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)=(\xi_{1\alpha(q+1)}(x,\varepsilon);\xi_{2\alpha(q+1)}(x,\varepsilon);\xi_{3\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)),$$

$$\xi_{\beta(q+1)}(x,\varepsilon)=(\xi_{1\beta(q+1)}(x,\varepsilon);\xi_{2\beta(q+1)}(x,\varepsilon);\xi_{3\beta(q+1)}(x,\varepsilon)).$$

Після перетворень, систему (2.59) запишемо у вигляді двох систем

$$\begin{cases} \varepsilon\xi'_{2\beta(q+1)}(x,\varepsilon)+\xi_{2\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)\varphi'(x)+\xi_{3\beta(q+1)}(x,\varepsilon)=-\beta'_{2q}(x), \\ \varepsilon\xi'_{3\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)+a(x)\xi_{2\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)+\xi_{3\beta(q+1)}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)= \\ \qquad\qquad\qquad\qquad =-\alpha'_{3q}(x)-b(x)\xi_{1\alpha(q+1)}(x,\varepsilon). \end{cases} \tag{2.60}$$

та

$$\begin{cases} \varepsilon\xi'_{2\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-\xi_{2\beta(q+1)}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)+\xi_{3\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)=-\alpha'_{2q}(x), \\ \varepsilon\xi'_{3\beta(q+1)}(x,\varepsilon)+a(x)\xi_{2\beta(q+1)}(x,\varepsilon)+\xi_{3\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)\varphi'(x)= \\ \qquad\qquad\qquad\qquad =-\beta'_{3q}(x)-b(x)\xi_{1\beta(q+1)}(x,\varepsilon). \end{cases} \tag{2.61}$$

Зауважимо, що розв'язки систем (2.23) та (2.24) побудовані нами у вигляді рядів (2.16) відносно малого параметра. Системи (2.60) та (2.61) немає необхідності розв'язувати, достатньо оцінити розв'язки цих систем. На перший погляд здається, що системи (2.60) та (2.61) не менш складні, ніж вихідна система (2.4), однак можна перевірити, що характеристичні рівняння для цих систем мають вигляд

$$\lambda[\lambda-\varphi'(x)(\varphi(x)\varphi'(x)+1)]=0,$$

тобто

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &\equiv 0, \\ \lambda_2(x) &= \varphi'(x)[\varphi(x)\varphi'(x)+1]. \end{aligned}$$

Системи рівнянь (2.60) не містять точки звороту. Це означає, що вони мають стабільний спектр, тому до них можна застосувати класичну теорію систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Власне системи (2.60) та (2.61) є регулярно збуреними відносно $\varepsilon>0$ у просторі (2.8). Тоді розв'язки цих систем будуть побудовані за степенями малого параметра. Таким чином, можемо застосувати класичну теорію для оцінки цих систем [6]. Тоді для формальних рядів (2.16) одержимо оцінки

$$\begin{aligned} &\|\xi_{\alpha k(q+1)}(x,\varepsilon)\|\le K_{(q+1)}, \\ &\|\xi_{\beta k(q+1)}(x,\varepsilon)\|\le K_{(q+1)}, \qquad q>0, \end{aligned} \tag{2.62}$$

де стала K_{q+1} не залежить від $x \in [0; l]$ і малого параметра $\varepsilon > 0$. Аналогічну процедуру проведемо для рядів (2.36), (2.45), в результаті одержимо оцінки

$$\begin{aligned} &\|\xi_{f(q+1)}(x, \varepsilon)\| \le K_{(q+1)}, \\ &\|\xi_{g(q+1)}(x, \varepsilon)\| \le K_{(q+1)}, \\ &\|\xi_{\omega(q+1)}(x, \varepsilon)\| \le K_{(q+1)}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Тут $q > 0$.

Із врахуванням одержаних оцінок (2.62) і (2.63), асимптотику загального розв'язку системи (2.4) можемо записати у вигляді ряду:

$$Y_k(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{2} \left\{ \left[\sum_{r=0}^{q} \varepsilon^r \alpha_{ikr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) \right] U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) + \right. \tag{2.64}$$

$$\left. +\varepsilon^{\frac{1}{3}} \left[\sum_{r=0}^{q} \varepsilon^r \beta_{ikr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) \right] \frac{dU_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))} \right\} + \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \omega_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) +$$

$$+ \left[\sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r f_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) \right] \psi(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) +$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{3}} \left[\sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r g_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) \right] \frac{d\psi(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))} + \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \overline{\omega}_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}).$$

Сформулюємо отриманий результат.

Теорема 2.1.3. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:*

C 1. $H(x) \in C^{\infty}[0; l]$;

C 3. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) > 0$, $\quad b(x) < 0$.

Тоді при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ методом істотно особливих функцій можна побудувати асимптотику розв'язку $\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon)$ у вигляді ряда

$$\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{2} \left\{ \left[\sum_{r=0}^{q} \varepsilon^r \alpha_{ikr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) \right] U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) + \right.$$

$$\left. +\varepsilon^{\frac{1}{3}} \left[\sum_{r=0}^{q} \varepsilon^r \beta_{ikr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) \right] \frac{dU_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))} \right\} +$$

$$+\left[\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r f_r(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]\psi(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))+$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r g_r(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]\frac{d\psi(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}+\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\omega_r(x)+O(\varepsilon^{q+1}),$$

де $\varphi(x)=\left(\frac{3}{2}\int_0^x\sqrt{x\widetilde{a}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}$.

2.1.6 Алгоритм побудови асимптотики розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь

Варто зазначити, що метод істотно особливих функцій можна описати за допомогою покрокового алгоритму побудови рівномірної асимптотики розв'язку системи сингулярно збурених диферернціальних рівнянь (2.4). Даний алгоритм є по суті мотифікацією методу фундаментальних функцій описаного в [6].

1 крок. *Розширення сингулярно збуреної задачі.* В сингулярно збуреній системі з точкою звороту поряд із незалежною змінною x вводиться нова вектор-змінна $t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)$. Тоді замість шуканої вектор-функції $Y(x,\varepsilon)$ вивчається нова „розширена вектор-функція" $\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)$. При чому розширення проводиться таким чином, щоб виконувалась умова як в методі регуляризації

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)|_{t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)}\equiv Y(x,\varepsilon).$$

p і $\varphi(x)$ визначається для кожного конкретного випадку. Відбувається перехід від задачі з однiє змінною, до задачі з двома змінними t і x.

2 крок. *Простір безрезонансних розв'язків.* Для регуляризації вводиться конкретний простір функцій - простір безрезонансних розв'язків, який для кожної кокретної задачі має свою специфіку.

$$\sum_{i=1}^{2}D_{ik}(x,t,\varepsilon)\bigoplus f_k(x,\varepsilon)\psi(t)\bigoplus\varepsilon^{\gamma}g_k(x,\varepsilon)\psi'(t)\bigoplus\omega_k(x,\varepsilon),\quad k=\overline{1,3}$$

.

3 крок. *Регуляризація сингулярно збуреної задачі.*

Для того, щоб гарантувати, що в ході перетворень було правильно виділено, описано та визначено всі істотно особливі функції, які містяться в розв'язках системи (2.4), потрібно вимагати, щоб алгебраїчні рівняння (формула) були регулярно збуреними відносно малого параметра $\varepsilon > 0$. Для цього необхідно однозначно визначити показники p та γ (Лема 2.1). Такий підхід надасть можливість знайти всі коефіцієнти ряду і побудувати рівномірну асимптотику розв'язку для системи (2.4).

4 крок. *Формалізм побудови розв'язку задачі.* Оскільки розширена задача є регулярно збуреною відносно малого параметра у просторі безрезонансних розв'язків, то розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду

$$\tilde{Y}_k(x,t,\mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r Y_{hom.}(x) + \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r Y^{part.}(x), \tag{2.65}$$

де $\mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$–малий параметр.

Побудову асимптотичного ряду розпочинаємо з від'ємних степенів малого параметра з метою одержання рівномірної асимптотики розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Права частина системи буде мати розрив другого роду в точці звороту. Тому в загальному випадку вона не належатиме множині значень головного розширеного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$. Підставивши ряд (2.166) в систему (2.15), для визначення коефіцієнтів цього ряду, отримаємо деяку систему рекурентних рівнянь з точковими початковими чи крайовими умовами.

5 крок. *Побудова формальних розв'язків однорідної розширеної системи.* Отримано на попередньому кроці рекурентні рівняння для визначення коефіцієнтів ряду (2.166) є рівняннями в частинних похідних з точковими крайовими умовами. Покажемо, що ця система рівнянь є асимптотично коректною у ПБР D_k. На цьому етапі розробляється теорія існування ітераційного рівняння виду

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{kr}(x),$$

де $\Phi(x)$–матриця системи (2.15), $Z_{kr}(x)$–вектор-стовпець складений з аналітичних функцій $\theta_1(x,\varepsilon)$. І будуються перші члени асимптотичного розв'язку однорідної досліджуваної задачі $\tilde{Y}_{hom.}(x,t,\varepsilon)$.

6 крок. *Побудова формальних розв'язків неоднорідної розширеної системи.* В цьому розділі будується розв'язок неоднорідної задачі $\tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon)$ за допомогою рекурентного рівняння

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{kr}(x),$$

де $\Phi(x)$–матриця системи (2.15), $Z_{kr}(x)$–вектор-стовпець складений з аналітичних функцій $\theta_2(x,\varepsilon)$.

7 крок. *Оцінка залишкових членів асимпотики розв'язку.* В цьому етапі необхідно провести оцінку залишкових членів

$$\varepsilon^{1+q}\xi_{k\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)$$

та

$$\varepsilon^{1+q}\xi_{k\beta(q+1)}(x,\varepsilon)$$

одержаних розв'язків.

8 крок. *Побудова загального розв'язку неоднорідної системи.* Результатом проведеного дослідження є побудова загального розв'язку системи

$$\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon) = \tilde{Y}^{hom.}(x,t,\varepsilon) + \tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon)$$

2.1.7 Приклад

Розглянемо систему (2.4). Запишемо її в такому вигляді

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = H(x), \tag{2.66}$$

де $A(x,\varepsilon)$ має таку структуру

$$A(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1,$$

а $A_0(x)$ і A_1 матриці вигляду

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4x+4 & -4x & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon \to 0$, $x \in [0,1]$, $Y(x,\varepsilon) \equiv Y_k(x,\varepsilon) = colomn(y_1(x,\varepsilon), y_2(x,\varepsilon), y_3(x,\varepsilon))$ - шукана вектор-функція, $H(x) = colomn(0,0,h(x))$ – задана вектор-функція.

Тоді дана система відповідає сингулярно збуреному диференціальному рівнянню третього порядку вигляду:

$$\varepsilon^3 y'''(x,\varepsilon) + 4x \cdot y'(x,\varepsilon) - (4x+4) \cdot y(x,\varepsilon) = h(x),$$

де $h(x) = 4x + 2$.

Застосовуючи описані вище міркування для системи (2.4) побудуємо асимптотику розв'язку даного рівняння за умов:

1. $\tilde{a}(x),\ b(x) \in C^\infty[0;1]$,

2. $a(x) = x\tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x) = 4,\ b(x) = -(4x+4), \qquad h(x) = 4x + 2,$

тобто спочатку будуємо асимптотику розв'язку однорідного рівняння.

Вироджене рівняння, що відповідає системі (2.4) має вигляд

$$4x\omega'(x) - (4x+4)\omega(x) = 0.$$

Характеристичне рівняння для системи (2.66) відповідно запишеться таким способом:

$$|A(x,0) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4x+4 & -4x & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 4x\lambda = 0.$$

Корені характеристичного рівняння: $\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = \pm 2\sqrt{x}i$. Таким способом $x = 0$ в даному випадку буде так званою *стабільною точкою звороту.*

Побудуємо насамперед асимпотототику однорідного розв'язку $\tilde{Y}_k^{hom.}(x,t,\varepsilon)$ системи (2.66) з урахуванням умов 1 і 2. Для цього скористаємось послідовністю перетворень відповідно до наведеного вище алгоритму. Для побудови рівномірної асимптотики розв'язку системи (2.4) замість $Y_k(x,\varepsilon)$ будемо вивчати розширену функцію $\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)$, при чому розширення проводимо таким чином, щоб мала місце тотожність $\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)\big|_{t=\varepsilon^{-p}\varphi(x)} \equiv Y_k(x,\varepsilon)$, яка є природньою умовою для застосування методу істотно особливих функцій.

Розширена задача вивчається у просторі безрезонансних розв'язків і зводиться до рівняння, у яке малий параметр $\varepsilon > 0$ входить регулярно. Виконуючи кроки, згідно алгоритма, на кроці 3 однозначно визначаємо

$$p = \frac{2}{3}, \qquad \gamma = \frac{1}{3}, \qquad k_1 = k_2 = s_3 = 0, \qquad s_1 = s_2 = k_3 = -\frac{1}{3}. \qquad (2.67)$$

Підставимо ці ряди у векторні рівняння, тоді для визначення вектор-функцій $\alpha_{ikr} = colomn(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x))$ і $\beta_{ikr}(x) = colomn(\beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x))$ отримаємо такі рекурентні системи

$$\Phi(x) \cdot Z_{k0}(x) = 0, \qquad r = 0; 1; 2, \qquad \Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{k(r-3)}(x), \qquad r \geq 3, \qquad (2.68)$$

за умови, що $Z_{kr}(x) = colomn(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x), \beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x))$, а

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \varphi'(x) & -(4x+4) & 4x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 \\ 4x+4 & -4x & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) \end{pmatrix}, \qquad (2.69)$$

$$FZ_{k(r-3)}(x) = colomn\left(z_{i1(r-3)}, z_{i2(r-3)}, z_{i3(r-3)}, z_{i4(r-3)}, z_{i5(r-3)}, z_{i6(r-3)} \right),$$

де

$$z_{i1(r-3)} = (\beta_{i2(r-3)}(x) - \beta_{i1(r-3)}(x)),$$

$$z_{i2(r-3)} = -\beta_{i2(r-3)}(x),$$

$$z_{i3(r-3)} = -\beta_{i3(r-3)}(x),$$

$$z_{i4(r-3)} = (\alpha_{i1(r-3)}(x) - \alpha_{i2(r-3)}(x)),$$

$$z_{i5(r-3)} = \alpha_{i2(r-3)}(x),$$

$$z_{i6(r-3)} = \alpha_{i3(r-3)}(x).$$

Обчислимо визначник (2.69). Визначимо регуляризуючу функцію $\varphi(x)$ як розв'язок задачі, яку після спрощення запишемо у вигляді

$$\varphi'^2\varphi(x) = 4x, \qquad \varphi(0) = 0. \tag{2.70}$$

Тоді

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{4}x.$$

$$\varphi'(x) = \sqrt[3]{4}.$$

Оскільки $\det\Phi(x) \equiv 0$, то існують нетривіальні розв'язки системи $\Phi(x) \cdot Z_{kr} = 0$, при $r = \overline{0,2}$ вигляду

$$Z_{kr}(x) = colomn\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\beta_{i3r}(x), -\frac{4x}{\sqrt[3]{4}}\beta_{i2r}(x), 0, \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x)\right), \tag{2.71}$$

де $\beta_{iks}(x), i = \overline{1;2}, k = \overline{1;3}, r = \overline{2;3}$ – до певного часу довільні, достатньо гладкі функції при $x \in [0;1]$.

Перейдемо до розв'язку неоднорідних систем (2.68).

Спочатку розглянемо ці системи при $r = 3$, з урахувванням (2.71), одержимо системи

$$\begin{cases} \sqrt[3]{4}\alpha_{i13}(x) = \beta_{i20}(x) - \beta'_{i10}(x) \equiv \beta_{i20}(x), \\ \sqrt[3]{4}\alpha_{i23}(x) - \beta_{i33}(x) = -\beta'_{i20}(x), \\ \sqrt[3]{4}\alpha_{i33}(x) - (4x+4)\beta_{i13}(x) + 4x\beta_{k23}(x) = -\beta'_{k30}(x), \end{cases} \tag{2.72}$$

та

$$\begin{cases} \sqrt[3]{16}x\beta_{k13}(x) = -\alpha'_{i10}(x) + \alpha_{i20}(x) \equiv \alpha_{i20}(x) \equiv [\sqrt[3]{4}]^{-1}\beta_{k30}(x), \\ \sqrt[3]{16}x\beta_{i23}(x) + \alpha_{i33}(x) = \alpha'_{k20}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\sqrt[3]{4}]^{-1}\beta_{i30}(x)), \\ \sqrt[3]{16}x\beta_{i33}(x) + (4x+4)\alpha_{i13}(x) - 4x\alpha_{i23}(x) = \alpha'_{i30}(x) \equiv \frac{d}{dx}[-\sqrt[3]{16}x\beta_{i20}(x)]. \end{cases} \tag{2.73}$$

З перших рівнянь систем (2.72) та (2.73) визначимо функції

$$\alpha_{i13}(x) = [\sqrt[3]{4}]^{-1}\beta_{i20}(x)$$

та

$$\beta_{i13}(x) = [\sqrt[3]{4}]^{-2}[\sqrt[3]{4}x]^{-1}\beta_{i30}(x).$$

Тоді системи (2.72) та (2.73) перейдуть у системи

$$\begin{cases} \sqrt[3]{4}\alpha_{i23}(x) - \beta_{i33}(x) = -\beta'_{i20}(x), \\ \sqrt[3]{4}\alpha_{i33}(x) + 4x\beta_{i23}(x) = -\beta'_{i30}(x) + (4x+4)\beta_{i13}(x), \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} \sqrt[3]{16}x\beta_{i23}(x) + \alpha_{i33}(x) = \alpha'_{i20}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\sqrt[3]{4}]^{-1}\beta_{i30}(x)), \\ \sqrt[3]{16}x\beta_{i33}(x) - 4x\alpha_{i23}(x) = \frac{d}{dx}[-\sqrt[3]{16}x\beta_{i20}(x)] - (4x+4)\alpha_{i13}(x). \end{cases}$$

Запишемо ці системи в такому вигляді:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{4}\alpha_{k23}(x) - \beta_{i33}(x) = -\beta'_{i20}(x), \\ -4x\alpha_{i23}(x) + \sqrt[3]{16}x\beta_{i33}(x) = [-\sqrt[3]{16}x\beta_{i20}(x)]' - (4x+4)\frac{\beta_{i20}(x)}{\sqrt[3]{4}}, \end{cases} \tag{2.74}$$

та

$$\begin{cases} \sqrt[3]{4}\alpha_{k33}(x) + 4x\beta_{k23}(x) = -\beta'_{i30}(x) + (4x+4)\frac{\beta_{i30}(x)}{4x}, \\ \alpha_{i33}(x) + \sqrt[3]{16}x\beta_{k23}(x) = [\frac{\beta_{i30}(x)}{\sqrt[3]{4})}]'. \end{cases} \tag{2.75}$$

Обчислимо ранги цих систем. Будемо мати

$$\left(\begin{array}{cc|l} \sqrt[3]{4} & -1 & -\beta'_{i20}(x) \\ -4x & \sqrt[3]{16}x & (-\sqrt[3]{16}x\beta'_{i20}(x)) + \frac{-(4x+4)}{\sqrt[3]{4}}\beta_{i20} \end{array}\right), \tag{2.76}$$

та

$$\left(\begin{array}{cc|l} \sqrt[3]{4} & -4x & -\beta'_{i30}(x) + (4x+4)\frac{\beta_{i30}(x)}{4x} \\ 1 & -\sqrt[3]{16}x & (\frac{\beta_{i30}(x)}{\sqrt[3]{4}})' \end{array}\right). \tag{2.77}$$

Дослідимо більш детально праві частини (2.76) та (2.77). Зауважимо, що дані системи мають безліч розв'язків, коли для системи (2.74) виконується умова

$$-8x\beta'_{i20}(x) - [8+4x]\beta_{i20}(x) = 0, \tag{2.78}$$

та, відповідно, умова

$$2\beta'_{i30}(x) + \Big[\frac{4x+4}{4x}\Big]\beta_{i30}(x) = 0 \tag{2.79}$$

для системи (2.75).

Розв'язуючи рівняння (2.78) та (2.79), одержимо такі розв'язки

$$\beta_{i20}(x) = \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}}$$

$$\beta_{i30}^2(x) = \frac{e^{C_{i30}}}{e^x \cdot x}$$

$$\beta_{i30}(x) = \sqrt{\frac{e^{C_{i30}}}{e^x \cdot x}}$$

Тоді розв'язок системи (2.68) для $r = 0$ запишеться у вигляді:

$$Z_{k0}(x) = colomn\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x}\cdot\sqrt{x}}(x), -\frac{4x}{\sqrt[3]{4}}\frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}}, 0, \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}}, \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x}\cdot\sqrt{x}}\right), \tag{2.80}$$

де $i = \overline{1;2}, k = \overline{1;3}, r = \overline{2;3}$ – до певного часу довільні, достатньо гладкі функції при $x \in [0;1]$.

Продовжуючи далі розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь (2.68), при $r > 3$ можемо отримати асимптотично коректні розв'язки з точністю до двох постійних сталих.

Третій формальний розв'язок для системи (2.4) будемо будувати у вигляді ряду

$$\omega(x,\varepsilon) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x) \equiv colomn\left(\sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{1r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{2r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{3r}(x)\right). \tag{2.81}$$

Підставимо (2.81) в (2.66), в результаті отримаємо наступну систему рекурентних рівнянь:

$$A_0(x)\cdot\omega_0(x) = 0, \qquad A_r(x)\cdot\omega_r(x) = -A_1(x)\omega_{(r-1)}(x) - \omega'_{(r-1)}(x), \qquad r \geq 1.\cdot \tag{2.82}$$

Дослідимо розв'язок однорідного рівняння $A_0(x)\omega_0(x) = 0$. В результаті отримаємо $\omega_{30}(x) \equiv 0$ і систему двох рівнянь

$$\begin{cases} \omega'_{10}(x) - \omega_{20}(x) = 0 \\ 4x\omega_{20} - (4x+4)\omega_{10}(x) = 0 \end{cases}$$

З цієї системи отримаємо наступне диференціальне рівняння:

$$4x\omega_{10}'(x) - (4x+4)\omega_{10}(x) = 0. \tag{2.83}$$

Розв'язок однорідного рівняння (2.83) запишемо у вигляді

$$\omega_{10}(x) = \omega_{10}^0 \cdot x \cdot e^x, \tag{2.84}$$

де ω_{10}^0–довільна стала.

На наступному кроці ми отримаємо неоднорідну систему рівнянь. Її розв'язок також буде містити одну довільну сталу ω_{11}^0. Продовжуючи далі розв'язувати системи рівнянь (2.82), побудуємо третій формальний розв'язок системи (2.66) у вигляді ряду.

Таким чином, ми побудували три лінійно незалежні розв'язки для системи (2.66). Тоді розв'язок $\tilde{Y}_k^{hom.}(x,t,\varepsilon)$ можна записати у вигляді

$$\tilde{Y}_k^{hom.}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\sum_{i=1}^{2} \left[\alpha_{ik}(x)U_i(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ik}(x)U_i'(t) \right] \right] + \omega_r(x) \tag{2.85}$$

Поветраючись до заміни $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$ розв'язок (2.66) у вигляді ряду

$$\tilde{Y}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\sum_{i=1}^{2} \left[\alpha_{ik}(x)U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}x) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{kr}(x)\frac{dU_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}x)}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}x)} \right] \right] + \tag{2.86}$$

$$+\omega_r(x).$$

Висновок 1. Для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) для якої виконуються умови:

1. $\tilde{a}(x),\ b(x) \in C^{\infty}[0;1]$,

2. $a(x) = x\tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x) = 4,\ b(x) = -(4x+4), \qquad h(x) = 0.$

при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ побудовано формальний розв'язок $\tilde{Y}_k^{hom.}(x,t,\varepsilon)$ у вигляді асимптотичного ряду (2.85).

Подіємо розширеним оператором L_ε на елемент простору безрезонансних розв'язків

$$f_k(x,\varepsilon)\psi(t) + \varepsilon^{\gamma} g_k(x,\varepsilon)\psi'(t) + \bar{\omega}_k(x,\varepsilon).$$

В результаті отримаємо такі векторні рівняння:

$$\psi'(t) : \sqrt[3]{4} f_k(x,\varepsilon) - [A_0(x) + \mu^3 A_1] g_k(x,\varepsilon) = -\mu^3 g'_k(x,\varepsilon), \tag{2.87}$$

$$\psi(t) : \sqrt[3]{16} x g_k(x,\varepsilon) + [A_0(x) + \mu^3 A_1] f_k(x,\varepsilon) = \mu^3 f'_k(x,\varepsilon), \tag{2.88}$$

$$\mu^3 \bar{\omega}'_k(x,\varepsilon) - [A_0(x) + \mu^3 A_1]\bar{\omega}_k(x,\varepsilon) + \mu^2 \sqrt[3]{4} g_k(x,\varepsilon) = H(x). \tag{2.89}$$

Асимптотику розв'язку (2.87) та (2.88) будуємо у вигляді рядів:

$$f_k(x,\varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r f_{kr}(x), \qquad g_k(x,\varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r g_{kr}(x). \tag{2.90}$$

Тоді компоненти вектор-функцій $f_{kr} = colomn(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x))$ та и $g_{kr}(x) = colomn(g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x))$ знайдемо з таких рекурентних систем рівнянь:

$$\Phi(x) Z_{k0}^{part.}(x) = 0, \qquad r = -2; -1; 0, \qquad \Phi(x) Z_{kr}^{part.}(x) = -Z_{k(r-3)}^{part.}(x), \qquad r \geq 1. \tag{2.91}$$

В одержаних рекурсіях $\Phi(x)$– матриця (2.69), а $Z_{kr}^{part.}(x) = colomn(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x), g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x))$ – шукана вектор-функція.

З того, $\det \Phi(x) \equiv 0$, за аналогією з попереднім,одержимо нетривіальний розв'язок однорідної системи (2.66) виду

$$Z_{k0}^{part.}(x) = colomn\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\sqrt{\frac{e^{C_{i30}}}{e^x \cdot x}}, -\frac{4x}{\sqrt[3]{4}}\frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}}, 0, \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}}, \sqrt{\frac{e^{C_{i30}}}{e^x \cdot x}}\right). \tag{2.92}$$

Дослідимо асимптотику розв'язку системи (2.89), яку будемо шукати у вигляді ряду:

$$\bar{\omega}_k(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \bar{\omega}_{kr}(x). \tag{2.93}$$

Для визначення вектор-функцій $\bar{\omega}_{kr}(x)$ одержимо рекурентні системи рівнянь

$$\begin{gathered} -A_0(x)\bar{\omega}_{kr}(x) = H(x) - \sqrt[3]{4} g_{k(r-2)}(x), \quad r = 0, \\ -A_0(x)\bar{\omega}_{kr}(x) = -\sqrt[3]{4} g_{k(r-2)}(x), \quad r = 1, 2, \\ -A_0(x)\bar{\omega}_r(x) = -\sqrt[3]{4} g_{(r-3)}(x) + A_1 \bar{\omega}_{k(r-3)}(x) - \bar{\omega}'_{k(r-3)}(x), \quad r \geq 3, \end{gathered} \tag{2.94}$$

где $\bar{\omega}_{kr}(x) = colomn(\bar{\omega}_{1r}(x), \bar{\omega}_{2r}(x), \bar{\omega}_{3r}(x))$–невідома вектор-функція.

Дослідимо рівняння (2.94) коли $r = 0$. Розпишемо праву частину

$$\begin{cases} -\bar{\omega}_{30}(x) = -\sqrt[3]{4}\frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}}, \\ -(4x+4)\bar{\omega}_{10}(x) + 4x\bar{\omega}_{20}(x) = h(x) - \sqrt[3]{4}\sqrt{\frac{e^{C_{i30}}}{e^x \cdot x}}. \end{cases} \tag{2.95}$$

Нехай $C_{i30} = 0$ та $h(x) = \sqrt[3]{4}\sqrt{\frac{1}{e^x \cdot x}}$, тоді систему (2.95) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} -\bar{\omega}_{30}(x) = -\sqrt[3]{4}\frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}}, \\ -(4x+4)\bar{\omega}_{10}(x) + 4x\bar{\omega}_{20}(x) = \sqrt[3]{4}\sqrt{\frac{1}{e^x \cdot x}} - \sqrt[3]{4}\sqrt{\frac{1}{e^x \cdot x}}. \end{cases}$$

При умові, що $\bar{\omega}_{10} \equiv 0$ обчислимо

$$\bar{\omega}_{20}(x) = \frac{\sqrt[3]{4}\sqrt{\frac{1}{e^x \cdot x}} - \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{e^x \cdot x}}}{4x}, \quad \bar{\omega}_{30}(x) = \sqrt[3]{4} \cdot \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}}.$$

Дослідимо (2.94) при $r = \overline{1,2}$. Для існування достатньо гладкого розв'язку припустимо, що $g^0_{(-1)} = g^0_0 = 0$.

Тоді система (2.94) прийме вигляд

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{3r}(x) = \sqrt[3]{4} \cdot \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}}, \\ -(4x+4)\bar{\omega}_{1r}(x) + 4x\bar{\omega}_{2r}(x) = -\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{e^x \cdot x}}. \end{cases} \tag{2.96}$$

Тоді існують достатньо гладкі розв'язки

$$\bar{\omega}_{1r}(x) = 0, \quad \bar{\omega}_{2r}(x) = \frac{-\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{e^x \cdot x}}}{4x}, \quad \bar{\omega}_{3r}(x) = \sqrt[3]{4} \cdot \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}}.$$

Коли $r \geq 3$ одержимо систему

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{3r}(x) = \sqrt[3]{4} \cdot \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}} + \bar{\omega}'_{2(r-3)}(x), \\ -(4x+4)\bar{\omega}_{1r}(x) + 4x\bar{\omega}_{2r}(x) = -\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{e^x \cdot x}} - \bar{\omega}'_{3(r-3)}(x), \\ 0 = -\sqrt[3]{4} \cdot g_{1(r-2)} + \bar{\omega}(x)_{2(r-3)} - \bar{\omega}'_{1(r-3)}. \end{cases} \tag{2.97}$$

Таким чином в околі точки звороту $x = 0$ завжди можна побудувати частинні розв'язки системи (2.66), які обумовлені функціями $\bar{\omega}_{kr}(x)$, $f_{kr}(x)$, $g_{kr}(x)$ у вигляді ряду

$$\tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\psi(t) + \mu g_{kr}(x)\psi'(t)\right] + \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r \bar{\omega}_{kr}(x), \qquad (2.98)$$

де $f_{kr}(x)$ і $g_{kr}(x)$ визначаються згідно алгоритму за формулами (2.87), (2.88), а $\bar{\omega}_{kr}(x)$ з (2.89).

Висновок 3. Для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (**??**) для якої виконуються умови:

1. $\tilde{a}(x),\ b(x), H(x) \in C^{\infty}[0;1]$,

2. $a(x) = x\tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x) = 4,\ b(x) = -(4x+4), \qquad h(x) = 4x+2$,

при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ побудовано частинний розв'язок $\tilde{Y}_k^{part.}(x,t,\varepsilon)$ у вигляді асимптотичного ряду (2.98).

Тепер можемо записати загальний розв'язок системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.66).

Висновок 4. Для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.66) для якої виконуються умови:

1. $\tilde{a}(x),\ b(x), H(x) \in C^{\infty}[0;1]$,

2. $a(x) = x\tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x) = 4,\ b(x) = -(4x+4), \qquad h(x) = 4x+2$,

при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ загальний розв'язок $\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)$ можна записати таким способом:

$$\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon) = \tilde{Y}_{hom.}(x,t,\varepsilon) + \tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon),$$

де $\tilde{Y}^{hom.}(x,t,\varepsilon)$ – формальний розв'язок однорідного рівняння, представлений у вигляді асимптотичного ряду (2.85), $\tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon)$ – частинний розв'язок представлений у вигляді асимптотичного ряду (2.98).

Тоді асимптотика загального розв'язку системи при $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}x$ (2.66) запишеться у вигляді ряду

$$Y(x,\varepsilon)_k \cong \tilde{Y}_k(x,\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}x,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2}\Bigg\{\Bigg[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^0\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x}\cdot\sqrt{x}}\\ -\frac{4x}{\sqrt[3]{4}}\frac{e^{C_{i20}}}{e^x\cdot e^{\frac{1}{4}x}}\end{pmatrix} + \varepsilon^1\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x}\cdot\sqrt{x}}\\ -\frac{4x}{\sqrt[3]{4}}\frac{e^{C_{i20}}}{e^x\cdot e^{\frac{1}{4}x}}+\end{pmatrix} \tag{2.99}$$

$$+\varepsilon^2\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x}\cdot\sqrt{x}}\\ -\frac{4x}{\sqrt[3]{4}}\frac{e^{C_{i20}}}{e^x\cdot e^{\frac{1}{4}x}}\end{pmatrix} + O(\varepsilon^{q+1})\Bigg]U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}x)+$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^0\begin{pmatrix}0\\ \frac{e^{C_{i20}}}{e^x\cdot e^{\frac{1}{4}x}}\\ \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x}\cdot\sqrt{x}}\end{pmatrix} + \varepsilon^1\begin{pmatrix}0\\ \frac{e^{C_{i20}}}{e^x\cdot e^{\frac{1}{4}x}}\\ \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x}\cdot\sqrt{x}}\end{pmatrix} + \varepsilon^2\begin{pmatrix}0\\ \frac{e^{C_{i20}}}{e^x\cdot e^{\frac{1}{4}x}}\\ \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x}\cdot\sqrt{x}}\end{pmatrix} + O(\varepsilon^{q+1})\right]\times$$

$$\times\frac{dU_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}x)}\Bigg\}+\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^0\begin{pmatrix}\omega_{10}^0\cdot x\\ \frac{4x+4}{4x}\omega_{10}^0\cdot x\\ 0\end{pmatrix}+\varepsilon^1\begin{pmatrix}\omega_{11}^0\cdot x\\ \frac{4x+4}{4x}\omega_{11}^0\cdot x\\ 0\end{pmatrix}+\varepsilon^2\begin{pmatrix}\omega_{12}^0\cdot x\\ \frac{4x+4}{4x}\omega_{12}^0\cdot x\\ 0\end{pmatrix}+$$

$$+\varepsilon^3\begin{pmatrix}\omega_{13}^0\cdot x\\ \frac{4x+4}{4x}\omega_{13}^0\cdot x\\ \frac{(x+1)^2}{x^2}-\omega_{13}^0\cdot x\end{pmatrix}+O(\varepsilon^{q+1}).$$

2.2 Стабільна диференціальна точка звороту з коефіцієнтами матриці $\tilde{a}(x) > 0$ і $b(x) > 0$

У цьому розділі досліджується питання про побудову рвномірного асимптотичного розв'язку векторного рівняння третього порядку із стабільною диференціальною точкою звороту I роду у просторі безрезонансних розв'язків з додатними коефіцієнтами матриці.

Розглянемо систему (2.4), яку дослідили у попередньому розділі за умов **C 1** та **C 3** з новими умовами. Нагадаємо

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = H(x),$$

де $A(x,\varepsilon)$ має таку структуру

$$A(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1,$$

а $A_0(x)$ і A_1 матриці вигляду

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\varepsilon \to 0$, $x \in [0,l]$, $Y(x,\varepsilon) = colomn(y_1(x,\varepsilon), y_2(x,\varepsilon), y_3(x,\varepsilon))$ - шукана вектор-функція, $H(x) = colomn(0,0,h(x))$ – задана вектор-функція.

Дослідимо задачу про побудову рівномірної асимптотики розв'язків сингулярно збуреної системи (2.4) за таких умов:

C 1. $A_0(x)$, $H(x) \in C^\infty[0,l]$.

C 4. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) \neq 0$.

Головна відмінність з попереднім випадком визначена умовою **C 4**, тобто

$$a(x) = x\tilde{a}(x), \quad \tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) > 0. \tag{2.100}$$

Запишемо характеристичне рівняння, що відповідає системі сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4). Воно має вигляд:

$$|A(x,0)-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -b(x) & -a(x) & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - x\tilde{a}(x)\lambda = 0.$$

Коренями даного характеристичного рівняння є

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{x\tilde{a}(x)}.$$

Як і в попередньому випадку, оскільки корені характеристичного рівняння уявні, то це вказує на стабільність точки звороту $x = 0$.

2.2.1 Розширення системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь

Точка $\varepsilon = 0$ є особливою для рівняння (2.4), через що для цього рівняння не можна застосувати класичну теорему про аналітичну залежність розв'язку від малого параметра. Основна проблема при знаходженні розв'язку полягає в тому, щоб коректно виділити, описати та зберегти всі істотно особливі функції, породжені особливою точкою. $\varepsilon = 0$, як єдині цілі елементи у шуканому розв'язку.

Для виділення всіх істотно особливих функцій та збереження їх як єдиних цілих в системі (2.4), введемо регуляризуючу змінну

$$t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x), \tag{2.101}$$

де показник p і регуляризуюча функція $\varphi(x)$ власне й і мають бути визначені.

Згідно методу істотно особливих функцій, необхідною умовою розширення задачі є справедливість співвідношення

$$\tilde{Y_k}(x,t,\varepsilon)|_{t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)} \equiv Y_k(x,\varepsilon).$$

Знайдемо частинну похідну для функції $\tilde{Y_k}(x,t,\varepsilon)$

$$\frac{\partial}{\partial x \cdot \partial t}\Big[\tilde{Y_k}(x,t,\varepsilon)|_{t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)}\Big] = \varepsilon^{-p}\cdot\varphi'(x)\frac{\partial\tilde{Y_k}(x,t,\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{Y_k}(x,t,\varepsilon)}{\partial x}$$

Підставимо одержану частинну похідну для розширеної функції в рівняння (2.4). Тоді для визначення розширенної функції $\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)$ одержимо розширене векторне рівняння

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{1-p}\varphi' \frac{\partial \tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)}{\partial x} - A(x,\varepsilon)\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon) = H(x). \tag{2.102}$$

Розширений оператор $\tilde{L}_\varepsilon(Y)$ буде мати вигляд

$$\tilde{L}_\varepsilon(Y) = \varepsilon^{1-p} \cdot \varphi(x)\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x} - A(x,\varepsilon) = H(x).$$

Згідно з методом істотно особливих функцій, необхідно виділити множини функцій (підпростори), у яких розв'язок заданої задачі включатиме всі істотно особливі функції, а сама задача буде регулярно залежати від малого параметра ε.

Основною метою подальшого дослідженння є побудова третього розв'язку розширеного рівняння (2.102), який буде описано із застосуванням істотно особливих функцій $\psi(x)$ та $\psi'(x)$. В роботах [9, 10] описана схема побудови розв'язків скаслярних рівнянь типу Орра-Зоммерфельда.

2.2.2 Простір безрезонансних розв'язків

Виділимо таку множину функцій, в якій розширена задача (2.102) буде регулярно збуреною відносно малого параметра. Для цього розглянемо множини (підпростори) функцій

$$\begin{gathered} D_{1k} = \alpha_{1k}(x,\varepsilon)U_1(t) + \varepsilon^\gamma \beta_{1k}(x,\varepsilon)U_1'(t), \\ D_{2k} = \alpha_{2k}(x,\varepsilon)U_2(t) + \varepsilon^\gamma \beta_{2k}(x,\varepsilon)U_2'(t), \\ D_{3k} = f_k(x,\varepsilon)\psi(t) + \varepsilon^\gamma g_k(x,\varepsilon)\psi'(t), \\ D_{4k} = \overline{\omega}_k(x,\varepsilon), \end{gathered} \tag{2.103}$$

де $U_i(t), (i=\overline{1,2})$ – функції Ейрі-Дородніцина [6].

Підпростори D_{1k} та D_{2k} містять розв'язки однорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь, в структурі яких містяться істотно особливі функції $U_i(t)$. Підпростір D_{3k} містить розв'язки неоднорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь, в структурі яких міститься істотно особлива функція $\psi(t)$ та її похідна [6]. Підпростір D_{4k} містить розв'язки однорідної та неоднорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь, які відповідають кореню характеристичного рівняння $\lambda_1 = 0$ і не містить істотно особливих функцій.

Тоді з підпросторів (2.103), складемо як пряму суму новий простір

$$D_k = \Big[\sum_{i=1}^{2}\{D_{ik}\} \oplus D_{3k} \oplus D_{4k}\Big].$$

Елемент $\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)$ простору D_k має таку структуру:

$$\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2} D_{ik}(x,t,\varepsilon) + f_k(x,\varepsilon)\psi(t) + \varepsilon^{\gamma} g_k(x,\varepsilon)\psi'(t) + \omega_k(x,\varepsilon), \quad (2.104)$$

Як і у попередньому випадку

$$U_i'(t) : \varepsilon^{1-p}\alpha_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x) - \varepsilon^{\gamma}[A_0(x) + \varepsilon A_1]\beta_{ik}(x,\varepsilon) = -\varepsilon^{1+\gamma}\beta_{ik}'(x,\varepsilon), \quad (2.105)$$

$$U_i(t) : -\varepsilon^{1+\gamma-2p}\beta_k(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) - [A_0(x)+\varepsilon A_1]\alpha_{ik}(x,\varepsilon) = -\varepsilon\alpha_{ik}'(x,\varepsilon) \quad (2.106)$$

де $i = \overline{1,2}$.

$$p = \frac{2}{3}, \qquad \gamma = \frac{1}{3}, \qquad k_1 = k_2 = s_3 = 0, \qquad s_1 = s_2 = k_3 = -\frac{1}{3}, \qquad (2.107)$$

тобто Лема 2.1 справедлива.

Тоді одержимо наступну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{i1}(x,\varepsilon) = \mu^3[\beta_{i2}(x,\varepsilon) - \beta_{i1}'(x,\varepsilon)], \\ \varphi'(x)\alpha_{i2}(x,\varepsilon) - \beta_{i3}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta_{i2}'(x,\varepsilon), \\ \varphi'(x)\alpha_{i3}(x,\varepsilon) + b(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon) + a(x)\beta_{i2}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta_{i3}'(x,\varepsilon), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon) = \mu^3[\alpha_{i1}'(x,\varepsilon) - \alpha_{i2}(x,\varepsilon)], \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i2}(x,\varepsilon) + \alpha_{i3}(x,\varepsilon) = \mu^3\alpha_{i2}'(x,\varepsilon), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i3}(x,\varepsilon) - b(x)\alpha_{i1}(x,\varepsilon) - a(x)\alpha_{i2}(x,\varepsilon) = \mu^3\alpha_{i3}'(x,\varepsilon). \end{cases} \quad (2.108)$$

Тут $i = \overline{1;2}$, $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{3}}$. В подальших міркуваннях, враховуватимо, що $\varepsilon = \mu^3$.

Таким чином, отримана система (2.108) є регуляризованою. Це означає, що в процесі перетворень правильно виділені, описані та збережені всі істотно особливі функції, що містяться в розв'язках системи (2.4), як єдине ціле.

2.2.3 Побудова формальних розв'язків однорідної системи

Слід підкреслити, що характерною особливістю розширеної задачі (2.108) є її регулярне збурення відносно малого параметра $\mu > 0$ у просторі безрезонансних розв'язків (2.103). Тому всі компоненти вектор-функцій $\alpha_{ik}(x, \varepsilon)$ і $\beta_{ik}(x, \varepsilon)$ будемо шукати у вигляді рядів.

$$\alpha_{ik}(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \alpha_{ikr}(x), \qquad \beta_{ik}(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \beta_{ikr}(x). \tag{2.109}$$

Підставивши ряди (2.109) у розширену задачу (2.102) і зрівнявши коефіцієнти біля однакових степенів малого параметра $\mu > 0$, для визначення коефіцієнтів рядів отримаємо рекурерntну систему задач:

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = 0, \qquad r = \overline{0, 2}, \qquad \Phi(x) Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{k(r-3)}(x), \qquad r \geq 3, \tag{2.110}$$

за умови, що $Z_{kr}(x) = colomn(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x), \beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x))$, а

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \varphi'(x) & -b(x) & a(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 \\ b(x) & -a(x) & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) \end{pmatrix}, \tag{2.111}$$

$$F \cdot Z_{k(r-3)}(x) = colomn\left(z_{i1(r-3)}, z_{i2(r-3)}, z_{i3(r-3)}, z_{i4(r-3)}, z_{i5(r-3)}, z_{i6(r-3)} \right),$$

де

$$z_{i1(r-3)} = (\beta_{i2(r-3)}(x) - \beta_{i1(r-3)}(x)),$$

$$z_{i2(r-3)} = -\beta_{i2(r-3)}(x),$$

$$z_{i3(r-3)} = -\beta_{i3(r-3)}(x),$$

$$z_{i4(r-3)} = (\alpha_{i1(r-3)}(x) - \alpha_{i2(r-3)}(x)),$$

$$z_{i5(r-3)} = \alpha_{i2(r-3)}(x),$$

$$z_{i6(r-3)} = \alpha_{i3(r-3)}(x).$$

Обчислимо визначник цієї системи (2.111)

$$\det \Phi(x) = \varphi'^2[\varphi(x)\varphi_2'(x)]^2 \cdot [\varphi(x)\varphi'^2(x) - a(x)]^2 = 0.$$

Зазначимо, що регуляризуюча функція $\varphi(x)$ поки не визначена. Тому визначимо її як розв'язок наступної задачі:

$$\varphi(x)\varphi'^2(x) = a(x) \equiv x\tilde{a}(x), \qquad \varphi(0) = 0. \tag{2.112}$$

Розв'язуючи (2.112), отримуємо:

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{x\widetilde{a}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Систему рекурентних рівнянь (2.110) при $r = 0$ матиме розв'язок

$$Z_{ikr}(x) = colomn\left(0, \frac{1}{\varphi'(x)}\beta_{i2r}(x), -\varphi\varphi'(x)\beta_{i3r}(x), 0, \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x)\right), \tag{2.113}$$

де $\beta_{ikr}(x), i = \overline{1;2}, k = \overline{1;3}, r = \overline{0;2}$ – до певного часу довільні, достатньо гладкі функції при $x \in [0;l]$.

А при $r = 3$. З урахуванням розв'язку (2.113) існують розв'язки неоднорідних систем (2.110) вигляду

$$Z_{i3}(x) = colomn\left(z_{k13}, z_{k23}, z_{k33}, z_{k43}, z_{k53}, z_{k63} \right),$$

$$z_{i13} = (\varphi'(x))^{-1}\beta_{i20}(x)$$

$$z_{i23} = \frac{-\beta_{i20}'(x) + \beta_{i33}(x)}{\varphi'(x)},$$

$$z_{i33} = \frac{-\beta'_{i30}(x) - a(x)\beta_{i23}(x) - b(x)(\varphi(x))^{-1}(\varphi'(x))^{-2}\beta_{i30}}{\varphi'(x)},$$

$$z_{i43} = (\varphi(x))^{-1}(\varphi'(x))^{-2}\beta_{i20}(x),$$

$$z_{i53} = \beta_{i21}(x),$$

$$z_{i63} = \beta_{i31}(x).$$

Продовжуючи далі розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь (2.110) при $r > 3$, знайдемо всі необхідні члени ряду для обох систем з точністю до двох довільних сталих $\beta_{i2q}(x)$ та $\beta_{i3q}(x)$, де $r = \overline{0; q}$.

Висновок 4. Лінійно незалежні розв'язки однорідної системи алгебраїчних рівнянь (2.4) мають вигляд

$$D_{ik}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ik}(x)U_i(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ik}(x,\varepsilon)U'_i(t)], \qquad i = \overline{1;2}, k = \overline{1;3}. \tag{2.114}$$

де

$$\alpha_{ik}(x) = colomn(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x)),$$

$$\beta_{ik}(x) = colomn(\beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x)).$$

Тут $\alpha_{ik}(x)$ та $\beta_{ik}(x)$ визначені вектор-функції, $i = \overline{1;2}$, $k = \overline{1;3}$.

Повертаючись до заміни $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$ одержимо розв'язки системи (2.4) у вигляді

$$D_{ik}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ik}(x)U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ik}(x,\varepsilon)U'_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))], \tag{2.115}$$

де $i = \overline{1;2}$, $k = \overline{1;3}$.

Тоді, поступово розв'язуючи (2.4), отримаємо два формальні розв'язки однорідного рівняння

$$D_{ik}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ikr}(x)U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ikr}(x,\varepsilon)U'_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))]. \tag{2.116}$$

Третій формальний розв'язок однорідного векторного рівняння ми не можемо отримати з виродженого рівняння, тобто з рівняння

$$L_0\omega(x) \equiv x\tilde{a}(x)\omega'(x) + b(x)\omega(x) = h(x).$$

Як і у попередньому випадку необхідно обчислити коефіцієнти ряду $\omega_{kr}(x)$

$$\omega(x,\varepsilon) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x) \equiv colomn\left(\sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{1r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{2r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{3r}(x)\right). \tag{2.117}$$

Після того, як підставимо (2.117) в (2.108), одержимо наступну систему рекурентних рівнянь:

$$\begin{aligned} A_0(x)\omega_r(x) = 0, \qquad r = 0;1;2, \\ A_0(x)\omega_r(x) = -A_1(x)\omega_{k(r-1)}(x) - \omega'_{k(r-1)}(x), \qquad r \geq 3. \end{aligned} \tag{2.118}$$

Дослідивши розв'язок однорідного векторного рівняння (2.118), тобто коли $r = 0$, при умові що $b(x) > 0$,

$$A_0(x)\omega_{k0}(x) = 0,$$

матимемо наступну систему

$$\begin{cases} \omega'_{10}(x) - \omega_{20}(x) = 0, \\ \omega_{30}(x) = 0, \\ x\tilde{a}(x)\omega_{20} + b(x)\omega_{10}(x) = 0. \end{cases}$$

В результаті отримаємо $\omega_{30}(x) \equiv 0$ і систему двох рівнянь

$$\begin{cases} \omega'_{10}(x) - \omega_{20}(x) = 0, \\ -x\tilde{a}(x)\omega_{20} - b(x)\omega_{10}(x) = 0 \end{cases}$$

З цієї системи отримаємо наступне диференціальне рівняння

$$-x\tilde{a}(x)\omega'_{10}(x) - b(x)\omega_{10}(x) = 0. \tag{2.119}$$

Розв'язок однорідного рівняння (2.119) запишемо у вигляді

$$\omega_{10}(x) = \omega_{10}^0 \cdot exp\left\{-\int \frac{-b(x)}{-x\tilde{a}(x)}dx\right\}, \tag{2.120}$$

де ω_{10}^0 – довільна стала.

Розглянемо детальніше інтеграл

$$-\int \frac{-b(x)}{-x\tilde{a}(x)}dx.$$

Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена

$$\frac{-b(x)}{x\tilde{-}a(x)} = \frac{-b(0)}{-x\tilde{a}(0)} + x \cdot \frac{-b'(0)}{\tilde{-}a'(0)} + x^2 \cdot \frac{-b''(0)}{\tilde{-}a''(0)} + \dots.$$

Тоді

$$-\int \frac{-b(x)}{-x\tilde{a}(x)} = -\int \frac{-b(0)}{-x\tilde{a}(0)} - \int \tilde{R}(x),$$

де

$$\tilde{R}(x) = x \cdot \frac{-b'(0)}{\tilde{-}a'(0)} + x^2 \cdot \frac{-b''(0)}{\tilde{-}a''(0)} + \dots,$$

звідки

$$-\int \frac{-b(x)}{-x\tilde{a}(x)} = \ln|x|^{\frac{--b(0)}{\tilde{-}a(0)}} - \int \tilde{R}(x).$$

В даному випадку точка звороту буде стабільною, як і в попередньому випадку, але розв'язки виродженого рівняння не будуть достатньо гладкими у точці $x = 0$. З урахуванням (2.100), тобто коли $b(x) > 0$, в (2.120) одержимо $\frac{b(0)}{\tilde{a}(0)} = \rho > 0$ [9]. Тому повторити логіку і використати міркування, які були описані у випадку А ми не можемо. Оскільки розв'язок виродженого диференціального рівняння та його похідні не є достатньо гладкими в точці $x = 0$. Це пояснюється тим, що розв'язок має розрив другого роду в точці звороту. Тому він не може бути використаний для побудови третього лінійно незалежного розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4). Труднощі, які виникають при побудові третього формального розв'язку опишемо нижче.

Для побудови асимптотики розв'язку системи (2.4) необхідно знайти ще частинний розв'язок цієї системи.

2.2.4 Побудова формальних частинних розв'язків неоднорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь

Вивчимо дію розширенного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ на елементи простору безрезонансних розв'язків D_{3k} і D_{4k}, а саме

$$D_{3k} \bigoplus D_{4k} = f_k(x,\varepsilon)\psi(t) + \varepsilon^\gamma g_k(x,\varepsilon)\psi'(t) + \bar{\omega}_k(x,\varepsilon).$$

Тобто

$$\tilde{L}_\varepsilon(f_k(x,\varepsilon)\psi(t) + \varepsilon^\gamma g_k(x,\varepsilon)\psi'(t) + \omega_k(x)) = \varepsilon^{1-p} f_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)\psi'(t) +$$

$$+\varepsilon f_k'(x,\varepsilon)\psi(t) - A(x,\varepsilon) f_k(x,\varepsilon)\psi(t) + \varepsilon^{1-p+\gamma}\varphi'(x) g_k(x,\varepsilon)\psi''(t) +$$

$$+\varepsilon^{1+\gamma} g_k'(x,\varepsilon)\psi'(t) - \varepsilon^\gamma A(x,\varepsilon) g_k(x,\varepsilon)\psi'(t) + \varepsilon\omega_k'(x) - A(x,\varepsilon)\omega_k(x,\varepsilon) = H(x).$$

Для подальших міркувань та перетворень з компонентою $\psi''(t)$ використаємо модельний оператор

$$\psi(t)'' + t\psi(t) = 1,$$

$$\psi(t)'' = 1 - t\psi(t), \quad t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi'(x).$$

Прирівняємо коефіцієнти при істотно особливих функціях в лівій та правій частинах рівності, в результаті отримаємо рівняння вигляду

$$\psi'(t) : \varphi'(x) f(x,\varepsilon) - [A_0(x) + \mu^3 A_1] g(x,\varepsilon) = -\mu^3 g'(x,\varepsilon), \tag{2.121}$$

$$\psi(t) : \varphi(x)\varphi'(x) g_k(x,\varepsilon) + [A_0(x) + \mu^3 A_1] f_k(x,\varepsilon) = \mu^3 f'(x,\varepsilon), \tag{2.122}$$

$$\mu^3\bar{\omega}'(x,\varepsilon) - [A_0(x) + \mu^3 A_1]\bar{\omega}(x,\varepsilon) + \mu^2\varphi'(x) g_k(x,\varepsilon) = H(x) - \mu^2\varphi'(x) g_k(x,\varepsilon). \tag{2.123}$$

Вивчивши рівняння (2.121) та (2.122), бачимо, що вони мають таку ж структуру як і (2.105) та (2.106). Але скористатись прямим результатом (2.115) ми не можемо, оскільки в цьому випадку не отримаємо очікуваних результатів для системи (2.123). Для отримання рівномірної асимптотики системи (2.123) необхідно використати розв'язки (2.121) та (2.122), провівши аналогічні міркування як у (2.105) та (2.106). Дослідимо системи (2.121) та (2.122) і побудуємо їх розв'язки у вигляді рядів:

$$f_k(x,\varepsilon)=\sum_{r=-2}^{+\infty}\mu^r f_{kr}(x), \qquad g_k(x,\varepsilon)=\sum_{r=-2}^{+\infty}\mu^r g_{kr}(x). \tag{2.124}$$

Зауважимо, що наявність від'ємних степенів малого параметра в ряді (2.124) випливає з того, що права частина рівняння (2.4), а відповідно й розширеної системи (2.102), у загальному випадку не належать множині значень оператора L_0

$$\tilde{L_0}(Y)=\varepsilon^{1-p}\cdot\varphi(x)\frac{\partial}{\partial t}-A(x,\varepsilon)=H(x).$$

(L_0 є головним оператором розширеного оператора L_ε) [6]. Оскільки в подальшому ми хочемо будувати рівномірний асимптотичний розв'язок системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4), то нам необхідно буде, щоб системи ітераційних рівнянь, що відповідають елементам простору D_{3k} і D_{4k} обов'язково мали нуль першого порядку в точці $x=0$. Для того, щоб згадана умова мала місце і для першого неоднорідного ітераційного рівняння, ряд (2.124) повинен містити від'ємний степінь малого параметра.

Для визначення компонент вектор-функцій

$$f_{kr}(x)=colomn(f_{1r}(x),f_{2r}(x),f_{3r}(x)),$$

$$g_{kr}(x)=colomn(g_{1r}(x),g_{2r}(x),g_{3r}(x))$$

підставимо ряди (2.124) у рівняння (2.121) та (2.122). Будемо мати

$$\begin{cases} \varphi'(x)[\mu^{-2}f_{1(-2)}(x)+\mu^{-1}f_{1(-1)}(x)+\mu^{0}f_{1(0)}(x)+...]=-\mu^{3}[\mu^{-2}g'_{1(-2)}(x)+ \\ +\mu^{-1}g'_{1(-1)}(x)+\mu^{0}g'_{10}(x)+...]+\mu^{3}[\mu^{-2}g_{2(-2)}(x)+\mu^{-1}g_{2(-1)}(x)+\mu^{0}g_{2(0)}(x)+...], \\ \varphi'(x)[\mu^{-2}f_{2(-2)}(x)+\mu^{-1}f_{2(-1)}(x)+\mu^{0}f_{2(0)}(x)+...]-[\mu^{-2}g_{3(-2)}(x)+\mu^{-1}g_{3(-1)}(x)+ \\ +\mu^{0}g_{3(0)}(x)+...]=-\mu^{3}[\mu^{-2}g'_{2(-2)}(x)+\mu^{-1}g'_{2(-1)}(x)+...], \\ \varphi'(x)[\mu^{-2}f_{3(-2)}(x)+\mu^{-1}f_{3(-1)}(x)+\mu^{0}f_{3(0)}(x)+...]+ \\ +a(x)[\mu^{-2}g_{1(-2)}(x)+\mu^{-1}g_{1(-1)}(x)+\mu^{0}g_{1(0)}(x)+...]= \\ +b(x)[\mu^{-2}g_{2(-2)}(x)+\mu^{-1}g_{2(-1)}(x)+\mu^{0}g_{2(0)}(x)+...]= \\ -\mu^{3}[\mu^{-2}g'_{3(-2)}(x)+\mu^{-1}g'_{3(-1)}(x)+...], \\ \varphi(x)\varphi'(x)[\mu^{-2}g_{1(-2)}(x)+\mu^{-1}g_{1(-1)}(x)+\mu^{0}g_{1(0)}(x)+...]= \\ =-\mu^{3}[\mu^{-2}f_{1(-2)}(x)+\mu^{-1}f_{1(-1)}(x)+ \\ +\mu^{0}f_{10}(x)+...]+\mu^{3}[\mu^{-2}f'_{2(-2)}(x)+\mu^{-1}f'_{2(-1)}(x)+\mu^{0}f'_{2(0)}(x)+...], \\ \varphi(x)\varphi'(x)[\mu^{-2}g_{2(-2)}(x)+\mu^{-1}g_{2(-1)}(x)+\mu^{0}g_{2(0)}(x)+...]+ \\ +[\mu^{-2}f_{3(-2)}(x)+\mu^{-1}f_{3(-1)}(x)+\mu^{0}f_{3(0)}(x)+...]= \\ =-\mu^{3}[\mu^{-2}f'_{2(-2)}(x)+\mu^{-1}f'_{2(-1)}(x)+...], \\ \varphi(x)\varphi'(x)[\mu^{-2}g_{3(-2)}(x)+\mu^{-1}g_{3(-1)}(x)+\mu^{0}g_{3(0)}(x)+...]+ \\ +a(x)[\mu^{-2}f_{1(-2)}(x)+\mu^{-1}f_{1(-1)}(x)+\mu^{0}f_{1(0)}(x)+...]= \\ +b(x)[\mu^{-2}f_{2(-2)}(x)+\mu^{-1}f_{2(-1)}(x)+\mu^{0}f_{2(0)}(x)+...]=-\mu^{3}[\mu^{-2}f'_{3(-2)}(x)+ \\ +\mu^{-1}f'_{3(-1)}(x)+...], \end{cases} \tag{2.125}$$

З системи (2.125)одержимо наступні системи рекурентних рівнянь:

$$\begin{aligned} \Phi(x)\cdot Z_0^{part.}(x)=0, \qquad r=-2;-1;0, \\ \Phi(x)\cdot Z_r^{part.}(x)=-Z_{r-3}^{part.}(x), \qquad r\geq 1. \end{aligned} \tag{2.126}$$

В одержаних рекурсіях (2.126) $\Phi(x)$– матриця, а

$$Z_r^{part.}(x)=colomn(f_{1r}(x),f_{2r}(x),f_{3r}(x),g_{1r}(x),g_{2r}(x),g_{3r}(x))$$

невідома вектор-функція.

Нагадаємо, що в попередньому пункті ми не змогли побудувати третій формальний розв'язок однорідної системи (2.100). Тому будемо будувати тільки частинні розв'язки цієї системи. Розглянемо рівняння (2.123). Подамо векторне рівняння у вигляді системи

$$\begin{cases} \mu^3\bar{\omega}_1'(x) = -\mu^2\varphi'(x)g_1(x) + \mu^3\bar{\omega}_2(x), \\ \mu^3\bar{\omega}_2'(x) - \bar{\omega}_3(x) = -\mu^2\varphi'(x)g_2(x), \\ \mu^3\bar{\omega}_3'(x) + b(x)\bar{\omega}_1(x) + a(x)\bar{\omega}_2(x) = h(x) - \mu^2\varphi'(x)g_3(x) \end{cases} \tag{2.127}$$

Для визначення компонент вектор-функцій $\omega_k(x)$ підставимо ряд

$$\bar{\omega}_k(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \omega_{kr}(x) \tag{2.128}$$

у систему (2.127). В результаті одержимо систему вигляду

$$\begin{cases} \mu[\mu^0\bar{\omega}_{10}'(x) + \mu^1\bar{\omega}_{11}'(x) + \mu^2\bar{\omega}_{12}'(x) + ...] = -\varphi'(x)[\mu^{-2}g_{1(-2)}(x) + \mu^{-1}g_{1(-1)}(x)+ \\ +\mu^0 g_{10}(x) + ...] + \mu[\mu^0\bar{\omega}_{20}(x) + \mu^1\bar{\omega}_{21}(x) + \mu^2\bar{\omega}_{22}(x) + ...], \\ \mu[\mu^0\bar{\omega}_{20}'(x) + \mu^1\bar{\omega}_{21}'(x) + \mu^2\bar{\omega}_{22}'(x) + ...] - [\mu^0\bar{\omega}_{30}(x) + \mu^1\omega_{31}(x) + \mu^2\bar{\omega}_{32}(x) + ...] = \\ = -\mu^2\varphi'(x)[\mu^{-2}g_{2(-2)}(x) + \mu^{-1}g_{2(-1)}(x) + \mu^0 g_{20}(x) + ...], \\ \mu[\mu^0\bar{\omega}_{30}'(x) + \mu^1\bar{\omega}_{31}'(x) + \mu^2\omega_{32}'(x) + ...] + b(x)[\mu^0\bar{\omega}_{10}(x)+ \\ +\mu^1\bar{\omega}_{11}(x) + \mu^2\bar{\omega}_{12}(x) + ...]+ \\ +a(x)[\mu^0\bar{\omega}_{20}(x) + \mu^1\bar{\omega}_{21}(x) + \mu^2\bar{\omega}_{22}(x) + ...] = h(x) - \mu^2\varphi'(x)[\mu^{-2}g_{3(-2)}(x)+ \\ +\mu^{-1}g_{3(-1)}(x) + \mu^0 g_{30}(x) + ...] \end{cases} \tag{2.129}$$

Спочатку розглянемо рекурентні системи (2.126).

Запишемо систему рекурентних рівнянь (2.126) при $r = -2$

$$\begin{cases} \varphi'(x)f_{1(-2)}(x,\varepsilon) = 0, \\ \varphi'(x)f_{2(-2)}(x,\varepsilon) - g_{i30}(x,\varepsilon) = 0, \\ \varphi'(x)f_{3(-2)}(x,\varepsilon) + b(x)g_{1(-2)}(x,\varepsilon) + a(x)g_{2(-2)}(x,\varepsilon) = 0, \\ \varphi(x)\varphi'(x)g_{1(-2)}(x,\varepsilon) = \mu^3[f_{1(-2)}'(x,\varepsilon) - f_{2(-2)}(x,\varepsilon)], \\ \varphi(x)\varphi'(x)g_{2(-2)}(x,\varepsilon) + f_{3(-2)}(x,\varepsilon) = 0, \\ \varphi(x)\varphi'(x)g_{3(-2)}(x,\varepsilon) - b(x)f_{1(-2)}(x,\varepsilon) - a(x)f_{2(-2)}(x,\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\det\Phi(x) \equiv 0$, то існує нетривіальний розв'язок системи $\Phi(x) \cdot Z_{kr} = 0$, $r = \overline{-2,0}$ вигляду:

$$Z_{kr}(x) = colomn\left(0, \frac{1}{\varphi'(x)}g_{2r}(x), -\varphi\varphi'(x)g_{3r}(x), 0, g_{2r}(x), g_{3r}(x)\right), \tag{2.130}$$

де $g_{kr}(x), k = \overline{1;3}, r = \overline{-2;0}$ – до певного часу довільні, достатньо гладкі функції при $x \in [0;l]$.

Таким способом, отримавши розв'язок системи $\Phi(x) \cdot Z_{kr} = 0$, $r = \overline{-2;0}$, перейдемо до розв'язків неоднорідних систем (2.126) $\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{k(r-3)}(x)$, $r \geq 1$. Спочатку розглянемо ці системи при $r = 1$. З урахуванням розв'язку (2.113), отримаємо системи

$$\begin{cases} \varphi'(x)f_{11}(x) = g_{2(-2)}(x) - g'_{1(-2)}(x) \equiv g_{2(-2)}(x), \\ \varphi'(x)f_{21}(x) - g_{31}(x) = -g'_{2(-2)}(x), \\ \varphi'(x)f_{31}(x) + b(x)g_{11}(x) + a(x)g_{21}(x) = -g'_{3(-2)}(x), \end{cases} \tag{2.131}$$

та

$$\begin{cases} \varphi(x)\varphi'(x)g_{11}(x) = -f'_{1(-2)}(x) + f_{2(-2)}(x) \equiv f_{i2(-2)}(x) \equiv [\varphi'(x)]^{-1}g_{3(-2)}(x), \\ \varphi(x)\varphi'(x)g_{21}(x) + f_{31}(x) = f'_{i2(-2)}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}g_{i3(-2)}(x)), \\ \varphi(x)\varphi'(x)g_{31}(x) - b(x)f_{13}(x) - a(x)f_{21}(x) = f'_{3(-2)}(x), \end{cases} \tag{2.132}$$

де $f'_{3(-2)}(x) = \frac{d}{dx}[-\varphi(x)\varphi'(x)g_{2(-2)}(x)]$.

З перших рівнянь систем (2.131) та (2.132) визначимо функції

$$f_{11}(x) = [\varphi'(x)]^{-1}g_{2(-2)}(x),$$

$$g_{11}(x) = [\varphi'(x)]^{-2}[\varphi(x)]^{-1}g_{3(-2)}(x).$$

Тоді системи (2.131) і (2.132) наберуть вигляду

$$\begin{cases} \varphi'(x)f_{21}(x) - g_{31}(x) = -g'_{2(-2)}(x), \\ \varphi'(x)f_{31}(x) + a(x)g_{21}(x) = -g'_{3(-2)}(x) - b(x)g_{13}(x), \end{cases} \tag{2.133}$$

та

$$\begin{cases} \varphi(x)\varphi'(x)g_{21}(x) + f_{31}(x) = f'_{2(-2)}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}g_{3(-2)}(x)), \\ \varphi(x)\varphi'(x)g_{33}(x) - a(x)f_{21}(x) = \frac{d}{dx}[-\varphi(x)\varphi'(x)g_{2(-2)}(x)] + b(x)f_{11}(x). \end{cases} \tag{2.134}$$

З систем (2.133) та (2.134), слідуя міркуванням попереднього пункту, одержимо диференціальні рівняння виду

$$-2a(x)g'_{2(-2)}(x) + \Big[b(x) - \varphi'(x)(\varphi(x)\varphi'(x))'\Big]g_{2(-2)}(x) = 0, \tag{2.135}$$

та

$$-2g'_{3(-2)}(x)+\Big[\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}-\frac{b(x)}{a(x)}\Big]g_{3(-2)}(x)=0. \qquad (2.136)$$

У рівнянні (2.135) введемо позначення

$$b_2(x)=b(x)-\varphi'^3(x)-\varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x).$$

Нагадаємо, що

$$\varphi(x)=\left(\frac{3}{2}\int_0^x\sqrt{x\widetilde{a}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\varphi'(x)=\left(\int_0^x\sqrt{x\widetilde{a}(x)}dx\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{x\widetilde{a}(x)}.$$

Відповідно в рівнянні (2.136) також введемо позначення

$$b_3(x)=b(x)+\varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x).$$

Тоді рівняння (2.135) та (2.136) запишемо у вигляді

$$g'_{2(-2)}(x)-\frac{1}{x}\Big[\frac{b_2(x)}{2\tilde{a}(x)}\Big]g_{2(-2)}(x)=0, \qquad (2.137)$$

та

$$g'_{3(-2)}(x)-\frac{1}{x}\Big[\frac{b_3(x)}{2\tilde{a}(x)}\Big]g_{3(-2)}(x)=0. \qquad (2.138)$$

Розв'яжемо (2.137).

$$g_{2(-2)}(x)=\int_0^x\frac{b_2(x)}{x}g_{2(-2)}(x).$$

Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена

$$\frac{b_2(x)}{x\tilde{a}(x)}=\frac{b_2(0)}{x\tilde{a}(0)}+x\cdot\frac{b'_2(0)}{\tilde{a'}(0)}+x^2\cdot\frac{b''_2(0)}{\tilde{a''}(0)}+\ldots.$$

Тоді

$$\int\frac{b_2(x)}{x\tilde{a}(x)}=\int\frac{b_2(0)}{x\tilde{a}(0)}+\int R_2^{\tilde{part.}}(x),$$

де

$$R_2^{\tilde{part.}}(x) = x \cdot \frac{b_2'(0)}{\tilde{a'}(0)} + x^2 \cdot \frac{b''(0)}{\tilde{a''}(0)} + \ldots,$$

звідки

$$\int \frac{b_2(x)}{x\tilde{a}(x)} = \ln|x|^{\frac{b_2(0)}{\tilde{a}(0)}} + \int R_2^{\tilde{part.}}(x).$$

Тоді

$$g_{2(-2)}(x) = g^0_{2(-2)} \cdot exp\{\int \frac{b_2(x)}{x}\}. \tag{2.139}$$

З (2.138) одержимо

$$g'_{3(-2)}(x) - \frac{b_3(x)}{x\tilde{a}(x)} g_{3(-2)}(x) = 0. \tag{2.140}$$

$$g_{3(-2)}(x) = \int_0^x \frac{b_3(x)}{x\tilde{a}(x)} g_{3(-2)}(x) = 0.$$

Як і для вектор-функції $g_{2(-2)}(x)$ розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена

$$\frac{b_3(x)}{x\tilde{a}(x)} = \frac{b_3(0)}{x\tilde{a}(0)} + x \cdot \frac{b_3'(0)}{\tilde{a'}(0)} + x^2 \cdot \frac{b_3''(0)}{\tilde{a''}(0)} + \ldots.$$

Тоді

$$\int \frac{b_3(x)}{x\tilde{a}(x)} = \int \frac{b_3(0)}{x\tilde{a}(0)} + \int R_3^{\tilde{part.}}(x),$$

де

$$R_3^{\tilde{part.}}(x) = x \cdot \frac{b_3'(0)}{\tilde{a'}(0)} + x^2 \cdot \frac{b''(0)}{\tilde{a''}(0)} + \ldots,$$

звідки

$$\int \frac{b_3(x)}{x\tilde{a}(x)} = \ln|x|^{\frac{b_3(0)}{\tilde{a}(0)}} + \int R_3^{\tilde{part.}}(x).$$

Отже, розв'язок для (2.140) запишемо у вигляді

$$g_{3(-2)}(x) = g^0_{3(-2)} \cdot exp\{\int \frac{b_3(x)}{x}\}, \tag{2.141}$$

$$\bar{Z}_{k1}^{part.}(x) = colomn\left(\bar{z}_{k1}, \bar{z}_{k2}, \bar{z}_{k3}, \bar{z}_{k4}, \bar{z}_{k5}, \bar{z}_{k6}\right), \tag{2.142}$$

де

$$\bar{z}_{k1} = \frac{g^0_{2(-2)}(x) \cdot x^{\rho_2}}{\varphi'(x)},$$

$$\bar{z}_{k2} = \frac{-g^0_{2(-2)}(x) \cdot x^{\rho_2} + g_{31}(x)}{\varphi'(x)},$$

$$\bar{z}_{k3} = \frac{-g^0_{2(-2)}(x) \cdot x^{\rho_2} + \frac{b(x) g^0_{3(-2)}(x) \cdot x^{\rho_3}}{a(x)} - a(x) g_{21}(x)}{\varphi'(x)},$$

$$\bar{z}_{k4} = \frac{-g^0_{3(-2)}(x) \cdot x^{\rho_3}}{a(x)},$$

$$\bar{z}_{k5} = g_{21}(x),$$

$$\bar{z}_{k6} = g_{31}(x).$$

де $g_{k1}, k = \overline{2;3}$ – до певного часу довільні, достатньо гладкі функції $x \in [0; l]$.

Введемо нові позначення

$$\frac{b_2(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{b(0) - \varphi'^3(0) - \varphi(0)\varphi'(0)\varphi''(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{b(0) - \varphi'^3(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{1}{2}[\rho - 1] = \rho_2$$

і

$$\frac{b_3(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{b(0) + \varphi(0)\varphi'(0)\varphi''(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{b(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{1}{2}\rho = \rho_3$$

.

З метою забезпечення побудови рівномірної асимптотики розв'язку рівняння (2.4) на всьому відрізку відносно малого параметра необхідно, щоб виконувалась вимога $\rho \quad \epsilon \quad N$. Оскільки $\frac{b(0)}{\tilde{a}(0)} = \rho$ має бути натуральним числом, то розглянемо такі випадки.

Випадок 1. Нехай $\rho = 2n$ - парне число, $n \epsilon N$. Тоді, використовуючи вищезазначені позначення одержимо, що $\rho_2 = n - \frac{1}{2}$ не є натуральним числом, а $\rho_3 = n$ - натуральне число або $\rho_3 = 0$ при $\rho = 0$.

Гладкість розв'язків (2.139) та (2.141) рівнянь (2.137) та (2.138) на всьому відрізку, включаючи і точку звороту, істотньо залежить від знаків виразів

$\frac{b_j(0)}{2\tilde{a}(0)}$, $j = 1,2$. Тому дослідимо підінтегральні функції у (2.139) та (2.141). Враховуючи розклад підінтегральних функцій в ряд Маклорена отримаємо рівності

$$\frac{b_j(x)}{x\tilde{a}(x)} = \frac{\rho}{x} + \tilde{R}_j^{part.}(x),$$

де $\tilde{R}_j^{part.}(x)$–аналітична функція в околі точки звороту.

Якщо $\rho_2 = n - \frac{1}{2}$ - достатньо велике число, то для побудови асимптотики лінійно незалежого розв'язку системи (2.4) з визначеною тоністю відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ можна використати розв'язки (2.126). Оскільки в цьому випадку $\rho_3 = \frac{1}{2}\rho$ є цілим невід'ємним числом, то використовуючи загальний розв'язки рівнянь виду (2.138) та частинні розв'язки рівнянь виду (2.137) ми побудуємо асимптотику лінійно незалежного розв'язку системи (2.4) з довільною точністю відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ на всьому відрізку $[0, l]$, включаючи і точку звороту.

Випадок 2. Нехай $\rho = 2n - 1$ - непарне число $n \epsilon N$. Тоді $\rho_2 = n - 1$ - ціле невід'ємне число, а $\rho_3 = n - \frac{1}{2}$ - не є натуральним числом. В цьому випадку для побудови асимптотики лінійно незалежого розв'язку системи (2.4) з визначеною точністю відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ будемо використовувати загальний розв'язки рівнянь виду (2.137) та частинні розв'язки рівнянь виду (2.138).

Будемо вважати $\rho = 2n$, тобто $\rho_3 = n$ - натуральне число. Тоді згідно **Випадку 1** частинними достатньо гладкими розв'язками рівнянь (2.123) і (2.138) є $\omega_{10}(x) \equiv g_{2(-2)}(x) \equiv 0$, а

$$g_{3(-2)}(x) = g^0_{3(-2)} \cdot exp\{\int \frac{b_3(x)}{2a(x)}\} \equiv g^0_{3(-2)} x^{\rho_2} \tilde{g}(x), \qquad (2.143)$$

при $r = 0$, де $\tilde{g}(x)$ - достатньо гладка функція при $x \epsilon [0, l]$, за умови, що $\tilde{g}(0) \neq 0$.

Для побудови асимптотики розв'язку необхідно розглянути систему (2.125) при $r = 4$. З урахуванням розв'язку (2.113), отримаємо системи

$$\begin{cases} \varphi'(x) f_{14}(x) = -g'_{11}(x) + g_{21}(x), \\ \varphi'(x) f_{24}(x) - g_{34}(x) = -g'_{21}(x), \\ \varphi'(x) f_{34}(x) + b(x) g_{14}(x) + a(x) g_{24}(x) = -g'_{31}(x), \end{cases} \qquad (2.144)$$

та

$$\begin{cases} \varphi(x)\varphi'(x)g_{14}(x) = -f'_{11}(x) - f_{21}(x), \\ \varphi(x)\varphi'(x)g_{24}(x) + f_{34}(x) = f'_{21}(x), \\ \varphi(x)\varphi'(x)g_{34}(x) - b(x)f_{14}(x) - a(x)f_{24}(x) = f'_{31}(x). \end{cases} \tag{2.145}$$

В системах (2.144) та (2.145) з першого і четвертого рівнянь визначимо $f_{14}(x)$ та $g_{14}(x)$.

$$f_{14} = \frac{-g'_{11}(x) + g_{21}(x)}{\varphi'(x)}.$$

$$g_{14} = \frac{-f'_{11}(x) + f_{21}(x)}{\varphi(x)\varphi'(x)}.$$

З систем (2.144) та (2.145) одержимо 2 системи, структура яких така ж як і в (2.23) і (2.24).

$$\begin{cases} \varphi'(x)f_{24}(x) - g_{34}(x) = -g'_{21}(x), \\ -a(x)f_{24}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)g_{34}(x) = f'_{31}(x) + b(x)f_{14}(x), \end{cases} \tag{2.146}$$

та

$$\begin{cases} \varphi'(x)f_{34}(x) + a(x)g_{24}(x)) = -g'_{31}(x) - b(x)g_{34}(x), \\ f_{34}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)g_{24}(x)(x) = f'_{21}(x). \end{cases} \tag{2.147}$$

Дослідивши праві частини рангів матриць (2.146) та (2.147), запишемо умови за яких існують розв'язки цих систем

$$g_{21}(x) = \int Q_1 dx, \tag{2.148}$$

де $Q_1 = \frac{f'_{31}(x)+b(x)f_{14}(x)}{\varphi(x)\varphi'(x)+a'(x)}$

$$g_{31}(x) = \int Q_2 dx. \tag{2.149}$$

Запишемо систему (2.129) для $r = 0$.

$$\begin{cases} -\bar{\omega}_{30}(x) = \varphi'(x) \cdot g_{2(-2)}(x), \\ b(x)\bar{\omega}_{10}(x) + a(x)\bar{\omega}_{20}(x) = h(x) - \varphi'(x) \cdot g_{3(-2)}(x). \end{cases} \tag{2.150}$$

Підставимо у (2.150) значення функцій $g_{2(-2)}(x)$ і $g_{3(-2)}(x)$ з (2.139) і (2.141).

В результаті отримаємо систему

$$\begin{cases} -\bar{\omega}_{30}(x) = \varphi'(x) \cdot g^0_{2(-2)} \cdot x^{\rho_3}, \\ b(x)\bar{\omega}_{10}(x) + a(x)\bar{\omega}_{20}(x) = h(x) - \varphi'(x) \cdot g^0_{3(-2)} \cdot x^{\rho_2}. \end{cases} \tag{2.151}$$

Дослідимо систему (2.129) при $r = 1$. Для існування достатньо гладкого розв'язку цієї системи на всьому відрізку, включаючи і точку звороту $x = 0$, припустимо, що $g^0_{(-1)} = g^0_0 = 0$. Тоді система (2.129) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \bar{\omega'}_{10}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{11}(x) + \bar{\omega}_{20}(x), \\ -\bar{\omega}_{31}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{2(-1)}(x), \\ b(x)\bar{\omega}_{11}(x) + a(x)\bar{\omega}_{21}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{3(-1)}(x). \end{cases} \tag{2.152}$$

При $r = 2$ з (2.129) одержимо наступну систему

$$\begin{cases} \bar{\omega'}_{11}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{12}(x) + \bar{\omega}_{21}(x), \\ -\bar{\omega}_{32}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{20}(x), \\ b(x)\bar{\omega}_{12}(x) + a(x)\bar{\omega}_{22}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{30}(x). \end{cases} \tag{2.153}$$

Продовжуючи дослідженння (2.129) при $r \geq 3$ одержимо систему

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{3r}(x) = \varphi'(x) \cdot g_{2(r-2)}(x) + \bar{\omega}'_{2(r-3)}(x), \\ b(x)\bar{\omega}_{1r}(x) + a(x)\bar{\omega}_{2r}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{3(r-2)} - \bar{\omega'}_{3(r-3)}(x), \\ 0 = -\varphi'(x) \cdot g_{1(r-2)} + \bar{\omega}(x)_{2(r-3)} - \bar{\omega'}_{1(r-3)}. \end{cases} \tag{2.154}$$

Починаючи з $r \geq 3$, одержимо неоднорідні рівняння (2.126) відносно невідомих функцій $\omega_{kr}(x)$. Продовжуючи далі ітераційний процес, одержимо достатньо гладкі розв'язки на всьому відрізку $[0, l]$ функцій $\omega_{kr}(x)$, $f_{kr}(x)$, $g_{kr}(x)$. Таким чином буде визначений третій формальний розв'язок розширеного рівняння (2.102) у вигляді ряду

$$\tilde{Y_3}(x, t, \varepsilon) = \tag{2.155}$$

$$\sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\psi(t) + \mu g_{kr}(x)\psi'(t) \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \bar{\omega}_{kr}(x).$$

Таким способом побудовано розв'язок системи (2.129) при $r = 0$.

Висновок 5. Розв'язок системи (2.129) при $r = 0$ має вигляд

$$\bar{\omega}_{10}(x) = \bar{\omega}_{10}^{0} \cdot exp\{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\} + exp\{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\} \cdot \frac{h(x)}{a(x)} exp\{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\}.$$

$$\bar{\omega}_{20}(x) = \bar{\omega'}_{10} \cdot \varphi'(x) \cdot \frac{g_{3(-2)}^{0} x^{\rho_3}}{a(x)}.$$

$$\bar{\omega}_{30}(x) = \varphi'(x) \cdot g_{2(-2)}^{0} x^{\rho_2}.$$

Продовжуючи далі розв'язувати системи ітераційних рівнянь з (2.129) знайдемо всі компоненти $\omega_{kr}(x)$.

Тоді розв'язок однорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) запишемо у вигляді ряда:

$$Y_{ik}^{hom.}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ikr}(x) U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ikr}(x, \varepsilon) U_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))] +$$
$$+ \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\psi(t) + \mu g_{kr}(x)\psi'(t) + \bar{\omega}_{kr}(x) \right]. \tag{2.156}$$

Теорема 2.2.1. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:*

C 1. $A_0(x)$, $H(x) \in C^{\infty}[0, l]$.

C 4. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) > 0$, $\quad b(x) > 0$.

Тоді при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ *можна побудувати розв'язок* $\tilde{Y}_k^{hom.}(x, t, \varepsilon)$ *відповідної однорідної системи у вигляді асимптотичного ряда*

$$Y_{k}^{hom.}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ikr}(x) U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ikr}(x, \varepsilon) U_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))] +$$

$$+ \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\psi(t) + \mu g_{kr}(x)\psi'(t) + \bar{\omega}_{kr}(x) \right],$$

де $varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{x\widetilde{a}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}$.

Зауважимо, що розв'язок однорідної системи (2.4) при $h(x) = 0$, задовольнятиме такий наслідок.

Для побудови частинного розв'язку неоднорідної системи (2.4) скористаємось результатами досліджень з [10], де частинний розв'язок (2.4) побудований у вигляді ряду

$$Y_k^{part.}(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\tilde{y_k}(x). \tag{2.157}$$

Повторюючи техніку досліджень [10], необхідно ряд (2.157) підставити в рівняння (2.4) і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях малого параметра. Тоді невідомі коефіцієнти будемо визначати з рекурентних систем диференціальних рівнянь

$$L_0\tilde{y_{kr}}(x)=h(x), L_0\tilde{y_{k0}}(x)=0, \qquad r=1;2, \qquad L_0\tilde{y_{kr}}(x)=-\widetilde{y'''_{k(r-3)}}(x), \qquad r\geq 3. \tag{2.158}$$

Оскільки $\rho > 0$, то не існує достатньо гладких загальних розв'язків цих рівнянь. Проте достатньо побудувати тільки частинні розв'язки рівнянь (2.158), що задовольняють умовам $\tilde{y_{kr}}(x) < \infty$. А також розв'язки існують на всьому відрізку $[0,1]$, при чому $\tilde{y_{kr}}(x)$ не дорівнюють тотожньо нулеві, а $y_{k(\tilde{1+3r})}(x)\equiv y_{k(\tilde{2+3r})}(x)\equiv 0, \qquad r\geq 0$ [10].

Частинний розв'язок неоднорідної системи (2.4) можна представити у вигляді рядів (2.157):

$$Y_{ik}^{part.}(x,\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x),\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\tilde{y_k}(x). \tag{2.159}$$

Теорема 2.2.2. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:*

C 1. $A_0(x)$, $H(x)\in C^{\infty}[0,l]$.

C 4. $a(x)=x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x)>0, \quad b(x)>0$.

Тоді при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon>0$ можна побудувати частинний розв'язок $\tilde{Y}_k^{part.}(x,t,\varepsilon)$ відповідної неоднорідної системи у вигляді асимптотичного ряду

$$Y_k^{part.}(x,\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x),\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\tilde{y_k}(x).$$

2.2.5 Оцінка залишкових членів асимпотики розв'язку

Побудувавши асимптотику розв'язку системи (2.102) у вигляді (2.156) та (2.158), необхідно зазначити, що дослідження було б неповним, якщо не проведена оцінка залишкових членів. Для отримання відповідних оцінок розв'язків системи оцінимо залишкові члени формальних рядів (2.115), (2.155), (2.158) для векторного рівняння (2.102) у вигляді:

$$\alpha_k(x,\varepsilon) \equiv \alpha_{kq}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{q+1}\xi_{k\alpha(q+1)}(x,\varepsilon), \tag{2.160}$$
$$\beta_k(x,\varepsilon) \equiv \beta_{kq}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{q+1}\xi_{k\beta(q+1)}(x,\varepsilon),$$

$$Y_k^{part.}(x,\varepsilon) = Y_{kq}^{part.}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{q+1}\xi_{k\beta(q+1)}(x,\varepsilon), \tag{2.161}$$

де $\alpha_{kq}(x,\varepsilon)$ і $\beta_{kq}(x,\varepsilon)$ – частинні q-суми рядів (2.109), а $\varepsilon^{1+q}\xi_{k\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)$ та $\varepsilon^{1+q}\xi_{k\beta(q+1)}(x,\varepsilon)$ – залишкові члени відповідних рядів [10].

Аналогічно до попереднього випадку одержимо оцінки

$$\begin{aligned} &\|\xi_{\alpha k(q+1)}(x,\varepsilon)\| \le K_{(q+1)}, \\ &\|\xi_{\beta k(q+1)}(x,\varepsilon)\| \le K_{(q+1)}, \qquad q>0, \end{aligned} \tag{2.162}$$

де стала K_{q+1} не залежить від $x \in [0;l]$ і малого параметра $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} &\|\xi_{f(q+1)}(x,\varepsilon)\| \le K_{(q+1)}, \\ &\|\xi_{g(q+1)}(x,\varepsilon)\| \le K_{(q+1)}, \\ &\|\xi_{\omega(q+1)}(x,\varepsilon)\| \le K_{(q+1)}. \end{aligned} \tag{2.163}$$

Тут $q > 0$.

З урахуванням одержаних оцінок (2.162) і (2.163), асимптотику загального розв'язку системи (2.4) можемо записати у вигляді ряду:

$$\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2}\left\{\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^r\alpha_{ikr}(x) + O(\varepsilon^{q+1})\right]U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)) + \right. \tag{2.164}$$

$$\left. +\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^r\beta_{ikr}(x) + O(\varepsilon^{q+1})\right]\frac{dU_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}\right\} + \sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\omega_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) +$$

$$+\left[\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r f_{kr}(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]\psi(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r g_{kr}(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]\frac{d\psi(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}+$$

$$+\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\overline{\omega}_{kr}(x)+O(\varepsilon^{q+1})+\sum_{r=0}^{p}\varepsilon^r y_{kr}(x)+O(\varepsilon^{q+1}).$$

Сформулюємо отриманий результат.

Використовуючи обмеженість істотно особливих функцій $U_i(t)$ та $\psi(t)$ на нескінченності можна встановити справедливість граничної рівності [10]

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Y_k(x,\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x),\varepsilon)= \tag{2.165}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\sum_{j=0}^{3}Y_j(x,\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x),\varepsilon)+Y_k^{part.}(x,\varepsilon)\right]=\tilde{y_0}(x)\equiv\omega(x).$$

на будь-якому проміжку, що не містить точку звороту $\omega=0$, $\omega(x)$- частинний розв'язок виродженого рівняння $L_0\omega(x)=h(x)$.

Загальний розв'язок $Y_k(x,t,\varepsilon)$ системи (2.4) запишемо як суперпозицію розв'язків однорідної системи $Y_k^{hom.}(x,t,\varepsilon)$ та частинного розв'язку неоднорідної системи $Y_k^{part.}(x,t,\varepsilon)$. Таким чином сформулюємо теорему.

Теорема 2.2.3. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:*

C 1. $H(x)\in C^\infty[0;l]$;

C 4. $a(x)=x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x)>0$, $\quad b(x)>0$.

Тоді при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon>0$ методом істотно особливих функцій можна побудувати асимптотику розв'язку у вигляді асимптотичного ряда

$$\tilde{Y_k}(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{2}\left\{\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^r\alpha_{ikr}(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^r\beta_{ikr}(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]\frac{dU_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}\right\}+\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\omega_{kr}(x)+O(\varepsilon^{q+1})+$$

$$+\left[\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r f_{kr}(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]\psi(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))+$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r g_{kr}(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]\frac{d\psi(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}+$$

$$+\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\overline{\omega}_{kr}(x)+O(\varepsilon^{q+1})+\sum_{r=0}^{p}\varepsilon^r y_{kr}(x)+O(\varepsilon^{q+1}),$$

$\varphi(x)=\left(\frac{3}{2}\int_0^x\sqrt{x\widetilde{a}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}.$

2.2.6 Висновки до розділу 2

Розділ присвячений побудові рівномірної асимптотики розв'язку сингулярно збуреної системи диференціальниж рівнянь з диференціальною точкою звороту.

Для (2.4) встановлено умови, при виконанні яких, відбувається регуляризація сингулярно збуреної задачі, описано простір безрезонансних розв'язків. Досліджено задачу про побудову асимптотичного розв'язку векторного рівняння (2.4) зі стабільною диференціальною точкою звороту у просторі безрезонансних розв'язків.

Асимптотику розв'язку векторного рівняння зі стабільної диференціальної точкою звороту побудовано для двох випадків:

1) коефіцієнти матриці $\tilde{a}(x)>0$, $b(x)<0$;

2) коефіцієнти матриці $\tilde{a}(x)>0$, $b(x)>0$.

Побудова рівномірної асимптотики розв'язків рівняння (2.4) здійснювалась методом істотно особливих функцій. Власне, для двох розв'язків однорідної задачі використано істотно особливі функції $U_1(t)$ та $U_2(t)$ та їх похідні, які є розв'язками однорідних диференціальних рівнянь Ейрі $U''(t)+tU(t)=0$. Третій розв'язок однорідної задачі для випадку $\tilde{a}(x)>0$, $b(x)<0$ побудовано з використанням виродженого скалярного рівняння, яке відповідає векторному рівнянню (2.4). Для побудови частинних розв'язків неоднорідної задачі використано істотно особливу функцію $\psi(t)$ та її похідну, які є частинними розв'язками неоднорідного рівняння Ейрі виду $U''(t)+tU(t)=1$ [6].

Представлено структуру метода істотно особливих функцій у вигляді алгоритма:

1 крок. *Розширення сингулярно збуреної задачі.* В сингулярно збуреній системі з точкою звороту поряд із незалежною змінною x вводиться нова вектор-змінна $t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)$. Тоді замість шуканої вектор-функції $Y(x,\varepsilon)$ вивчається нова „розширена вектор-функція" $\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)$. При чому розширення проводиться таким чином, щоб виконувалась умова як в методі регуляризації

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)|_{t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)} \equiv Y(x,\varepsilon).$$

p і $\varphi(x)$ визначається для кожного конкретного випадку. Відбувається перехід від задачі з одніє змінною, до задачі з двома змінними t і x.

2 крок. *Простір безрезонансних розв'язків.* Для регуляризації вводиться конкретний простір функцій - простір безрезонансних розв'язків, який для кожної кокретної задачі має свою специфіку.

$$\sum_{i=1}^{2} D_{ik}(x,t,\varepsilon) \bigoplus f_k(x,\varepsilon)\psi(t) \bigoplus \varepsilon^{\gamma} g_k(x,\varepsilon)\psi'(t) \bigoplus \omega_k(x,\varepsilon), \quad k=\overline{1,3}$$

3 крок. *Регуляризація сингулярно збуреної задачі.*

Для того, щоб гарантувати, що в ході перетворень було правильно виділено, описано та визначено всі істотно особливі функції, які містяться в розв'язках системи (2.4), потрібно вимагати, щоб алгебраїчні рівняння (формула) були регулярно збуреними відносно малого параметра $\varepsilon > 0$. Для цього необхідно однозначно визначити показники p та γ Лема 2.1. Такий підхід надасть можливість знайти всі коефіцієнти ряду і побудувати рівномірну асимптотику розв'язку для системи (2.4).

4 крок. *Формалізм побудови розв'язку задачі.* Оскільки розширена задача є регулярно збуреною відносно малого параметра у просторі безрезонансних розв'язків, то розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду

$$\tilde{Y}_k(x,t,\mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r Y_{hom.}(x) + \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r Y^{part.}(x), \tag{2.166}$$

де $\mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$–малий параметр.

Побудову асимптотичного ряду розпочинаємо з від'ємних степенів малого параметра з метою одержання рівномірної асимптотики розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Права частина системи буде мати розрив другого роду в точці звороту. Тому в загальному випадку вона не належатиме множині значень головного розширеного оператора $\tilde{L}_{\varepsilon}$.

Підставивши ряд (2.166) в систему (2.15), для визначення коефіцієнтів цього ряду, отримаємо деяку систему рекурентних рівнянь.

5 крок. *Побудова формальних розв'язків однорідної розширеної системи.* Покажемо, що ця система рівнянь є асимптотично коректною у ПБР D_k. На цьому етапі розробляється теорія існування ітераційного рівняння виду

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{kr}(x),$$

де $\Phi(x)$–матриця системи (2.15), $Z_{kr}(x)$–вектор-стовпець складений з аналітичних функцій $\theta_1(x,\varepsilon)$. І будуються перші члени асимптотичного розв'язку однорідної задачі $\tilde{Y}_{hom.}(x,t,\varepsilon)$.

6 крок. *Побудова формальних розв'язків неоднорідної розширеної системи.* На цьому етапі будуємо розв'язок неоднорідної задачі $\tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon)$ за допомогою рекурентного рівняння

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{kr}(x),$$

де $\Phi(x)$–матриця системи (2.15), $Z_{kr}(x)$–вектор-стовпець складений з аналітичних функцій $\theta_2(x,\varepsilon)$.

7 крок. *Оцінка залишкових членів асимпотики розв'язку.* Тепер необхідно провести оцінку залишкових членів

$$\varepsilon^{1+q}\xi_{k\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)$$

та

$$\varepsilon^{1+q}\xi_{k\beta(q+1)}(x,\varepsilon)$$

одержаних розв'язків.

8 крок. *Побудова загального розв'язку неоднорідної системи.* Результатом проведеного дослідження є побудова загального розв'язку системи

$$\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon) = \tilde{Y}_{hom.}(x,t,\varepsilon) + \tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon)$$

Застосовуючи метод істотно особливих функцій для випадку, коли для системи (2.4) коефіцієнти матриці $\tilde{a}(x) > 0$, $b(x) < 0$ побудовано асимптотику розв'язку як суперпозицію розв'язку однорідної системи (2.41) та частинного випадку неоднорідної системи (2.54). Відтак для формального розв'язку

$\tilde{Y}_{hom.}(x,t,\varepsilon)$ однорідної системи справедлива теорема

Теорема 2.1.1. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:*

C 1. $H(x) \in C^{\infty}[0;l]$;

C 3. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) < 0$.

Тоді при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ можна побудувати формальний розв'язок $\tilde{Y}_{hom.}(x,t,\varepsilon)$ відповідної однорідної системи у вигляді асимптотичного ряду (2.41).

Побудовано розв'язок неоднорідної задачі.

Теорема 2.1.2. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:*

C 1. $H(x) \in C^{\infty}[0;l]$;

C 3. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) < 0$.

Тоді при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ можна побудувати частинний розв'язок $\tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon)$ відповідної неоднорідної системи у вигляді асимптотичного ряда (2.54).

Тоді, у підсумку, справедливою є теорема.

Теорема 2.1.3. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:*

C 1. $H(x) \in C^{\infty}[0;l]$;

C 3. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) < 0$.

Тоді при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ методом істотно особливих функцій можна побудувати асимптотику розв'язку $Y_k(x,t,\varepsilon)$ даної системи у вигляді асимптотичного ряда (2.64).

Далі для системи (2.4) досліджено другий випадок, коли коефіцієнти матриці обидва більше нуля $\tilde{a}(x) > 0$, $b(x) > 0$. Побудовано асимптотику розв'язку як суперпозицію розв'язку однорідної системи (2.126) та частинного випадку неоднорідної системи (2.157).

Для однорідної системи (2.4) справедливе твердження.

Теорема 2.2.1. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:*

C 1. $A_0(x)$, $H(x) \in C^{\infty}[0,l]$.

C 4. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) > 0$.

Тоді при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ можна побудувати розв'язок $\tilde{Y}^{hom.}(x,t,\varepsilon)$ відповідної однорідної системи у вигляді асим-

птотичного ряда (2.156).

Для неоднорідної системи отримано наступний результат.

Теоерма 2.2.2. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:*

C 1. $A_0(x)$, $H(x) \in C^\infty[0, l]$.

C 4. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) > 0$.

Тоді при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ можна побудувати частинний розв'язок $\tilde{Y}^{part.}(x, t, \varepsilon)$ відповідної неоднорідної системи у вигляді асимптотичного рядів (2.159).

Загальний розв'язок (2.4) для цього випадку, коли $\tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) > 0$ характеризується таким способом

Теорема 2.2.3. Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:

C 1. $H(x) \in C^\infty[0; l]$;

C 4. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) > 0$.

Тоді при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ методом істотно особливих функцій можна побудувати асимптотику розв'язку у вигляді асимптотичного ряда (2.164).

Для випадку $\tilde{a}(x) > 0$ та $b(x) < 0$ перевірено застосування методу істотно особливих функцій для побудови розв'язків системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь на конкретному прикладі.

$$\varepsilon Y'(x, \varepsilon) - A(x, \varepsilon)Y(x, \varepsilon) = 4x + 2,$$

де $A(x, \varepsilon)$ має таку структуру

$$A(x, \varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1,$$

а $A_0(x)$ і A_1 матриці вигляду

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\varepsilon \to 0$, $x \in [0, l]$, $Y(x, \varepsilon) = colomn(y_1(x, \varepsilon), y_2(x, \varepsilon), y_3(x, \varepsilon))$ - шукана вектор-функція, $(x) = colomn(0, 0, 4x + 2)$ – задана вектор-функція.

За таких початкових умов:

1. $\tilde{a}(x),\ b(x) \in C^{\infty}[0;1]$,

2. $a(x) = x\tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x) = 4,\ b(x) = -(4x+4)$.

Методом істотно особливих функцій, повторюючи всі кроки, побудовано асимптотику розв'язку у вигляді

$$Y(x,\varepsilon) \cong \tilde{Y}(x,\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}x,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2}\Bigg\{\Bigg[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^{0}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^{x}}\cdot\sqrt{x}} \\ -\frac{4x}{\sqrt[3]{4}}\frac{e^{C_{i20}}}{e^{x}\cdot e^{\frac{1}{4}x}} \end{pmatrix} + \varepsilon^{1}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^{x}}\cdot\sqrt{x}} \\ -\frac{4x}{\sqrt[3]{4}}\frac{e^{C_{i20}}}{e^{x}\cdot e^{\frac{1}{4}x}} + \end{pmatrix}$$

$$+\varepsilon^{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^{x}}\cdot\sqrt{x}} \\ -\frac{4x}{\sqrt[3]{4}}\frac{e^{C_{i20}}}{e^{x}\cdot e^{\frac{1}{4}x}} \end{pmatrix} + O(\varepsilon^{q+1})\Bigg]U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}x)+$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^{0}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{C_{i20}}}{e^{x}\cdot e^{\frac{1}{4}x}} \\ \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^{x}}\cdot\sqrt{x}} \end{pmatrix} + \varepsilon^{1}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{C_{i20}}}{e^{x}\cdot e^{\frac{1}{4}x}} \\ \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^{x}}\cdot\sqrt{x}} \end{pmatrix} + \varepsilon^{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{C_{i20}}}{e^{x}\cdot e^{\frac{1}{4}x}} \\ \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^{x}}\cdot\sqrt{x}} \end{pmatrix} + O(\varepsilon^{q+1})\right] \times$$

$$\times\frac{dU_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}x)}\Bigg\} + \sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{0}\begin{pmatrix} \omega_{10}^{0}\cdot x \\ \frac{4x+4}{4x}\omega_{10}^{0}\cdot x \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^{1}\begin{pmatrix} \omega_{11}^{0}\cdot x \\ \frac{4x+4}{4x}\omega_{11}^{0}\cdot x \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^{2}\begin{pmatrix} \omega_{12}^{0}\cdot x \\ \frac{4x+4}{4x}\omega_{12}^{0}\cdot x \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\varepsilon^{3}\begin{pmatrix} \omega_{13}^{0}\cdot x \\ \frac{4x+4}{4x}\omega_{13}^{0}\cdot x \\ \frac{(x+1)^2}{x^2} - \omega_{13}^{0}\cdot x \end{pmatrix} + O(\varepsilon^{q+1}).$$

Результати розділу опубліковано в [2,3] та в тезах міжнародної науково-практичної конференції [2].

Розділ 3

ПОБУДОВА АСИМПТОТИКИ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕСТАБІЛЬНОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЮ ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ МЕТОДОМ ІСТОТНО ОСОБЛИВИХ ФУНКЦІЙ.

У цьому розділі досліджується питання про побудову рівномірного асимптотичного розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з нестабільною диференціальною точкою звороту.

3.1 Нестабільна диференціальна точка звороту з коефіцієнтами матриці $\tilde{a}(x) < 0$ і $b(x) > 0$

Випадок нестабільної точки звороту $x = 0$, тобто коли $\tilde{a}(x) < 0$ для скалярних задач розглянуто в роботах [11, 24]. В цих рівняннях третього порядку асимптотика розв'язку побудована за допомогою апарата функцій Ейрі-Лангера та їх похідних. У випадку, коли один із коефіцієнтів матриці $a(x) < 0$, будемо використовувати модельний оператор Ейрі вигляду

$$U''(t) - tU(t) = 0. \tag{3.1}$$

для побудови рівномірної асимптотики розв'язку.

3.1.1 Постановка задачі

Дослідимо систему сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4):

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = H(x),$$

де

$$A(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1(x),$$

– відома матриця, де

$$\mathbf{A_0}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & a(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\varepsilon \to 0$, $x \in [-l, 0]$, $Y(x,\varepsilon) \equiv Y_k(x,\varepsilon) = colomn(y_1(x,\varepsilon), y_2(x,\varepsilon), y_3(x,\varepsilon))$ - шукана вектор-функція, $H(x) = colomn(0, 0, h(x))$ – задана вектор-функція.

Систему сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) будемо досліджувати за таких умов:

C 2. $A_0(x)$, $H(x) \in C^\infty[-l, 0]$.

C 5. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) < 0$, $\quad b(x) > 0$.

Продовчуючи дослідження, розпочаті у попередніх розділах, розглянемо нижче задачу (2.4) при умовах **C 1** і **C 4**. Зауважимо, що відмінність полягає лише в умові **C 4**, проте властивості вектор-функцій, з яких побудована асимптотика значно відрізняються від властивостей розв'язку попередньої задачі. Слід зазначити, що дана проблематика залишається мало вивченою.

Нагадаємо, що ми розглядаємо випадок, коли один з лінійно незалежних розв'язків однорідного рівняння (2.4) необмежено зростає, коли $\varepsilon \to 0$, то точку звороту $x = 0$ називають **нестабільною точкою звороту**.

Істотно особливі функції, які виникають у розв'язках однорідної задачі (2.4) при $\varepsilon = 0$, зручно описати, використовуючи функції Ейрі-Лангера Ai(t) і Bi(t) та їх похідні [6]. Тому нагадаємо аналітичний запис цих функцій та їх похідних.

Функція

$$\mathrm{Ai(t)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\Big(\frac{s^3}{3} + st\Big)ds$$

є розв'язком (3.1). Другим розв'язком цього модельного рівняння є функція [6]

$$\mathrm{Bi(t)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \{exp[-\frac{s^3}{3} + st] + sin[\frac{s^3}{3} + st]\}ds.$$

Для великих значень аргументу, тобто коли $t \to +\infty$, мають місце такі асимптотичні рівності [6]:

$$\mathrm{Ai(t)} = \frac{e^{-\xi}}{2\sqrt{\pi\sqrt[4]{t}}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_k \xi^{-k}, \qquad \mathrm{Bi(t)} = \frac{e^{\xi}}{\sqrt{\pi\sqrt[4]{t}}}\sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^{-k}. \tag{3.2}$$

Для похідних цих функцій маємо такі рівності

$$\mathrm{Ai}'(\mathrm{t}) = \frac{-t^{\frac{1}{4}}e^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}}\Sigma_{k=0}^{\infty}(-1)^k d_k \xi^{-k}, \tag{3.3}$$

$$\mathrm{Bi}'(\mathrm{t}) = \frac{t^{\frac{1}{4}}e^{-\xi}}{\sqrt{\pi}}\Sigma_{k=0}^{\infty} d_k \xi^{-k},$$

де $d_0 = 1$; $d_k = -\frac{6k+1}{6k-1}$, $k\epsilon N$.

Істотно особливі функції, які виникають у частинних розв'язках неоднорідної задачі (2.4) будемо описувати за допомогою модельного оператора вигляду:

$$U''(t) - tU(t) = \pi^{-1}.$$

Скалярна форма виродженого рівняння задачі (2.4) має вигляд:

$$-x\tilde{a}(x)\omega'(x) + b(x)\omega(x) = h(x). \tag{3.4}$$

В цьому випадку в околі точки $x = 0$ співвідношення коефіцієнтів $\frac{b(0)}{-\tilde{a}(0)} > 0$. Це означає, що розв'язок виродженого рівняння є неперервною функцією для всіх $x \in [-l, 0]$, тому може бути використаний для побудови лінійно незалежного розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь.

Характеристичне рівняння, що відповідає системі сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) має вигляд:

$$|A(x,0) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -b(x) & a(x) & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + x\tilde{a}(x)\lambda = 0.$$

Оскільки досліджуємо нестабільну точку звороту $x = 0$, то корені характеристичного рівняння є дійсними числами, тобто

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{x\tilde{a}(x)}.$$

3.1.2 Регуляризація системи сингулярно збурених рівнянь

За алгоритмом, введено нову змінну

$$t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x).$$

За Лемою 1.1. $p = \frac{1}{3}$, тоді

$$t = \mu^{-2} \cdot \varphi(x),$$

де $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{3}}$, а регуляризуюча функція $\varphi(x)$ підлягає визначенню. Тоді, алгоритмом, замість заданої фунції $Y_k(x, \varepsilon)$ будемо розглядати розширену функцію $\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon)$. Розшиерння функції проводимр таким чином, щоб мала місце тотожність

$$\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon)\Big|_{t=\mu^{-2}\cdot\varphi(x)} \equiv Y_k(x, \varepsilon),$$

Тут розширений оператор для векторного рівняння (2.4), аналогічний до відповідного розширеного оператора з розділу 2, тобто

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon) \equiv \mu\varphi' \frac{\partial \tilde{y}(x, t, \varepsilon)}{\partial t} + \mu^3 \frac{\partial \tilde{y}(x, t, \varepsilon)}{\partial x} - A(x, \varepsilon)\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon) = H(x). \quad (3.5)$$

Опишемо простір функцій, в якому можна буде побудувати рівномірний асимптотичний розв'язок розширеної задачі (2.4)

$$\begin{gathered} D_{1k} = \alpha_{1k}(x)\mathrm{Ai}(\mathrm{t}) + \beta_{1k}(x)\mathrm{Ai}'(\mathrm{t}), \\ D_{2k} = \alpha_{2k}(x)\mathrm{Bi}(\mathrm{t}) + \varepsilon^\gamma \beta_{2k}(x)\mathrm{Bi}'(\mathrm{t}), \\ D_{3k} = f_k(x)\nu(t) + \varepsilon^\gamma g_k(x)\nu'(t), \\ D_{4k} = \omega_k(x), \end{gathered}$$

де $\alpha_{ik}(x), \beta_{ik}(x), f_k(x), g_k(x), \omega_k(x) \in C^\infty[-l, 0]$.

Тут функції Ai(t), Bi(t) – функції Ейрі-Лангера, $\nu(t)$ – істотно особлива функція, властивості яких описані у [6].

Елемент цього простору має вигляд

$$\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{2}[\alpha_{ik}(x)U_i(t)+\beta_{ik}(x)U_i'(t)]+f_k(x)\nu(t)+\varepsilon^{\gamma}g_k(x)\nu'(t)+\omega_k(x).$$

Для зручності ввели позначення $U_1(t)\equiv \mathrm{Ai(t)}$, $U_2(t)\equiv \mathrm{Bi(t)}$.

Як і в поепердніїї випадках запишемо результат дії розширеного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ на елементи ПБР D_{1k} і D_{2k} у вигляді двох векторних рівнянь:

$$U_i'(t):\alpha_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-[A_0(x)+\mu^3A_1]\beta_{ik}(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_{ik}'(x,\varepsilon), \tag{3.6}$$

$$U_i(t):\beta_{ik}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)-[A_0(x)+\mu^3A_1]\alpha_{ik}(x,\varepsilon)=-\mu^3\alpha_{ik}'(x,\varepsilon).$$

З векторних рівнянь однозначно визначимо показник $\mu=\varepsilon^{\frac{1}{3}}$. Розпишемо векторні рівняння у вигляді системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}\alpha_{i1}(x,\varepsilon)\varphi'(x)=-\mu^3[\beta_{i1}'(x,\varepsilon)-\beta_{i2}(x,\varepsilon)],\\ \alpha_{i2}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-\beta_{i3}(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_{i2}'(x,\varepsilon),\\ \alpha_{i3}(x,\varepsilon)\varphi'(x)+b(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon)-a(x)\beta_{i2}(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_{i3}'(x,\varepsilon),\\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon)=-\mu^3[\alpha_{i1}'(x,\varepsilon)-\alpha_{i2}(x,\varepsilon)],\\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i2}(x,\varepsilon)-\alpha_{i3}(x,\varepsilon)=-\mu^3\alpha_{i2}'(x,\varepsilon),\\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i3}(x,\varepsilon)+b(x)\alpha_{i1}(x,\varepsilon)-a(x)\alpha_{i2}(x,\varepsilon)=-\mu^3\alpha_{i3}'(x,\varepsilon),\end{cases} \tag{3.7}$$

яка є регулярно збуреною системою відносно малого параметра μ.

3.1.3 Формалізм побудови однорідної розширеної системи

Для побудови асимптотики розв'язків однорідної розширеної системи (3.5) будемо використовувати систему алгебраїчних рівнянь (3.7), невідомі коефіцієнти якої будемо шукати у вигляді рядів

$$\alpha_{ik}(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\alpha_{ikr}(x),\qquad \beta_{ik}(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\beta_{ikr}(x). \tag{3.8}$$

Для визначення компонент вектор-функцій $\alpha_{ikr}=colomn(\alpha_{i1r}(x),\alpha_{i2r}(x),\alpha_{i3r}(x))$ та $\beta_{ikr}(x)=colomn(\beta_{i1r}(x),\beta_{i2r}(x),\beta_{i3r}(x))$

отримаємо наступні рекурентні системи рівнянь:

$$\Phi(x)Z_{k0}(x) = 0, \qquad r = 0,1,2, \qquad \Phi(x)Z_{kr}(x) = FZ_{k(r-3)}(x), \qquad r \geq 3. \tag{3.9}$$

Тут $Z_{kr}(x) = colomn(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x), \beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x))$, а

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \varphi'(x) & b(x) & -x\tilde{a}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 \\ b(x) & -x\tilde{a}(x) & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Обчислимо визначник цієї системи. Маємо

$$\det\Phi(x) = (a^2(x) - 2a(x)\varphi(x)\varphi'^2(x) + \varphi^2(x)\varphi'^4(x)) \cdot \varphi(x)\varphi'^2(x).$$

Функцію $\varphi(x)$ визначимо як розв'язок задачі

$$\varphi^2(x)\varphi'^4(x) + 2a(x)\varphi(x)\varphi'^2(x) + a^2(x) = 0,$$

яку можемо записати у простішому вигляді

$$\varphi(x)\varphi'^2(x) = -a(x) \equiv -x\tilde{a}, \varphi(0) = 0 \tag{3.11}$$

Треба зауважити, що розв'язки рівняння

$$U''(t) - tU(t) = 0,$$

тобто функції Ai(t) та Bi(t) будуть стійкими, коли $t \to -\infty$. Отже.ю нам потрібно, щоб розв'язком задачі (3.13) була функція $\varphi(0) < 0$.

Розв'язком задачі (3.13) при умові $\varphi(0) = 0$ буде функція

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{-x\tilde{a}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Регуляризуюча функція такого виду розглядалась в роботах [9, 60, 77]. Оскільки $\det\Phi(x) \equiv 0$, то існує нетривіальний розв'язок однорідної системи

(2.4) вигляду

$$Z_{k0}(x)=colomn\left(0,\frac{1}{\varphi'(x)}\beta_{i30}(x),-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i20}(x),0,\beta_{i20}(x),\beta_{i30}(x)\right), \tag{3.12}$$

де $\beta_{0ik}(x), i=1;2, i=\overline{1;3}$ – до певного часу довільні, досить гладкі функції при $x\in[-l;0]$.

Займемось розв'язуванням неоднорідних систем (3.9). Спочатку розглянемо ці системи, коли $r=3$. Врахувавши одержаний розв'язок (3.12), будемо мати

$$\begin{cases}\varphi'(x)\alpha_{i13}(x)=\beta_{i20}(x)-\beta'_{i10}(x)\equiv\beta_{i20}(x),\\ \varphi'(x)\alpha_{i23}(x)-\beta_{i33}(x)=-\beta'_{i20}(x),\\ \varphi'(x)\alpha_{i33}(x)+b(x)\beta_{i13}(x)+a(x)\beta_{i23}(x)=-\beta'_{i30}(x),\end{cases} \tag{3.13}$$

та

$$\begin{cases}\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i13}(x)=-\alpha'_{i10}(x)+\alpha_{i20}(x)\equiv\alpha_{i20}(x)\equiv[\varphi'(x)]^{-1}\beta_{i30}(x),\\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i23}(x)-\alpha_{i33}(x)=-\alpha'_{i20}(x)\equiv-\frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}\beta_{i30}(x)),\\ \varphi\varphi'(x)\beta_{i33}(x)+b(x)\alpha_{i13}(x)+a(x)\alpha_{i23}(x)=-\alpha'_{i30}(x).\end{cases} \tag{3.14}$$

З перших рівнянь систем (3.13) і (3.14) визначимо функції $\alpha_{i13}(x)=[\varphi'(x)]^{-1}\beta_{i20}(x)$ та $\beta_{i13}(x)=[\varphi'(x)]^{-2}[\varphi(x)]^{-1}\beta_{i30}(x)$. Тоді системи (3.13) і (3.14) набудуть вигляду

$$\begin{cases}\varphi'(x)\alpha_{i23}(x)-\beta_{i33}(x)=-\beta'_{i20}(x),\\ \varphi'(x)\alpha_{i33}(x)+a(x)\beta_{i23}(x)=-\beta'_{i30}(x)-b(x)\beta_{i13}(x)\equiv-\beta'_{i30}(x)-\frac{b(x)}{\varphi(x)\varphi'^2(x)}\beta_{i30}(x),\end{cases}$$

та

$$\begin{cases}\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i23}(x)-\alpha_{i33}(x)=-\alpha'_{i20}(x)\equiv\frac{d}{dx}(-[\varphi'(x)]^{-1}\beta_{i30}(x)),\\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i33}(x)+a(x)\alpha_{i23}(x)=-\alpha'_{i30}(x)-b(x)\alpha_{i13}(x)\equiv\\ \qquad\equiv[\varphi(x)\varphi'(x)]'\beta_{i20}(x)-\frac{b(x)}{\varphi(x)}\beta_{i20}(x).\end{cases}$$

Перепишемо ці системи в такому вигляді:

$$\begin{cases}\varphi'(x)\alpha_{i23}(x)-\beta_{i33}(x)=-\beta'_{i20}(x),\\ a(x)\alpha_{i23}(x)+\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i33}(x)=[\varphi(x)\varphi'(x)]'\beta_{i20}(x)-\frac{b(x)}{\varphi'(x)}\beta_{i20}(x),\end{cases} \tag{3.15}$$

та

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{i33}(x) + a(x)\beta_{i23}(x) = -\beta'_{i30}(x) - b(x)\frac{\beta_{i30}}{\varphi(x)\varphi'^2(x)}, \\ -\alpha_{i33}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i23}(x) = \frac{d}{dx}(-[\varphi'(x)]^{-1}\beta_{i30}(x)). \end{cases} \tag{3.16}$$

З метою визначення всіх лінійно незалежних розв'язків, обчислимо ранги матриць з коефіцієнтів систем (3.15) і (3.16) відповідно:

$$\left(\begin{array}{cc|l} \varphi'(x) & -1 & -\beta'_{i20}(x) \\ a(x) & \varphi(x)\varphi'(x) & (\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i20}(x))' - \frac{b(x)}{\varphi'(x)}\beta_{i20} \end{array} \right) \tag{3.17}$$

та

$$\left(\begin{array}{cc|l} \varphi'(x) & a(x) & -\beta'_{i30}(x) - \frac{b(x)}{\varphi(x)\varphi'^2(x)}\beta_{i30}(x). \\ -1 & \varphi(x)\varphi'(x) & -[\frac{\beta_{i30}(x)}{\varphi'(x)}]' \end{array} \right) \tag{3.18}$$

Після елементарних перетворень одержимо, що ранг кожної з систем менше кількості змінних, тому за умови

$$-2a(x)\beta'_{i20}(x) + \varphi'(x)[(\varphi(x)\varphi'(x))]'\beta_{i20}(x) = 0, \tag{3.19}$$

для системи (3.17) та

$$-2\beta'_{i30}(x) + \left[\frac{\varphi''(x}{\varphi'(x}) - \frac{b(x)}{a(x)}\right]\beta_{i30}(x) = 0 \tag{3.20}$$

для системи (3.18) вони мають безліч розв'язків.

Тому для відшукання всіх лінійно незалежних розв'язків системи (3.7) скористаємось довільністю вибору функцій $\beta_{is0}(x) = \beta^0_{i30} \cdot \beta_{k30}(x)$, $i = 1; 2$, $s = 2; 3$, де $\beta^0_{is0}(x)$ – довільні сталі, $\tilde{\beta}_{is0}(x)$ – частинні, досить гладкі для всіх $x \in [-l; 0]$, розв'язки однорідних рівнянь (3.19) і (3.20). При такому визначенні вектор-функцій $Z_{k0}(x)$ існують розв'язки неоднорідних систем алгебраїчних рівнянь (3.15) і (3.16) вигляду

$$Z_{k3}(x) = colomn\left(\; z_{k13}, z_{k23}, z_{k33}, z_{k43}, z_{k53}, z_{k63} \; \right),$$

$z_{i13} = \frac{1}{\varphi'(x)}\beta_{i20}(x)$, $z_{i23} = \frac{-\beta'_{i20}(x)+\beta_{i33}(x)}{\varphi'(x)}$, $z_{i33} = \frac{-\beta'_{i30}(x)-a(x)\beta_{i23}(x)-b(x)(\varphi(x))^{-1}(\varphi'(x))^{-2}\beta_{i30}}{\varphi'(x)}$, $z_{i43} = (\varphi(x))^{-1}(\varphi'(x))^{-2}\beta_{i20}(x)$, $z_{i53} = \beta_{i21}(x)$, $z_{i63} = \beta_{i31}(x)$, при чому $\beta_{i21}(x)$ та $\beta_{i31}(x)$, як і в (**??**), до певного часу довільні, достатньо гладкі функції для всіх $x \in [-l; 0]$.

Продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь

(3.15) і (3.16) при $r > 3$, методом математичної індукції можна показати, що ці системи рівнянь асимптотично коректні в такому розумінні. Якщо вимагати існування розв'язків систем рівнянь (3.15) і (3.16) при $r = \overline{0;q}$, то кожна з цих систем при $r = \overline{0;q-3}$, визначається з точністю до двох довільних сталих $\beta_{k21}(x)$ та $\beta_{k31}(x)$, які утворюють довільний вектор $\beta^0_{ks0}(x) = colomn(0, \beta^0_{k2r}(x), \beta^0_{k3r}(x))$.

Висновок 6. Таким чином, продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи рівнянь (3.15) і (3.16), одержимо два лінійно незалежних розв'язки системи (2.4) виду

$$D_k(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ikr}(x)U_i(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ikr}(x,\varepsilon)U_i'(t)], \qquad i = 1;2, \tag{3.21}$$

де $\alpha_{ikr}(x) = colomn(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x))$ та $\beta_{ikr}(x) = colomn(\beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x))$ – відомі вектор-функції.

Проведемо звуження даного розв'язку при $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$ і $i = 1;2$, тоді одержимо розв'язки

$$D_k(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ikr}(x)U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ikr}(x,\varepsilon)U_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))]. \tag{3.22}$$

Третій формальний розв'язок однорідного векторного рівняння (2.4) будуємо у вигляді ряду

$$\omega(x,\varepsilon) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x) \equiv colomn\left(\sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{1r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{2r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{3r}(x)\right). \tag{3.23}$$

Підставимо (3.23) в розширений оператор. Тоді отримаємо наступну рекурентну систему векторних рівнянь:

$$A_0(x)\omega_0(x) = 0, \qquad A_r(x)\omega_r(x) = -A_1(x)\omega_{(r-1)}(x) + \omega'_{(r-1)}(x), \qquad r \geq 1. \tag{3.24}$$

Дослідимо розв'язок однорідного векторного рівняння $A_0(x)\omega_0(x) = 0$. Однозначно визначимо $\omega_{03}(x) \equiv 0$ і одержимо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} \omega'_{01}(x) - \omega_{02}(x) = 0, \\ -x\tilde{a}(x)\omega_{02} + b(x)\omega_{01}(x) = 0. \end{cases}$$

З цієї системи отримаємо наступне скалярне диференціальне рівняння:

$$-x\tilde{a}(x)\omega'_{01}(x) + b(x)\omega_{01}(x) = 0. \tag{3.25}$$

Розв'язок однорідного рівняння (3.25) має вигляд

$$\omega_{01}(x) = \omega_{01}^0 \cdot exp\left\{\int \frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\}, \tag{3.26}$$

де ω_{01}^0 – довільна стала.

До цього часу ми не використовували умову на коефіцієнт $b(x)$. З врахуванням того, що $b(x) > 0$ (див. умови (2)) маємо $\frac{b(0)}{-\tilde{a}(0)} = \rho > 0$. Тому розв'язок (3.26) є досить гладкою функцією на всьому відрізку [-l;0], включаючи і точку звороту $x = 0$.

Скориставшись розв'язком (3.26), отримаємо розв'язок

$$\omega_{02}(x) = \omega'_{01}(x) = \omega_{01}^0 \cdot \frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)} exp\left\{\int \frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\}.$$

Таким чином, нами побудоване нульове наближення

$$\omega_0(x) = colomn(\omega_{01}(x), \omega_{02}(x), \omega_{03}(x)) \equiv$$

$$\equiv colomn\left(\omega_{01}^0 \cdot exp\left\{\int \frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\}, \omega_{01}^0 \cdot \frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)} \cdot exp\left\{\int \frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\}, 0\right),$$

яке містить одну довільну сталу ω_{01}^0.

На наступному кроці отримаємо неоднорідну систему рівнянь, при розв'язуванні якої знову отримаємо розв'язок, який буде містити одну довільну сталу ω_{11}^0. Продовжуючи далі розв'язувати системи рівнянь (3.24), поступово визначимо всі розв'язки $\omega_r(x)$, тобто отримаємо третій розв'язок системи (2.4) у вигляді формального ряду (3.23).

Тоді розв'язок однорідної системи запишемо у вигляді ряду

$$\tilde{Y}_k^{hom.}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\left[\sum_{i=1}^{2} \left[\alpha_{ikr}(x)U_i(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ikr}(x)U'_i(t)\right]\right] + \omega_{kr}(x)\right], \tag{3.27}$$

Теорема 3.1.1. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рів-*

нянь (2.4) задовольняє умови:

C 2. $A_0(x)$, $H(x) \in C^\infty[-l, 0]$.

C 5. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) < 0, \quad b(x) > 0$.

Формальний розв'язок однорідної системи (2.4) можна представити у вигляді ряду:

$$\tilde{Y}_k^{hom.}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\left[\sum_{i=1}^{2} \left[\alpha_{ikr}(x) U_i(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ikr}(x) U_i'(t) \right] \right] + \omega_{kr}(x) \right],$$

де $U_1(t) = \mathrm{Ai(t)}$, $U_2(t) = \mathrm{Bi(t)}$.

3.1.4 Побудова формальних частинних розв'язків неоднорідної розширеної системи

Для побудови частинного розв'язку задачі (2.4) скористаємось дією розширеного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ на елементи підпросторів D_{3r} і D_{4r}. Результат запишемо у вигляді

$$\tilde{L}_\varepsilon(f_k(x,\varepsilon)\nu(t) + \mu g_k(x,\varepsilon)\nu'(t) + \omega_k(x,\varepsilon)) = \mu f_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)\nu(t) +$$

$$+ g_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)\varphi(x)\nu(t) - A(x,\varepsilon) f_k(x,\varepsilon)\nu(t) -$$

$$- \mu A(x,\varepsilon) g_k(x,\varepsilon)\nu'(t) + \mu^3 f_k'(x)\nu(t) + \mu^4 g_k'(x)\nu'(t) +$$

$$+ \mu^2 \varphi'(x) g_k(x) \pi^{-1} + \mu^3 \omega'(x) - A(x,\varepsilon)\omega_k(x) = H(x).$$

Зрівняємо коефіцієнти біля істотно особливої функції $\nu(t)$ та її похідної, як в (3.6), й будемо вимагати, щоб одержані системи рівнянь були регулярно збуреними відносно малого параметра μ. Тоді будемо мати:

$$\nu'(t) : f_k(x,\varepsilon)\varphi'(x) - [A_0(x) + \mu^3 A_1] g_k(x,\varepsilon) = -\mu^3 g_k'(x,\varepsilon),$$

$$\nu(t) : g_k(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) - [A_0(x) + \mu^3 A_1] f_k(x,\varepsilon) = -\mu^3 f_k'(x,\varepsilon), \tag{3.28}$$

$$\mu^3 \omega_k'(x) - A(x,\varepsilon)\omega(x) = H(x) - \mu^2 \varphi'(x) g_k(x) \pi^{-1}. \tag{3.29}$$

За аналогією з попереднім (3.7), можна показати, що система векторних рівнянь (3.28) регулярно збурена. Тому її розв'язок шукаємо у вигляді вектор-функцій

$$f_k(x,\varepsilon)=\sum_{r=-2}^{+\infty}\mu^r f_{kr}(x),\qquad g_k(x,\varepsilon)=\sum_{r=-2}^{+\infty}\mu^r g_{kr}(x),\qquad \omega(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r \omega_{kr}(x). \tag{3.30}$$

Для визначення компонент вектор-функцій $f_{kr}(x) = colomn(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x))$ та $g_{kr}(x) = colomn(g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x))$ отримаємо наступні рекурентні системи рівнянь:

$$\Phi(x)Z_0^{\text{part.}}(x)=0,\quad r=-2,-1,0 \tag{3.31}$$

$$\Phi(x)Z_r^{\text{part.}}(x)=-Z_{r-3}^{\text{part.}}(x),\qquad r\geq 1.$$

$Z_r^{\text{part.}}(x) = colomn(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x), g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x))$.

Оскільки $\det\Phi(x)\equiv 0$, то за аналогією з попереднім (3.9), отримаємо нетривіальний розв'язок однорідної системи (3.31) вигляду

$$Z_0^{\text{part.}}(x)=colomn\left(0,\frac{1}{\varphi'(x)}g_{30}(x),-\frac{a(x)}{\varphi'(x)}g_{20}(x),0,g_{20}(x),g_{30}(x)\right), \tag{3.32}$$

де $g_{i0}, i = 1;2$ – до певного часу довільні, досить гладкі функції при $x \in [-l;0]$.

Знову, за аналогією з попереднім, отримаємо такі дві системи рівнянь:

$$\begin{cases}\varphi'(x)f_{23}(x)-g_{33}(x)=-g_{20}'(x),\\ a(x)f_{23}(x)+\varphi(x)\varphi'(x)g_{33}(x)=[\varphi(x)\varphi'(x)]'g_{20}(x)-\frac{b(x)}{\varphi'(x)}g_{20}(x),\end{cases} \tag{3.33}$$

та

$$\begin{cases}\varphi'(x)f_{33}(x)+a(x)g_{23}(x)=-g_{30}'(x)-b(x)\frac{g_{30}}{\varphi(x)\varphi'^2(x)},\\ -f_{33}(x)+\varphi(x)\varphi'(x)g_{23}(x)=(-[\varphi'(x)]^{-1}g_{30}(x))',\end{cases} \tag{3.34}$$

Бачимо, що для визначення коефіцієнтів систем (3.33) і (3.34) маємо повну аналогію з визначенням коефіцієнтів систем (3.15) та (3.16). Тому, щоб не повторюватись, зробимо наступний аналогічний висновок: на першому кроці праві частини (3.33) і (3.34) мають просту структуру, тому за рахунок довільності функцій $g_{2r}^0(x)$ та $g_{3r}^0(x)$ існують розв'язки систем вигляду (3.31). На наступних ітераційних кроках праві частини будуть ускладнюватись, проте ми завжди зможемо добитись існування гладких розв'язків цих систем за рахунок довільності вище вказаних функцій.

Продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь (3.33) і (3.34) при $r > 1$, можна показати, що ці системи рівнянь асимптотично коректні. Якщо вимагати існування розв'язків систем рівнянь (3.15) і (3.16) при $r = \overline{0;q}$, то кожна з цих систем при $r = \overline{0;q-3}$, визначається з точністю до двох довільних сталих $g^0_{2r}(x)$ та $g^0_{3r}(x)$, які утворюють довільний вектор $g^0_r(x) = colomn(0, g^0_{2r}(x), g^0_{3r}(x))$.

Розпишемо векторне рівняння рівняння (3.29) у вигляді системи

$$\begin{cases} \mu^3\omega_1'(x,\varepsilon) = -\mu^2\varphi'(x)\pi^{-1}g_1(x,\varepsilon) + \mu^3\omega_2(x,\varepsilon), \\ \mu^3\omega_2'(x,\varepsilon) - \omega_3(x,\varepsilon) = -\mu^2\varphi'(x)\pi^{-1}g_2(x,\varepsilon), \\ \mu^3\omega_3'(x,\varepsilon) + b(x)\omega_1(x,\varepsilon) - a(x)\omega_1(x,\varepsilon) = -\mu^2\varphi'(x)\pi^{-1}g_3(x,\varepsilon) + h(x), \end{cases} \tag{3.35}$$

Підставимо ряди (3.30), тобто ряди вигляду

$$\bar\omega(x,\varepsilon) \equiv \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\bar\omega_r(x) \equiv colomn\left(\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\bar\omega_{1r}(x), \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\bar\omega_{2r}(x), \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\bar\omega_{3r}(x)\right), \tag{3.36}$$

у рівняння (3.35). В резутаті отримаємо систему:

$$\begin{cases} \mu^3[\mu^0\bar{\omega'_{10}}(x) + \mu^1\bar{\omega'_{11}}(x) + \mu^2\bar{\omega'_{12}}(x) + \ldots] = -\mu^2\varphi'(x)\pi^{-1}g_1(x,\varepsilon)[\mu^0 g_{1(-2)}(x) + \\ +\mu^1 g_{1(-1)}(x) + \mu^2 g_{10}(x) + \ldots] + \mu^3[\bar{\omega_{20}}(x) + \bar{\omega_{21}}(x) + \bar{\omega_{22}}(x)\ldots], \\ \mu^3[\bar{\omega'_{20}}(x) + \mu^1\bar{\omega'_{21}}(x) + \mu^2\bar{\omega'_{22}}(x) + \ldots] - \\ -[\mu^0\bar{\omega_{30}}(x) + \mu^1\bar{\omega_{31}}(x) + \mu^2\bar{\omega_{32}}(x) + \ldots] = \\ = -\mu^2\varphi'(x)\pi^{-1}[\mu^0 g_{2(-2)}(x) + \mu^1 g_{2(-1)}(x) + \mu^2 g_{20}(x) + \ldots], \\ \mu^3[\bar{\omega'_{30}}(x) + \mu^1\bar{\omega'_{31}}(x) + \mu^2\bar{\omega'_{32}}(x) + \ldots] + \\ +b(x)[\mu^0\bar{\omega_{10}}(x) + \mu^1\bar{\omega_{11}}(x) + \mu^2\bar{\omega_{12}}(x) + \ldots] - \\ -a(x)[\mu^0\bar{\omega_{20}}(x) + \mu^1\bar{\omega_{21}}(x) + \mu^2\bar{\omega_{22}}(x) + \ldots] = \\ = h(x) - \mu^2\varphi'(x)\pi^{-1}[\mu^0 g_{3(-2)}(x) + \\ +\mu^1 g_{3(-1)}(x) + \mu^2 g_{30}(x) + \ldots] \end{cases} \tag{3.37}$$

Прирівняємо коефіцієнти в системі (3.37) при однакових показниках μ. При $r = 0$ отримаємо систему вигляду

$$\begin{cases} -\bar{\omega_{03}}(x) = -\varphi'(x)\pi^{-1}g_{2(-2)}(x), \\ b(x)\bar{\omega_{01}}(x) - a(x)\bar{\omega_{02}}(x) = h(x) - \varphi'(x)\pi^{-1}g_{3(-2)}(x). \end{cases} \tag{3.38}$$

В рівняння системи (3.38) замість функцій $g_{2(-2)}(x)$ і $g_{3(-2)}(x)$ підставимо їх значення

$$g_{2(-2)}(x) = g^0_{2(-2)} \cdot exp\{\int \frac{b_2(x)}{x}\},$$

де

$$b_2(x) = \frac{\varphi'^3(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x) - b(x)}{-2\tilde{a}(x)}.$$

$$g_{3(-2)}(x) = g^0_{3(-2)} \cdot exp\{\int \frac{b_3(x)}{x}\},$$

де

$$b_3(x) = \frac{\varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x) + b(x)}{-2\tilde{a}(x)}.$$

В результаті одержимо систему вигляду

$$\begin{cases} -\bar{\omega_{03}}(x) = -\varphi'(x)\pi^{-1}g^0_{2(-2)} \cdot x^{-b_2(x)}, \\ b(x)\bar{\omega_{01}}(x) - a(x)\bar{\omega_{02}}(x) = h(x) - \varphi'(x)\pi^{-1}g^0_{3(-2)} \cdot x^{-b_3(x)}. \end{cases} \tag{3.39}$$

При $r = 1$ з (3.37) отримаємо систему вигляду

$$\begin{cases} \bar{\omega'_{01}}(x) = -\varphi'(x)\pi^{-1}g_{11} + \bar{\omega_{02}}(x), \\ -\bar{\omega_{31}}(x) = -\varphi'(x)\pi^{-1}g_{2(-1)}, \\ b(x)\bar{\omega_{11}}(x) - a(x)\bar{\omega_{21}}(x) = -\varphi'(x)\pi^{-1}g_{3(-1)}, \end{cases} \tag{3.40}$$

Тоді з першого рівняння системи (3.40) однозначно визначимо $\bar{\omega_{02}}(x)$

$$\bar{\omega_{02}}(x) = \bar{\omega'_{01}}(x) + \varphi'(x)\pi^{-1}g_{11}.$$

Поверенемось до системи (3.39) і підставимо $\bar{\omega_{02}}(x)$ у друге рівняння. Будемо мати

$$
\begin{cases} -\bar{\omega_{30}}(x) = -\varphi'(x)\pi^{-1}g^0_{2(-2)} \cdot x^{-b_2(x)}, \\ b(x)\bar{\omega_{10}}(x) - a(x)\bar{\omega'_{10}}(x) + \varphi'(x)\pi^{-1}g_{11} = h(x) - \varphi'(x)\pi^{-1}g^0_{3(-2)} \cdot x^{-b_3(x)}. \end{cases} \tag{3.41}
$$

Друге рівняння системи (3.41) перепишемо у вигляді

$$
\bar{\omega'_{10}}(x) - \frac{b(x)}{a(x)}\bar{\omega_{10}}(x) = -h(x) - \varphi'(x)\pi^{-1}g_{11}(x) + \varphi'(x)\pi^{-1}g^0_{3(-2)} \cdot x^{-b_3(x)}.
$$

Тоді однозначно знайдемо $\bar{\omega_{01}}(x)$.

$$
\bar{\omega_{10}}(x) = exp\{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\}\Big(\int D(x) \cdot exp\{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\} + \bar{\omega^0_{01}}\Big),
$$

де $D(x) = -h(x) - \varphi'(x)\pi^{-1}g_{11}(x) + \varphi'(x)\pi^{-1}g^0_{3(-2)} \cdot x^{-b_3(x)}$. В результаті розв'язок векторного рівнянння (3.29) при $r = 0$ запишеться у вигляді

$$
\omega_0(x) = colomn(\bar{\omega_{10}}(x), \bar{\omega_{20}}(x), \bar{\omega_{30}}(x)) \equiv
$$

$$
\equiv colomn\Big(exp\{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\}\Big(\int D(x) \cdot exp\{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\} + \bar{\omega^0_{01}}\Big),
$$

$$
\frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)} + D(x) + \varphi'(x)\pi^{-1}g_{11}, -\varphi'(x)\pi^{-1}g_{2(-2)}(x)\Big).
$$

Таким чином, нами побудоване нульове наближення, яке містить одну довільну сталу ω^0_{01}.

Для визначення всіх вектор-функцій $\omega_r(x)$ одержимо рекурентні системи рівнянь

$$
-A_0(x)\bar{\omega}_{kr}(x) = h(x) - \varphi'(x)\pi^{-1}g_{k(-2)}(x), \quad r = 0;
$$

$$
\bar{\omega}'_{k(r-2)}(x) - A_0(x)\bar{\omega}_{kr}(x) = -\pi^{-1}\varphi'(x)g_{k(r-2)}(x), \qquad r = 1, 2,
$$

$$
\bar{\omega}'_{k(r-3)}(x) - A_0(x)\bar{\omega}_{kr}(x) = -\pi^{-1}\varphi'(x)g_{k(r-2)}(x) - A_1\bar{\omega}_{k(r-2)}(x), r \geq 3.
$$

Тут $\bar{\omega}_{kr}(x) = colomn(\bar{\omega}_{1r}(x), \bar{\omega}_{2r}(x), \bar{\omega}_{3r}(x))$–невідома вектор-функція.

Знову скориставшись довільністю функцій, можемо визначити всі невідомі компоненти невідомих вектор-функцій. Таким чином, отримаємо третій формальний розв'язок системи (2.4) у вигляді формального ряду (3.30).

Висновок 8. Побудовано частинний розв'язок розширеного рівняння (3.5) у вигляді формального ряда

$$\tilde{Y}_{\text{part.}}(x,t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\left[f_{kr}(x)\nu(t)+\varepsilon^{\frac{1}{3}}g_{kr}(x)\nu'(t)\right]+\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\bar{\omega}_{kr}(x).$$

Звуження цього розв'язку при $t=\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)$, тобто ряд

$$\tilde{Y}_{\text{part.}}(x,t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\left[f_{kr}(x)\nu(\varepsilon^{\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}g_{kr}(x)\frac{d\nu(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}\right]+\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\bar{\omega}_{kr}(x), \tag{3.42}$$

є формальним частинним розв'язком системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4).

Теорема 3.1.2. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:*

C 2*. $A_0(x)$, $H(x)\in C^{\infty}[-l,0]$.*

C 5*. $a(x)=x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x)<0$, $\quad b(x)>0$.*

Формально частинний розв'язок неоднорідної системи (2.4) можна представити у вигляді ряду :

$$\tilde{Y}_k^{part.}(x,t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\left[f_{kr}(x)\nu(\varepsilon^{\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}g_{kr}(x)\frac{d\nu(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}\right]+\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\bar{\omega}_{kr}(x).$$

Висновок 9. Побудовано формальний розв'язок системи (2.4), який має вигляд

$$\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\left[\left[\sum_{k=1}^{2}\left[\alpha_{kr}(x)U_i(t)+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{kr}(x)U_i'(t)\right]\right]+\omega_{kr}(x)\right]+ \tag{3.43}$$

$$+\sum_{r=-2}^{\infty}\mu^r\left[f_{kr}(x)\nu(t)+\varepsilon^{\frac{1}{3}}g_{kr}(x)\nu'(t)\right]+\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\bar{\omega}_{kr}(x).$$

Повернувшись в (3.43) до заміни $t=\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)$, запишемо розв'язок системи (2.4) у вигляді ряду

$$\tilde{Y}_k(x,\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x),\varepsilon)= \tag{3.44}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\left[\left[\sum_{k=1}^{2}\left[\alpha_{kr}(x)U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{kr}(x)\frac{dU_i(\varepsilon^{\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}\right]\right]+\omega_{kr}(x)\right]$$

$$+\sum_{r=-2}^{\infty}\varepsilon^r\left[f_{kr}(x)\nu(\varepsilon^{\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}g_{kr}(x)\frac{d\nu(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}\right]+\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\bar{\omega}_{kr}(x).$$

3.1.5 Оцінка залишкових членів асимптотики розв'язку

Оскільки тут розглядається випадок нестабільної точки звороту, то має мо справу з ситуацією, коли виникають характерні відмінності в оцінках залишкових членів асимптотики у порівнянні зі стабільною точкою звороту [6]. Запишемо формальний розв'язок розширеної задачі (2.4) у такому вигляді:

$$\alpha_{ikr}(x,\varepsilon)\equiv\alpha_{ikr}(x,\varepsilon)+\varepsilon^{q+1}\xi_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon),$$

$$\beta_{ikr}(x,\varepsilon)\equiv\beta_{kr}(x,\varepsilon)+\varepsilon^{q+1}\xi_{\beta(q+1)}(x,\varepsilon),$$

де $\alpha_{kq}(x,\varepsilon)$ та $\beta_{kq}(x,\varepsilon)$ – частинні q-суми рядів (3.8), а $\varepsilon^{1+q}\xi_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)$ та $\varepsilon^{1+q}\xi_{\beta(q+1)}(x,\varepsilon)$ – залишкові члени рядів.

Як і в попередньому випадку, для визначення залишкових членів розглянемо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}\varepsilon\xi'_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-A(x,\varepsilon)\xi_{\beta(q+1)}(x,\varepsilon)+\varepsilon\xi_{\beta(q+1)}(x,\varepsilon)+\beta'_{kq}(x)=0,\\ \varepsilon\xi'_{\beta(q+1)}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-A(x,\varepsilon)\xi_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)+\varepsilon\xi_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)+\alpha'_{kq}(x)=0.\end{cases}\tag{3.45}$$

Тепер зосередимося не на формалізмі проведення оцінки залишкового члена розв'язку, а на дослідження деяких інтегралів функцій Ейрі, які не зустрічалися в попередніх розділах.

Істотно особлива функція $U_1(t)=\mathrm{Ai(t)}$ обмежена на всій числовій прямій, чого не можна сказати про другу функцію Ейрі $U_2(t)=\mathrm{Bi(t)}$. Нагадаємо, коли $t\to+\infty$ функція Bi(t), разом з її похідною, необмежено зростають, як це показано у (3.2) та (3.3).

Асимптотичне зображення функції Bi(t) можемо записати у вигляді:

$$\mathrm{Bi(t)}=\int_{+\infty}^{t}\mathrm{Bi}(\tau)d\tau=\frac{t^{-1}}{2\pi}[1+O(t^{-\frac{3}{2}})].\tag{3.46}$$

Хоча істотно особлива функція Bi(t) необмежено зростає, коли $t\to+\infty$ функція (3.46) все ж залишається обмеженою на нескінченності.

Істотно особлива функція $\nu(t)$ та її похідна обмежені для всіх $t\epsilon(0;+\infty)$, як зазначено у формулах (1.105), обмежені для всіх $t\epsilon(0;+\infty)$.

Виходячи з вище сказаного, (3.45) можна записати у вигляді

$$\rho_{m+1} = M(x, \mu^{-2}\cdot\varphi(x), \varepsilon) + K(x,\varepsilon)\mathrm{Bi}(\mu^{-2}\cdot\varphi(\mathrm{x})) + N(x,\varepsilon)\frac{d\mathrm{Bi}(\mu^{-2}\cdot\varphi(\mathrm{x}))}{d(\mu^{-2}\cdot\varphi(x))},$$

де всі функції $M(x,\mu^{-2}\cdot\varphi(x),\varepsilon)$, $K(x,\varepsilon)$ та $N(x,\varepsilon)$ – досить гладкі на проміжку [-l,0] та обмежені відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ [6].

Загальний розв'язок задачі (2.4) можемо записати у вигляді:

$$Y(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2}\left\{\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^r\alpha_{ikr}(x) + O(\varepsilon^{q+1})\right]U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)) + \right. \tag{3.47}$$

$$\left. +\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^r\beta_{ikr}(x) + O(\varepsilon^{q+1})\right]\frac{dU_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}\right\} + \sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\omega_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) +$$

$$+\left[\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r f_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1})\right]\nu(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)) +$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r g_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1})\right]\frac{d\nu(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))} +$$

$$+\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\overline{\omega}_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}).$$

Одержані результати сформулюємо у вигляді наступної теореми:

Теорема 3.1.3. *Нехай ССЗДР (2.4) задовольняє умови:*

C 2. $A_0(x)$, $H(x) \in C^\infty[-l,0]$.

C 5. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) < 0$, $\quad b(x) > 0$.

Тоді загальний розв'язок можна записати у вигляді

$$Y_k(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2}\left\{\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^r\alpha_{ikr}(x) + O(\varepsilon^{q+1})\right]U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)) + \right.$$

$$\left. +\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^r\beta_{ikr}(x) + O(\varepsilon^{q+1})\right]\frac{dU_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}\right\} + \sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\omega_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) +$$

$$+\left[\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r f_{kr}(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]\nu(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))+$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r g_{kr}(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]\frac{d\nu(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}+$$

$$+\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\overline{\omega}_{kr}(x)+O(\varepsilon^{q+1}),$$

де $U_1(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))=\mathrm{Ai(t)}$, $U_2(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))=\mathrm{Bi(t)}$, $\varphi(x)=\left(\frac{3}{2}\int_0^x\sqrt{-x\tilde{a}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}$.

3.1.6 Приклад 2

Розглянемо систему сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) у вигляді

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon)-A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon)=4x+2,$$

де $A(x,\varepsilon)$ має таку структуру

$$A(x,\varepsilon)=A_0(x)+\varepsilon A_1,$$

а $A_0(x)$ і A_1 матриці вигляду

$$A_0(x)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\-(4x+4)&4x&0\end{pmatrix},\quad A_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

де $\varepsilon\to 0$, $x\in[-1,0]$, $Y(x,\varepsilon)\equiv Y_k(x,\varepsilon)=colomn(y_1(x,\varepsilon),y_2(x,\varepsilon),y_3(x,\varepsilon))$ - шукана вектор-функція, $H(x)=colomn(0,0,h(x))$ – задана вектор-функція.

Тоді дана система відповідає сингулярно збуреному диференціальному рівнянню третього порядку вигляду:

$$\varepsilon y'''(x,\varepsilon)-4x\cdot y'(x,\varepsilon)+(4x+4)\cdot y(x,\varepsilon)=4x+2,$$

Дослідимо систему (2.4) за умов:

1. $\tilde{a}(x),\ b(x)\in C^\infty[-1;0]$,
2. $a(x)=x\tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x)=-4,\ b(x)=4x+4,\qquad h(x)=4x+2.$

Вироджене рівняння, що відповідає системі (2.4) має вигляд

$$-4x\omega'(x) + (4x+4)\omega(x) = 0.$$

Характеристичне рівняння для системи (2.4) відповідно запишеться таким способом:

$$|A(x,0) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -(4x+4) & 4x & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4x\lambda = 0.$$

Корені характеристичного рівняння: $\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = \pm 2\sqrt{x}$. Дійсні корені характеристичного рівняння $\lambda_{2,3}$ свідчать про те, що $x = 0$ в даному випадку буде *нестабільна точка звороту* [13].

Функцію $\varphi(x)$ визначимо як розв'язок задачі

$$\varphi^2(x)\varphi'^4(x) - 8x\varphi(x)\varphi'^2(x) + 16x^2 = 0,$$

$$(\varphi(x)\varphi'^2(x) - 4x)^2 = 0,$$

$$\varphi(x)\varphi'^2(x) = 4x.$$

Розв'язком задачі при умові $\varphi(0) = 0$ буде функція

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{4}x.$$

Тоді похідна функції $\varphi'(x)$ запишеться так

$$\varphi'(x) = \sqrt[3]{4}.$$

При такому визначенні функції $\varphi(x)$ розв'язок однорідної задачі (2.4) запишеться як

$$Z_{k0}(x) = colomn\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\beta_{i30}(x), -\sqrt[3]{16}x\beta_{i20}(x), 0, \beta_{i20}(x), \beta_{i30}(x)\right),$$

де $\beta_{0ik}(x), i=1;2, i=\overline{1;3}$ – до певного часу довільні, досить гладкі функції при $x \in [-1;0]$.

Третій формальний розв'язок

$$\equiv colomn\left(\omega_{01}^{0}\cdot exp\left\{\int\frac{4x+4}{-4x}dx\right\}, \omega_{01}^{0}\cdot\frac{4x+4}{-4x}\cdot exp\left\{\int\frac{4x+4}{-4x}dx\right\}, 0\right),$$

Частинний розв'язок визначається через функції $g_{2(-2)}(x)$, $g_{3(-2)}(x)$ та $\omega_k(x)$ з рівнянь

$$g_{2(-2)}(x) = g_{2(-2)}^{0}\cdot x^{-b2(x)}, \tag{3.48}$$

де $b2(x) = \frac{2+x}{-2x}$ та

$$g_{3(-2)}(x) = g_{3(-2)}^{0}\cdot x^{-b3(x)}, \tag{3.49}$$

де $b3(x) = \frac{-x-1}{2x}$.

Зупинимось більш детально на знаходженні компонент функції $\omega_k(x)$.

При $r=0$ отримаємо систему вигляду

$$\begin{cases} -\bar{\omega_{03}}(x) = -\sqrt[3]{4}\pi^{-1}g_{2(-2)}^{0}\cdot x^{-b2(x)}, \\ (4x+4)\bar{\omega_{01}}(x) - 4x\bar{\omega_{02}}(x) = 4x+2-\varphi'(x)\pi^{-1}g_{3(-2)}^{0}\cdot x^{-b3(x)}, \end{cases} \tag{3.50}$$

де $b2(x) = \frac{2+x}{-2x}$ та $b3(x) = \frac{-x-1}{2x}$.

При $r=1$ отримаємо систему вигляду

$$\begin{cases} \bar{\omega_{01}'}(x) = -\sqrt[3]{4}\pi^{-1}g_{11} + \bar{\omega_{02}}(x), \\ -\bar{\omega_{31}}(x) = -\sqrt[3]{4}\pi^{-1}g_{2(-1)}, \\ (4x+4)\bar{\omega_{11}}(x) - 4x\bar{\omega_{21}}(x) = -\sqrt[3]{4}\pi^{-1}g_{3(-1)}, \end{cases} \tag{3.51}$$

$$\bar{\omega}(x,\varepsilon) \equiv \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\bar{\omega}_r(x) \equiv colomn\left(\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\bar{\omega}_{1r}(x), \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\bar{\omega}_{2r}(x), \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\bar{\omega}_{3r}(x)\right), \tag{3.52}$$

$$\tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=-2}^{\infty}\mu^r\left[f_{kr}(x)\psi(t) + \mu g_{kr}(x)\psi'(t)\right] + \sum_{r=0}^{\infty}\mu^r\bar{\omega}_{kr}(x), \tag{3.53}$$

де $f_{kr}(x)$ і $g_{kr}(x)$ визначаються згідно алгоритму за формулами (3.48), (3.49), а $\bar{\omega}_{kr}(x)$ з (2.70).

Висновок 10. Для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) для якої виконуються умови:

1. $\tilde{a}(x),\ b(x), H(x) \in C^{\infty}[-1;0]$,
2. $a(x) = x\tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x) = -4,\ b(x) = 4x+4, \qquad h(x) = \sqrt[3]{4}\sqrt{\frac{1}{e^x \cdot x}}$,

при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ загальний розв'язок $\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)$ можна записати таким способом:

$$\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon) = \tilde{Y}_{hom.}(x,t,\varepsilon) + \tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon),$$

де $\tilde{Y}^{hom.}(x,t,\varepsilon)$ – формальний розв'язок однорідного рівняння, представлений у вигляді асимптотичного ряду (2.85), $\tilde{Y}^{part.}(x,t,\varepsilon)$ – частинний розв'язок представлений у вигляді асимптотичного ряду (2.98).

Тоді асимптотика загального розв'язку системи при $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}x$ (2.4) запишеться у вигляді ряду

$$Y(x,\varepsilon) \cong \tilde{Y}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{2} \left\{ \left[\sum_{r=0}^{q} \varepsilon^0 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{x}} \\ -\frac{-4x}{\sqrt[3]{4}} \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}} \end{pmatrix} + \varepsilon^1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{x}} \\ -\frac{-4x}{\sqrt[3]{4}} \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}} + \end{pmatrix} \right.\right. \tag{3.54}$$

$$\left. + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{x}} \\ -\frac{-4x}{\sqrt[3]{4}} \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}} \end{pmatrix} + O(\varepsilon^{q+1}) \right] U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}x) +$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{3}} \left[\sum_{r=0}^{q} \varepsilon^0 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}} \\ \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{x}} \end{pmatrix} + \varepsilon^1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}} \\ \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{x}} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}} \\ \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{x}} \end{pmatrix} + O(\varepsilon^{q+1}) \right] \times$$

$$\left. \times \frac{dU_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}x)} \right\} + \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^0 \begin{pmatrix} \omega_{10}^0 \cdot x \\ \frac{4x+4}{4x}\omega_{10}^0 \cdot x \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^1 \begin{pmatrix} \omega_{11}^0 \cdot x \\ \frac{4x+4}{4x}\omega_{11}^0 \cdot x \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \omega_{12}^0 \cdot x \\ \frac{4x+4}{4x}\omega_{12}^0 \cdot x \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\varepsilon^3 \begin{pmatrix} \omega_{13}^0 \cdot x \\ \frac{4x+4}{4x}\omega_{13}^0 \cdot x \\ \frac{(x+1)^2}{x^2} - \omega_{13}^0 \cdot x \end{pmatrix} + O(\varepsilon^{q+1}).$$

3.2 Нестабільна диференціальна точка звороту з коефіцієнтами матриці $\tilde{a}(x) < 0$ і $b(x) < 0$

В цьому розділі розглянемо випадок, коли обидва коефіцієнти системи мають від'ємні значення.

3.2.1 Постановка задачі

Побудова рівномірної асимптотики розв'язку з від'ємними коефіцієнтами матриці не викликає особливих труднощів. Як і в порередньому розділі будемо використовувати модельний оператор Ейрі

$$U''(t) - tU(t) = 0. \tag{3.55}$$

для побудови рівномірної асимптотики розв'язку.

Нагадаємо, що істотно особлива функція $\nu(t)$ має таке інтегральне зображення:

$$\nu(t) = -\pi^{-1} \int_0^\infty sin(\frac{s^3}{3} + st)ds. \tag{3.56}$$

Інтеграл у правій частині (3.56) є величина порядку $O(t^{-4})$, коли $t \to +\infty$, в результаті отримаємо наступну асимптотичну рівність

$$\nu(t) = -\pi^{-1}t^{-1}[1 + O(t^{-3})]. \tag{3.57}$$

Похідна цієї функції запишеться у вигляді

$$\nu'(t) = -\pi^{-1} \int_0^\infty scos(\frac{1}{3}s^3 + st)ds \tag{3.58}$$

За аналогією з поперднім можна показать, що для правої частини (3.58), коли $t \to +\infty$ має місце така асимптотична рівність:

$$\nu'(t) = \frac{1}{\pi t^2}[1 + O(t^{-5})] \tag{3.59}$$

Розглянемо систему сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4). Нагадаємо, що система має вигляд

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = H(x),$$

де

$$A(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1(x),$$

– відома матриця, де

$$\mathbf{A_0}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b(x) & a(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\varepsilon \to 0$, $x \in [-l, 0]$, $Y(x,\varepsilon) \equiv Y_k(x,\varepsilon) = colomn(y_1(x,\varepsilon), y_2(x,\varepsilon), y_3(x,\varepsilon))$ - шукана вектор-функція, $H(x) = colomn(0, 0, h(x))$ – задана вектор-функція.

Векторне рівняння (2.4) будемо досліджувати за таких умов:

C 2. $A_0(x)$, $H(x) \in C^\infty[-l, 0]$.

C 6. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) < 0$, $\quad b(x) < 0$.

З умов **C 2** і **C 6** бачимо, що в цьому випадку, як і в попередньому, точка $x = 0$ є нестабільною точкою звороту для системи (2.4). Розв'язки виродженого рівняння та його похідні не є гладкими функціями як і у другому випадку, тобто коли коефіцієнти рівняння були $\tilde{a}(x) > 0$, $\quad b(x) > 0$. Тому їх не можна використати для побудови третього незалежного розв'язку системи однорідної системи (2.4). Спираючись на проведені дослідження попередніх трьох випадків, даний випадок вже не вносить принципових труднощів.

Характеристичне рівняння, що відповідає ССЗДР (2.4) має вигляд:

$$|A(x,0) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ b(x) & a(x) & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + x\tilde{a}(x)\lambda = 0.$$

Оскільки досліджуємо нестабільну точку звороту $x = 0$, то корені характеристичного рівняння є дійсними числами, тобто

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{x\tilde{a}(x)}.$$

Вироджене рівняння для системи (2.4) в цьому випадку буде мати вигляд:

$$-x\tilde{a}(x)y'(x,\varepsilon) - b(x)y(x,\varepsilon) = h(x), \tag{3.60}$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $\tilde{a}(x), b(x), h(x) \in C^{\infty}[0;l]$.

3.2.2 Простір безрезонансних розв'язків

Виділимо таку множину функцій, в якій розширена задача

$$\tilde{L}_{\varepsilon}\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon) \equiv \mu\varphi'\frac{\partial\tilde{y}(x,t,\varepsilon)}{\partial t} + \mu^3\frac{\partial\tilde{y}(x,t,\varepsilon)}{\partial x} - A(x,\varepsilon)\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon) = H(x)$$

буде регулярно збуреною відносно малого параметра. Для цього розглянемо множини (підпростори) функцій

$$\begin{gathered} D_{1k} = \alpha_{1k}(x,\varepsilon)U_1(t) + \varepsilon^{\gamma}\beta_{1k}(x,\varepsilon)U_1'(t), \\ D_{2k} = \alpha_{2k}(x,\varepsilon)U_2(t) + \varepsilon^{\gamma}\beta_{2k}(x,\varepsilon)U_2'(t), \\ D_{3k} = f_k(x,\varepsilon)\nu(t) + \varepsilon^{\gamma}g_k(x,\varepsilon)\nu'(t), \\ D_{4k} = \overline{\omega}_k(x,\varepsilon), \end{gathered} \tag{3.61}$$

де $U_i(t), (i = \overline{1,2})$ – функції Ейрі-Лангера [6].

Підпростори D_{1k} та D_{2k} містять розв'язки однорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь, в структурі яких містяться істотно особливі функції $U_i(t)$. Підпростір D_{3k} містить розв'язки неоднорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь, в структурі яких міститься істотно особлива функція $\nu(t)$ та її похідна [6]. Підпростір D_{4k} містить розв'язки однорідної та неоднорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь, які відповідають кореню характеристичного рівняння $\lambda_1 = 0$ і не містить істотно особливих функцій.

В даному випадку точка звороту буде нестабільною, як і в попередньому випадку, але розв'язки виродженого рівняння не будуть достатньо гладкими у точці $x = 0$. Якщо $b(x) < 0$, в (3.60) одержимо, що $\frac{b(0)}{\tilde{a}(0)} = \rho > 0$ [9]. Тому повторити логіку і використати міркування, які були описані у випадку умов **C 2** та **C 5** ми не можемо, оскільки розв'язок виродженого диференціального рівняння (3.60) та його похідні не є достатньо гладкими в точці $x = 0$. Це пояснюється тим, що функції $\omega_{kr}(x)$ не можна розвинути в ряд за степенями малого параметра таким чином, щоб коефіцієнти цих розвинень були неперервними функціями на всьому відрізку $[-l;0]$. Тому він не може бути використаний для побудови третього лінійно незалежного розв'язку однорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4). Отже, структура розв'язку задачі (2.4) з такого типу точкою звороту не зводиться до тих структур розв'язків тих задач, які були розглянуті в попередніх випадках. В цьому полягає головна особливість задачі (2.4) для випадку з від'ємнити коефіцієнтами матриці. Труднощі, які виникають при побудові третього формального розв'язку опишемо нижче.

3.2.3 Побудова формальних розв'язків однорідної системи

Формально розв'язок однорідної системи (2.4) можна представити у вигляді рядів (3.61) :

$$Y_{ik}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ikr}(x) U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ikr}(x, \varepsilon) U_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))] + \\ + \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\nu(t) + \mu g_{kr}(x)\nu'(t) + \bar{\omega}_{kr}(x) \right]. \tag{3.62}$$

Для визначення компонент вектор-функцій

$$f_{kr}(x) = colomn(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x)),$$

$$g_{kr}(x) = colomn(g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x))$$

підставимо ряди $f_{kr}(x)$ та $g_{kr}(x)$ в регуляризовану систему рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x,\varepsilon)\varphi'(x) = -\mu^3[g_1'(x,\varepsilon) - g_2(x,\varepsilon)], \\ f_2(x,\varepsilon)\varphi'(x) - g_3(x,\varepsilon) = -\mu^3 g_2'(x,\varepsilon), \\ f_3(x,\varepsilon)\varphi'(x) - b(x)g_{i1}(x,\varepsilon) - a(x)g_2(x,\varepsilon) = -\mu^3 g_3'(x,\varepsilon), \\ \varphi(x)\varphi'(x)g_1(x,\varepsilon) = -\mu^3[f_1'(x,\varepsilon) - f_2(x,\varepsilon)], \\ \varphi(x)\varphi'(x)g_2(x,\varepsilon) - f_3(x,\varepsilon) = -\mu^3 f_2'(x,\varepsilon), \\ \varphi(x)\varphi'(x)g_3(x,\varepsilon) + b(x)f_1(x,\varepsilon) + a(x)f_2(x,\varepsilon) = -\mu^3 \alpha_{i3}'(x,\varepsilon), \end{cases}$$

Будемо мати

$$\begin{cases} \varphi'(x)[\mu^{-2}f_{1(-2)}(x)+\mu^{-1}f_{1(-1)}(x)+\mu^0 f_{1(0)}(x)+...]=-\mu^3[\mu^{-2}g'_{1(-2)}(x)+\\ +\mu^{-1}g'_{1(-1)}(x)+\mu^0 g'_{10}(x)+...]+\mu^3[\mu^{-2}g_{2(-2)}(x)+\\ +\mu^{-1}g_{2(-1)}(x)+\mu^0 g_{2(0)}(x)+...],\\ \varphi'(x)[\mu^{-2}f_{2(-2)}(x)+\mu^{-1}f_{2(-1)}(x)+\mu^0 f_{2(0)}(x)+...]-\\ -[\mu^{-2}g_{3(-2)}(x)+\mu^{-1}g_{3(-1)}(x)+\mu^0 g_{3(0)}(x)+...]=\\ =-\mu^3[\mu^{-2}g'_{2(-2)}(x)+\mu^{-1}g'_{2(-1)}(x)+...],\\ \varphi'(x)[\mu^{-2}f_{3(-2)}(x)+\mu^{-1}f_{3(-1)}(x)+\mu^0 f_{3(0)}(x)+...]+\\ +a(x)[\mu^{-2}g_{1(-2)}(x)+\mu^{-1}g_{1(-1)}(x)+\mu^0 g_{1(0)}(x)+...]=\\ +b(x)[\mu^{-2}g_{2(-2)}(x)+\mu^{-1}g_{2(-1)}(x)+\mu^0 g_{2(0)}(x)+...]=\\ -\mu^3[\mu^{-2}g'_{3(-2)}(x)+\mu^{-1}g'_{3(-1)}(x)+...],\\ \varphi(x)\varphi'(x)[\mu^{-2}g_{1(-2)}(x)+\mu^{-1}g_{1(-1)}(x)+\mu^0 g_{1(0)}(x)+...]=\\ =-\mu^3[\mu^{-2}f_{1(-2)}(x)+\mu^{-1}f_{1(-1)}(x)+\\ +\mu^0 f_{10}(x)+...]+\mu^3[\mu^{-2}f'_{2(-2)}(x)+\mu^{-1}f'_{2(-1)}(x)+\mu^0 f'_{2(0)}(x)+...],\\ \varphi(x)\varphi'(x)[\mu^{-2}g_{2(-2)}(x)+\mu^{-1}g_{2(-1)}(x)+\mu^0 g_{2(0)}(x)+...]+\\ +[\mu^{-2}f_{3(-2)}(x)+\mu^{-1}f_{3(-1)}(x)+\mu^0 f_{3(0)}(x)+...]=\\ =-\mu^3[\mu^{-2}f'_{2(-2)}(x)+\mu^{-1}f'_{2(-1)}(x)+...],\\ \varphi(x)\varphi'(x)[\mu^{-2}g_{3(-2)}(x)+\mu^{-1}g_{3(-1)}(x)+\mu^0 g_{3(0)}(x)+...]+\\ +a(x)[\mu^{-2}f_{1(-2)}(x)+\mu^{-1}f_{1(-1)}(x)+\mu^0 f_{1(0)}(x)+...]=\\ +b(x)[\mu^{-2}f_{2(-2)}(x)+\mu^{-1}f_{2(-1)}(x)+\mu^0 f_{2(0)}(x)+...]=-\mu^3[\mu^{-2}f'_{3(-2)}(x)+\\ +\mu^{-1}f'_{3(-1)}(x)+...], \end{cases} \tag{3.63}$$

З системи (3.63)одержимо наступні системи рекурентних рівнянь:

$$\begin{aligned} \Phi(x)\cdot Z_0^{part.}(x)&=0, \qquad r=-2;-1;0,\\ \Phi(x)\cdot Z_r^{part.}(x)&=-Z_{r-3}^{part.}(x), \qquad r\geq 1. \end{aligned} \tag{3.64}$$

В одержаних рекурсіях (3.64) $\Phi(x)$– матриця, а

$$Z_r^{part.}(x)=colomn(f_{1r}(x),f_{2r}(x),f_{3r}(x),g_{1r}(x),g_{2r}(x),g_{3r}(x))$$

невідома вектор-функція.

Нагадаємо, щоб побудувати третій формальний розв'язок однорідної системи (2.4), необхідно будувати тільки частинні розв'язки цієї системи. Розглянемо рівняння

$$\mu^3\omega_k'(x,\varepsilon)-A(x,\varepsilon)\omega_k(x,\varepsilon)=H(x)-\mu^2\varphi'(x)\pi^{-1}g_k(x,\varepsilon). \tag{3.65}$$

Подамо рівняння (3.65) у вигляді системи

$$\begin{cases}\mu^3\bar\omega_1'(x)=-\mu^2\varphi'(x)g_1(x)+\mu^3\bar\omega_2(x),\\ \mu^3\bar\omega_2'(x)-\bar\omega_3(x)=-\mu^2\varphi'(x)g_2(x),\\ \mu^3\bar\omega_3'(x)-b(x)\bar\omega_1(x)-a(x)\bar\omega_2(x)=h(x)-\mu^2\varphi'(x)g_3(x)\end{cases} \tag{3.66}$$

Для визначення компонент вектор-функцій $\omega_k(x)$ підставимо ряд

$$\bar\omega_k(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\omega_{kr}(x) \tag{3.67}$$

у систему (3.66). В результаті одержимо систему вигляду

$$\begin{cases}\mu[\mu^0\bar\omega_{10}'(x)+\mu^1\bar\omega_{11}'(x)+\mu^2\bar\omega_{12}'(x)+...]=\\ =-\varphi'(x)[\mu^{-2}g_{1(-2)}(x)+\mu^{-1}g_{1(-1)}(x)+\\ +\mu^0g_{10}(x)+...]+\mu[\mu^0\bar\omega_{20}(x)+\mu^1\bar\omega_{21}(x)+\mu^2\bar\omega_{22}(x)+...],\\ \mu[\mu^0\bar\omega_{20}'(x)+\mu^1\bar\omega_{21}'(x)+\mu^2\bar\omega_{22}'(x)+...]-\\ -[\mu^0\bar\omega_{30}(x)+\mu^1\omega_{31}(x)+\mu^2\bar\omega_{32}(x)+...]=\\ =-\mu^2\varphi'(x)[\mu^{-2}g_{2(-2)}(x)+\mu^{-1}g_{2(-1)}(x)+\mu^0g_{20}(x)+...],\\ \mu[\mu^0\bar\omega_{30}'(x)+\mu^1\bar\omega_{31}'(x)+\mu^2\omega_{32}'(x)+...]-b(x)[\mu^0\bar\omega_{10}(x)+\\ +\mu^1\bar\omega_{11}(x)+\mu^2\bar\omega_{12}(x)+...]+\\ -a(x)[\mu^0\bar\omega_{20}(x)+\mu^1\bar\omega_{21}(x)+\mu^2\bar\omega_{22}(x)+...]=h(x)-\mu^2\varphi'(x)[\mu^{-2}g_{3(-2)}(x)+\\ +\mu^{-1}g_{3(-1)}(x)+\mu^0g_{30}(x)+...]\end{cases} \tag{3.68}$$

Спочатку розглянемо рекурентні системи (3.64).

Запишемо систему рекурентних рівнянь (3.64) при $r=-2$

$$\begin{cases}\varphi'(x)f_{1(-2)}(x,\varepsilon)=0,\\ \varphi'(x)f_{2(-2)}(x,\varepsilon)-g_{i30}(x,\varepsilon)=0,\\ \varphi'(x)f_{3(-2)}(x,\varepsilon)-b(x)g_{1(-2)}(x,\varepsilon)-a(x)g_{2(-2)}(x,\varepsilon)=0,\\ \varphi(x)\varphi'(x)g_{1(-2)}(x,\varepsilon)=\mu^3[f_{1(-2)}'(x,\varepsilon)-f_{2(-2)}(x,\varepsilon)],\\ \varphi(x)\varphi'(x)g_{2(-2)}(x,\varepsilon)+f_{3(-2)}(x,\varepsilon)=0,\\ \varphi(x)\varphi'(x)g_{3(-2)}(x,\varepsilon)+b(x)f_{1(-2)}(x,\varepsilon)+a(x)f_{2(-2)}(x,\varepsilon)=0.\end{cases}$$

Оскільки $\det \Phi(x) \equiv 0$, то існує нетривіальний розв'язок системи $\Phi(x) \cdot Z_{kr} = 0$, $r = \overline{-2, 0}$ вигляду:

$$Z_{kr}(x) = colomn\left(0, \frac{1}{\varphi'(x)} g_{2r}(x), \varphi\varphi'(x) g_{3r}(x), 0, g_{2r}(x), g_{3r}(x)\right), \qquad (3.69)$$

де $g_{kr}(x), k = \overline{1;3}, r = \overline{-2;0}$ – до певного часу довільні, достатньо гладкі функції при $x \in [-l; 0]$.

Таким способом, отримавши розв'язок системи $\Phi(x) \cdot Z_{kr} = 0$, $r = \overline{-2;0}$, перейдемо до розв'язків неоднорідних систем (3.64) $\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{k(r-3)}(x)$, $r \geq 1$. Спочатку розглянемо ці системи при $r = 1$. З урахуванням розв'язку (3.69), отримаємо системи

$$\begin{cases} \varphi'(x) f_{11}(x) = g_{2(-2)}(x) - g'_{1(-2)}(x) \equiv g_{2(-2)}(x), \\ \varphi'(x) f_{21}(x) - g_{31}(x) = -g'_{2(-2)}(x), \\ \varphi'(x) f_{31}(x) - b(x) g_{11}(x) - a(x) g_{21}(x) = -g'_{3(-2)}(x), \end{cases} \qquad (3.70)$$

та

$$\begin{cases} \varphi(x)\varphi'(x) g_{11}(x) = -f'_{1(-2)}(x) + f_{2(-2)}(x) \equiv f_{i2(-2)}(x) \equiv [\varphi'(x)]^{-1} g_{3(-2)}(x), \\ \varphi(x)\varphi'(x) g_{21}(x) + f_{31}(x) = f'_{i2(-2)}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1} g_{i3(-2)}(x)), \\ \varphi(x)\varphi'(x) g_{31}(x) - b(x) f_{13}(x) - a(x) f_{21}(x) = f'_{3(-2)}(x) \equiv \frac{d}{dx}[-\varphi(x)\varphi'(x) g_{2(-2)}(x)]. \end{cases} \qquad (3.71)$$

З перших рівнянь систем (3.70) та (3.71) визначимо функції

$$f_{11}(x) = [\varphi'(x)]^{-1} g_{2(-2)}(x),$$

$$g_{11}(x) = [\varphi'(x)]^{-2} [\varphi(x)]^{-1} g_{3(-2)}(x).$$

Тоді системи (3.70) і (3.71) наберуть вигляду

$$\begin{cases} \varphi'(x) f_{21}(x) - g_{31}(x) = -g'_{2(-2)}(x), \\ \varphi'(x) f_{31}(x) - a(x) g_{21}(x) = -g'_{3(-2)}(x) + b(x) g_{13}(x), \end{cases} \qquad (3.72)$$

та

$$\begin{cases} \varphi(x)\varphi'(x) g_{21}(x) + f_{31}(x) = f'_{2(-2)}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1} g_{3(-2)}(x)), \\ \varphi(x)\varphi'(x) g_{33}(x) - a(x) f_{21}(x) = \frac{d}{dx}[-\varphi(x)\varphi'(x) g_{2(-2)}(x)] + b(x) f_{11}(x). \end{cases} \qquad (3.73)$$

З систем (3.72) та (3.73), слідуя міркуванням попереднього пункту, одержимо диференціальні рівняння виду

$$2a(x)g'_{2(-2)}(x) + \Big[-b(x) - \varphi'(x)(\varphi(x)\varphi'(x))'\Big]g_{2(-2)}(x) = 0, \tag{3.74}$$

та

$$-2g'_{3(-2)}(x) + \Big[\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} - \frac{b(x)}{a(x)}\Big]g_{3(-2)}(x) = 0. \tag{3.75}$$

У рівнянні (3.74) введемо позначення

$$b_2(x) = -b(x) - \varphi'^3(x) - \varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x).$$

Нагадаємо, що

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{-a(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\varphi'(x) = \left(\int_0^x \sqrt{-a(x)}dx\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{-a(x)}.$$

Відповідно в рівнянні (3.75) також введемо позначення

$$b_3(x) = -b(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x).$$

Тоді рівняння (3.74) та (3.75) запишемо у вигляді

$$g'_{2(-2)}(x) - \frac{1}{x}\Big[\frac{b_2(x)}{2\tilde{a}(x)}\Big]g_{2(-2)}(x) = 0, \tag{3.76}$$

та

$$g'_{3(-2)}(x) - \frac{1}{x}\Big[\frac{b_3(x)}{2\tilde{a}(x)}\Big]g_{3(-2)}(x) = 0. \tag{3.77}$$

Розв'яжемо (3.76).

$$g_{2(-2)}(x) = \int_0^x \frac{b_2(x)}{x} g_{2(-2)}(x).$$

Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена

$$\frac{b_2(x)}{x\tilde{a}(x)} = \frac{b_2(0)}{x\tilde{a}(0)} + x\cdot\frac{b_2'(0)}{\tilde{a}'(0)} + x^2\cdot\frac{b_2''(0)}{\tilde{a}''(0)} + \ldots.$$

Тоді

$$\int \frac{b_2(x)}{x\tilde{a}(x)} = \int \frac{b_2(0)}{x\tilde{a}(0)} + \int R_2^{\tilde{part.}}(x),$$

де

$$R_2^{\tilde{part.}}(x) = x \cdot \frac{b_2'(0)}{\tilde{a}'(0)} + x^2 \cdot \frac{b''(0)}{\tilde{a}''(0)} + \ldots,$$

звідки

$$\int \frac{b_2(x)}{x\tilde{a}(x)} = \ln|x|^{\frac{b_2(0)}{\tilde{a}(0)}} + \int R_2^{\tilde{part.}}(x).$$

Тоді

$$g_{2(-2)}(x) = g^0_{2(-2)} \cdot exp\{\int \frac{b_2(x)}{x}\}. \tag{3.78}$$

З (3.77) одержимо

$$g'_{3(-2)}(x) - \frac{b_3(x)}{x\tilde{a}(x)} g_{3(-2)}(x) = 0. \tag{3.79}$$

$$g_{3(-2)}(x) = \int_0^x \frac{b_3(x)}{x\tilde{a}(x)} g_{3(-2)}(x) = 0.$$

Як і для вектор-функції $g_{2(-2)}(x)$ розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена

$$\frac{b_3(x)}{x\tilde{a}(x)} = \frac{b_3(0)}{x\tilde{a}(0)} + x \cdot \frac{b_3'(0)}{\tilde{a}'(0)} + x^2 \cdot \frac{b_3''(0)}{\tilde{a}''(0)} + \ldots.$$

Тоді

$$\int \frac{b_3(x)}{x\tilde{a}(x)} = \int \frac{b_3(0)}{x\tilde{a}(0)} + \int R_3^{\tilde{part.}}(x),$$

де

$$R_3^{\tilde{part.}}(x) = x \cdot \frac{b_3'(0)}{\tilde{a}'(0)} + x^2 \cdot \frac{b''(0)}{\tilde{a}''(0)} + \ldots,$$

звідки

$$\int \frac{b_3(x)}{x\tilde{a}(x)} = \ln|x|^{\frac{b_3(0)}{\tilde{a}(0)}} + \int R_3^{\tilde{part.}}(x).$$

Отже, розв'язок для (3.79) запишемо у вигляді

$$g_{3(-2)}(x) = g^0_{3(-2)} \cdot exp\{\int \frac{b_3(x)}{x}\}, \tag{3.80}$$

$$\bar{Z}_{k1}^{part.}(x) = colomn\left(\bar{z}_{k1}, \bar{z}_{k2}, \bar{z}_{k3}, \bar{z}_{k4}, \bar{z}_{k5}, \bar{z}_{k6}\right), \qquad (3.81)$$

де

$$\bar{z}_{k1} = \frac{g^0_{2(-2)}(x) \cdot x^{\rho_2}}{\varphi'(x)},$$

$$\bar{z}_{k2} = \frac{-g^0_{2(-2)}(x) \cdot x^{\rho_2} + g_{31}(x)}{\varphi'(x)},$$

$$\bar{z}_{k3} = \frac{-g^0_{2(-2)}(x) \cdot x^{\rho_2} + \frac{b(x)g^0_{3(-2)}(x)\cdot x^{\rho_3}}{a(x)} - a(x)g_{21}(x)}{\varphi'(x)},$$

$$\bar{z}_{k4} = \frac{-g^0_{3(-2)}(x) \cdot x^{\rho_3}}{-a(x)},$$

$$\bar{z}_{k5} = g_{21}(x),$$

$$\bar{z}_{k6} = g_{31}(x).$$

де $g_{k1}, k = \overline{2;3}$ – до певного часу довільні, достатньо гладкі функції $x \in [-l; 0]$.

Введемо нові позначення

$$\frac{b_2(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{b(0) + \varphi'^3(0) - \varphi(0)\varphi'(0)\varphi''(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{-b(0) - \varphi'^3(0)}{-2\tilde{a}(0)} = \frac{1}{2}[\rho - 1] = \rho_2$$

і

$$\frac{b_3(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{b(0) + \varphi(0)\varphi'(0)\varphi''(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{-b(0)}{-2\tilde{a}(0)} = \frac{1}{2}\rho = \rho_3$$

.

З метою забезпечення побудови рівномірної асимптотики розв'язку рівняння (2.4) на всьому відрізку відносно малого параметра необхідно, щоб виконувалась вимога $\rho \ \epsilon \ N$. Оскільки $\frac{b(0)}{\tilde{a}(0)} = \rho$ має бути натуральним числом, то розглянемо такі випадки.

Випадок 1. Нехай $\rho = 2n$ - парне число, $n \epsilon N$. Тоді, використовуючи вищезазначені позначення одержимо, що $\rho_2 = n - \frac{1}{2}$ не є натуральним числом, а $\rho_3 = n$ - натуральне число або $\rho_3 = 0$ при $\rho = 0$.

Гладкість розв'язків (3.78) та (3.80) рівнянь (3.76) та (3.77) на всьому відрізку, включаючи і точку звороту, істотньо залежить від знаків виразів $\frac{b_j(0)}{2\tilde{a}(0)}$, $j = 1, 2$. Тому дослідимо підінтегральні функції у (3.78) та (3.80). Враховуючи розклад підінтегральних функцій в ряд Маклорена отримаємо рівності

$$\frac{b_j(x)}{x\tilde{a}(x)} = \frac{\rho}{x} + \tilde{R}_j^{part.}(x),$$

де $\tilde{R}_j^{part.}(x)$–аналітична функція в околі точки звороту.

Якщо $\rho_2 = n - \frac{1}{2}$ - достатньо велике число, то для побудови асимптотики лінійно незалежого розв'язку системи (2.4) з визначеною тоністю відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ можна використати розв'язки (3.64). Оскільки в цьому випадку $\rho_3 = \frac{1}{2}\rho$ є цілим невід'ємним числом, то використовуючи загальний розв'язки рівнянь виду (3.77) та частинні розв'язки рівнянь виду (3.76) ми побудуємо асимптотику лінійно незалежного розв'язку системи (2.4) з довільною точністю відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ на всьому відрізку $[-l, 0]$, включаючи і точку звороту.

Випадок 2. Нехай $\rho = 2n - 1$ - непарне число $n \epsilon N$. Тоді $\rho_2 = n - 1$ - ціле невід'ємне число, а $\rho_3 = n - \frac{1}{2}$ - не є натуральним числом. В цьому випадку для побудови асимптотики лінійно незалежого розв'язку системи (2.4) з визначеною тоністю відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ будемо використовувати загальний розв'язки рівнянь виду (3.76) та частинні розв'язки рівнянь виду (3.77).

Будемо вважати $\rho = 2n$, тобто $\rho_3 = n$ - натуральне число. Тоді згідно Випадку 1 частинними і достатньо гладкими розв'язками рівнянь (3.65) і (3.77) є $\omega_{10}(x) \equiv g_{2(-2)}(x) \equiv 0$, а

$$g_{3(-2)}(x) = g^0_{3(-2)} \cdot exp\{\int \frac{b_3(x)}{2a(x)}\} \equiv g^0_{3(-2)} x^{\rho_2} \tilde{g}(x), \qquad (3.82)$$

при $r = 0$, де $\tilde{g}(x)$ - достатньо гладка функція при $x \epsilon [-l, 0]$, за умови, що $\tilde{g}(0) \neq 0$.

Для побудови асимптотики розв'язку необхідно розглянути систему (3.63) при $r=4$. З урахуванням одержаних результатів, отримаємо системи

$$\begin{cases} \varphi'(x)f_{14}(x) = -g'_{11}(x) + g_{21}(x), \\ \varphi'(x)f_{24}(x) - g_{34}(x) = -g'_{21}(x), \\ \varphi'(x)f_{34}(x) + b(x)g_{14}(x) = -a(x)g_{24}(x) = -g'_{31}(x), \end{cases} \tag{3.83}$$

та

$$\begin{cases} \varphi(x)\varphi'(x)g_{14}(x) = -f'_{11}(x) - f_{21}(x), \\ \varphi(x)\varphi'(x)g_{24}(x) + f_{34}(x) = f'_{21}(x), \\ \varphi(x)\varphi'(x)g_{34}(x) - b(x)f_{14}(x) - a(x)f_{24}(x) = f'_{31}(x). \end{cases} \tag{3.84}$$

В системах (3.83) та (3.84) з першого і четвертого рівнянь визначимо $f_{14}(x)$ та $g_{14}(x)$.

$$f_{14} = \frac{-g'_{11}(x) + g_{21}(x)}{\varphi'(x)}.$$

$$g_{14} = \frac{-f'_{11}(x) + f_{21}(x)}{\varphi(x)\varphi'(x)}.$$

З систем (3.83) та (3.84) одержимо 2 системи.

$$\begin{cases} \varphi'(x)f_{24}(x) - g_{34}(x) = -g'_{21}(x), \\ a(x)f_{24}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)g_{34}(x) = f'_{31}(x) - b(x)f_{14}(x), \end{cases} \tag{3.85}$$

та

$$\begin{cases} \varphi'(x)f_{34}(x) - a(x)g_{24}(x)) = -g'_{31}(x) + b(x)g_{34}(x), \\ f_{34}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)g_{24}(x)(x) = f'_{21}(x). \end{cases} \tag{3.86}$$

Дослідивши праві частини рангів матриць (3.85) та (3.86), запишемо умови за яких існують розв'язки цих систем

$$g_{21}(x) = \int Q_1 dx, \tag{3.87}$$

де $Q_1 = \frac{f'_{31}(x) - b(x)f_{14}(x)}{\varphi(x)\varphi'(x) - a(x)}$

$$g_{31}(x) = \int Q_2 dx. \tag{3.88}$$

Запишемо систему (3.68) для $r = 0$.

$$\begin{cases} -\bar{\omega}_{30}(x) = \varphi'(x) \cdot g_{2(-2)}(x), \\ -b(x)\bar{\omega}_{10}(x) - a(x)\bar{\omega}_{20}(x) = h(x) - \varphi'(x) \cdot g_{3(-2)}(x). \end{cases} \tag{3.89}$$

Підставимо у (3.89) значення функцій $g_{2(-2)}(x)$ і $g_{3(-2)}(x)$ з (3.78) і (3.80). В результаті отримаємо систему

$$\begin{cases} -\bar{\omega}_{30}(x) = \varphi'(x) \cdot g^0_{2(-2)} \cdot x^{\rho_3}, \\ -b(x)\bar{\omega}_{10}(x) - a(x)\bar{\omega}_{20}(x) = h(x) - \varphi'(x) \cdot g^0_{3(-2)} \cdot x^{\rho_2}. \end{cases} \tag{3.90}$$

Дослідимо систему (3.68) при $r = 1$. Для існування достатньо гладкого розв'язку цієї системи на всьому відрізку, включаючи і точку звороту $x = 0$, припустимо, що $g^0_{(-1)} = g^0_0 = 0$. Тоді система (3.68) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \bar{\omega'}_{10}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{11}(x) + \bar{\omega}_{20}(x), \\ -\bar{\omega}_{31}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{2(-1)}(x), \\ -b(x)\bar{\omega}_{11}(x) - a(x)\bar{\omega}_{21}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{3(-1)}(x). \end{cases} \tag{3.91}$$

При $r = 2$ з (3.68) одержимо наступну систему

$$\begin{cases} \bar{\omega'}_{11}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{12}(x) + \bar{\omega}_{21}(x), \\ -\bar{\omega}_{32}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{20}(x), \\ -b(x)\bar{\omega}_{12}(x) - a(x)\bar{\omega}_{22}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{30}(x). \end{cases} \tag{3.92}$$

Продовжуючи дослідженння (3.68) при $r \geq 3$ одержимо систему

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{3r}(x) = \varphi'(x) \cdot g_{2(r-2)}(x) + \bar{\omega}'_{2(r-3)}(x), \\ -b(x)\bar{\omega}_{1r}(x) - a(x)\bar{\omega}_{2r}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{3(r-2)} - \bar{\omega'}_{3(r-3)}(x), \\ 0 = -\varphi'(x) \cdot g_{1(r-2)} + \bar{\omega}(x)_{2(r-3)} - \bar{\omega'}_{1(r-3)}. \end{cases} \tag{3.93}$$

Починаючи з $r \geq 3$, одержимо неоднорідні рівняння (3.64) відносно невідомих функцій $\omega_{kr}(x)$. Продовжуючи далі ітераційний процес, одержимо достатньо гладкі розв'язки на всьому відрізку $[-l, 0]$ функцій $\omega_{kr}(x)$, $f_{kr}(x)$, $g_{kr}(x)$. Таким чином буде визначений третій формальний розв'язок розширеного рівняння (2.7) у вигляді ряду

$$\tilde{Y_3}(x, t, \varepsilon) = \tag{3.94}$$

$$\sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\nu(t) + \mu g_{kr}(x)\nu'(t)\right] + \sum_{r=0}^{\infty} \bar{\omega}_{kr}(x).$$

Таким способом побудовано розв'язок системи (2.4) при $r = 0$.

Висновок 11. Розв'язок системи (3.68) при $r = 0$ має вигляд

$$\bar{\omega}_{10}(x) = \bar{\omega}_{10}^0 \cdot exp\{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\} + exp\{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\} \cdot \frac{h(x)}{a(x)} exp\{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\}.$$

$$\bar{\omega}_{20}(x) = \bar{\omega}'_{10} \cdot \varphi'(x) \cdot \frac{g^0_{3(-2)} x^{\rho_3}}{a(x)}.$$

$$\bar{\omega}_{30}(x) = \varphi'(x) \cdot g^0_{2(-2)} x^{\rho_2}.$$

Продовжуючи далі розв'язувати системи ітераційних рівнянь з (3.68) знайдемо всі компоненти $\omega_{kr}(x)$.

Теорема 3.2.1. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:*

C 2. $A_0(x),\ H(x) \in C^\infty[-l, 0]$.

C 6. $a(x) = x\tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x) < 0, \quad b(x) < 0$.

Тоді при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ можна побудувати формальний розв'язок $\tilde{Y}^{hom.}_{ik}(x, t, \varepsilon)$ відповідної однорідної системи у вигляді асимптотичного ряду

$$Y^{hom.}_k(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ikr}(x) U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ikr}(x, \varepsilon) U'_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))] +$$

$$+ \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\nu(t) + \mu g_{kr}(x)\nu'(t) + \bar{\omega}_{kr}(x)\right].$$

Зауважимо, що розв'язок однорідної системи (2.4) при $h(x) = 0$, задовольнятиме такий наслідок.

Наслідок 3.2.1. *Розв'язок системи (2.4) при $h(x) = 0$ можна представити у вигляді рядів*:

$$Y_{ik}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ikr}(x) U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ikr}(x, \varepsilon) U'_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))] +$$

$$+\sum_{r=-2}^{\infty}\mu^r\left[f_{kr}(x)\nu(t)+\mu g_{kr}(x)\nu'(t)\right]+\sum_{r=1}^{\infty}\mu^r\bar{\omega}_{kr}(x).$$

3.2.4 Побудова формальних розв'язків неоднорідної системи

Для побудови частинного розв'язку неоднорідної системи (2.4) скористаємось результатами досліджень з [10], де частинний розв'язок (2.1) побудований у вигляді ряду

$$Y_k^{part.}(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\tilde{y}_k(x). \tag{3.95}$$

Як і у випадку з додатними коефіцієнтами матриці, частинний розв'язок задачі (3.95).

Теорема 3.2.2. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:*

C 2. $A_0(x)$, $H(x)\in C^\infty[-l,0]$.

C 6. $a(x)=x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x)<0$, $\quad b(x)<0$.

Тоді формально частинний розв'язок неоднорідної системи (2.4) можна представити у вигляді ряду

$$Y_k^{part.}(x,\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x),\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\tilde{y}_k(x).$$

Тоді загальний розв'язок системи (2.4) запишеться у вигляді

$$Y_{ik}(x,\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x),\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r[\alpha_{ikr}(x)U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ikr}(x,\varepsilon)U_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))]+$$
$$+\sum_{r=-2}^{\infty}\mu^r\left[f_{kr}(x)\nu(t)+\mu g_{kr}(x)\nu'(t)+\bar{\omega}_{kr}(x)\right]+\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\tilde{y}_k(x). \tag{3.96}$$

За аналогією з попереднім, підсумуємо отримані результати даного розділу у вигляді теореми

Теорема 3.2.3. *Нехай система сингулярно збурених диференціальниз рів-*

нянь (2.4) задовольняє умови:

C 2. $A_0(x),\ H(x) \in C^{\infty}[-l, 0]$.

C 6. $a(x) = x\tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x) < 0, \quad b(x) < 0$.

Тоді для досить малих значень параметра $\varepsilon > 0$ у просторі безрезонансних розв'язків методом істотно особливих функцій можна побудувати єдиний асмптотичний ряд

$$Y_k(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ikr}(x) U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ikr}(x, \varepsilon) U_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))] +$$

$$+ \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\nu(t) + \mu g_{kr}(x)\nu'(t) + \bar{\omega}_{kr}(x) \right] + \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \tilde{y_k}(x),$$

де $U_1(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) = \mathrm{Ai(t)},\ U_2(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) = \mathrm{Bi(t)},\ \varphi(x) = \left(\frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{-x\tilde{a}(x)} dx \right)^{\frac{2}{3}}$.

3.3 Висновки до розділу 3

Розділ присвячений побудові рівномірної асимптотики розв'язку сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь, що містить нестабільну диференціальну точку звороту.

Визначено умови, за яких відбувається регуляризація сингулярно збуреної задачі. Також представлено побудову простору безрезонансних розв'язків.

Досліджено задачу про побудову асимптотичного розв'язку системи диференціальних рівнянь третього порядку (2.4) з нестабільною диференціальною точкою звороту у просторі безрезонансних розв'язків. Побудовано асимптотику розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з нестабільною диференціальної точкою звороту для двох випадків:

1) коефіцієнти матриці $\tilde{a}(x) < 0$, $b(x) > 0$;

2) коефіцієнти матриці $\tilde{a}(x) < 0$, $b(x) < 0$.

Для побудови рівномірної асимптотики розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) використано модифікований метод істотно особливих функцій. У випадку нестабільної диференціальної точки застосовано оператор Ейрі (1.80) для побудови асимптотики розв'язку задачі (2.4). Для побудови двох розв'язків однорідної задачі використано істотно особливі функції $U_1(t) = \mathrm{Ai}(t)$ та $U_2(t) = \mathrm{Bi}(t)$ та їх похідні, які є розв'язками однорідних диференціальних рівнянь Ейрі $U''(t) - tU(t) = 0$. Третій розв'язок однорідної задачі для випадку $\tilde{a}(x) < 0$, $b(x) > 0$ побудовано з використанням виродженого скалярного рівняння, яке відповідає векторному рівнянню (2.4).

Для побудови частинних розв'язків неоднорідної задачі використано істотно особливу функцію $\nu(t)$ (1.108) та її похідну (1.109), які є частинними розв'язками неоднорідного рівняння Ейрі виду $U''(t) - tU(t) = \pi^{-1}$ [6].

Застосовуючи метод істотно особливих функцій для випадку, коли для системи (2.4) коефіцієнти матриці $\tilde{a}(x) < 0$, $b(x) < 0$ побудовано асимптотику розв'язку як суперпозицію розв'язку однорідної системи (3.62) та частинного випадку неоднорідної системи (3.42). Таким способом справедлива теорема

Теорема 3.1.1.

Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:

C 2. $A_0(x)$, $H(x) \in C^{\infty}[-l, 0]$.

С 5. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) < 0$, $\quad b(x) > 0$.

Формально розв'язок однорідної системи (2.4) можна представити у вигляді ряду:

$$\tilde{Y}_k^{hom.}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\left[\sum_{i=1}^{2} \left[\alpha_{ikr}(x) U_i(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ikr}(x) U_i'(t) \right] \right] + \omega_{kr}(x) \right],$$

де $U_1(t) = \mathrm{Ai}(t)$, $U_2(t) = \mathrm{Bi}(t)$.

Побудовано розв'язок неоднорідної задачі.

Теорема 3.1.2.

Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:

С 2. $A_0(x),\ H(x) \in C^{\infty}[-l, 0]$.

С 5. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) < 0$, $\quad b(x) > 0$.

Формально частинний розв'язок неоднорідної системи (2.4) можна представити у вигляді ряду :

$$\tilde{Y}_k^{\text{part.}}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[f_{kr}(x) \nu(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} g_{kr}(x) \frac{d\nu(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))} \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \bar{\omega}_{kr}(x).$$

Теорема 3.1.3.

Нехай ССЗДР (2.4) задовольняє умови:

С 2. $A_0(x),\ H(x) \in C^{\infty}[-l, 0]$.

С 5. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) < 0$, $\quad b(x) > 0$.

Тоді загальний розв'язок можна записати у вигляді

$$Y_k(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2} \left\{ \left[\sum_{r=0}^{q} \varepsilon^r \alpha_{ikr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) \right] U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \left[\sum_{r=0}^{q} \varepsilon^r \beta_{ikr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) \right] \frac{dU_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))} \right\} + \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \omega_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) +$$

$$+ \left[\sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r f_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) \right] \nu(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \left[\sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r g_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) \right] \frac{d\nu(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))} +$$

$$+\sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \overline{\omega}_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}),$$

де $U_1(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) = \mathrm{Ai}(t)$, $U_2(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) = \mathrm{Bi}(t)$, $\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{-x\tilde{a}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}$.

Для випадку, коли для системи (2.4) коефіцієнти матриці $\tilde{a}(x) < 0$, $b(x) < 0$ побудовано асимптотику розв'язку як суперпозицію розв'язку однорідної системи (3.62) та частинного випадку неоднорідної системи (3.95).

Теорема 3.2.1.

Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:

С 2. $A_0(x)$, $H(x) \in C^\infty[-l, 0]$.

С 6. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) < 0$, $\quad b(x) < 0$.

Тоді при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ *можна побудувати формальний розв'язок* $\tilde{Y}_k^{hom.}(x, t, \varepsilon)$ *відповідної однорідної системи у вигляді асимптотичного ряду*

$$Y_k^{hom.}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ikr}(x) U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ikr}(x,\varepsilon) U_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))] +$$

$$+\sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\nu(t) + \mu g_{kr}(x)\nu'(t) + \bar{\omega}_{kr}(x)\right].$$

Для неоднорідної системи отримано наступний результат у вигляді теореми

Теорема 3.2.2.

Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:

С 2. $A_0(x)$, $H(x) \in C^\infty[-l, 0]$.

С 6. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) < 0$, $\quad b(x) < 0$.

Тоді формально частинний розв'язок неоднорідної системи (2.4) можна представити у вигляді ряду

$$Y_k^{part.}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \tilde{y_k}(x).$$

Загальний розв'язок для цього випадку записано у вигляді ряду.

Теорема 3.2.3. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2.4) задовольняє умови:*

С 2. $A_0(x)$, $H(x) \in C^{\infty}[-l, 0]$.

С 6. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) < 0$, $\quad b(x) < 0$.

Тоді для досить малих значень параметра $\varepsilon > 0$ у просторі безрезонансних розв'язків методом істотно особливих функцій можна побудувати єдиний асмптотичний ряд

$$Y_k(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ikr}(x) U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ikr}(x, \varepsilon) U_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))] +$$

$$+ \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\nu(t) + \mu g_{kr}(x)\nu'(t) + \bar{\omega}_{kr}(x) \right] + \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \tilde{y_k}(x),$$

де $U_1(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) = \mathrm{Ai}(t)$, $U_2(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) = \mathrm{Bi}(t)$, $\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{-x\tilde{a}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}$.

Запропонований алгоритм застосовувано для практичної побудови розв'язків систем сиснгулярно збурених диференцільних рівнянь. Що перевірено на прикладі.

Для випадку $\tilde{a}(x) < 0$ та $b(x) < 0$ перевірено застосування методу істотно особливих функцій для побудови розв'язків системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь на конкретному прикладі.

$$\varepsilon Y'(x, \varepsilon) - A(x, \varepsilon) Y(x, \varepsilon) = 4x + 2,$$

де $A(x, \varepsilon)$ має таку структуру

$$A(x, \varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1,$$

а $A_0(x)$ і A_1 матриці вигляду

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b(x) & a(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\varepsilon \to 0$, $x \in [0, l]$, $Y(x, \varepsilon) = colomn(y_1(x, \varepsilon), y_2(x, \varepsilon), y_3(x, \varepsilon))$ - шукана вектор-функція, $(x) = colomn(0, 0, 4x + 2)$ – задана вектор-функція.

За таких початкових умов:

1. $\tilde{a}(x),\ b(x) \in C^{\infty}[-1;0]$,

2. $a(x) = x\tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x) = -4,\ b(x) = (4x+4)$.

Методом істотно особливих функцій, повторюючи всі кроки, побудовано асимптотику розв'язку у вигляді

$$Y(x,\varepsilon) \cong \tilde{Y}(x,\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}x,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2}\Bigg\{\Bigg[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^{0}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^{x}}\cdot\sqrt{x}} \\ -\frac{-4x}{\sqrt[3]{4}}\frac{e^{C_{i20}}}{e^{x}\cdot e^{\frac{1}{4}x}} \end{pmatrix} + \varepsilon^{1}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^{x}}\cdot\sqrt{x}} \\ -\frac{-4x}{\sqrt[3]{4}}\frac{e^{C_{i20}}}{e^{x}\cdot e^{\frac{1}{4}x}}+ \end{pmatrix}$$

$$+\varepsilon^{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^{x}}\cdot\sqrt{x}} \\ -\frac{-4x}{\sqrt[3]{4}}\frac{e^{C_{i20}}}{e^{x}\cdot e^{\frac{1}{4}x}} \end{pmatrix} + O(\varepsilon^{q+1})\Bigg]U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}x)+$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^{0}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{C_{i20}}}{e^{x}\cdot e^{\frac{1}{4}x}} \\ \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^{x}}\cdot\sqrt{x}} \end{pmatrix} + \varepsilon^{1}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{C_{i20}}}{e^{x}\cdot e^{\frac{1}{4}x}} \\ \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^{x}}\cdot\sqrt{x}} \end{pmatrix} + \varepsilon^{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{C_{i20}}}{e^{x}\cdot e^{\frac{1}{4}x}} \\ \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^{x}}\cdot\sqrt{x}} \end{pmatrix} + O(\varepsilon^{q+1})\right]\times$$

$$\times\frac{dU_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}x)}\Bigg\}+\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{0}\begin{pmatrix} \omega_{10}^{0}\cdot x \\ \frac{4x+4}{4x}\omega_{10}^{0}\cdot x \\ 0 \end{pmatrix}+\varepsilon^{1}\begin{pmatrix} \omega_{11}^{0}\cdot x \\ \frac{4x+4}{4x}\omega_{11}^{0}\cdot x \\ 0 \end{pmatrix}+\varepsilon^{2}\begin{pmatrix} \omega_{12}^{0}\cdot x \\ \frac{4x+4}{4x}\omega_{12}^{0}\cdot x \\ 0 \end{pmatrix}+$$

$$+\varepsilon^{3}\begin{pmatrix} \omega_{13}^{0}\cdot x \\ \frac{4x+4}{4x}\omega_{13}^{0}\cdot x \\ \frac{(x+1)^2}{x^2}-\omega_{13}^{0}\cdot x \end{pmatrix} + O(\varepsilon^{q+1}).$$

Результати опубліковані в [1] та деякі результати з цього розділу висвітлено в тезах міжнародної конференції [5].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена асимптотичному інтегруванню системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту.

У дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати:

— розроблено метод побудови рівномірної асимптотики розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту, яку отримано з відповідного сингулярно збуреного диференціаль ного рівняння третього порядку типу Ліувілля;

— для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь розглянуто випадок диференціальної точки звороту для різних значень коефіцієнтів матриці, а саме коли коефіцієнти обидва додатні, обидва від'ємні та обидва, відповідно почергово, різних знаків;

— отримано необхідні умови регуляризації системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту;

— розроблено алгоритм, який включає вісім етапів асимптотичного інтегрування систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту;

— побудовано асимптотику розв'язків для різних значень коефіцієнтів матриці, а саме коли коефіцієнти обидва додатні, обидва від'ємні та обидва, відповідно почергово, різних знаків;

— 6) наведено приклади побудови асимтотики розв'язків системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту за умов, коли значення коефіцієнтів матриці почергово, різних знаків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Awrejcewicz Jan, Krysko V. A.* Introduction to Asymptotic Methods// Champan and Hall/CRC, New York. 2006. p.242.
2. Bragg R.E. Fundamental solutions of linear ordinary differential equation of the third order in the neighborhood of single second order turning point. // Duke. Math. J. 1958. Vol.25. P.239–254.
3. Berry M.V., Mount K.E. Semiclassical approximations in wave mechanics // Reports on Progress in Physics. 1972. Vol.35, iss. 1. P.316–394.
4. Birkhoff G.D. Quantum Mechanics and Asymptotic Series // Bull. Am. Math. Soc. 1933. iss. 39. P. 681–700.
5. Birkhoff G.D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter// Trans. Amer. Math. Soc. 1908. V.9. P. 219–231.
6. Бобочко В.М., Перестюк М.О. Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту// К.: Наукова думка, 2002. 310 с.
7. Bobochko V.N. Differential turning point in theory singular disturbances. I // Izvestiya vuzov. Matematika. 2002. iss. 3. P. 3–14. (in Russian)
8. Bobochko V.N. Differential turning point in theory singular disturbances. II // Izvestiya vuzov. Matematika. 2002. iss. 5. P. 3–12. (in Russian)
9. Bobochko V.N. Uniform asymptotic behavior of the solution to an inhomogeneous system of two differential equations with a turning point // Izvestiya vuzov. Matematika. 2006. iss. 5. P. 8–17. (in Russian)
10. Bobochko V.N. Orr-Sommerfeld equation with two turning points // Differentsial'nye uravneniya.1992.Vol.28, iss. 10. P. 1559-1570. (in Russian)

11. Bobochko V.N. Internal turning point in singular perturbation theory // Ukr. matem. zhurn. 1996. Vol.48, iss. 7. P. 876-890. (in Russian)

12. Bobochko V.N. System of differential equations with an unstable turning point // Izvestiya vuzov. Matematika. 1997. iss. 5. 23 p. (in Russian)

13. *Bobochko V.N.* Singularly perturbed Vallee-Poussin problem with two points of the spectrum that vanish // Ukr. matem. zhurn. 1983. Vol. 7, iss. 35. P. 545–551. (in Russian)

14. Bobochko V.N.,Markush I.I. The marginal problem for the system of singular perturbed differential equation with non-stabile spectrum of the limiting operator // 3 rd Colleguium on the Quatative Theory of Differential Equations.– 22-26. 08. 1988.–Bolyai Institute, Szeged, Hungary.–1988.

15. Бобочко В.М., Маркуш І. І. Асимптотичне інтегрування диференціальних рівнянь з нестабільним спектром граничного оператора // Київ.: ВІПОЛ, 1993. 216 с.

16. Bobochko V.N. The system of the differential equations with two turning points // International Conference on unctional Differential Equations and Applications. 1994. P. 12.

17. Бобочко В.М. Внутрішня точка звороту в системі диференціальних рівнянь // Тези доп. Всеукр. наук. конф. "Розробка та застосування математичних методів в наук.-техн. дослідженнях". Ч. 2. Львів. 1995. С. 12.

18. *Bobochko V.N.* Asymptotic behavior of solving differential equations with multiple turning point // Differential equations. 1996. Vol. 32, № 9. P. 1283–1285. (in Russian)

19. Бобочко В.М. Точка звороту в системі диференціальних рівнянь з аналітичним оператором // Укр. мат. журн. 1996. т. 48, № 2. с. 147–160.

20. *Bobochko V.N.* System of differential equations with a turning point in the case of a non-diagonalizable limit operator // Differents. uravneniya. 1998. Vol. 34, iss. 10. P. 1304-1312.

21. *Болілий В.О.* Рівняння Ліувілля з комплекснозначною точкою звороту //Наук. зап. Кіровоградського держ. ун.-ту ім. В. Винниченка. сер. фіз.-мат. н. 1997. с. 17–25.

22. Болілий В.О. Псевдодиференціальна точка звороту в диференціальному рівнянні четвертого порядку// Вісник Київського університету. Математика та механіка. 2002. Вип. 7-8. с. 5-9.

23. Болілий В.О. Внутрішня точка звороту в диференціальному рівнянні третього порядку // – Мат. методи та фіз.-мех.поля. 2000. т. 43, № 3. т. 44-50.

24. Болілий В.О. Нестабільна точка звороту в диференціальному рівнянні третього порядку // Математичні Студії. 2002. т. 18, № 2. с. 157-168.

25. Butuzov V.F. Singular perturbation // M.: Znanie, 1988. 48 p. (Novoe v zhizni, nauke, tekhnike. Ser. "Matematika, kibernetika"; №1). (in Russian)

26. Butuzov V.F. Singular perturbations // M.: Knowledge, 1988. 48 p. (New in life, science, technology. Series "Mathematics, cybernetics"; No. 1) (in Russian)

27. Vyshyk M.I., Ljusternik L.A. Regulyarnoe vyrzhenie i pogranichnyy sloy dlya lineynykh differentsial'nykh uravneniy s malym parametromRegular degeneracy and boundary layer for linear differential equations with a small parameter // Usp. mat. nauk. 1957. Vol. 12, vyp. 5. P. 3–122. (in Russian)

28. W. Wazow Asymptotic expansions of solutions to ordinary differential equations // M.: "Mir". 1968. 464 p.

29. E. T. Copson Partial Differential Equations // Cambridge University Press. 1975. 279 p.

30. Dorodnitsyn, A.A. Asymptotic laws of distribution of eigenvalues for some special types of second-order differential equations // UMN. 1952. Vol. 27, 6(52). P. 3-96. (in Russian)

31. S.F. Feshchenko, N.I. Shkil, L.D. Nikolenко Asymptotic methods in the theory of linear differential equations // K.: Naukova dumka. 1966. 251 p. (in Russian)

32. Furry W. H. Two Notes on Phase-Integral Methods //Phys. Rev. 1947, 71. P. 360

33. G. Freiling and V. Yurko Boundary value problems with regular singularities and singular boundary conditions // Hindawi Publishing Corporation International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2005. 9. P. 1481–1495. DOI: 10.1155/IJMMS.2005.1481.

34. K.O. Friedrichs Asymptotic phenomena in mathematical physics // Bull. Amer. Math. Soc. 1955. 61(6). P. 485–504.

35. Fröman N., Fröman P.O. JWKB approximation: Contributions of the theory // John Wiley,New York. 1965. 145 p.

36. Fröman N. Detailed analysis of some properties of the JWKB approximation // Ark. Fys. 1966. iss. 31. P. 381–408.

37. Adelina Georgescu Hydrodynamic Stability Theory // Martinus Nijhoff. 1985. 307 p.

38. G. Green On the motion of waves in a variable canal of small depth and width // Camb. Phil. Trans. 1937. iss. 6. P. 457–462.

39. J. Heading An introduction to Phase-integral Methods // London : Methuen. 1962. 160 p.

40. W. Heisenberg On stability and turbulence of fluid flows. (Uber stabilitat und turbulenz von flussigkeitsstromen.) //Trans. from Annalen der Phys. 1924. Vol. 74, iss. 15. P. . 577—627.

41. W. Eberhard, G. Freiling and K. Wilcken Indefinite eigenvalue problems with several singular points and turning points // Math. Nachr, 2001. 229. P. 51-71. doi: 10.1002/1522-2616(200109)229:13.0.CO;2-4.

42. Gantmakher F.R. Matrix theory // M.: Izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury. 1953. 492 c. (in Russian)

43. James A.M.McHugh An Historical Survey of Ordinary Linear Differential Equations with a Large Parameter and Turning Points // Archive Hist.Exact Sci. 1971. iss. 7. P. 277–324.

44. Naofumi Honda, Takahiro Kawai, Yoshitsugu Takei Definition and Basic Properties of Virtual Turning Points // SpringerBriefs in Mathematical Phisics. 2015. 125 p.

45. Masahiro Iwano Asymptotic solution of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, I // Funcialaj Evkacioj. 1963. iss. 5. P. 71–134.

46. Masahiro Iwano Asymptotic solution of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, II // Funcialaj Evkacioj. 1964. iss. 6. P. 89–141.

47. Jeffreys H. On Certain Approximate Solutions Of Linear Differential Equations of the Second Order // Proc. London Math. Soc. 1925. Vol 2, iss. 23. P. 428–436.

48. Karpenko Yu.I. Asymptotic solution of the Cauchy problem for a linear system of second-order differential equations in the presence of a turning point // Differentsial'no-funktsional'nye uravneniya. 1991. - P. 19-23. (in Russian)

49. Kemble E.C. Phys. Rev // 1935. V.48. P. 549-561.

50. Kemble E.C. The Fundamental Principles of Quantum Mechanics // New York: McGraw-Hill.1937. 611 p.

51. Y. Khalili, A. Neamaty On the relationship between the turning and singular points in Sturm–Liouville equations // Cogent Mathematics and Statistics. 2018. № 5. P. 1-8.

52. І.Г. Ключник, Г.В. Завізіон Лінійна система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з відхиленням аргументу і точкою звороту // Укр.мат.вісн.2010.7,№ 3. с. 331–354.

53. І.Г. Ключник Лінійна система диференціальних рівнянь з точкою звороту // Укр.мат.журн. 2010. 62,№ 5. с. 625–642.

54. І.Г. Ключник Асимптотичні розв'язки системи диференціальних рівнянь з кратно точкою звороту // Укр.мат.журн. 2009. 61,№ 11. с. 1516–1530.

55. І.Г. Ключник Лінійна система диференціальних рівнянь з кратною точкою звороту // Нелінійні коливання. 2012. 15, № 2. с. 178–193.

56. Kronauer, R.E. Oscillations. In: Pearson, C.E. (eds) Handbook of Applied Mathematics // Springer, Boston, MA. 1990.

57. Krylov N.M.,Bogolubov N.N. Introduction to Nonlinear Mechanicsu // Kiev, Izda-vo Akademii nauk USSR. 1937. 353 p. (in Russian)

58. Kurss H. The Solution of Some turning Point Problems // Rep.IMM240. 1957.

59. Lakin, W.D. @ Reid, W.H. Stokes multiplaers for the Orr-Sommerfeld equation // Phil.Trans.Roy.Soc.London Ser.A. 1970. iss. 268. P. 325-349.

60. Langer R. The asymptotic solutions of certain linear differential equations of the second order // Trans. Am. Math. Soc. 1934. 36. P. 90–106.

61. Langer R. On the Asymptotic Solutions of Ordinary differential Equations with the Application to the Bessel Functions of Large Order// Trans. Am. Math. Soc. 1931. 33. P. 23–64.

62. Langer R. On the Asymptotic Solutions of Differential Equations with an Application to the Bessel Functions of Large Complex Order // Trans. Am. Math. Soc. 1932. 34. P. 447–480.

63. Langer R. The Asymptotic Solutions of Certain Linear Differential Equations of the Second Order // Trans. Am. Math. Soc. 1934. 36. P. 90–106.

64. Langer R. The Asymptotic Solutions of Ordinary Linear Differential Equations with Special Reference to a Turning Point // Trans. Am. Math. Soc. 1949. 67. P. 461–490.

65. Langer R. Turning points in linear asymptotic theory // Bol.Soc.Mat.Mexicana. 1960. Vol. 2, № 5. P. 1–12.

66. Langer R.E. On the asymptotic forms of ordinary differential equations of the third order in a region containing a turning point // Trans. Amer. Math. Soc. 1955. V. 22 P. 93–123.

67. Langer R.E. The solutions of a class of linear ordinary differential equations of the third order in a region containing a multiple turning point // Duke. Math. J. 1956. V. 23. P. 93–110.

68. Langer R. The solutions of the differential equation: $y''' + \lambda^2 zy' + 3\mu\lambda^2 y = 0$ // Duke.Math.J. 1955. 23. P. 525-542

69. Langer R. On the asymptotic solution of a class of ordinary differential equations of the fourth order, with special reference to an equation of hydrodynamics// Trans.Amer.Math.Soc. 1957. 84. P. 144-191

70. Langer R. Formal solutions and a related equation for a class of fourth order differential equations of a hydrodynamic type // Trans.Amer.Math.Soc. 1958. 22. P. 371-410

71. Lin C.C.@ Rabenstein, A.L. On the asymptotic theory of a class of ordinary differential equations of fourth order,II, Existense of solutions which

are approximated by the formal solutions// Studies in Appl.Math. 1969. 48. P.311-340.

72. Lin,C.C. On the stability of two-dimensional parallel flow// Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1944. 30. P.316-323.

73. Lin,C.C. @ Rabenstein, A.L. On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order // Trans.Am.Math.Soc. 1960. 94. P.24-57.

74. Lin C.C. The Theory of Hydrodynamic Stability // Cambridge University Press. 1966.

75. Lin,C.C. On the stability of two-dimensional parallel flow// Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1944.30. P.316-323.

76. J. Liouville Sur les developpent des functions...// J.Math.Pures. Appl. 1837, Vol. 1, № 2. P.16-35.

77. Lomov S.A. Introduction to the general theory of singular perturbation // Trans. of mathem. Monographs, American, Mathem. Society. 1992. 375 p.

78. Маркуш I.I. Розвиток асимптотичних методів у теорії диференціальних рівнянь // Ужгород. 1975. 225 с.

79. Maslov V. P., Shafarevich A. I. On Asymptotic Solutions of Nonlinear Equations in the Presence of Turning Points // Differential Equations. 2004. Vol. 40, № 5. P. 736–741

80. James A.M. McHugh An Historical Survey of Ordinary Linear Differential Equations with a Large Parameter and Turning Points// Archive for History of Exact Sciences. 1971. Vol.7, № 4. P. 277–324.

81. McKelvey The solutions of second order linear ordinary differential equations about a turning point of order two // Trans. Am. Math. Soc. 1955. P. 103–123.

82. Mingkang, N., Aifeng, W., Huaxiong, C. Step-like contrast structure for a quasilinear system of singularly perturbed differential equations with a zero characteristic number. Diff Equat 2016. 52, P. 186–196. https://doi.org/10.1134/S0012266116020051

83. Bogoliubov N., Mitropolsky Y. Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations // Gordon and Breach. 1961.

84. Mitropol'skiy Yu.A., Moseyenkov B.I. Lektsii po primeneniyu assimpoticheskikh metodov k resheniyu uravneniy s chastnymi proizvodnymi// Institut matematiki AN URSR, K. 1967. 257 p.(in Rus.)

85. Mitropol'skiy Yu.A. Metod usredneniya v nelineynoy mekhanike // Kiev: Naukova dumka. 1971. 440 p. (in Rus.)

86. Mitropol'skiy Yu.A., Samoylenko A.M., Kulik V.L. Issledovaniya dikhotomii lineynyh sistem differentsial'nyh uravneniy s pomoshch'yu funktsiy Lyapunova // Kiev: Naukova dumka. 1990. 272 p. (in Rus.)

87. Motylev L.Yu. Asimptoticheskie resheniya uravneniya Orra-Zommerfel'da s tochkoy povorota vysokogo poryadka // Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki. 1990. 272 p. (in Rus.)

88. Minoru Nakano and Toshihiko Nishimoto On an asymptotic expansion of solutions of ORR-sommerfeld type equation //Lecture Notes in Mathematics. 1986. V. 26, № 11. P. 1627-1634.

89. Minoru Nakano and Toshihiko Nishimoto On a secondary turning point problem //Lecture Notes in Mathematics. 1970. V. 22. P. 355-384.

90. A. Nayfeh Perturbation Methods //Wiley, New York Straw GmbH, MGrlenbach. 2004. 441 p.

91. Nishimoto T A Turning Point Problem of an n^{th} Order Differential Equation of Hydrodynamic Type // Kodai.Math.Sem.Rep. 1968. 20. P. 315-319.

92. Nishimoto T. On the Orr-Sommerfeld type equations, 1; W. K. B. aproximation // Kodai Math. Sem. Rep. 1972. V. 24. P. 281–306.

93. Nishimoto T. On the Orr-Sommerfeld type equations,11; connection formulas // Kodai Math. Sem. Rep. 1978. V. 29. P. 233–249.

94. Noaion P. Developpements asymptoticues dans les equations differentialles lineares a parametre variable // Memoires de la Soc. des Sci. de Lieg. 1912. Ser. 3, № 11. – 197 p.

95. F. W. J. Olver Asymptotics and Special Functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. 588 p.

96. Самойленко А.М., Ключник І.Г. Про асимптотичне інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних // Нелінійні коливання. 2009. 12,№ 2.–С. 208-234.

97. A. M. Samoilenko and P. F. Samusenko Asymptotic Integration of Singularly Perturbed Differential Algebraic Equations with Turning Points. Part II. Ukr Math J. 2021. 73. P. 988–1007. https://doi.org/10.1007/s11253-021-01972-5

98. Rashevs'kyi, M.O., Samusenko, P.F., Tomashchuk, O.P. Asymptotic Solutions of Singularly Perturbed Differential Algebraic Equations with Turning Points // J Math Sci 2023. 273. P. 271–289. https://doi.org/10.1007/s10958-023-06498-8

99. Abramowitz and Stegun Handbook of Mathematical Functions // Scanned version of the classic reference work. 1979. 832 p.

100. Fedoriuk M.V. Asymptotic Analysis Linear Ordinary Differential Equations//Springer. 1993. 352 p.

101. Kapil K. Sharma, Pratima Rai, Kailash C. Patidar *A review on singularly perturbed differential equations with turning points and interior layers.*// Applied Mathematics and Computation – 219 (2013)–P. 10575–10609.

102. Feshchenko S.F, Shkil' N.I, Nikolenko L.D. Asymptotic methods in the theory of linear differential equations // Kiev: Naukova dumka. 1966.

103. Shkil', N.I. On asymptotic splitting of a system of linear differential equations with slowly varying coefficients // Ukr Math J. 1970. 22. P. 64–76. https://doi.org/10.1007/BF01086703

104. Shkil', N.I., Kushnir, V.A. Asymptotic decomposition of systems of higher-order linear differential equations with small parameter for the derivative // Ukr Math J 1985. 37. P. 193–197. https://doi.org/10.1007/BF01059718

105. Schlesinger L. Uber asymptotische Darstellungen der Losungen linearer Differential-systeme als Funktion jenes Parameters / /Math. Ann. – 1907. -Bd. 63. – P. 277–300.

106. Tamarkin J. D. Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions // Mathematische Zeitschrift. 1928. Vol. 27, № 1. P. 1–54.

107. Tikhonov A.N., Vasilyeva A.B., Sveshnikov A.G. Differential equations // Published by Springer Berlin Heidelberg. 1985.

108. Tollmien W. Über die Entstehung der Turbulenz // Mitteilung, Nachr. Gesellschaft der Wiss. Göttingen. 1929.

109. Tollmien W. Asymptotische Integration der Störungsdifferentialgleichung ebener laminarer Strömungen by hohen Reynoldsschen Zahlen // Zeitschr Angew. Math. Mech. –25/27 (1947),–P. 33–50, 70-83.

110. Wasow W. Simplifications of turning point problems for systems of linear differential equations // National Science Foundation Grant. 1961. P. 100–114.

111. Wasow W. Asymtotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containig a transition point // Ann. Math. 1953. 58. P. 222-252.

112. Wasow W. A study of the solutions of the differential equation $y^{(4)}+\lambda^2(xy''+y)=0$ for large values of λ // Ann. Math. (2) – 1950. Vol. 2, № 52. P. 350-361.

113. Wasow W. Connection problems for asymptotic series // Ann. Math. 1968. 2. P. 831-853.

114. Завізіон Г.В. Асимптотичний розв'язок інтегро-диференціальних рівнянь // Укр.мат.журн. 1997. Vol. 49,№ 52. С. 1-7.

115. Erich Zauderer A uniform asymptotic turning point theory for second order linear ordinary differential equations // Proceedings of the American Mathematical Society. 1972. Vol, 31, № 2.–P. 489-494.

116. Zwaan A. Intensitaten im Ca Funkenspectrum //Thesis. 1929.P.

ДОДАТОК

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Собчук В.В., Зеленська І.О., *Побудова асимптотики розв'язку системи СЗДР 4-го порядку з диференціальною точкою звороту методом істотно особливих функцій,* Науковий вісник Ужгородського університету, Т. 41, № 2, (2022), C. 78–90, DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).78-90.

2. Valentyn Sobchuk, Iryna Zelenska, Oleksandr Laptiev *Algorithm for solution of systems of singularly perturbed differential equations with a differential turning point,* Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences, Vol. 71, No.3, (2023), Article number: e145682, DOI: 10.24425/bpasts.2023.145682.

3. Собчук, В. В., Зеленська І. О., *Особливості побудови асимптотики розв'язку систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту при додатних коефіцієнтах матриці,* Дослідження в математиці і механіці, Т. 28, № 1-2(41-42), (2023). С. 120–138, DOI: 10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305266.

4. Sobchuk V. V., Zelenska I.O., *Construction of asymptotics of the solution for a system of singularly perturbed equations by the method of essentially singular functions.,* Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics, No.2, (2023). C. 184–192, https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.34.

Додаткові статті:

1. Болілий В.О., Зеленська І.О. Нестабільна диференціальна точка звороту ії роду в системі четвертого порядку // Вісник Черкаського університету.

Серія: Фізико-математичні науки, № 1, (2016). С. 75-82. DOI: https://phys-ejournal.cdu.edu.ua/article/view/1379/1402

2. Болілий В.О., Зеленська І.О. Внутрішня точка звороту для диференціального рівняння типу Орра – Зоммерфельда // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка, Вип. 1, (2017). С. 20-24.

3. Собчук В. В., Зеленська І.О. Дослідження асимптотики розв'язків систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точками звороту // Журнал обчислювальної та прикладної математики, No 2, (2022). С. 151–157. DOI: https://doi.org/10.17721/2706-9699.2022.2.17

4. Собчук В.В., Зеленська І.О. До питання побудови рівномірної асимптотики розв'язку систем сингулярно збурених диференціаотних рівнянь з точками звороту // III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації», 30 вересня 2022 р. С. 34-39.

5. Зеленська І.О. Побудова розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту // Вісник Національного технічного університету «ХПІ».Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 1, (2023). С. 116 – 121. DOI: https://doi.org/10.20998/2222-0631.2023.01.17

Відомості про апробацію результатів дисертації

Конференції

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. V.Sobchuk, I.Zelenska Problem for Singular Perturbed Systems of Differential Equations with Nonstable First-Order Turning Point // International Workshop QUALITDE – 2021. Tbilisi, Georgia, 2021. P. 190-193.

2. Sobchuk V., Zelenska I. Systems of Differential Equations With Turning Point as a Mathematical Models // Nonlinear Analysis And Applications, 5th International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine Valery Sergeevich Melnik 4–6 April, 2022, Ukraine, Kyiv, P.44.

3. Собчук В. В, Зеленська І.О. Умови існування розв'язку систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту І роду // Математика. Інформаційні технології. Освіта. Тези допов. учасник. XI Міжнар. наук.–практ. конф., 4–6 червня 2022 р. Луцьк–Світязь: СНУ імені Лесі Українки, 2022. С. 37-38.

4. V.V. Sobchuk, I.O. Zelenska On the conditions for the existence of a uniform asymptotic solution systems of singularly perturbed differential equations with differential turning point // The international online conference "Current trends in abstract and applied analysis". Ivano-Frankivsk, May 12-15, 2022. Ukraine, P. 78-80

5. В. Собчук, І. Зеленська Побудова рівномірної асимптотики розв'язку систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту // Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації: матеріали III Міжнародної наук.-практ. інтернет-конф. (м. Запоріжжя, 30 вересня 2022 р.). С. 34 – 39.

6. Valentyn Sobchuk, Iryna Zelenska Algorithm for Constructing Uniform Asymptotics of a Solution for Problem for Singular Perturbed Systems of Differential Equations with Differential Turning Point. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2022". December 17 - 19, 2022, Tbilisi, Georgia. P. 194-199.

7. Собчук В.В., Зеленська І.О. Поняття "точки звороту" в сучасній теорії сингулярно збурених диференціальних рівнянь // Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання: матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції, 18-20 січня 2023 року. – К. : Вид-во УДУ імені Михайла Драгоманова, 2023. С. 49-50.

8. Собчук В. В., Зеленська І. О., Шовкопляс Т. В. Побудови рівномірної асимптотики розв'язку ССЗДР з диференціальною точкою звороту // Математика. Інформаційні технології. Освіта. Тези доповідей XII Міжнар. наук.–практ. конф., 2–4 червня 2023 р. Луцьк–Світязь: СНУ імені Лесі Українки, 2023. С. 38-39.

9. Собчук В. В., Зеленська І. О. Особливості структури розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь для побудови рівномірної асимптотики // Математика та інформаційні технологіїю Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики, 28-30 вересня 2023 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т,

2023. – С. 315-316.

10. Valentyn Sobchuk, Iryna Zelenska A system of singularly perturbed diferential equations with an unstable turning point of the rst kind // 10.Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2023 December 9 - 11, 2023. Andrea Razmadze Mathematical Institute of Ivane Javakhishvili Tbilisi State University Tbilisi, Georgia. REPORTS OF QUALITDE, Volume 2, P 187-191.

11. Зеленська І.О. Стабільна точка звороту в системі сингулярно збурених диференціальних рівнянь // Матеріали XXII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2024». К.: Київський університет, 2024. С. 24-25.

12. Собчук В. В., Зеленська І. О. Метод істотно особливих функцій для побудови асимптотики розв'язку системи сингулярно збурених диференнціальних рівнянь з від'ємними елементами матриці // 12.Математика. Інформаційні технології. Освіта. Тези доповідей XIII Міжнар. наук.–практ. конф., 31 травня – 2 червня 2024 р. Луцьк–Світязь: СНУ імені Лесі Українки, 2024. С 67-68.

13. Собчук В. В., Зеленська І.О. Структура розв'язку системи сингулярно збурених диференнціальних рівнянь на випадок матриці з від'ємними коефіцієнтами // V Міжнародна конференція присвячена 145 річчю Ганса Гана, 23-27 вересня 2024 р. Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. Чернівці. 2024. С. 99-100.

1. III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації» (Запоріжжя, 2022)

2. IX Міжнародна наукова конференція імені І. І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика», присвячена 100-річчю академіка Івана Івановича Ляшка (Київ, 2022).

Наукові семінари

1. Науковий семінар з диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Керівники семінару – професор, доктор фізико-математичних наук О. М. Станжицький та професор, доктор фізико-математичних наук О. В. Капустян. За участі професорів, докторів фізико-математичних наук – М. Ф. Городнього, І. О. Парасюка та В. В. Собчука. (Київ, Україна, 05 лютого 2025 р.)