

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА
ШЕВЧЕНКА

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття ступеня бакалавра
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

Моделювання вісесиметричних течій ідеальної нестисливої рідини

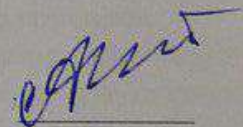
Виконавець:

бакалавр четвертого курсу
Пилипченко Іван Юрійович



Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук,
професор
Калюжний Олександр Якович



Роботу заслухано на засіданні кафедри моделювання складних систем та
рекомендовано до захисту, протокол № 10 від 5 червня 2023р.

Завідувач кафедри МСС



д.т.н., доцент Дмитро ЧЕРНІЙ

Київ – 2023

АНОТАЦІЯ

Моделювання вісесиметричних течій ідеальної нестисливої рідини

Випускна кваліфікаційна робота бакалавра: 57 сторінок, 78 рисунків, 2 таблиці, 10 інформаційних джерел.

В даній роботі представлено результати досліджень з математичного моделювання вісесиметричних течій ідеальної нестисливої рідини навколо конструкцій та споруд вісесиметричної форми.

Об'єкт дослідження - математична модель та обчислювальна технологія для моделювання струменевих течій, які породжені вісесиметричними пристроями або відбуваються навколо перешкод вісесиметричної форми.

Предмет дослідження - програмна реалізація моделей аеродинамічного впливу на вісесиметричні конструкції.

Мета роботи – методом математичного моделювання виявити аеродинамічні ефекти та вплив конструктивних елементів (типу насадки Бріггса-Форта) здатних збільшити кількість руху (імпульс) середовища для утворення підйомної сили та збільшення тяглових характеристик рушійів для перспективних надлегких та сверхмалих літальних апаратів нестандартного компанування.

Ключові слова: метод дискретних особливостей, обчислювальна технологія, математична модель, аеродинамічний вплив, літальні апарати.

Abstract

Modeling of axisymmetric flows of an ideal incompressible fluid

Bachelor's thesis: 57 pages, 78 figures, 2 tables, 10 information sources.

This work presents the results of research on mathematical modeling of axisymmetric flows of an ideal incompressible fluid around axisymmetric structures and structures.

The object of the study is a mathematical model and computing technology for modeling jet streams that are generated by axisymmetric devices or occur around axisymmetric obstacles.

The subject of the research is software implementation of models of aerodynamic influence on axisymmetric structures.

The purpose of the work is to use mathematical modeling to reveal the aerodynamic effects and the influence of structural elements (such as the Briggs-Fort nozzle) capable of increasing the amount of movement (impulse) of the medium for the generation of lifting force and increasing the traction characteristics of the thrusters for promising ultra-light and ultra-small aircraft of non-standard configuration.

Keywords: method of discrete singularity, computational technology, mathematical model, aerodynamic influence, aircraft.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
МЕТА РОБОТИ.....	9
РОЗДІЛ 1	10
ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ЩОДО ПОТЕНЦІЙНИХ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ТЕЧІЙ.....	10
1.1 Потенціальні течії	11
1.2 Вихорові течії	13
1.3 Кільцевий вихор	14
1.4 Потенційні течії з кільцевими вихорами	16
Математична модель процесу чехарди вихорів	Ошибка! Закладка не определена.
Моделювання та порівняння с результатами.....	17
1.5 Теорія ідеального пропелеру	22
1.6 Течія з насадком Бріггса-Форта.....	24
РОЗДІЛ 2.....	27
ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ТА МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНОЇ ТЕЧІЇ.....	27
2.1. Постановки задач	27
2.1.1. Течія з перешкодою	27
2.1.2 Течія з ідеальним пропелером без насадку	28
2.1.3 Течія з ідеальним пропелером у насадку Бріггса-Форта	29
2.2 Математичні моделі	30
2.3 Методи чисельних розрахунків.....	30

2.3.1. Чисельний розв'язок течії за перешкодою.....	30
2.3.2 Чисельний розв'язок течії за ідеальним пропелером з насадком та без.....	33
2.3.3 Обрахунок положення вільної рухомої межі Lv	36
РОЗДІЛ 3.....	37
РЕЗУЛЬТАТИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ.	37
3.1 Результати математичного моделювання обтікання перешкод різної форми	37
3.1.1. Моделювання течії за диском без отвору.....	37
3.1.2. Моделювання течії за диском з отвором.....	38
3.1.3. Моделювання течії навколо конічної перешкоди	43
3.1.4. Моделювання течії навколо оберненого конусу	44
3.1.5. Моделювання течії за півсферою.....	46
3.1.6. Моделювання течії за оберненою півсферою.....	47
3.2 Результати математичного моделювання течії навколо ідеального пропелеру	49
3.3 Результати математичного моделювання течії навколо ідеального пропелеру у насадку Бріггса-Форта.....	50
ВИСНОВКИ.....	55
Список використаних джерел.....	56

ВСТУП

З розвитком людства з'являлися нові і нові ідеї створення літальних апаратів для різних галузей життя. Зараз уже складно уявити життя без літаків, гелікоптерів, безпілотних літальних апаратів, мультикоптерів, конвертопланів. Дивлячись на розвиток моделей та конструкцій можна зрозуміти, що це дуже складний процес, який потребує знання у багатьох сферах науки. Тому, що почати моделювати свої літальні прилади, слід почати досліджувати найпростіші моделі та принципи, щоб згодом перейти до найновіших, а згодом створювати власні концепти та реалізовувати їх у життя.

Отже, розглянемо основні типи літальних апаратів, їх переваги, недоліки та проблеми.

Літаки – літальний апарат з горизонтальним злетом та посадкою



Класичний літак переміщується без суттєвих змін орієнтації у просторі, із нерухомими крилами, під впливом тяги що створює реактивний двигун, гвинт або ракетний двигун.

1. Переваги:

- 1) велика швидкість польоту;
- 2) великі об'єми перевезення вантажу та людей;
- 3) велика дальність польоту.

2. Недоліки:

- 1) необхідність в злітно-посадковій смузі великої довжини.

Гелікоптери – літальний апарат вертикального злету та посадки, в якому підйомна сила і тяга забезпечуються горизонтально обертовими гвинтами.



Зазвичай використовується для перевезення вантажів, та людей на невеликі відстані. Вертикальний зліт та приземлення дозволяє використовувати гелікоптери майже в будь-якій місцевості, на відміну від літака, якому потрібна злітно-посадочна смуга. А можливість зависати у повітрі розширює спектр задач.

1. Переваги:

- 1) вертикальний зліт та приземлення;
- 2) велика тяга, відносно маси ЛА;
- 3) можливість зависати у повітрі;
- 4) переміщення вантажу у зафіксованому положенні.

2. Недоліки:

- 1) невелика дальність польоту;
- 2) є непереборні обмеження по швидкості.

Мультикоптери – літальний апарат із довільною кількістю тягових гвинтів, розміщених в одній площині, що обертаються діагонально в протилежних напрямках.



Достатньо новий концепт, який активно розвивається зараз. Використовуються для розвідок та перевезення різних вантажів.

1. Переваги:

- 1) вертикальний зліт та приземлення;
- 2) можливість зависати у повітрі;
- 3) дистанційне управління;
- 4) невеликі розміри;

2. Недоліки:

- 1) невелика вантажопідйомність;
- 2) мала дальність польоту.

Конвертоплан – літальний апарат, який використовує вертикальний зліт та посадку, але під час польоту **змінює орієнтацію положення гвинтів відносно орієнтації корпусу**, для заміни тяглових зусиль з забезпечення вертикального підйому на горизонтальну тягову силу, як в літаку.



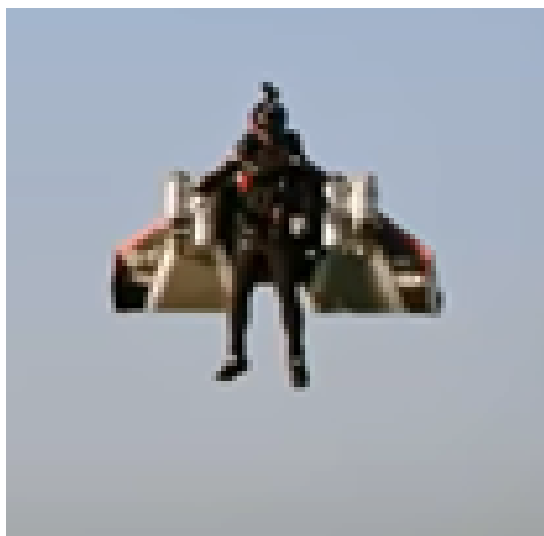
1. Переваги:

- 1) вертикальний зліт та приземлення;
- 2) можливість зависати у повітрі;
- 3) велика вантажопідйомність.

2. Недоліки:

- 1) складність керування літальним апаратом на режимах злету та посадки, за рахунок змін напрямку вектору тяги (орієнтації гвинтів).

Надмалі ЛА - новітні (нетрадиційного компонування) літальні апарати використовують вертикальний зліт та посадку, але під час польоту змінює орієнтацію положення гвинтів, може змінювати вертикальну підйомну силу на горизонтальну тягову, що може бути зручним для виконання спектру спеціальних задач.



1. Переваги:

- 1) вертикальний зліт та приземлення;
- 2) можливість зависати у повітрі;
- 3) невеликі розміри конструкції;
- 4) велика швидкість за рахунок зміни вертикальної підйомної сили на горизонтальну тягову;
- 5) має окрему нішу застосування (індивідуальні літальні апарати, автономні дрони).

2. Недоліки:

- 1) відносно малий час польоту;
- 2) невелика вантажопідйомність (100-200кг);
- 3) мала дальність польоту.

Висновок

Існує область, яку можна зайняти надмалими літальними апаратами з можливостями вертикального злету, з переходом до горизонтального польоту зі зміною положення (орієнтації) літального апарату просторі та мінімальною механізацією.

Дивлячись на усі літальні апарати і те, як вони розвивалися, зрозуміло, що основними напрямками покращення є збільшення потужностей двигунів, та оптимізація компоновок. Особливу увагу доцільно приділити розгляду конструкцій та пристроїв, здатних підвищити ефективність та поширити літальні можливості та якості надмалих літальних апаратів нетрадиційних компоновок. Але для цього необхідно розбити проблему на складові частини та досліджувати кожну з них окремо.

МЕТА РОБОТИ

Мета роботи - розробка математичних моделей та обчислювальної технології для моделювання струменевих течій, які породжені вісесиметричними пристроями або відбуваються навколо перешкод вісесиметричної форми [1-4].

Цільове призначення досліджень – виявлення аеродинамічних ефектів та впливу конструктивних елементів (типу насадку Бріггса-Форта) здатних збільшити кількість руху (імпульс) середовища для утворення підйомної сили та збільшення тяглових характеристик рушіїв для перспективних надлегких та сверхмалих літальних апаратів нестандартного компанування.

РОЗДІЛ 1

ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ЩОДО ПОТЕНЦІЙНИХ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ТЕЧІЙ

Розглянемо вісесиметричний безвихоровий рух в циліндричній системі координат (r, θ, x) , який описується вектором швидкості $v = (v_r(r, x, t), 0, v_x(r, x, t))$. [1,4, 6-8]. З поля швидкості маємо єдину відмінну від нуля компоненту завихрості $\omega = (0, \omega(r, x, t), 0)$, де

$$\omega = \frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial r}. \quad (1.1)$$

Рівняння Гельмгольца зводиться до скалярного

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega}{r} \right) = 0. \quad (1.2)$$

З умови нестисливості введемо функції течії $\psi(r, x, t)$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v_x = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (1.3)$$

Для ідеальної рідини $\theta = 0$, урахувавши рівняння (1.1), (1.2), (1.3) маємо

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = r\omega;$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\omega}{r} \right) = 0. \quad (1.4)$$

Якщо розподіл $\omega(r, x, t)$ – нам відомий, тоді із рівнянь (1.4) можна звести к рівнянню Пуассона відносно функцій $\frac{1}{r} \psi \cos(\theta)$, з густиною $\frac{\omega \cos(\theta)}{4\pi}$. Звідси маємо

$$\psi(r, x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S G(r, r', x - x') \omega(r', x', t) dr' dx';$$

$$G(r, r', x - x') = (r')^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta') d\theta}{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta') + (x - x')^2}. \quad (1.5)$$

Тут G – функція течії, обумовлена кільцевою вихоровою ниткою циркуляції $4\pi r$, яка проходить через точки (r', x') , а S – меридіановий поперечний переріз області завихрованості.

У випадку встановленого руху, коли $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$, друге рівняння (1.4) виконується при

$$\frac{\omega}{r} = F(\psi),$$

Де F – довільна диференційована функція.

1.1 Потенціальні течії

Потенціальні течії - безвихровий рух рідини або газу, при якому кожен малий об'єм деформується і переміщується поступально, але не має обертання (вихору) [1,4, 6-8].

Припустимо, що рідина знаходиться в потенційному, силовому полі, тобто на неї діють зовнішні сили F , які мають потенціал U :

$$F = \text{grad}(U), \quad (1.1.1)$$

Тоді справедлива теорема, згідно якої циркуляція Γ вектору швидкості по довільному замкнутому контуру (замкнутій лінії, яка складається із одних і тих же частинок рідини) в процесі руху залишається постійною:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_l (V, dx) = 0, \quad (1.1.2)$$

де $V = (V_x, V_y, V_z)$ – векторне поле.

Рух виникає із стану спокою, тоді циркуляція по довільному замкнутому контуру дорівнює нулю. За формулою Стокса:

$$\oint_l (V, dx) = \int_S (\text{rot}(V), n) dS, \quad (1.1.3)$$

, де S – поверхня, натягнута на контур l . Оскільки S – довільна, то у будь-який момент часу маємо:

$$\text{rot}(V) = 0. \quad (1.1.4)$$

Величина $\omega = \text{rot}(V)$ називається завихрованістю та позначає кутову швидкість обертання елементарного об'єму рідини. Рівняння (1.1.4) представляє умову відсутності обертання.

(1.1.4) необхідна і достатня умова потенціального поля швидкостей, тобто існує така функція $\varphi(x, t)$ – потенціал швидкостей, такий, що

$$V = \text{grad}(\varphi) \quad (1.1.5)$$

Підставивши V в рівняння нестисливої рідини:

$$\text{div}(V) = 0, \quad (1.1.6)$$

легко побачити, що φ задовільняє рівняння Лапласа:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = 0. \quad (1.1.7)$$

Також можна спростити і рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V, \nabla)V = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(P) + F, \quad (1.1.8)$$

Згадаємо формулу із векторного аналізу отримаємо:

$$(V, \nabla)V = \omega \times V + \text{grad} \frac{v^2}{2}, \quad (1.1.9)$$

де $\omega = 0$, $v = |V|$ – модуль вектора швидкості.

За допомогою формул (1.1.7), (1.1.1), (1.1.5), запишемо рівняння (1.1.8) у вигляді

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} - U \right) = 0. \quad (1.1.10)$$

Звідси отримаємо інтеграл Коші-Лагранжа:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} - U = \Phi(t), \quad (1.1.11)$$

Де Φ – деяка функція від часу.

1.2 Вихорові течії

Вихорові течії - вихровий рух рідини або газу, при якому кожен малий об'єм деформується і переміщується не тільки поступально, але й має обертання (вихору). [5,8].

$$\text{rot}(V) \neq 0$$

Знехтуємо в'язкістю. Розглянемо вісесиметричний рух нестисливої рідини, тоді рівняння, яке зв'яже функцію течії ψ та завихрованність ω в циліндричних координатах (r, α, z) , має вигляд

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\omega}{r} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega}{r} \right) = 0, \quad (1.2.1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r\omega, \quad (1.2.2)$$

Відношення $\frac{\omega}{r}$ постійне вздовж ліній течій, тобто

$$\omega = rF(\psi), \quad (1.2.3)$$

F – довільна функція.

1.3 Кільцевий вихор

Нехай у нас є кільцевий вихор радіуса r_0 . [4,5,6]. Розглянемо циліндричну систему координат O, x, r, θ , початок якої співпадає з центром вихору. Нехай інтенсивність вихору Γ_+ не змінюється за змінною кута θ . Знайдемо радіальну і вісєву компоненти швидкості, викликані кільцевим вихором в точці з координатами (x, r) .

Введемо безрозмірні координати:

$$\bar{x} = \frac{x}{b}, \quad \bar{r} = \frac{r}{b}, \quad \bar{r}_0 = \frac{r_0}{b}, \quad (1.3.1)$$

де b – деякий характерний лінійний розмір.

У вісєсиметричному випадку розглядаємо довільну меридіональну площину. Швидкість, викликана вихором в точці, яка не лежить на осі вихору, дорівнює:

$$w = \frac{\Gamma_+}{4\pi q}, \quad (1.3.2)$$

де q – відстань від точки на площині до осі вихору.

Введемо безрозмірну циркуляцію і швидкість:

$$\Gamma_+ = V_\infty b \Gamma, \quad (1.3.3)$$

$$w = \frac{V_\infty \Gamma}{4\pi} v, \quad (1.3.4)$$

де v – безрозмірна швидкість.

Знайдемо потенціал швидкостей кільцевого вихору. Використаємо функцію течії:

$$\psi = \frac{\Gamma_+ \bar{r} \bar{r}_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta) d\theta}{(\bar{x}^2 + \bar{r}_0^2 + \bar{r}^2 - 2\bar{r}_0 \bar{r} \cos(\theta))^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.3.5)$$

враховуючи, що

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{r}}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}}. \quad (1.3.6)$$

Після перетворень отримаємо:

$$\phi = -\frac{\Gamma_+ \bar{r} \bar{r}_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\bar{r}_0 - \bar{r} \cos(\theta)) d\theta}{(\bar{r}_0^2 + \bar{r}^2 - 2\bar{r}_0 \bar{r} \cos(\theta)) (\bar{x}^2 + \bar{r}_0^2 + \bar{r}^2 - 2\bar{r}_0 \bar{r} \cos(\theta))^{\frac{1}{2}}} - \frac{\Gamma}{4}. \quad (1.3.7)$$

Використовуючи потенціал ϕ (1.3.7), який може бути вираженням через еліптичні інтеграли, отримаємо наступні формули для безрозмірних швидкостей:

$$V_x = \frac{1}{4\pi \sqrt{(\bar{x} - \bar{x}_{0j})^2 + (\bar{r} + \bar{r}_{0j})^2}} \left(\frac{2 - k^2}{1 - k^2} * E - 2 * K - \frac{\bar{r}_{0j}}{\bar{r}} * \frac{k^2}{1 - k^2} * E \right), \quad (1.3.8)$$

$$V_r = \frac{(\bar{x} - \bar{x}_{0j})}{4\pi \bar{r} \sqrt{(\bar{x} - \bar{x}_{0j})^2 + (\bar{r} + \bar{r}_{0j})^2}} \left(\frac{2 - k^2}{1 - k^2} * E - 2 * K \right), \quad (1.3.9)$$

$$\vec{V}(x, y, x_{0j}, r_{0j}) = (V_x, V_y), \quad (1.3.10)$$

де K, E – еліптичні інтеграли 1 та 2 роду:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad (1.3.11)$$

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \quad (1.3.12)$$

де k – “модуль”:

$$k^2 = \frac{4\bar{r}\bar{r}_0}{(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + (\bar{r} + \bar{r}_0)^2}, \quad (1.3.13)$$

Властивості:

$$V_x(-\bar{x}, \bar{r}, \bar{x}_{0j}, \bar{r}_{0j}) = V_x(\bar{x}, \bar{r}, \bar{x}_{0j}, \bar{r}_{0j}), \quad (1.3.14)$$

$$V_r(-\bar{x}, \bar{r}, \bar{x}_{0j}, \bar{r}_{0j}) = -V_r(\bar{x}, \bar{r}, \bar{x}_{0j}, \bar{r}_{0j}), \quad (1.3.15)$$

Граничні значення:

$$V_x(\bar{x}, 0, \bar{x}_{0j}, \bar{r}_{0j}) = -\frac{2\pi\bar{r}_{0j}^2}{(\bar{x}^2 + \bar{r}_{0j}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.3.16)$$

$$V_r(\bar{x}, \bar{r}, \bar{x}_{0j}, \bar{r}_{0j}) = 0, \quad (1.3.17)$$

$$V_r(\bar{x}, 0, \bar{x}_{0j}, \bar{r}_{0j}) = 0, \quad (1.3.18)$$

1.4 Потенційні течії з кільцевими вихорами

Математична модель процесу чехарди вихорів

Розглядається задача, де декілька кільцевих вихорів діють один на одного.

Нехай векторне поле швидкості $\vec{V}_\infty = (0, 0)$.

Позначимо координати центрів вихорів як

$$(x_{0,i}, r_{0,i}), \quad i = \overline{1, N}$$

, де N – кількість вихорів.

Будемо вважати, що вихори діють один на одного, але не на себе. Для нашої задачі справедливе рівняння Коші:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} \\ \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \end{cases}$$

, де \vec{r} – радіус-вектор положення вихору, \vec{V} – швидкість руху, \vec{r}_0 – початковий радіус-вектор положення.

Маємо:

$$\begin{cases} \frac{r_{0,i}^{k+1} - r_{0,i}^k}{\Delta t} = \vec{V}(r_{0,i}^k), \\ \vec{r}_{0,i}(t_0) = \vec{r}_{0,i} \end{cases}, \quad i = \overline{1, N}$$

$$\vec{V}(r_{0,i}^k) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{V}_j(x_{0,k}, \Gamma_{0,k}, x_{0,i}, \Gamma_{0,i}), \quad i = \overline{1, N}$$

$$r_{0,i}^k = r_{0,i}(t_k), \quad i = \overline{1, N}$$

\vec{V}_j з пункту (1.3.10),

Тоді маємо:

$$r_{0,i}^{k+1} = r_{0,i}^k + \vec{V}(r_{0,i}^k) * \Delta t, \quad i = \overline{1, N}$$

Результати тестового моделювання кінематики кільцевих вихорів

1. 2 вихори

Нижче представлені результати моделювання двох вихорів однакової інтенсивності $\Gamma = -1$.

На рис. 1.4.1 представлено початкові координати двох вихорів:

$$x_1 = 1, r_1 = 1, \quad x_2 = 1, r_2 = 2$$

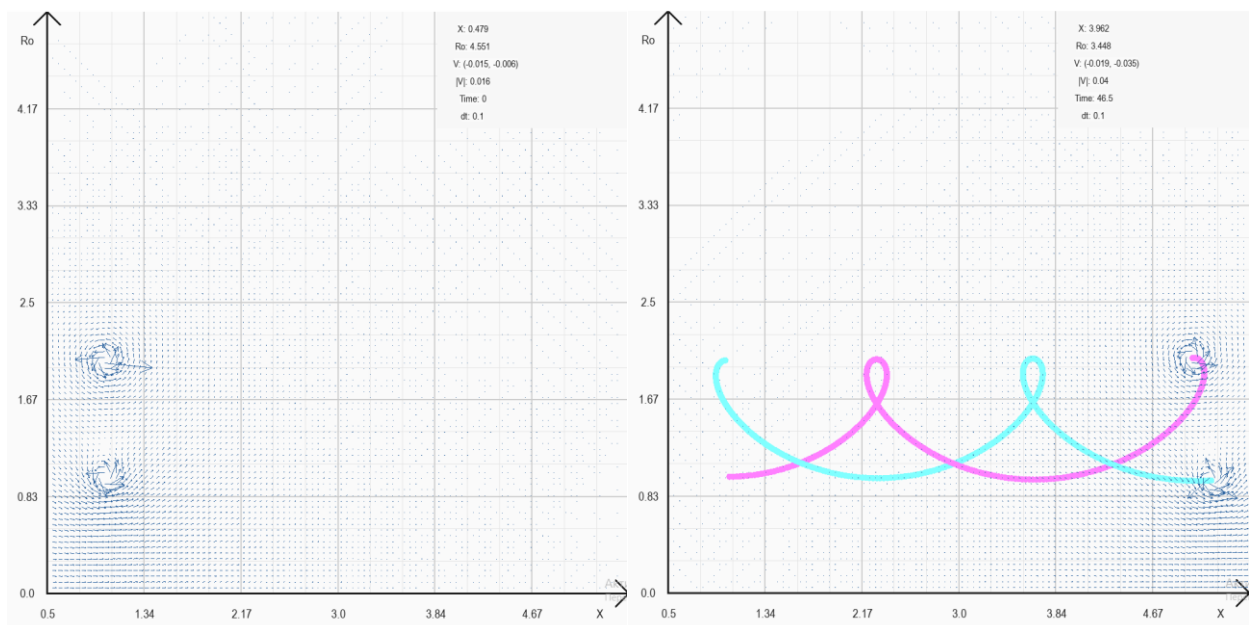


Рис. 1.4.1. Векторне поле швидкостей у початковий момент часу

Рис. 1.4.2. Векторне поле швидкостей та траєкторії руху вихорів у кінцевий момент часу

При заданих параметрах спостерігається періодичний рух (рис. 1.4.2).

На рис. 1.4.3 представлено початкові координати двох вихорів, які знаходяться в одній площині:

$$x_1 = 1, r_1 = 1.5, \quad x_2 = 1, r_2 = 2$$

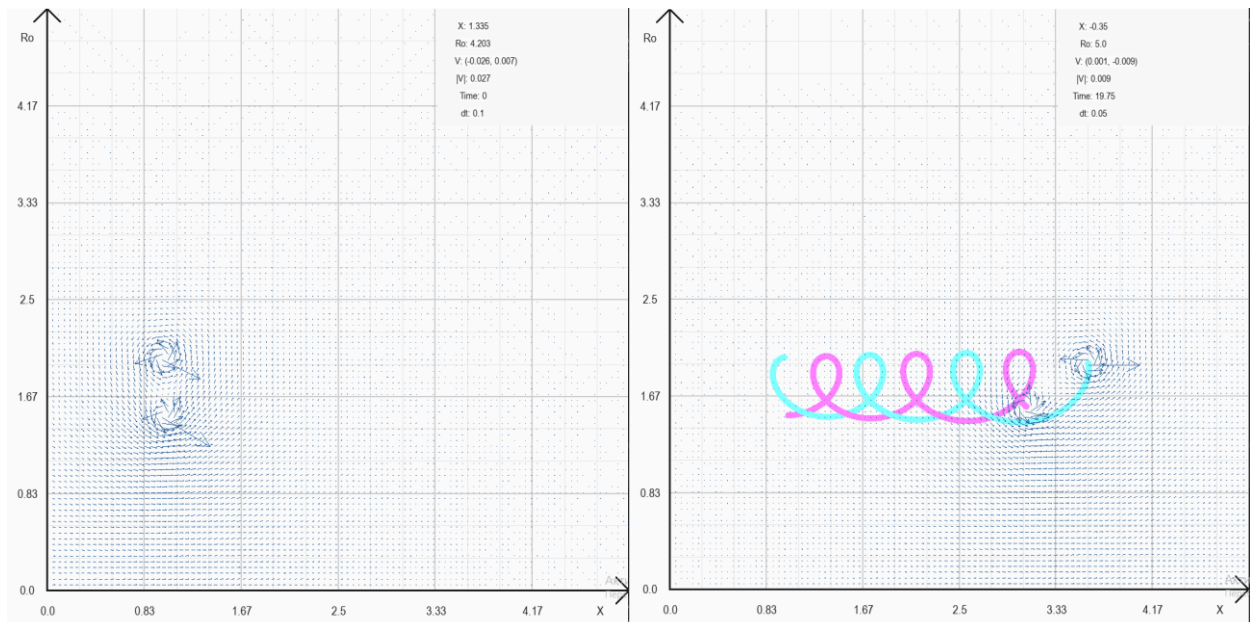


Рис. 1.4.3. Векторне поле швидкостей у початковий момент часу.

Рис. 1.4.4. Векторне поле швидкостей та траєкторії руху вихорів у кінцевий момент часу.

В усіх випадках маємо зміну періоду, але періодичність процесу зберігається.

Нижче представлено динаміку вихорів з початковим розміщенням в горизонтальній площині:

$$x_1 = 1, r_1 = 1, \quad x_2 = 1.5, r_2 = 1$$

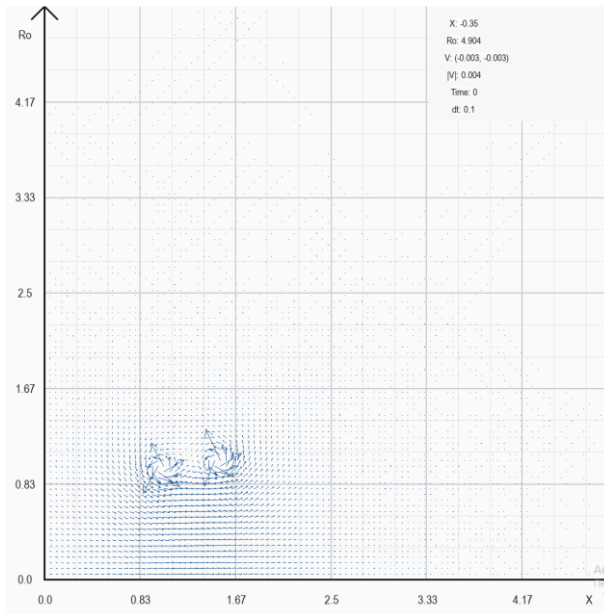


Рис. 1.4.5. Векторне поле швидкостей у початковий момент часу.

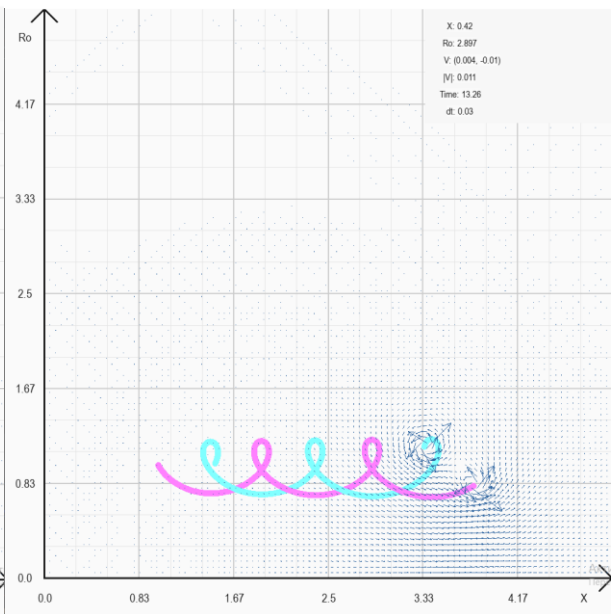


Рис. 1.4.6. Векторне поле швидкостей та траєкторії руху вихорів у кінцевий момент часу.

При заданих параметрах спостерігається періодичний рух (рис. 1.4.6).

2. N-вихорів

Нижче представлено результат моделювання чехарди 40 вихорів, які апроксимують циліндричну поверхню. Розмістимо вихори рівномірно між:

$$x_1 = 1, \quad x_{40} = 2, \quad r = 1, \quad \Gamma = -\frac{1}{N}, \quad N = 40$$

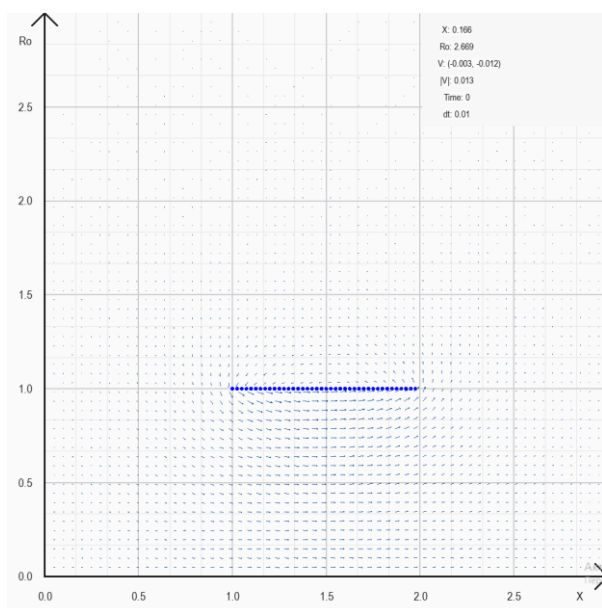


Рис. 1.4.7. Векторное поле швидкостей у момент часу $\tau = 0$.

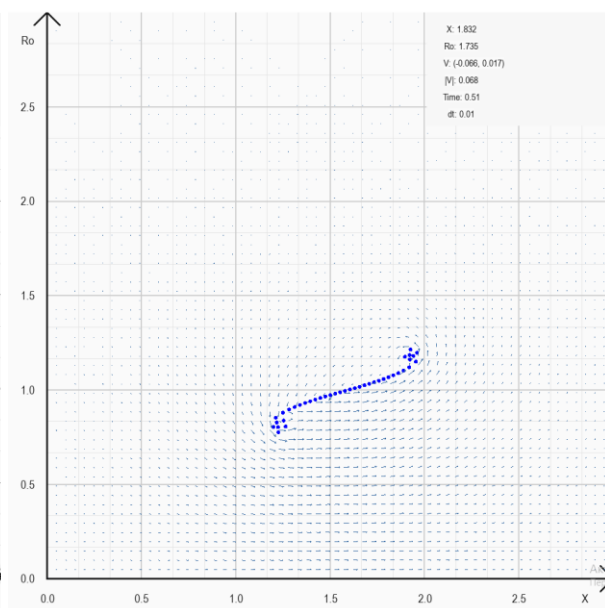


Рис. 1.4.8. Векторное поле швидкостей у момент часу $\tau = 0.5$.

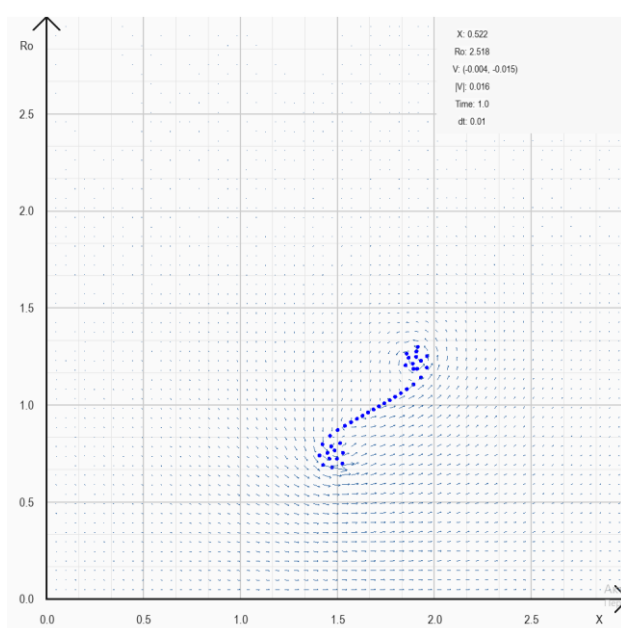


Рис. 1.4.9. Векторное поле швидкостей у момент часу $\tau = 1$.

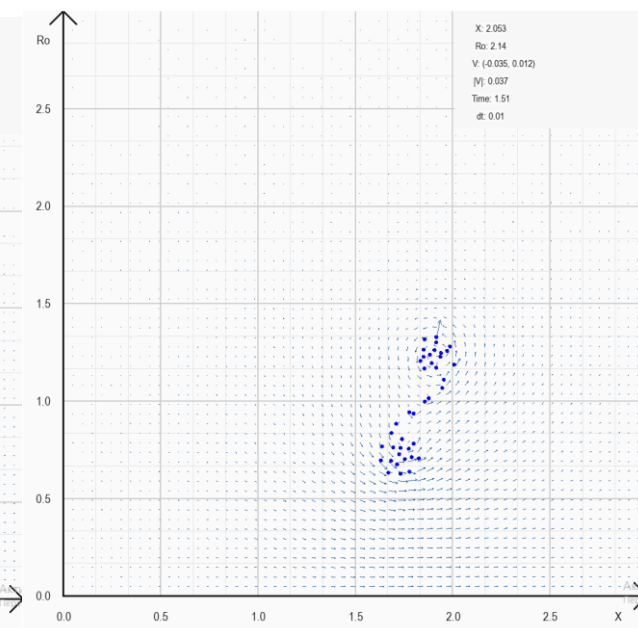


Рис. 1.4.10. Векторное поле швидкостей у момент часу $\tau = 1.5$.

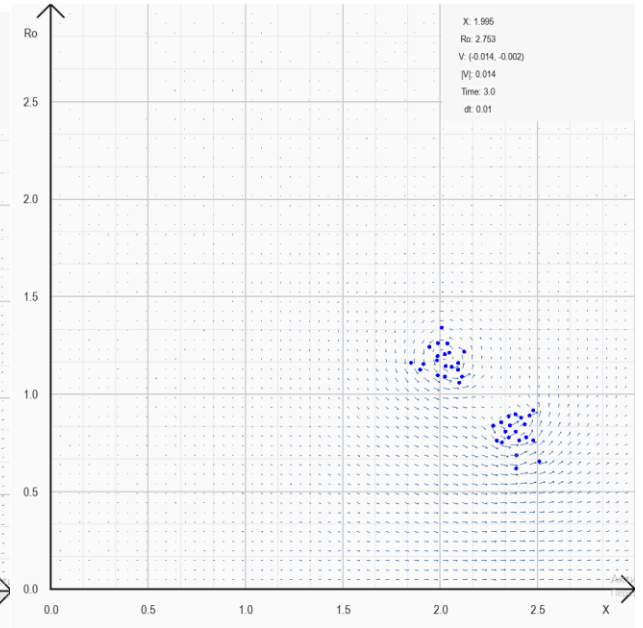
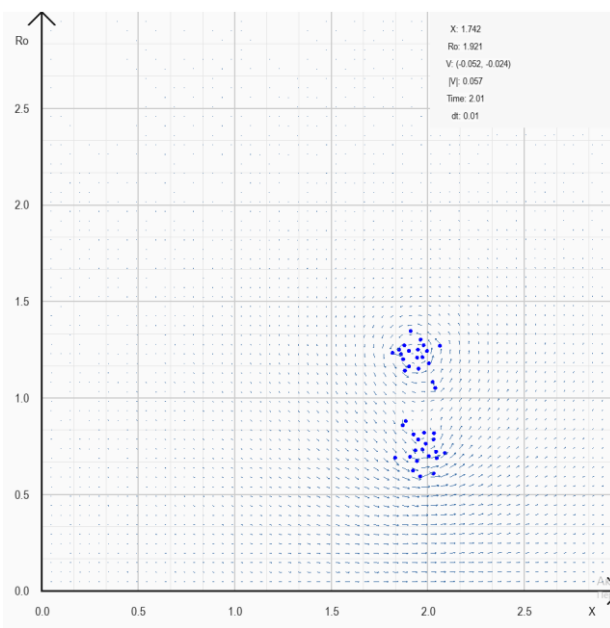


Рис. 1.4.11. Векторне поле швидкостей у момент часу $\tau = 2$. *Рис. 1.4.12. Векторне поле швидкостей у момент часу $\tau = 3$.*

У меридіональній площині спостерігається закручування вихорів та утворення двох спіралей (рис. 1.4.8-1.4.10). Далі плавне переміщення двох згрупованих купок вихорів з постійним обертанням (рис. 1.4.11-1.4.12).

1.5 Теорія ідеального пропелера

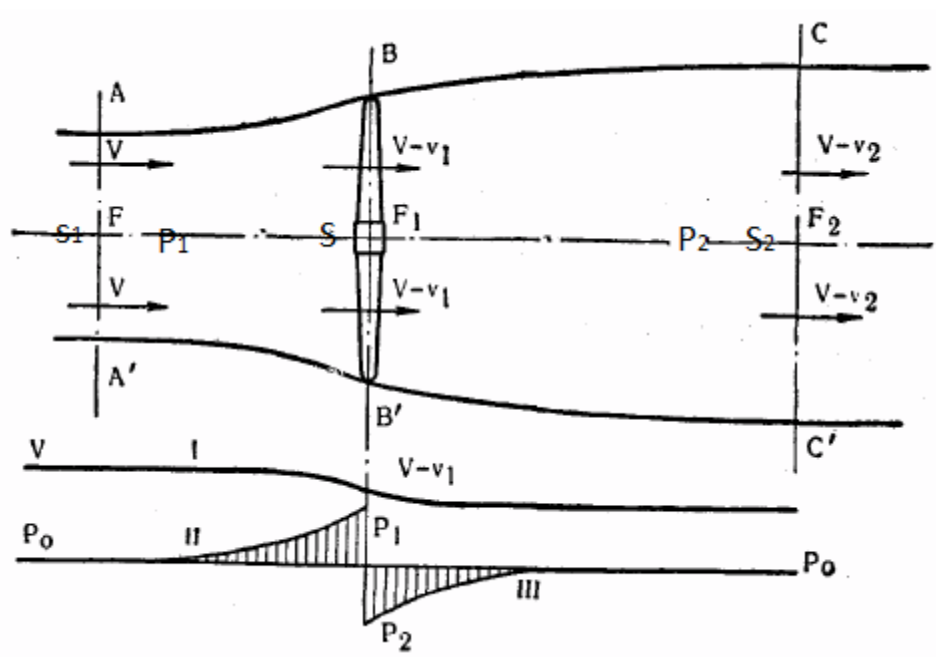


Рис. 1.5.1 Схема потоку рідини біля пропелера. S_1 – площа внутрішнього потоку на нескінченності, S_2 – на виході на нескінченності, S – на вході в пропелер, v_i – швидкості, p_i – тиски на нескінченності.

Розглянемо ідеальний пропульсивний рушій (пропелер) [5]. у випадку встановленого неперервного адиабатного обтікання потоком ідеальної нестисливої рідини. Нехай, під час роботи такого приладу утворюється потік, к якому оберненим шляхом підводиться механічна енергія у вигляді роботи сил, які діють на рідину зі сторони тіл цього приладу.

Тягою цього приладу назвемо сумарну силу взаємодії зовнішнього потоку і внутрішньої струї на пропелер в цілому. Прийmemo, що в нескінченності статичний тиск вирівнюється і в січеннях S_1 та S_2 на нескінченності у внутрішньому потоці швидкості однакові по січеннях, причому далеко спереду в набігаючому потоці характеристики внутрішнього і зовнішнього потоків співпадають.

За тілом на нескінченності у внутрішньому та у зовнішньому потоках в границі із рівності тиску і ентропії в частинках слідує рівність густини і температури. Тоді, для внутрішнього потоку в січеннях S_1 та S_2 маємо:

$$p_1 = p_2, \quad \rho_1 = \rho_2, \quad T_1 = T_2$$

За рахунок роботи внутрішніх сил:

$$v_1 \neq v_2$$

Для сумарної сили тяги R та енергії W маємо:

$$W = G \frac{(v_2^2 - v_1^2)}{2}, \quad R = G(v_2 - v_1), \quad (1.5.1)$$

Отже, в цьому випадку ідеальний літальний та пропульсивний к.к.д дорівнюють відповідно:

$$\eta = \frac{R * v_1}{W}$$

$$\eta = \frac{2}{1 + \frac{v_2}{v_1}}, \quad (1.5.2)$$

Очевидно, що при $\eta \rightarrow 1$, при $v_2 \rightarrow v_1$.

Ведемо в якості характеристики гвинта чи компресора коефіцієнт навантаження:

$$B = \frac{2R}{\rho_1 v_1^2 S}$$

, де S – проща входу у компресор або площа внутрішньої струї на вході в рушій. Прийmemo, що S дорівнює площі круга, який окреслюють лопаті гвинта.

Можна переписати B у вигляді:

$$B = \frac{2R}{\rho_1 v_1^2 S_1} \varphi = 2\varphi \left(\frac{v_2}{v_1} - 1 \right), \quad (1.5.3)$$

, де $\varphi = S_1/S$. Введемо коефіцієнт навантаження B в формулу (1.5.2), отримаємо:

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{B}{4\varphi}}, \quad (1.5.4)$$

Коефіцієнт витрати φ , залежить від геометричних особливостей форм рушії та від режиму його роботи. Дивлячись на формулу, можна сказати, що найкращий к.к.д. маємо при найбільшому φ .

У випадку нестисливої рідини маємо:

$$p_1^* = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}, \quad p_2^* = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

Отримаємо:

$$\eta = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{p_2^*}{p_1^*} - 1 \right) \frac{2p_1^*}{\rho v_1^2}}}, \quad (1.5.5)$$

Безрозмірне число Ейлера $\frac{2p_1^*}{\rho v_1^2}$, аналогічне числу Маха, визначається умовами польоту. В (1.5.5) єдиним параметром, залежним від компресора, є відношення $\pi = \frac{p_2^*}{p_1^*}$; при $\pi \rightarrow 1$ маємо $\eta \rightarrow 1$.

1.6 Течія з насадком Бріггса-Форта

Насадок Бріггса-Форта дозволяє підсилити імпульс середовища, що проходить через гвинт.

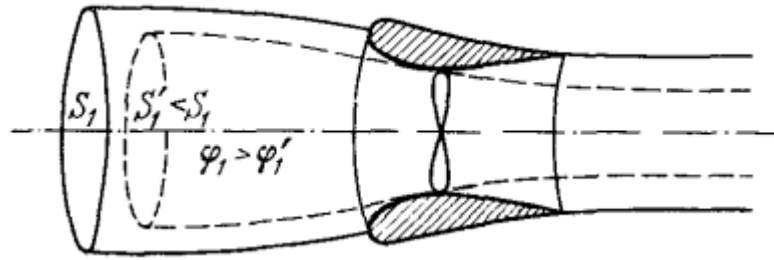


Рис. 1.6.1 Пунктиром показано внутрішній потік без насадку. Звичайною – з насадком.

В формулі (1.5.4) замість відношення π можна задавати φ , необхідне значення якого для гвинта в ідеальному процесі можна забезпечити за допомогою спеціальних кільцевих насадків (насадки Брікса-Корта на водяних гвинтах). За допомогою таких насадків можна збільшити площу потоку, що забирається всередину гвинта. Використання таких насадків може бути корисним при великих значеннях коефіцієнтів навантаження B . В реальних задачах, використання насадків може збільшити тягу до 50%, а к.к.д. – до 60%, що є дуже корисним, але ускладнює обрахунки та моделювання із-за додаткового опору.

Коефіцієнт φ можна визначити, коли дію гвинта можна звести к дії, зовнішніх сил, розподілених по диску гвинта, в припущенні, що осьова швидкість v' на диску гвинта постійна. Позначемо p'_2 та p'_1 тиск на різних сторонах диску. Маємо:

$$v' \int_S (p'_2 - p'_1) d\sigma = Rv' = G(v_2 - v_1)v' = \frac{G}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

Звідси маємо:

$$v' = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

З рівняння витрат знайдемо

$$v'S = \frac{v_1 + v_2}{2} S = v_1 S_1 \text{ або } \varphi = \frac{S_1}{S} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_2}{v_1} + 1 \right)$$

Підставляючи це значення для φ в (1.5.3), отримаємо:

$$B = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 - 1 \text{ або } \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + B}.$$

Для η за (1.5.2), маємо:

$$\eta = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + B}}, \quad (1.6.6).$$

Таким чином $\eta = 1$ при $B = 0$. При заданій тязі R , та швидкості v_1 , для зменшення B необхідно збільшувати S , але із-за потреб міцності та можливості виникнення кавітації змушують обмежити діаметр гвинтів. За допомогою водяних насадків, при великих значеннях B можна отримати к.к.д більше ніж за формулою (1.6.6).

РОЗДІЛ 2

ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ТА МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНОЇ ТЕЧІЇ.

2.1. Постановки задач

Розглядається задача відривного обтікання довільного вісесиметричного замкнутого тіла потоком ідеальної нестисливої рідини, яка рухається з заданою швидкістю [4,5,6,7].

Нехай маємо

Вважаємо, що існує така скалярна функція $\varphi(x, y, r)$, що векторне поле швидкості $\vec{V}(x, y, r) = \nabla\varphi(x, y, r)$.

У вісесиметричній області існують межі L_x типів: поверхня L_d та вихоровий слід L_v - поверхні тангенціального розриву швидкості. Поза L_v, L_d , функція φ задовільняє умови:

2.1.1. Течія з перешкодою

Для нашої задачі справедливе рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0$$

$$\forall x, y, r \in D$$

Умова непроникності:

$$(\nabla\varphi) * \vec{n} = 0$$

де \vec{n} - орт нормалі к поверхні L_d в досліджуванній точці.

Течія потенційна:

Течія на нескінченності має сталу скінченну швидкість:

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} \nabla \varphi = \vec{V}_{\infty}$$

$|r|$ - відстань від контуру,

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + r^2}$$

Умова неперервності нормальної складової вектора швидкості на вільній рухомій межі L_v :

$$\frac{\partial \varphi^+}{\partial n} \Big|_{L_v} = \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} \Big|_{L_v}.$$

Умова неперервності тиску при перетині вільної рухомої межі L_v :

$$p^+ \Big|_{L_v} = p^- \Big|_{L_v}.$$

2.1.2 Течія з ідеальним пропелером без насадку

Для нашої задачі справедливе рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0$$

$$\forall x, y, r \in D$$

На диску ідеального пропелера:

$$(\nabla \varphi) * \vec{n}^{pr} = -\kappa * |\vec{V}_{\infty}|$$

де \vec{n}_p - орт нормалі к пропелеру.

Течія потенціальна:

Течія на нескінченності має сталу скінченну швидкість:

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} \nabla \varphi = \vec{V}_{\infty}$$

$|r|$ - відстань від контуру,

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + r^2}$$

Умова неперервності нормальної складової вектора швидкості на вільній рухомій межі L_v :

$$\frac{\partial \varphi^+}{\partial n} \Big|_{L_v} = \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} \Big|_{L_v}.$$

Умова неперервності тиску при перетині вільної рухомої межі L_v :

$$p^+ \Big|_{L_v} = p^- \Big|_{L_v}.$$

2.1.3 Течія з ідеальним пропелером у насадку Бріггса-Форта

Для нашої задачі справедливе рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0$$

$$\forall x, y, r \in D$$

На поверхні насадку виконується **умова непроникності**:

$$(\nabla \varphi) * \vec{n}^b = 0$$

На диску ідеального пропелера:

$$(\nabla \varphi) * \vec{n}^{pr} = -\kappa * |\vec{V}_\infty|$$

де \vec{n}^p - орт нормалі к пропелеру, \vec{n}^b - орт нормалі к насадку.

Течія потенціальна[1,4,5]:

Течія на нескінченності має сталу скінченну швидкість:

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} \nabla \varphi = \vec{V}_\infty$$

$|r|$ - відстань від контуру,

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + r^2}$$

Умова неперервності нормальної складової вектора швидкості на вільній рухомій межі L_v :

$$\frac{\partial \varphi^+}{\partial n} \Big|_{L_v} = \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} \Big|_{L_v}.$$

Умова неперервності тиску при перетині вільної рухомої межі L_v :

$$p^+|_{L_v} = p^-|_{L_v}.$$

2.2 Математичні моделі

Дискретизована математична модель [1,3]. для визначення швидкості течії визначається формулою:

$$\begin{aligned} \vec{V}(x, r, t_{n+1}) = & \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \vec{V}_j(x, r, x_{0j}, r_{0j}) + \\ & + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \vec{V}_j(x, r, x_i^p(t_{n+1}), r_i^p(t_{n+1})), \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

де

$$\vec{V}_j(x, r, x_{0j}, r_{0j}) = (V_x, V_r),$$

де V_x, V_r за (1.3.8, 1.3.9)

Математична модель для змінного у часі просторового потенціалу, в області зі змінною межею визначається задачею:

$$\frac{\partial(\varphi^+ - \varphi^-)}{\partial t} |_{r_v} = 0, \quad \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t) \quad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} = V(\vec{r}_v, t) \quad (2.2.3)$$

$$t = t_0: L_0 = L_d(t_0) + L_v(t_0) \quad (2.2.4)$$

2.3 Методи чисельних розрахунків.

2.3.1. Чисельний розв'язок течії за перешкодою

Чисельний розв'язок задач будується за допомогою методу дискретних особливостей [1,5]. Почнемо з дискретизації контуру. Розіб'ємо рівномірно контур на M точок:

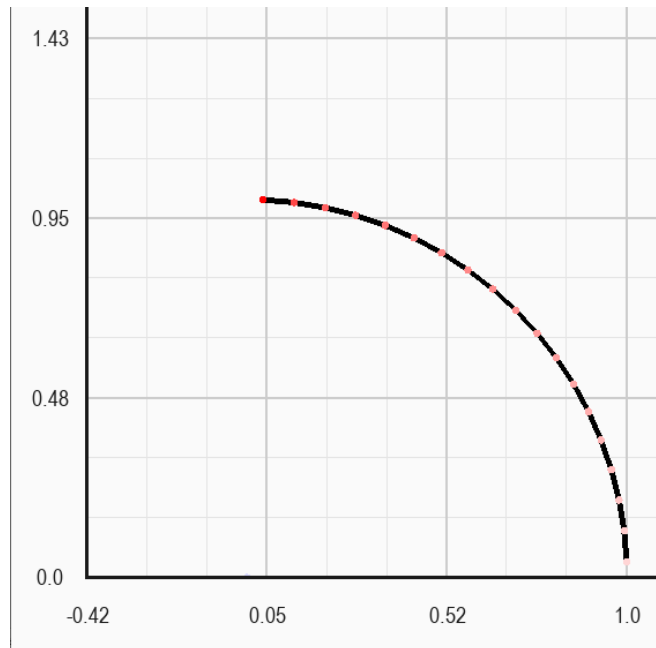


Рис. 3.2.1 дискретизація контуру.

$$(x_{0j}, r_{0j}), j = \overline{1, M}$$

В середині кожного відрізка утворюємо точку колокації

$$(x_k, r_k), k = \overline{1, M-1}$$

$$x_k = \frac{x_{0k} + x_{0(k+1)}}{2}, y_k = \frac{r_{0k} + r_{0(k+1)}}{2}$$

Далі будуємо нормаль у кожній точці колокації:

$$\vec{n}_k(x_k, r_k) = (n_{xk}, n_{rk}) \quad k = \overline{1, M-1}$$

$$n_{xk} = -\frac{(r_{0(k+1)} - r_{0k})}{\sqrt{(x_{0(k+1)} - x_{0k})^2 + (r_{0(k+1)} - r_{0k})^2}}$$

$$n_{rk} = \frac{(x_{0(k+1)} - x_{0k})}{\sqrt{(x_{0(k+1)} - x_{0k})^2 + (r_{0(k+1)} - r_{0k})^2}}$$

Таким чином, чисельний розв'язок задачі зводиться до знаходження вектору Γ . Скористаємося наступною рівністю, що виходить з постановки задачі:

$$(\nabla\varphi) * \vec{n} = 0 \quad (2.2.5)$$

Підставивши \vec{V} з (2.2.1) маємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \left(\vec{n}_k(x_k, r_k) * \vec{V}_j(x_k, r_k, x_{0j}, r_{0j}) \right) = \\ & -\vec{n}_k(x_k, r_k) * \vec{V}_\infty - \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p (\vec{n}_k(x_k, r_k) * \vec{V}_j(x_k, r_k, x_i^p(t_{n+1}), r_i^p(t_{n+1}))) \\ & \quad , k = \overline{1, M-1} \end{aligned}$$

1) Маємо M невідомих змінних Γ_j і $M-1$ рівняння. Доповнивши систему (2.2.6) останнім рівнянням:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \left(\vec{n}_k(x_k, r_k) * \vec{V}_j(x_k, r_k, x_{0j}, r_{0j}) \right) = \\ & = -\vec{n}_k(x_k, r_k) * \vec{V}_\infty - \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p (\vec{n}_k(x_k, r_k) * \vec{V}_j(x_k, r_k, x_i^p(t_{n+1}), r_i^p(t_{n+1}))) \\ & \quad \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) = - \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \end{aligned} \right.$$

2) Для випадку коли кількість точок колокації дорівнює кількості точок дискретизації систему доповнювати не треба, будемо мати M невідомих змінних та M рівнянь

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \left(\vec{n}_k(x_k, r_k) * \vec{V}_j(x_k, r_k, x_{0j}, r_{0j}) \right) = \\ & -\vec{n}_k(x_k, r_k) * \vec{V}_\infty - \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p (\vec{n}_k(x_k, r_k) * \vec{V}_j(x_k, r_k, x_i^p(t_{n+1}), r_i^p(t_{n+1}))) \\ & \quad , k = \overline{1, M} \end{aligned}$$

2.3.2 Чисельний розв'язок течії з ідеальним пропелером з насадком та без

Чисельний розв'язок задачі будується за допомогою методу дискретних особливостей [1,5]. Почнемо з дискретизації контуру. Розіб'ємо рівномірно контур на M точок, але будемо розбивати окремо насадок і пропелер, для того, щоб коректно порахувати нормалі та точки колокації:

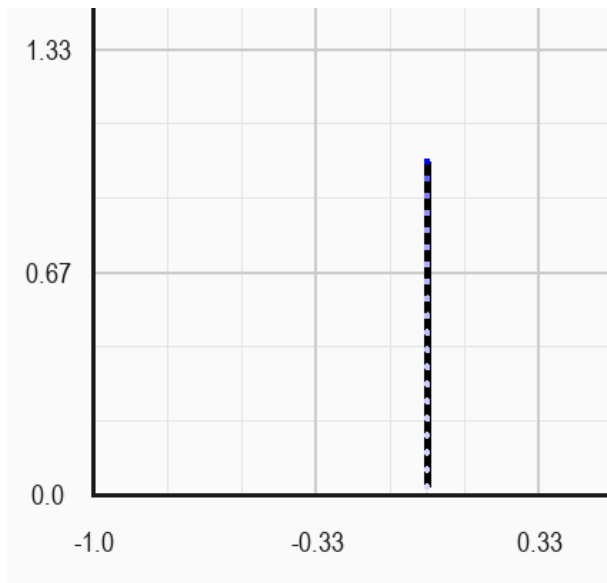


Рис. 2.3.1 дискретизація контуру ідеального пропелера без насадку

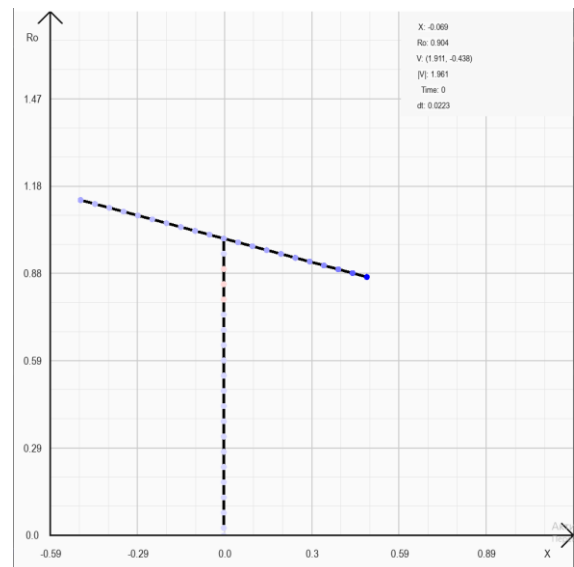


Рис. 2.3.2 дискретизація контуру ідеального пропелера з насадком.

Будемо позначати з верхнім індексом pr – частину пропелера, а з b – частину насадку. Маємо:

$$(x_{0j}^b, r_{0j}^b), j = \overline{1, L}$$

$$(x_{0j}^{pr}, r_{0j}^{pr}), j = \overline{1, Q}$$

$$Q + L = M + 1, \quad Q = L - 1$$

В середині кожного відрізка утворюємо точку колокації

$$(x_k^b, r_k^b), k = \overline{1, L-1}$$

$$x_k^b = \frac{x_{0k}^b + x_{0(k+1)}^b}{2}, y_k^b = \frac{r_{0k}^b + r_{0(k+1)}^b}{2}$$

$$(x_k^{pr}, r_k^{pr}), k = \overline{1, Q-1}$$

$$x_k^{pr} = \frac{x_{0k}^{pr} + x_{0(k+1)}^{pr}}{2}, y_k^b = \frac{r_{0k}^{pr} + r_{0(k+1)}^{pr}}{2}$$

Далі будуємо нормаль у кожній точці колокації:

$$\vec{n}_k^b(x_k^b, r_k^b) = (n_{xk}^b, n_{rk}^b) \quad k = \overline{1, M-1}$$

$$n_{xk}^b = -\frac{(r_{0(k+1)}^b - r_{0k}^b)}{\sqrt{(x_{0(k+1)}^b - x_{0k}^b)^2 + (r_{0(k+1)}^b - r_{0k}^b)^2}}$$

$$n_{rk}^b = \frac{(x_{0(k+1)}^b - x_{0k}^b)}{\sqrt{(x_{0(k+1)}^b - x_{0k}^b)^2 + (r_{0(k+1)}^b - r_{0k}^b)^2}}$$

$$\vec{n}_k^{pr}(x_k^{pr}, r_k^{pr}) = (n_{xk}^{pr}, n_{rk}^{pr}) \quad k = \overline{1, M-1}$$

$$n_{xk}^{pr} = -\frac{(r_{0(k+1)}^{pr} - r_{0k}^{pr})}{\sqrt{(x_{0(k+1)}^{pr} - x_{0k}^{pr})^2 + (r_{0(k+1)}^{pr} - r_{0k}^{pr})^2}}$$

$$n_{rk}^{pr} = \frac{(x_{0(k+1)}^{pr} - x_{0k}^{pr})}{\sqrt{(x_{0(k+1)}^{pr} - x_{0k}^{pr})^2 + (r_{0(k+1)}^{pr} - r_{0k}^{pr})^2}}$$

Коректно побудувавши точки колокації та нормалі до них, об'єднаємо точки дискретизації в один масив:

$$(x_{0j}, r_{0j}), j = \overline{1, M}$$

Швидкість обчислюється за формулами:

$$\vec{V}(x, r, t_{n+1}) = \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \vec{V}_j(x, r, x_{0j}, r_{0j}) + \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \vec{V}_j(x, r, x_i^p(t_{n+1}), r_i^p(t_{n+1})),$$

де $\vec{V}_j(x, r, x_{0j}, r_{0j})$ рахуємо за (1.3.10)

Таким чином, чисельний розв'язок задачі зводиться до знаходження вектору Γ . Скористаємося наступними рівностями, що випливають з постановки задачі:

$$(\nabla\varphi) * \vec{n}^b = 0$$

$$(\nabla\varphi) * \vec{n}^{pr} = -\ell * |\vec{V}_\infty|$$

Підставивши \vec{V} маємо:

$$\sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \left(\vec{n}_k^b(x_k^b, r_k^b) * \vec{V}_j(x_k^b, r_k^b, x_{0j}, r_{0j}) \right) = -(\vec{n}_k^b(x_k^b, r_k^b) * \vec{V}_\infty) - \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p (\vec{n}_k^b(x_k^b, r_k^b) * \vec{V}_j(x_k^b, r_k^b, x_i^p(t_{n+1}), r_i^p(t_{n+1}))), \quad (3.2.1)$$

$$, k = \overline{1, L-1}$$

$$\sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \left(\vec{n}_k^{pr}(x_k^{pr}, r_k^{pr}) * \vec{V}_j(x_k^{pr}, r_k^{pr}, x_{0j}, r_{0j}) \right) = -\ell * |\vec{V}_\infty| - (\vec{n}_k^{pr}(x_k^{pr}, r_k^{pr}) * \vec{V}_\infty) - \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p (\vec{n}_k^{pr}(x_k^{pr}, r_k^{pr}) * \vec{V}_j(x_k^{pr}, r_k^{pr}, x_i^p(t_{n+1}), r_i^p(t_{n+1}))),$$

$$, k = \overline{1, Q}$$

Маємо M невідомих змінних та M рівнянь.

У випадку моделювання ідеального пропелера без насадку використаємо тільки систему рівнянь (3.2.1), з $L-1$ невідомих.

2.3.3 Обрахунок положення вільної рухомої межі L_V

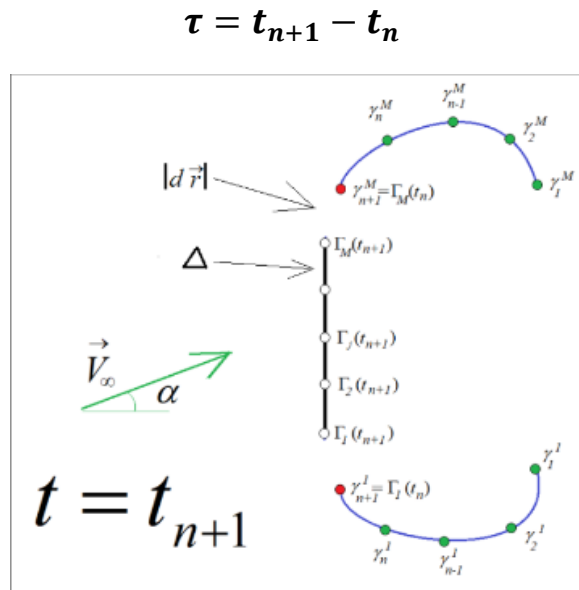


Рис. 3.2.3.

Умова забезпечення рівномірності сітки:

$$|d\vec{r}| = |\vec{V}_n^p| \tau_n \leq \Delta,$$

$$\text{де } \Delta = \sqrt{(x_{1j} - x_{2j})^2 + (r_{1j} - r_{2j})^2}.$$

Отримаємо τ_n із умови:

$$\tau_n = \frac{\Delta}{\max_p |\vec{V}_n^p|}$$

$$t_{n+1} = t_n + \tau_n$$

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{V}_n \tau_n,$$

де r_i – радіус вектор, кожного i -го вихора.

За такою умовою будь-який нескінченно тонкий вихор, що відривається не переміститься на відстань більшу ніж Δ -розмір сітки.

РОЗДІЛ 3

РЕЗУЛЬТАТИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ.

3.1 Результати математичного моделювання обтікання перешкод різної форми

$$V_{\infty} = (1, 0), \quad n = 40$$

3.1.1. Моделювання течії за диском без отвору

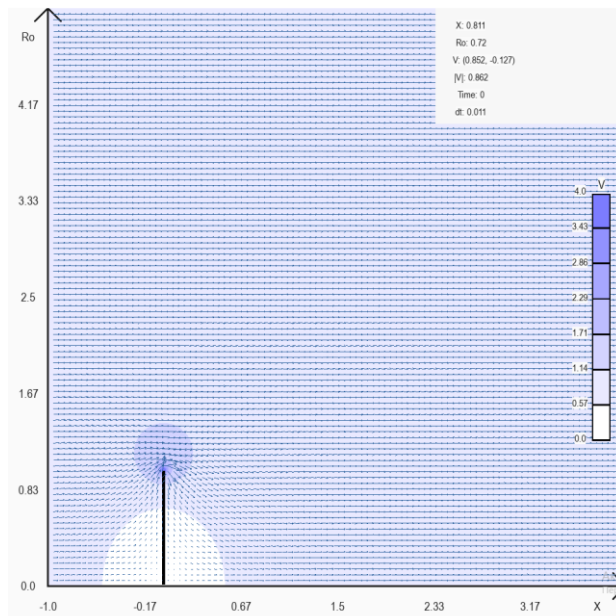


Рис. 3.1.1. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 0$

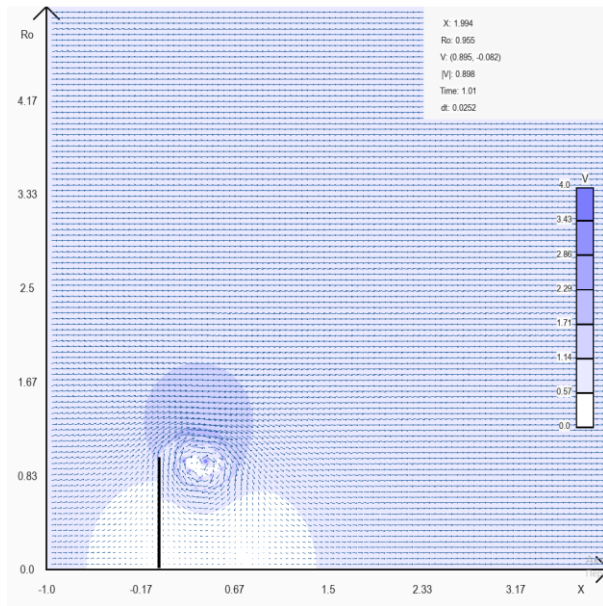


Рис. 3.1.2. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 1$

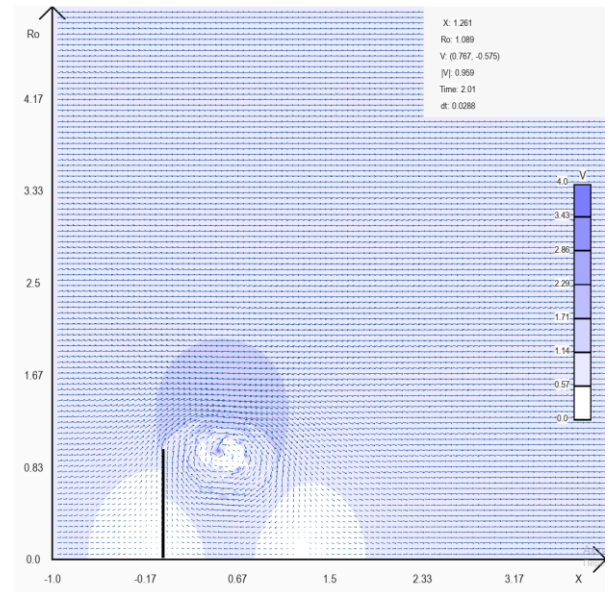


Рис. 3.1.3. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 2$

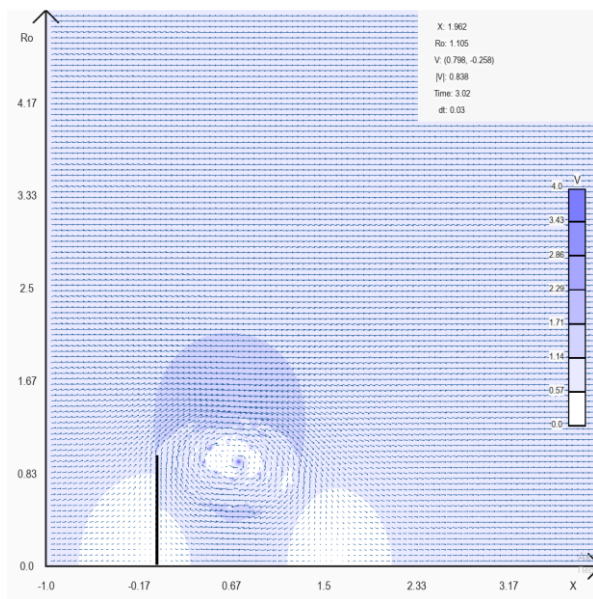


Рис. 3.1.4. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 3$

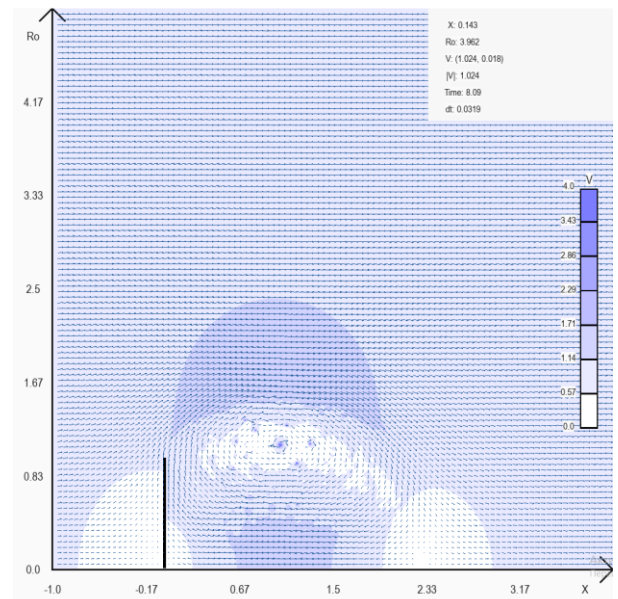


Рис. 3.1.5. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 8$

3.1.2. Моделювання течії за диском з отвором

$$r_0 = 0.25$$

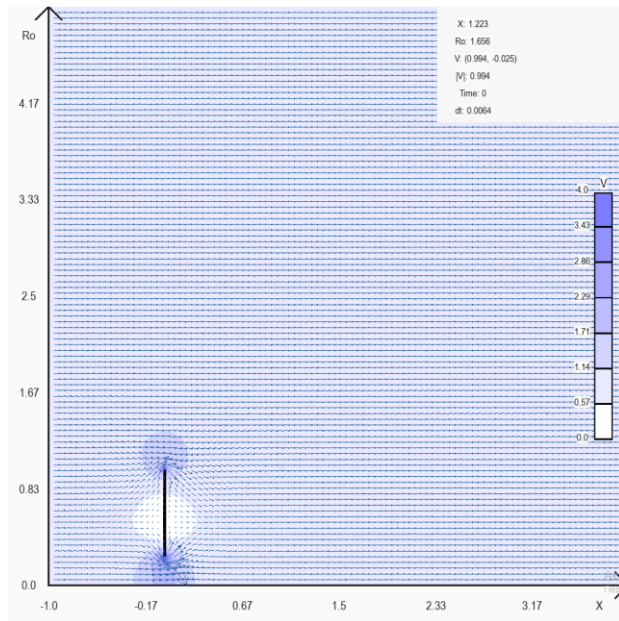


Рис. 3.1.6. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 0$

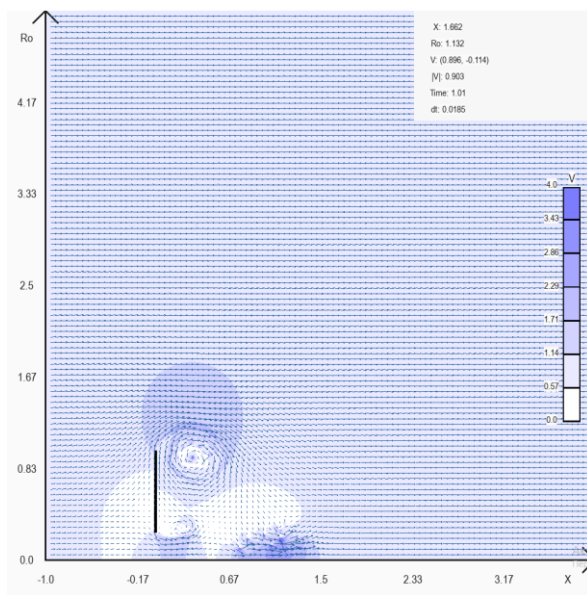


Рис. 3.1.7. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 1$

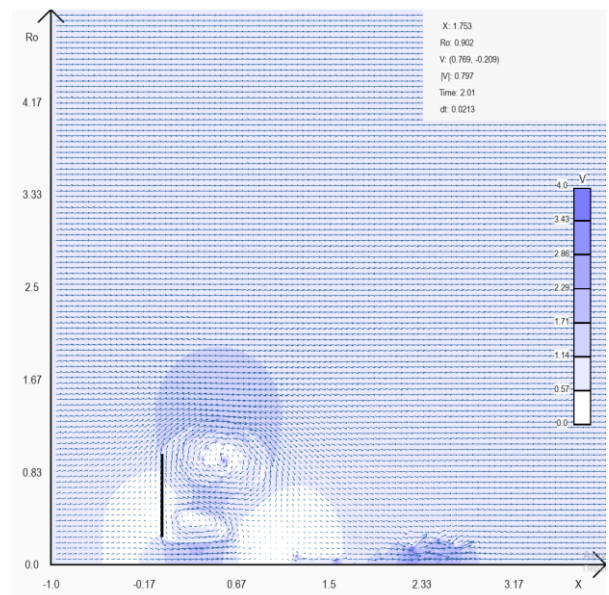


Рис. 3.1.8. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 2$

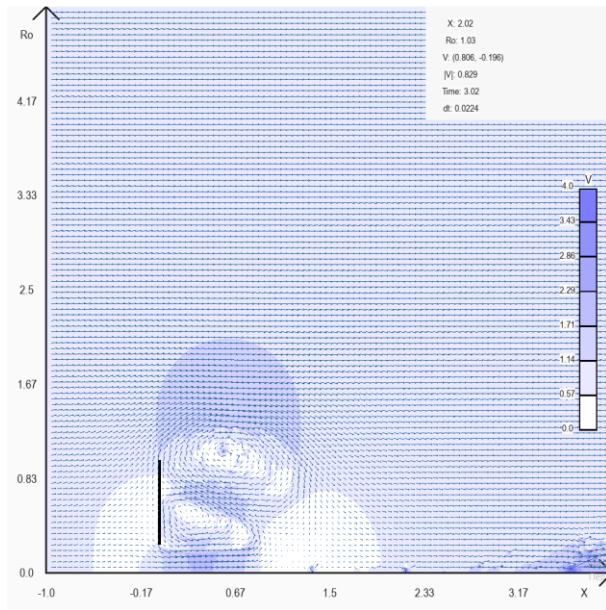


Рис. 3.1.9. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 3$

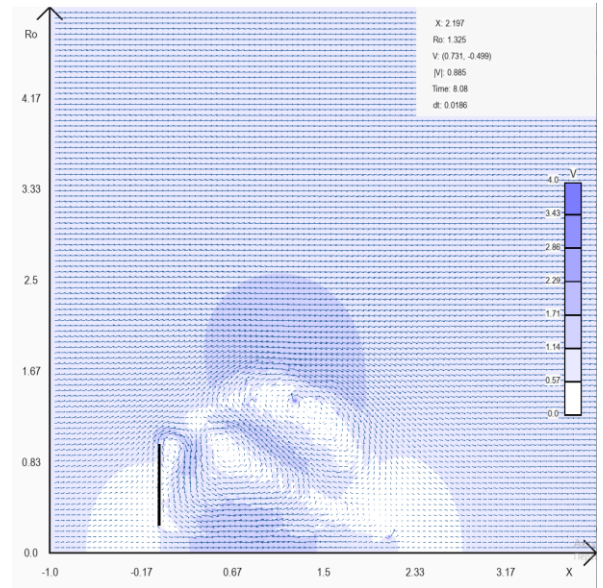


Рис. 3.1.10. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 8$

$$r_0 = 0.5$$

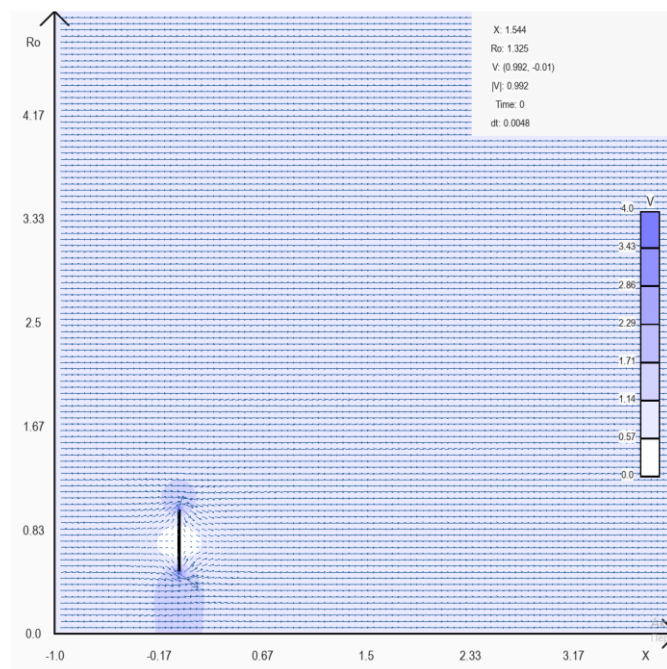


Рис. 3.1.11. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 0$

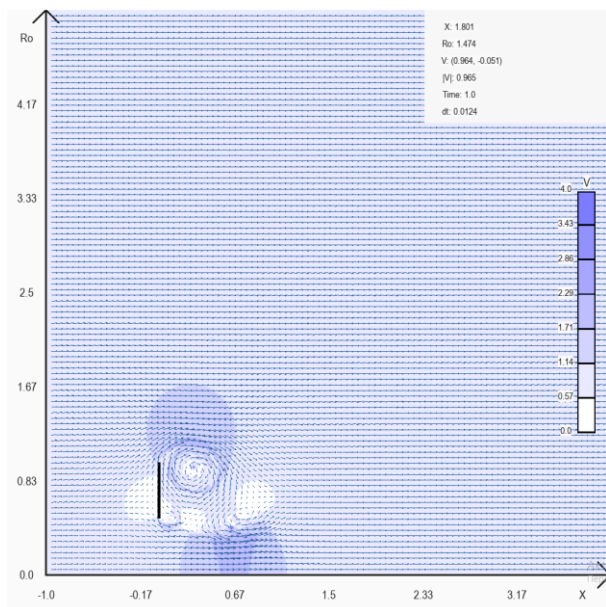


Рис. 3.1.12. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 1$

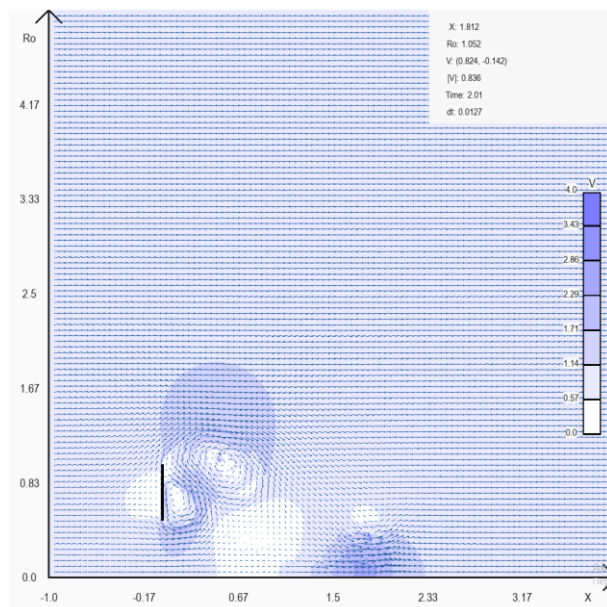


Рис. 3.1.13. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 2$

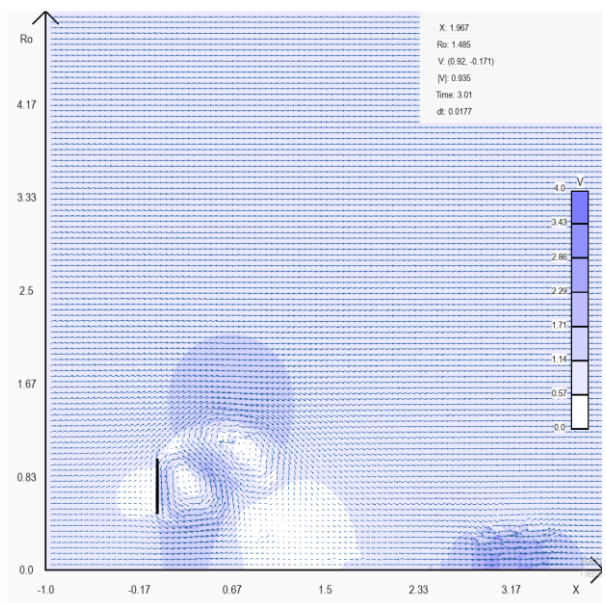


Рис. 3.1.14. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 3$

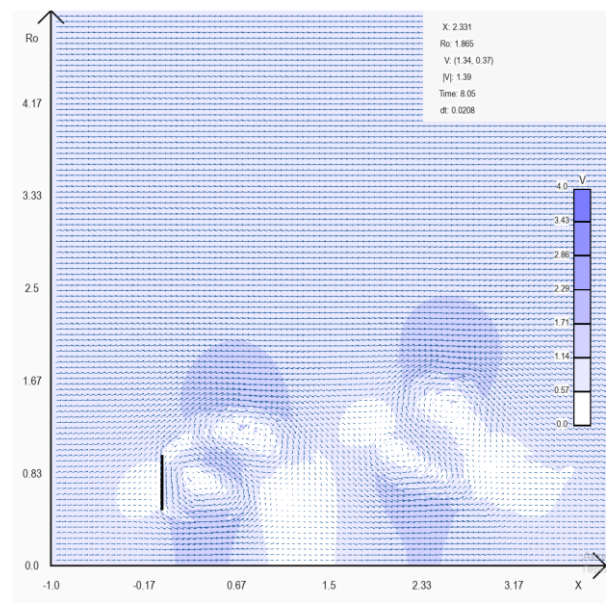


Рис. 3.1.15. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 8$

$$r_0 = 0.75$$

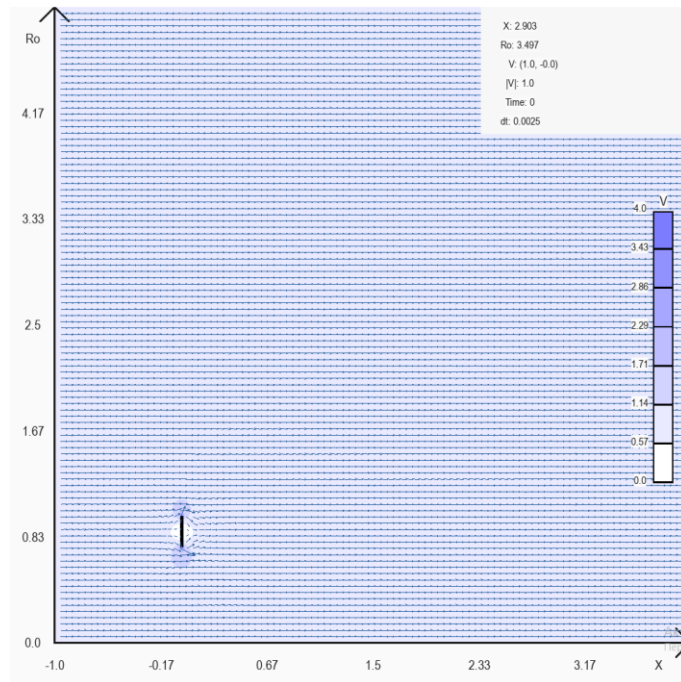


Рис. 3.1.16. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 0$

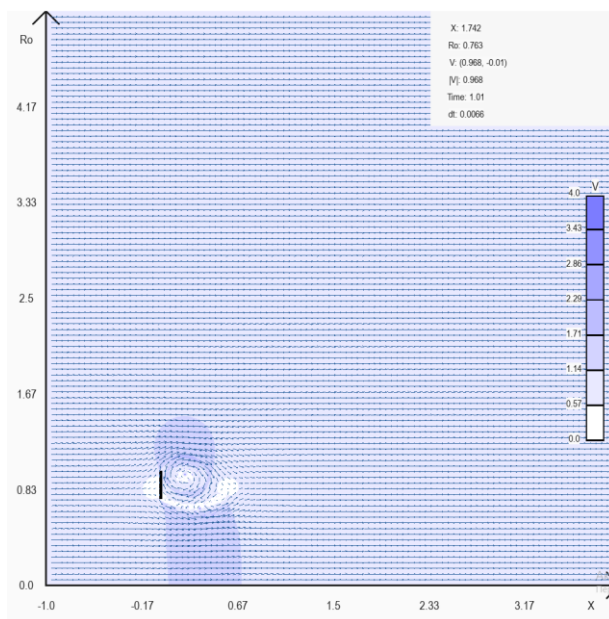


Рис. 3.1.17. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 1$

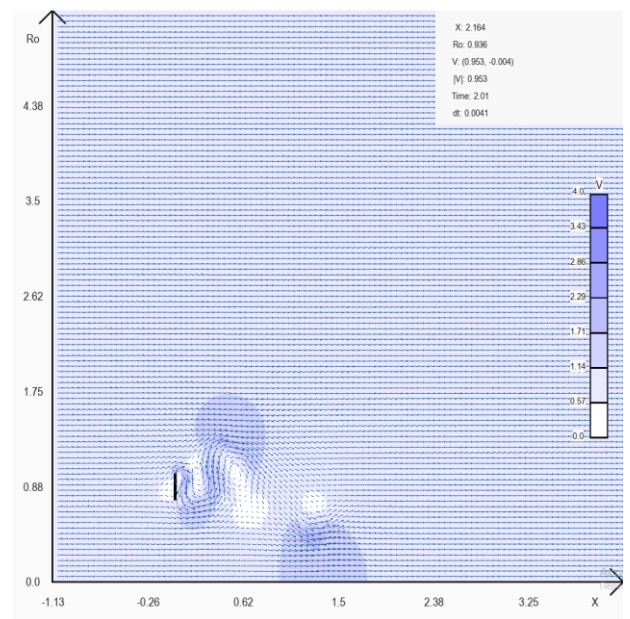


Рис. 3.1.18. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 2$

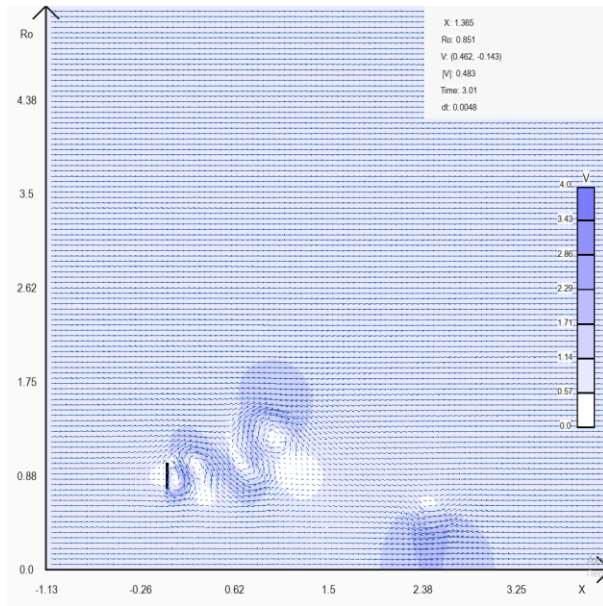


Рис. 3.1.19. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 3$

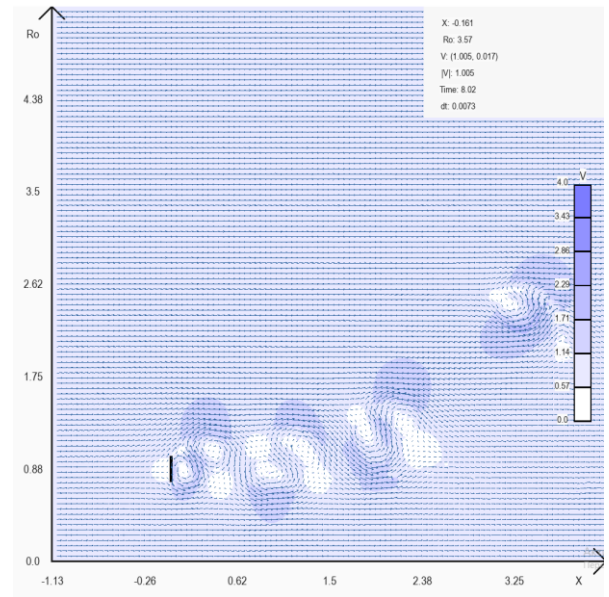


Рис. 3.1.20. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 8$

3.1.3. Моделювання течії навколо конічної перешкоди

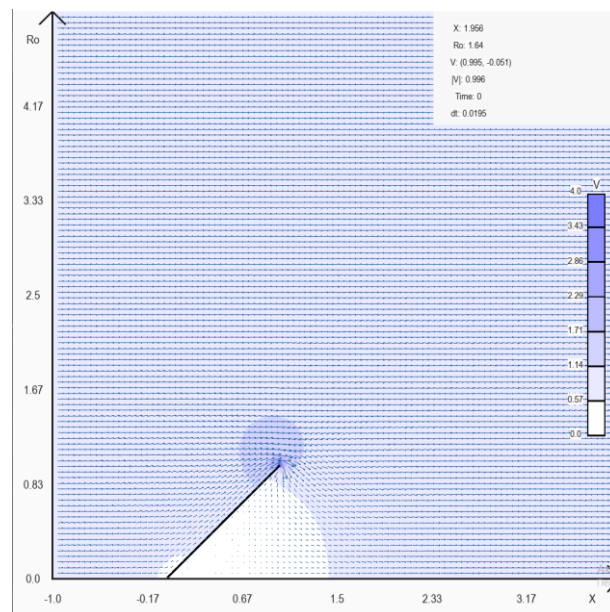


Рис. 3.1.21. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 0$

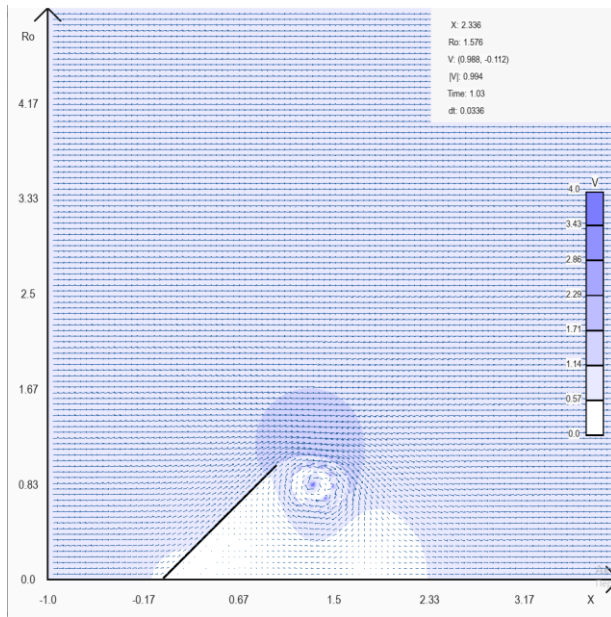


Рис. 3.1.22. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 1$

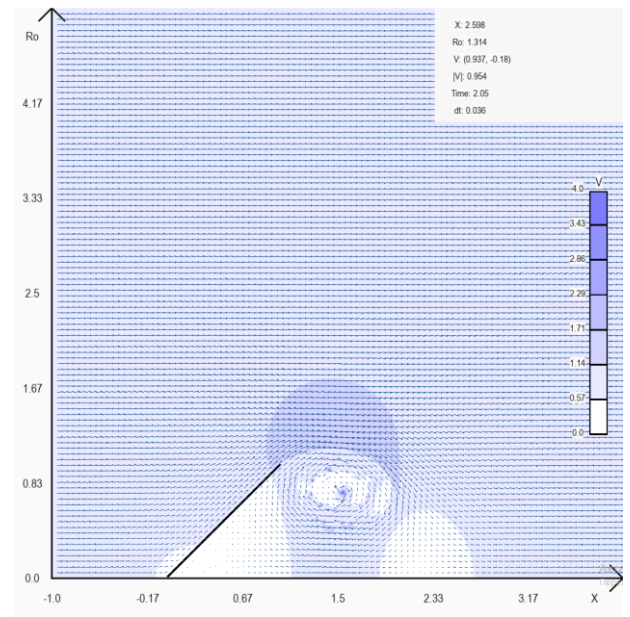


Рис. 3.1.23. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 2$

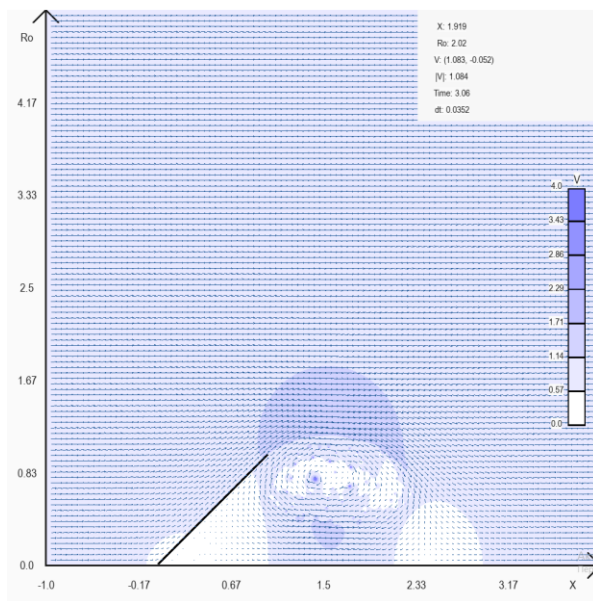


Рис. 3.1.24 Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 3$

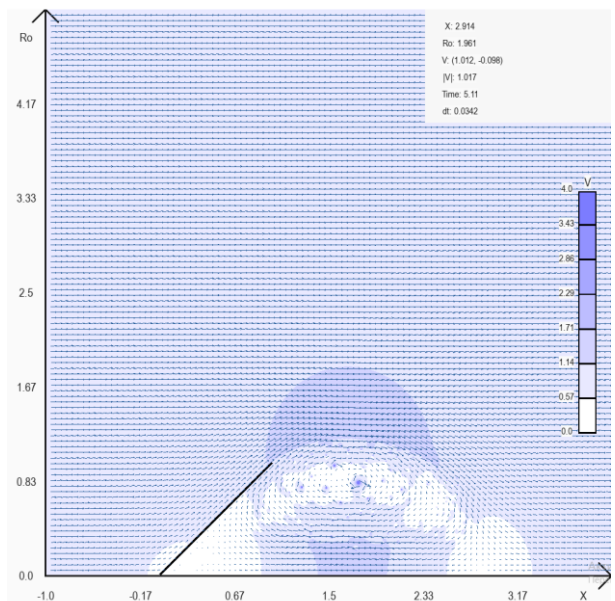


Рис. 3.1.25 Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 5$

3.1.4. Моделювання течії навколо оберненого конусу

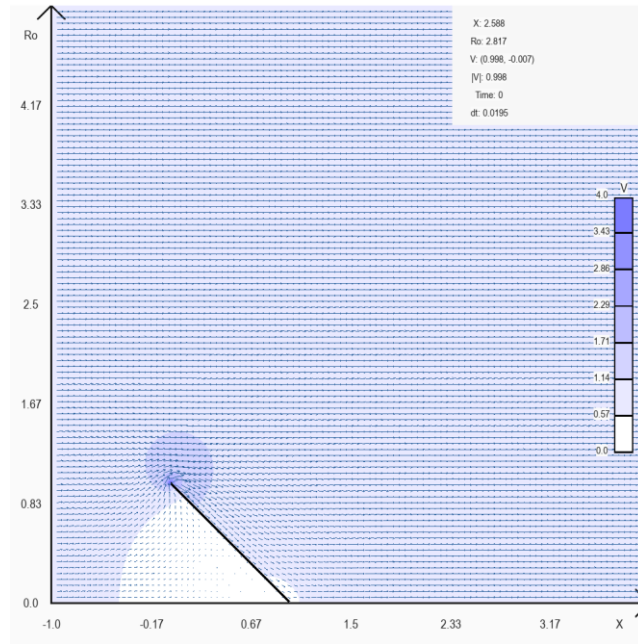


Рис. 3.1.26. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 0$

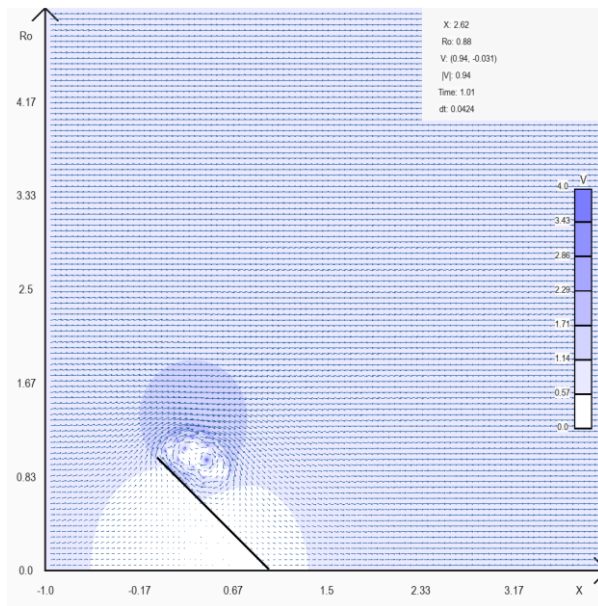


Рис. 3.1.27 Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 1$

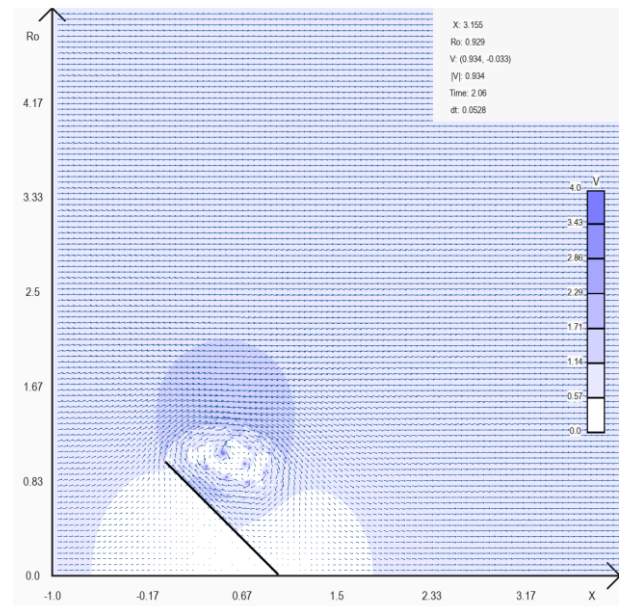


Рис. 3.1.28 Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 2$

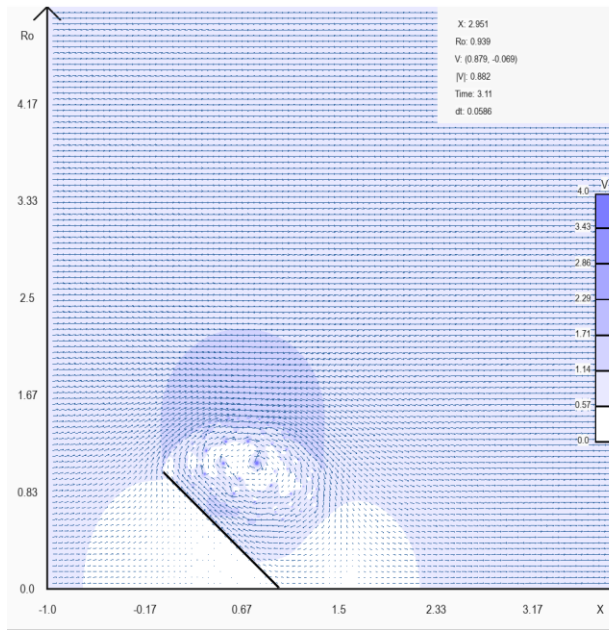


Рис. 3.1.29 Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 3$

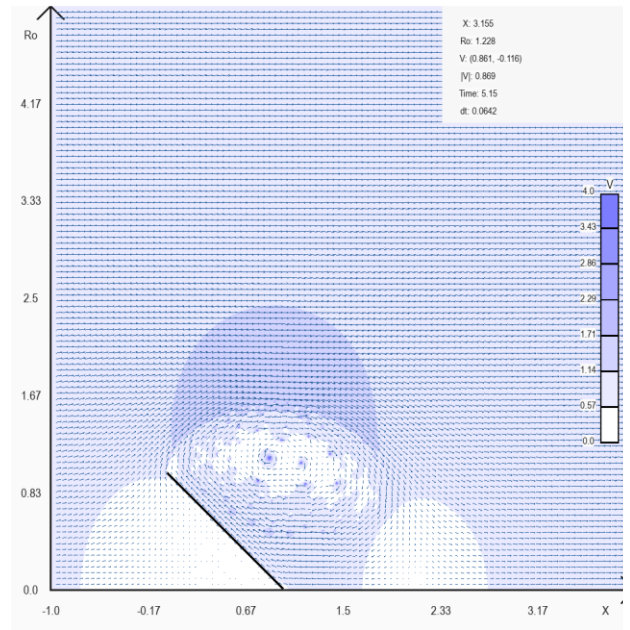


Рис. 3.1.30. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 5$

3.1.5. Моделювання течії за півсферою

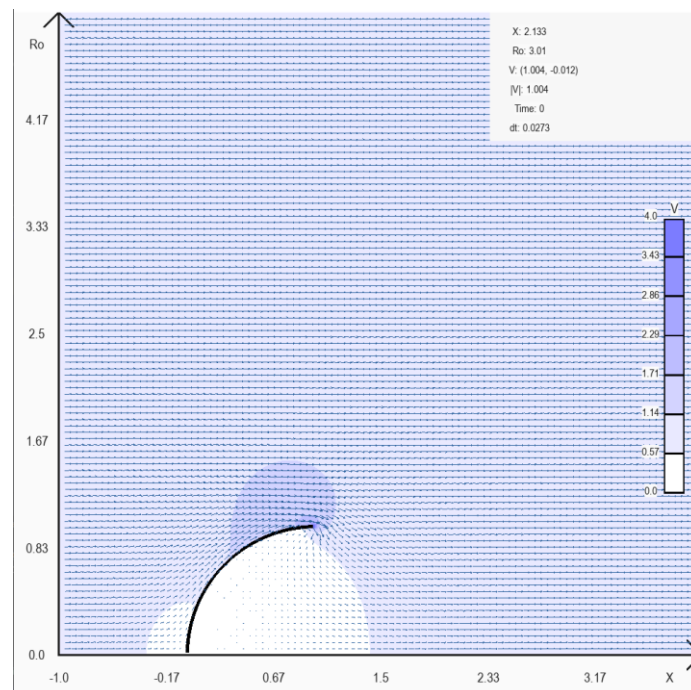


Рис. 3.1.31 Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 0$

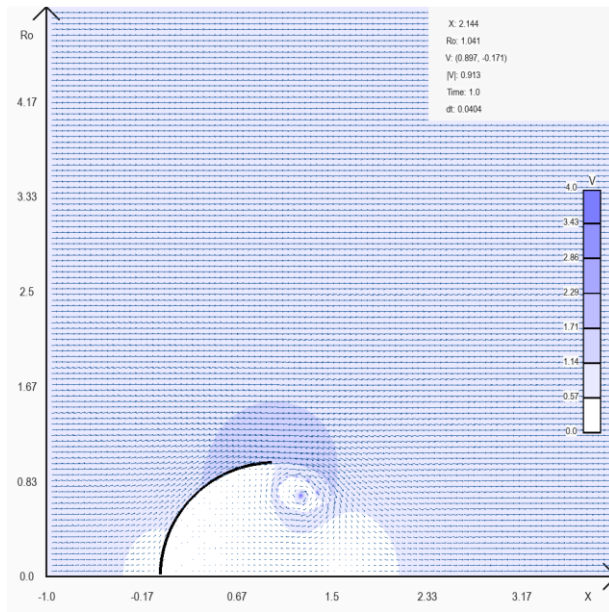


Рис. 3.1.32 Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 1$

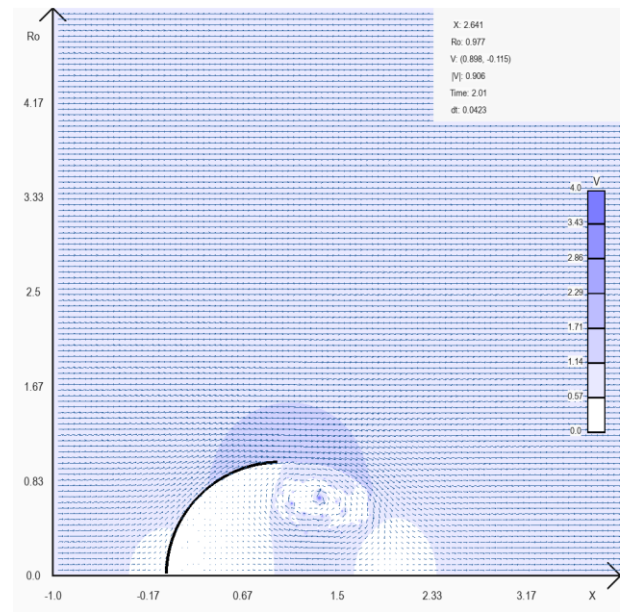


Рис. 3.1.33. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 2$

3) $\tau = 2$

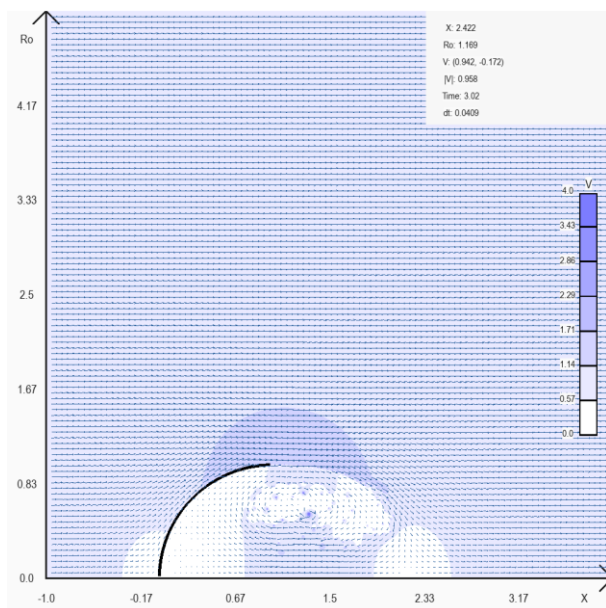


Рис. 3.1.34. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 3$

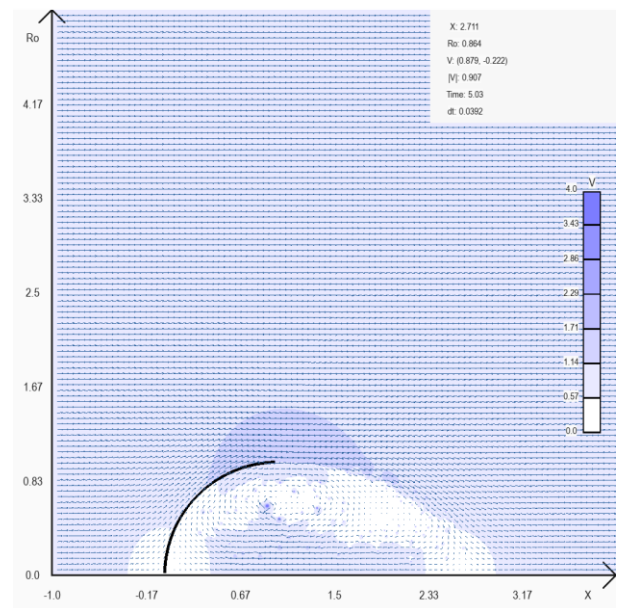


Рис. 3.1.35. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 5$

3.1.6. Моделювання течії за оберненою півсферою

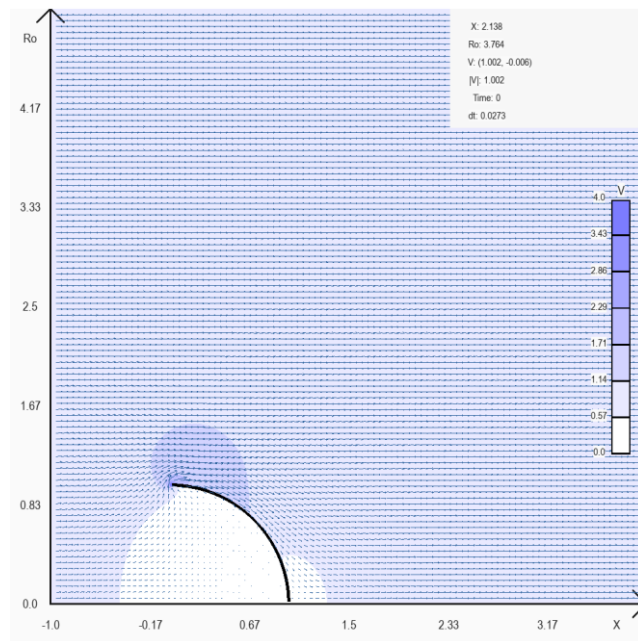


Рис. 3.1.36 Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 0$

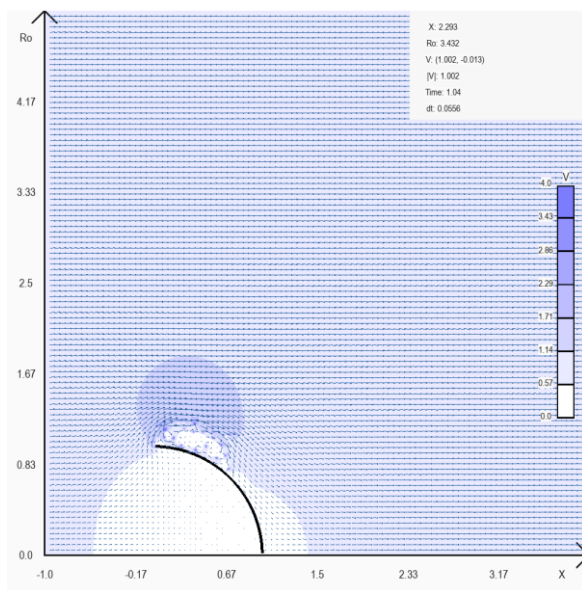


Рис. 3.1.37. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 1$

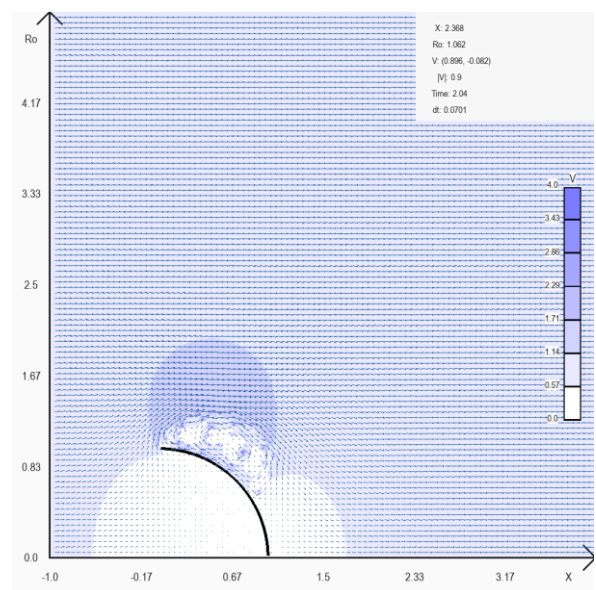


Рис. 3.1.38. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 2$

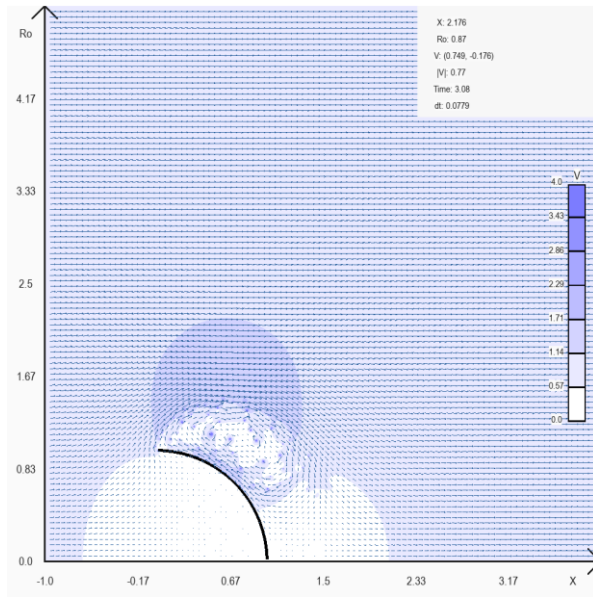


Рис. 3.1.39. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 3$

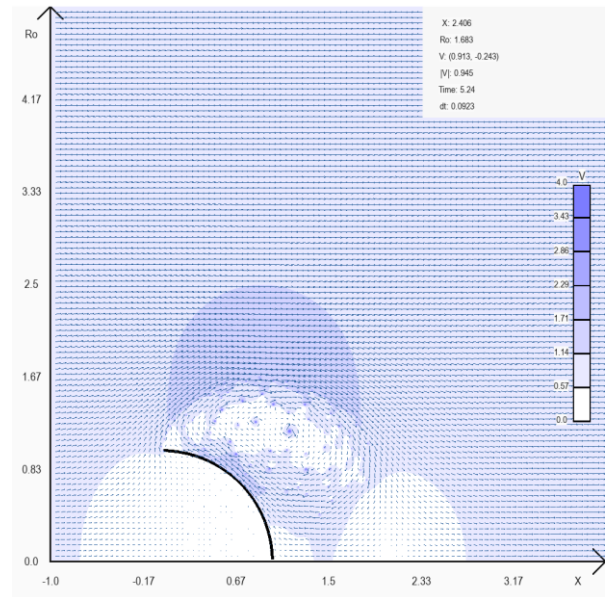


Рис. 3.1.40. Векторне поле швидкостей та його модуль. $\tau = 5$

3.2 Результати математичного моделювання течії навколо ідеального пропелера

$$V_{\infty} = (1, 0), \quad k = 2$$

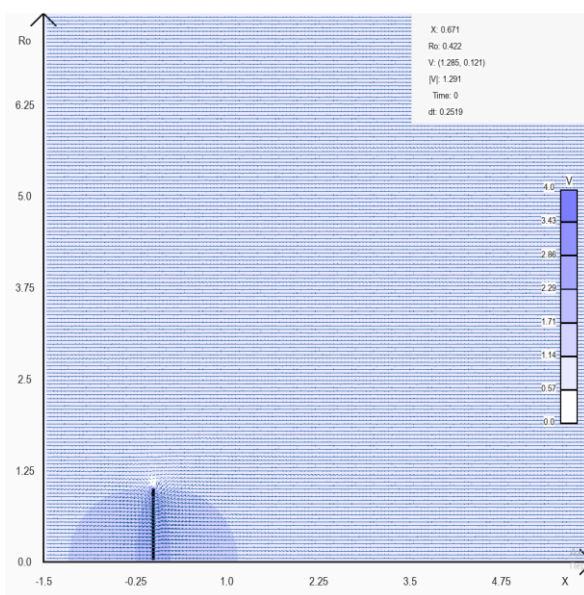


Рис. 3.2.1. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 0$

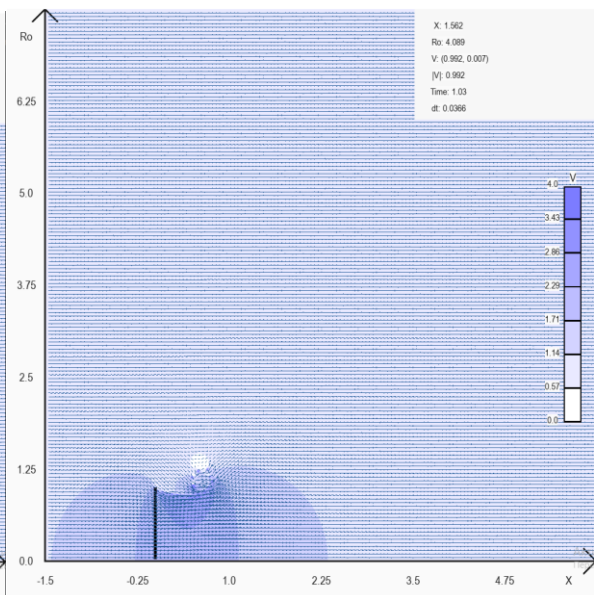


Рис. 3.2.2. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 1$

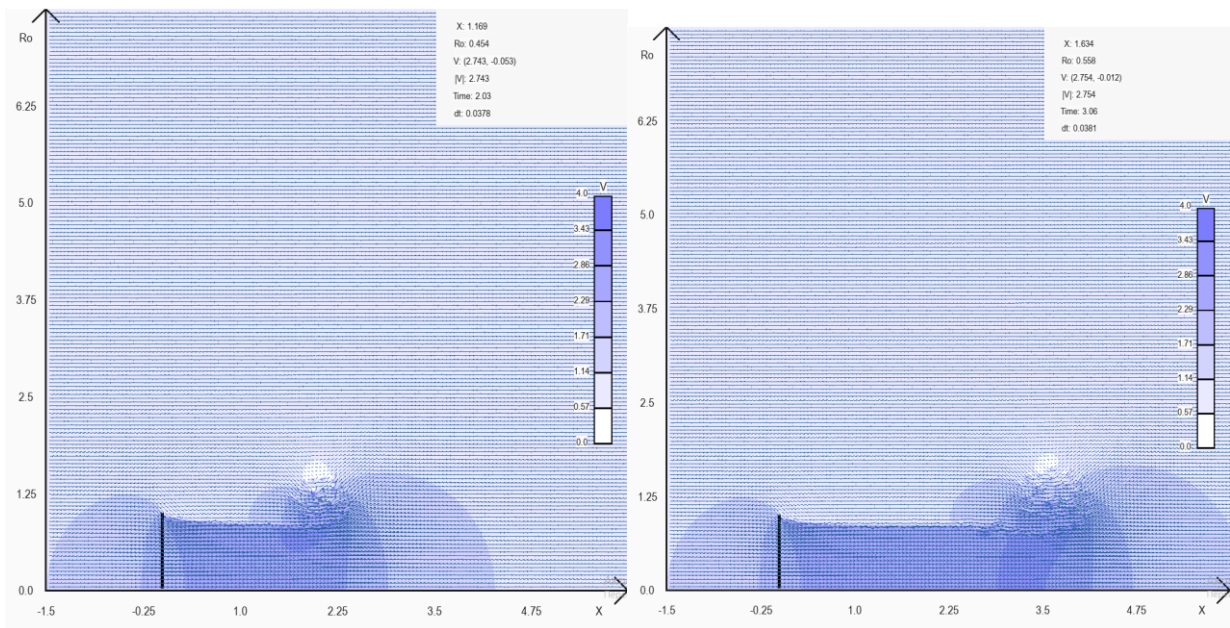


Рис. 3.2.3. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 2$ Рис. 3.2.4. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 3$

3.3 Результати математичного моделювання течії навколо ідеального пропелеру у насадку Бріггса-Форта

$$V_\infty = (1, 0), \quad k = 2, \quad \alpha = 0^\circ.$$

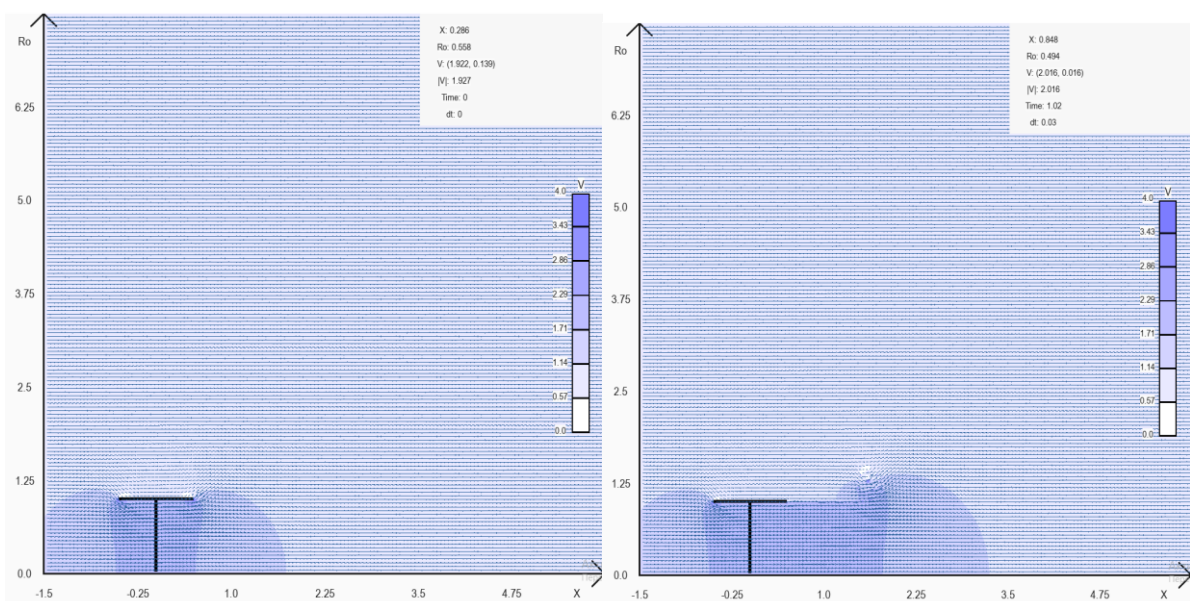


Рис. 3.3.1. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 0$

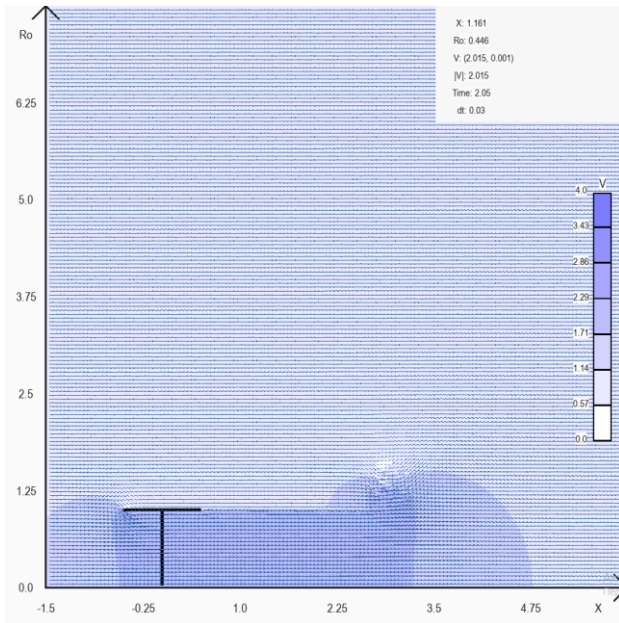


Рис. 3.3.2. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 1$

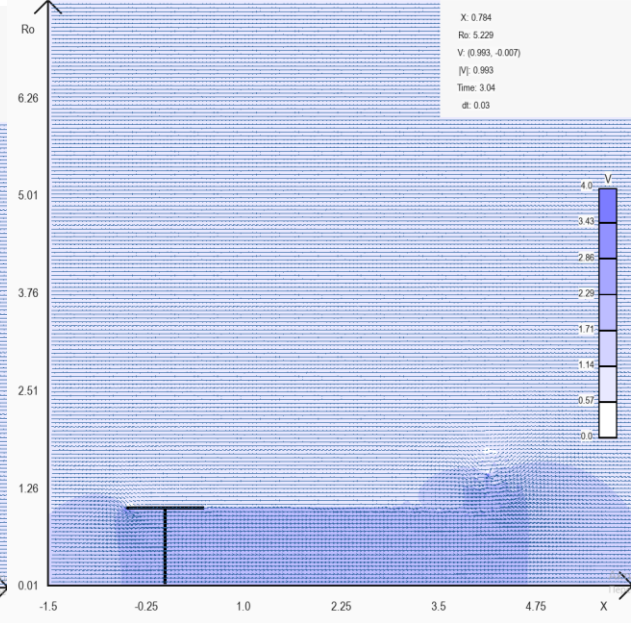


Рис. 3.3.3. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 2$

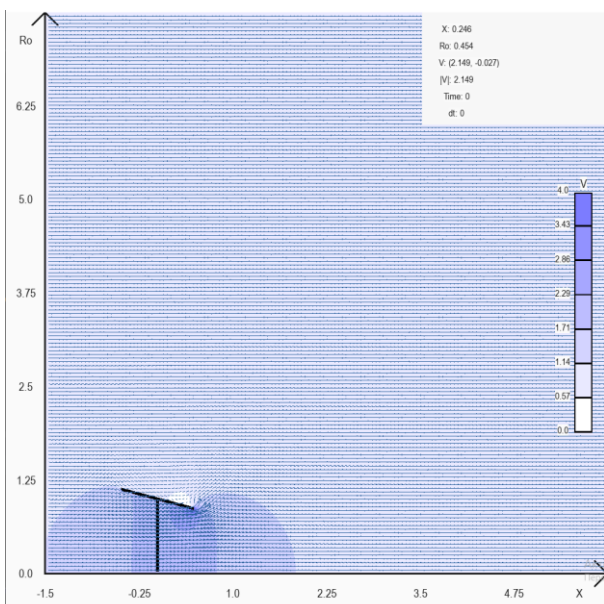
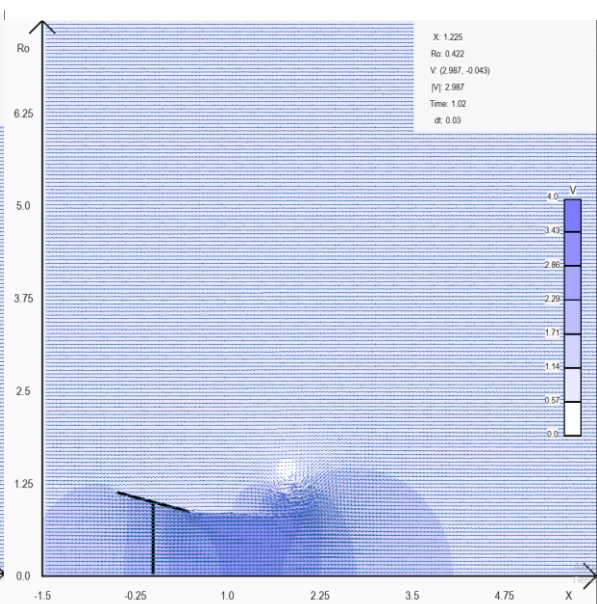


Рис. 3.3.4. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 3$



Швидкість течії за пропелером $V \approx 2$

$V_\infty = (1, 0)$, $k = 2$, $\alpha = 15^\circ$.

Рис. 3.3.5. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 0$

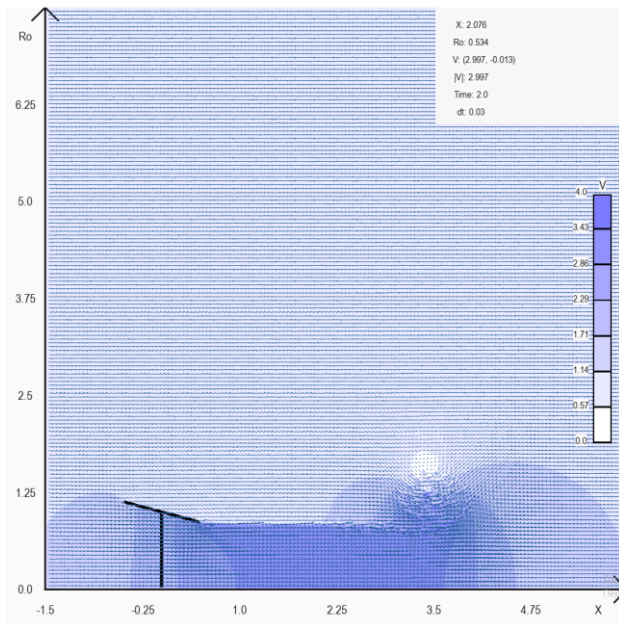


Рис. 3.3.6. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 1$

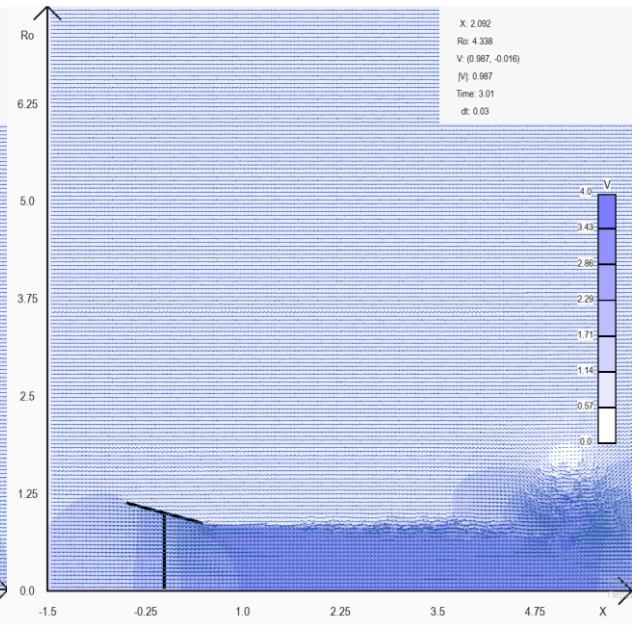


Рис. 3.3.7. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 2$

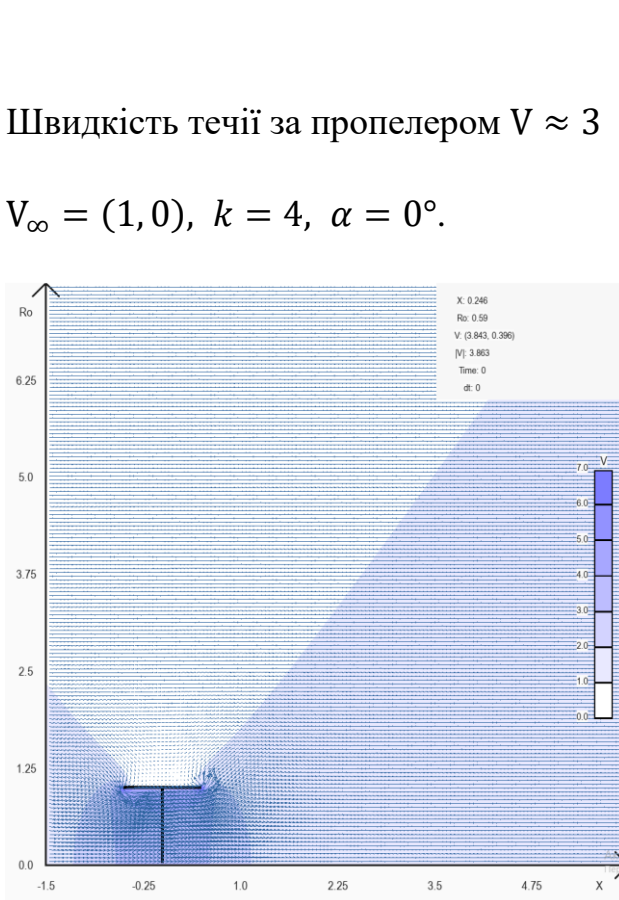
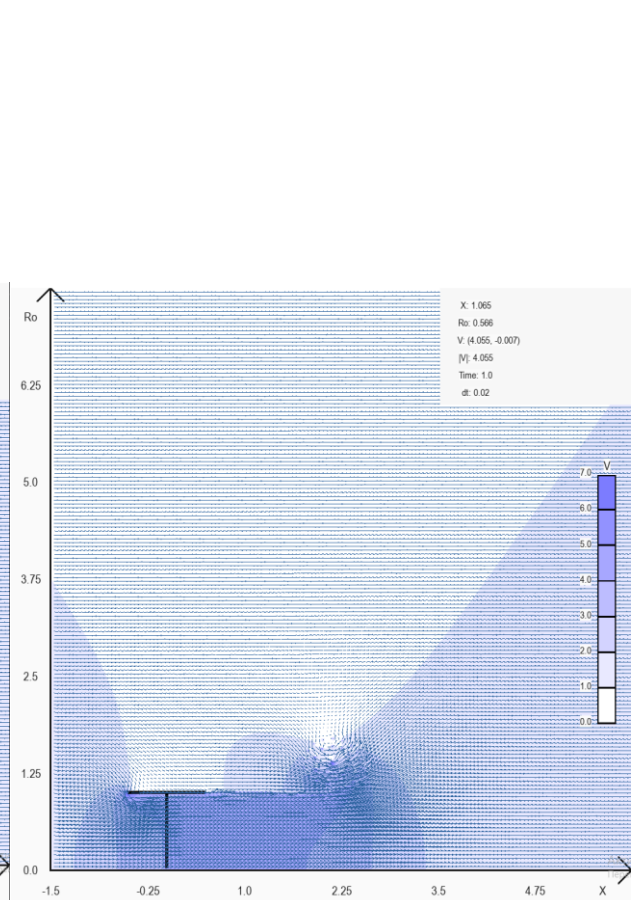


Рис. 3.3.8. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 3$



Швидкість течії за пропелером $V \approx 3$

$V_\infty = (1, 0)$, $k = 4$, $\alpha = 0^\circ$.

Рис. 3.3.9. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 0$

Рис. 3.3.10. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 1$

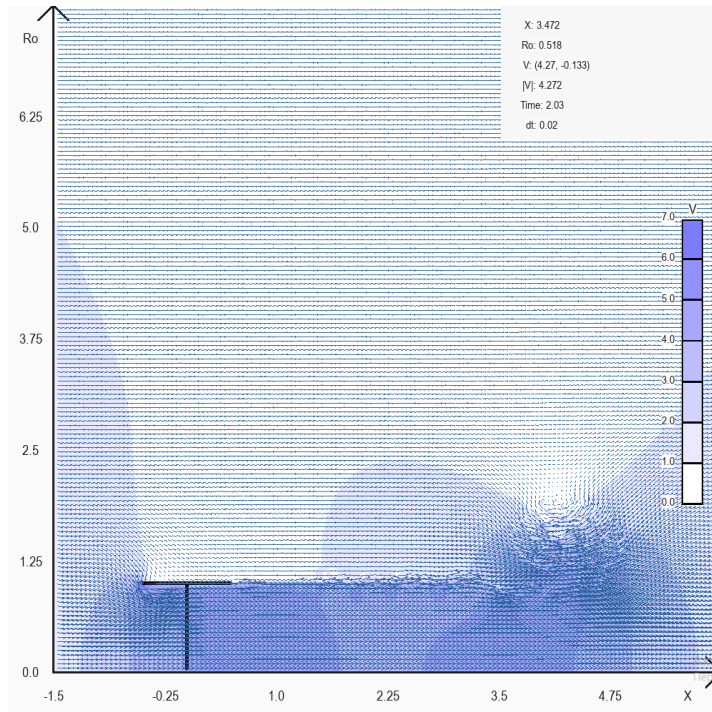


Рис. 3.3.11. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 2$

Швидкість течії за пропелером $V \approx 4$

$V_\infty = (1, 0)$, $k = 4$, $\alpha = 15^\circ$.

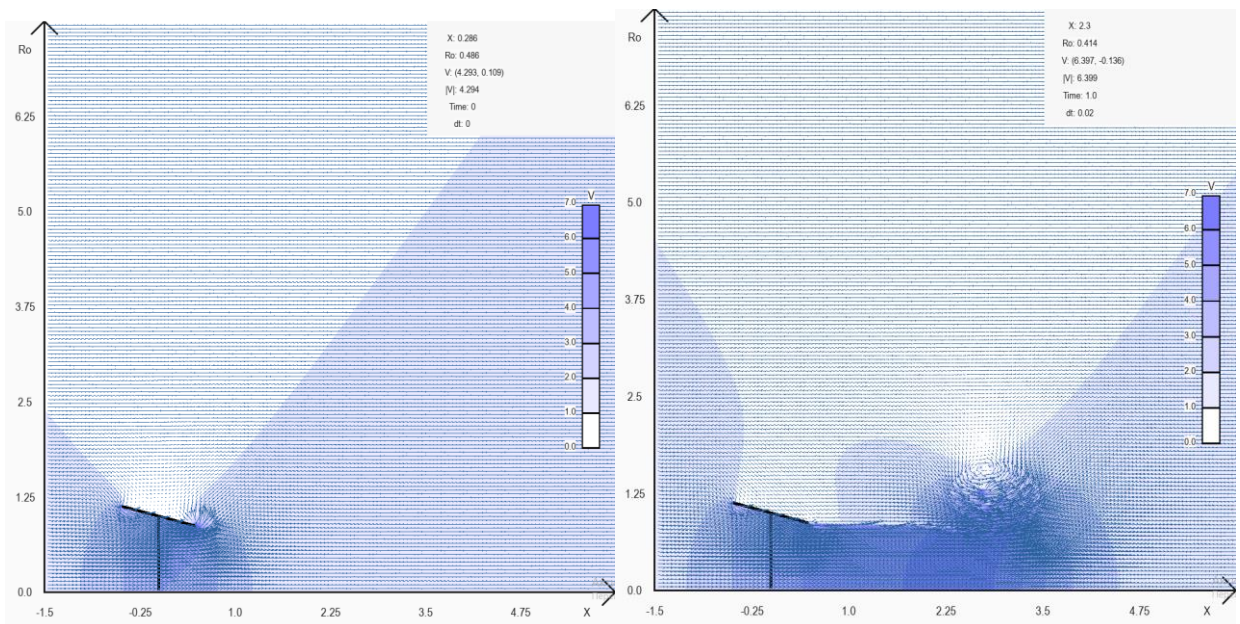


Рис. 3.3.12. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 0$

Рис. 3.3.13. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 1$

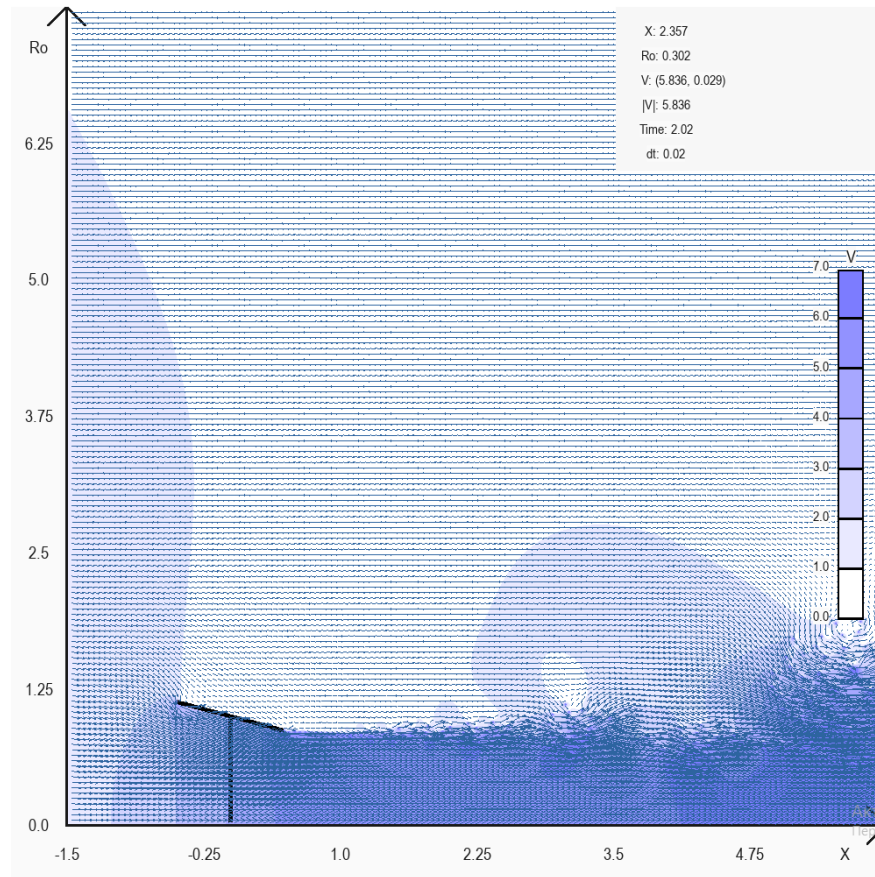


Рис. 3.3.14. Векторне поле та модуль швидкостей у момент часу $\tau = 2$

Швидкість течії за пропелером $V \approx 6$

ВИСНОВКИ

1. Опанована обчислювальна технологія, яка містить математичні моделі, методи та алгоритми обчислень, що дозволяє моделювати струменеві течії, які породжені вісесиметричними пристроями або відбуваються навколо перешкод вісесиметричної форми. Побудовані інтегро-диференціальні математичні моделі вісесиметричних течій з вісесиметричними перешкодами, течія з ідеальним пропелером, течія з ідеальним пропелером у насадку Бріггса-Форта.
2. Виявлено, що геометрія вісесиметричної перешкоди суттєво впливає на якісні параметри сліду за перешкодою, що впливає на опір перешкоди.
3. Виявлено збільшення інтенсивності циркуляцій течії за перешкодами з отворами або за перешкодами зі зворотною геометрією, що збільшує опір перешкоди, що може бути корисним при проектуванні парашутних систем.
4. Виявлено, що струменеві течії за ідеальним пропелером з насадком Бріггса-Форта конічної форми здатні суттєво збільшити швидкість струменя за конфузоровим (збільшити зміну імпульсу струменя).
5. Результати моделювання продемонстрували здатність насадки Бріггса-Форта конічної форми (у вигляді конфузора) підвищувати імпульси впливів (тягові сили), що може бути використаним при моделюванні та проектуванні свехмалих літальних апаратів нестандартного компанування.

Список використаних джерел

1. Lifanov I.K., Poltavskii L.N., Vainikko G.M. Hypersingular Integral Equations and their Application.-Charman&Hall/CRC, 2004,-400p.
2. Cherniy D., Dovgiy S. Development Wake Behind of a Moving Grid and Computational Technologies. // Proceedings of the 7 th Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations (BBVIV-7), Carry-le-Rouet (Marseille) , France, 3-6 July 2018, pp.79-80.
3. Cherniy D., Dovgiy S. Transformation of discrete singularities in the numerical method for singular equations.// Proceeding of the International Conference “Ukrainian Conference on Applied mathematics” (UCAM-2017) dedicated to the 100 th birth anniversary of professor Olexander Kostovskiyy, 28-30,September, 2017, Lviv, Ukraine, - Lviv: PAIS, 2017, pp.31-33.
4. COTTET G.-H., KOUMOUTSAKOS P. D. Vortex Methods: Theory and Practice.-CAMBRIDGE UNIVERSITY PRES -2000,-237p.
5. Computational Methods With Vortices—The 1988 Freeman Scholar Lecture.-Turgut Sarpkaya Distinguished Professor of Mechanical Engineering, Naval Postgraduate School, Monterey, CA 93943, //Journal of Fluids Engineering, MARCH 1989, Vol. 111,-pp./5-52 (Downloaded From: <http://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org/> on 05/19/2015 Terms of Use: <http://asme.org/terms>).
6. Modeling Dynamic Systems/-Series Editors Matthias Ruth Bruce Hannon/ Springer Science+Business Media, LLC, 220p.
7. Vortex Methods. I: Convergence in Three Dimensions By J. Thomas Beale* and Andrew Majda**-MATHEMATICS OF COMPUTATION VOLUME 39. NUMBER 159 JULY 1982, PAGES 1-27
8. Walter A. Robinson Modeling Dynamic Climate Systems. – Springer Science+Business Media, LLC. 2001.-220p.

9. Golubiev S., Dovgiy S., Lebid O., Cherniy D. The Structure of a Vortex Wake Behind Vertical Wind Turbines as a Criterion for the Efficiency. // Proceedings of the 7 th Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations (BBVIV-7), Carry-le-Rouet (Marseille) , France, 3-6 July 2018, pp.163-165.
10. Kordas O. A study on mathematical short-term modelling of environmental pollutant transport by sea currents: The Lagrangian approach / O.Kordas, A.Gourjii, E.Nikiforovich, D.Cherniy // Journal of Environmental Accounting and Management. – 2017. – Vol.5, N 2. – p. 87-104 (DOI: 10.5890/JEAM.2017.06.002).