ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичний гурток

УДК 51:004.92 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.8**

Олена ВАЩІЛІНА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0000-0001-6867-6216
e-mail: olenavashchilina@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ірина ЛЕБЕДЄВА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В КОМП'ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ

Анотація. *В основі комп'ютерної графіки закладені математичні методи, які забезпечують можливість створення, маніпуляції та візуалізації графічних об'єктів. У статті досліджено основні математичні підходи, що використовуються для реалізації графічних алгоритмів, включаючи геометричні моделі, лінійну алгебру, тригонометричні функції, чисельні методи та алгоритми моделювання фізичних процесів. Особлива увага приділяється афінним перетворенням (зсув, поворот, масштабування), які є базовими операціями у графічному середовищі, розглянуто матричні представлення цих трансформацій з використанням однорідних координат, наведено приклад та завдання для самоперевірки. Практичне значення дослідження полягає у популяризації математичних знань серед школярів, демонстрації їхньої практичної важливості у створенні сучасних технологій. Це сприяє інтеграції математичних методів у шкільну програму та формуванню STEM-компетенцій у здобувачів освіти.*

Ключові слова: *комп'ютерна графіка; математичні методи; афінні перетворення; однорідні координати; матриці.*

1. Вступ

Комп'ютерна графіка є однією з ключових складових сучасних цифрових технологій, що активно використовується у різноманітних сферах: від розваг (відеоігри, анімація) до серйозних наукових досліджень і медичної діагностики. Технологічний прогрес у галузі віртуальної та доповненої реальності, 3D-моделювання, а також штучного інтелекту підсилює значущість графіки у сучасному світі. Водночас основою більшості методів та алгоритмів у комп'ютерній графіці є фундаментальні математичні принципи (геометрія, алгебра, тригонометрія тощо), які вивчаються у шкільному курсі математики. Популяризація цих математичних концепцій серед школярів через їх практичне застосування дозволить не лише підвищити інтерес до математики, а й показати її значущість у сучасних технологіях.

Об'єктом цього дослідження є математичні методи та алгоритми, які лежать в основі побудови та обробки графічних зображень у комп'ютерній графіці.

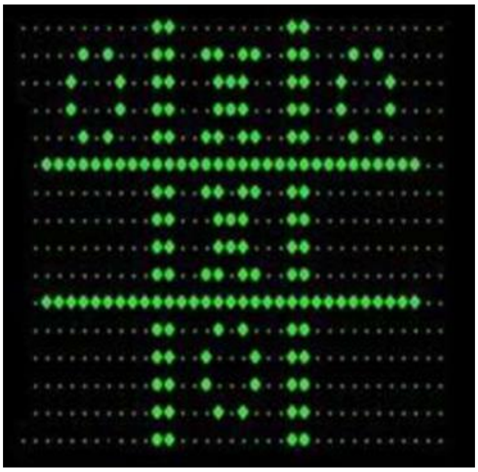
Метою дослідження є аналіз і систематизація математичних принципів, що застосовуються в комп'ютерній графіці, а також популяризація математики серед здобувачів освіти через демонстрацію її використання в реальних технологіях.

2. Основна частина

Комп’ютерна графіка – розділ інформатики, який вивчає засоби і способи створення й обробки графічних зображень за допомогою комп’ютерної техніки.

Комп'ютерна графіка розвинулася в окрему галузь завдяки багатьом технологічним проривам. Починаючи з винаходу електронно-променевої трубки (ЕПТ) компанією Westinghouse в 1930 році ми бачимо як менше ніж за 100 років комп'ютерна графіка з простого візуального інструменту перетворилася на ключовий компонент у взаємодії між людьми і комп'ютерами.

На рис. 1 можемо порівняти як виглядала графіка першої комп’ютерної гри «OXO» – реалізація «хрестиків-нуликів», створена у 1952 році (рис. 1 а)) та сучасної відеогри (рис. 1 б)).



а) Перша комп’ютерна гра «OXO»

б) Сучасна гра «S.T.A.L.K.E.R. 2»

Рис. 1. Порівняння графіки першої та сучасної відеогри

У наш час комп'ютерна графіка відіграє центральну роль у багатьох галузях, включаючи дизайн, анімацію, кіно, відеоігри, візуалізацію даних, архітектуру, науку та медицину. Сучасні тенденції включають використання віртуальної та доповненої реальності, тривимірної графіки, штучного інтелекту і машинного навчання для покращення реалістичності та продуктивності.

Математика відіграє ключову роль у комп'ютерній графіці, дозволяючи створювати, маніпулювати та візуалізувати віртуальні об'єкти та сцени. Ось деякі з основних застосувань математики в цій галузі.

Геометрія. Геометричні поняття, такі як точки, лінії, поверхні, використовуються для опису форм об'єктів. Алгебраїчні рівняння допомагають визначити положення та властивості цих об'єктів, визначити відстані, кути та інші характеристики об'єктів, що необхідно для точного розташування об'єктів на сцені. Робота з перспективними проєкціями та іншими методами, що використовуються в 3D-графіці для створення ефектів глибини та перспективи тощо.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Лінійна алгебра. Матриці використовуються для трансформації об'єктів у тривимірному просторі. За допомогою матриць можна обертати, масштабувати та переміщувати об'єкти.

Алгебра поліномів. Використовується для побудови кривих та поверхонь, таких як сплайни (наприклад, B-сплайни, криві Безьє), що є важливим при моделюванні гладких об'єктів і шляхів руху.

Тригонометрія. Синус, косинус та інші тригонометричні функції використовуються для обчислення кутів та координат, що є важливим у визначенні положення камер, освітлення та інших аспектів сцени.

Теорія ймовірностей. Ця дисципліна використовується в процесі створення реалістичних ефектів, таких як випадкові рухи або розсіювання світла, анімації та симуляції випадкових ефектів, наприклад, поведінка натовпу, падіння частинок, динаміка рідин та газів.

Диференціальні рівняння. Використовуються в симуляціях, які моделюють фізичні процеси, такі як рух рідини або поведінка тканин.

Фур'є-аналіз. Дозволяє здійснювати перетворення сигналів і зображень, що може використовуватися для обробки зображень, створення текстур, або ефектів візуалізації, таких як шум.

Чисельні методи. Допомагають розв'язувати складні математичні проблеми, які виникають у процесі обчислювальної графіки, такі як обчислення зіткнень, розрахунок фізичних симуляцій, або визначення оптимальних шляхів у сценах.

Таким чином, математика є фундаментом для більшості методів та алгоритмів, які використовуються в комп'ютерній графіці.

Для роботи з комп’ютерною графікою застосовують спеціалізоване програмне забезпечення, яке називають *графічними редакторами*. Найбільш популярними серед них є Microsoft Paint, Adobe Photoshop, Adobe Illustrator, Corel Draw тощо. У всіх програмах MS Office є вбудовані графічні редактори. При користуванні такими редакторами часто виникає потреба повернути, масштабувати або перенести певний об’єкт. При цьому ми не задумуємося які дії виконує при цьому комп’ютер. А насправді для їх виконання комп’ютер застосовує алгоритми в основі яких лежать математичні методи. Розглянемо деякі з них (Маценко, 2023).

Паралельний зсув координат точки на вектор (m, n) в системі координат Oxy визначається за формулами:

$$x' = x + m, \qquad y' = y + n. \tag{1}$$

При цьому точка $M(x, y)$перейде в точку $M'(x', y')$ (рис.2).

Об’єкт можна перенести, застосовуючи рівняння (1) до кожної його точки. Якщо об’єкт складається з відрізків прямих, можна перенести крайні точки відрізків і сполучивши їх накреслити нові відрізки.

Поворот точки відносно початку координат на кут φ проти годинникової стрілки (рис. 3) описується формулами:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \qquad y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \tag{2}$$

При цьому точка $M(x,y)$перейде в точку $M'(x',y')$ (рис.3).

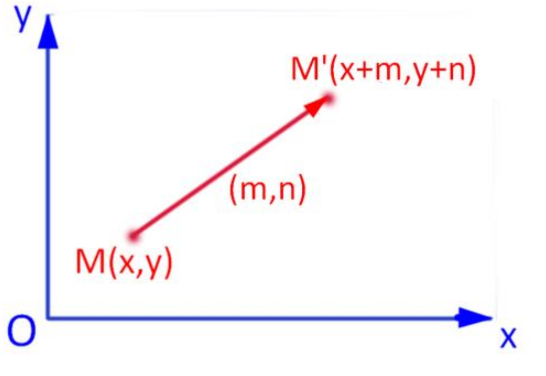


Рис. 2. Перетворення зсуву

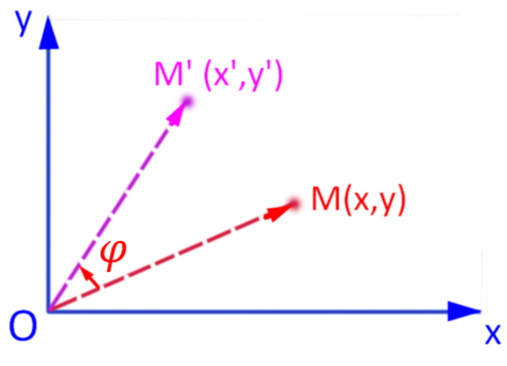


Рис. 3. Перетворення повороту

Масштабування (розтяг / стиск) вздовж координатних осей можна записати формулами:

$$x' = ax, \qquad y' = dy. \tag{3}$$

Якщо в формулі (3) $a = d$, то маємо пропорційне масштабування, якщо $a \neq d$, то масштабування – непропорційне.

- При $a = d > 1$ відбувається збільшення зображення, при $a = d < 1$ – рівномірний стиск.
- При $a = 1,\ d = -1$, одержуємо дзеркальне відображення відносно осі Ox.
- При $a = -1,\ d = 1$ – дзеркальне відображення відносно осі Oy.

Зсуви, масштабування та повороти є складовими частинами перетворень, які називаються *афінними перетвореннями*. В аналітичній геометрії доведено, що довільне афінне перетворення можна задати за допомогою композиції елементарних перетворень (1) – (3).

Для ефективного використання розглянутих формул у задачах комп'ютерної графіки переходять до їх матричного запису.

Перетворення зсуву (1) з матрицею зсуву T має вигляд:

$$X' = X + T = (x,y) + (m,n). \tag{1*}$$

Перетворення повороту (2) матрицею повороту R:

$$X' = X \cdot R = (x,y)\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{2*}$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Перетворення масштабування (3) з матрицею масштабування D:

$$X' = X \cdot D = (x, y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \qquad a, d \neq 0. \tag{3*}$$

Неважко помітити, що операції обертання та масштабування описуються у вигляді добутку матриць, а операція переносу – як сума матриць. У випадку послідовного виконання довільної комбінації операцій обертання та масштабування можна отримати результуючу матрицю виконаних поворотів та масштабувань. Матричний добуток в комп'ютерній графіці називають композицією. Очевидно, що ефективніше застосовувати одне результуюче перетворення, ніж ряд перетворень один за одним.

Окрім того, композиції дають можливість здійснювати обернені перетворення, тобто точку (об'єкт) X' можна легко повернути в початковий стан X. Наприклад, для повороту обернене перетворення $X = X' \cdot R^{-1}$ задається оберненою до R матрицею R^{-1}:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

У вказаний спосіб неможливо отримати результуючу матрицю перетворення, якщо серед послідовності перетворень присутнє хоча б одне перенесення. Було б зручніше мати математичний апарат, який дозволяє включати в композиції перетворень усі три розглянуті перетворення. При цьому отримали би значний виграш в швидкості обчислень. Таким математичним апаратом є перехід до однорідних координат. При цьому довільній точці $M(x, y)$ площини Oxy ставиться у відповідність точка $M'(x, y, 1)$ у просторі $Oxyz$. Між однорідними та декартовими координатами існує взаємно однозначна відповідність.

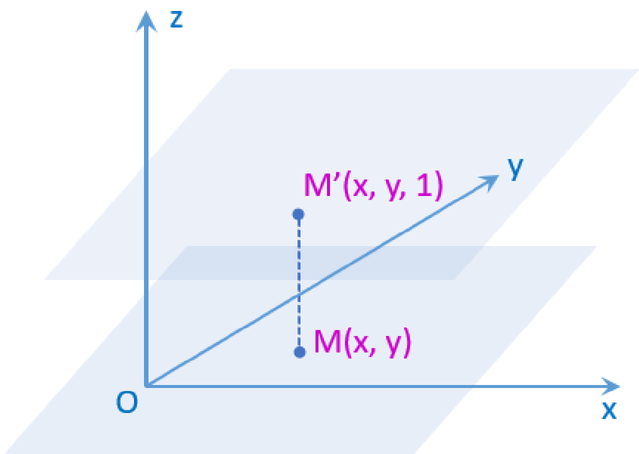


Рис. 4. Однорідні координати

За допомогою однорідних координат можна описати довільне афінне перетворення у вигляді композиції матриць третього порядку:

$$(x', y', 1) = (x, y, 1)\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де елементи a, b, c, d визначають масштабування і поворот, а m, n – сумарний зсув.

Випишемо матриці основних елементарних перетворень:

- матриця перенесення (translation) точки на вектор (m, n):

$$T = T(m, n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

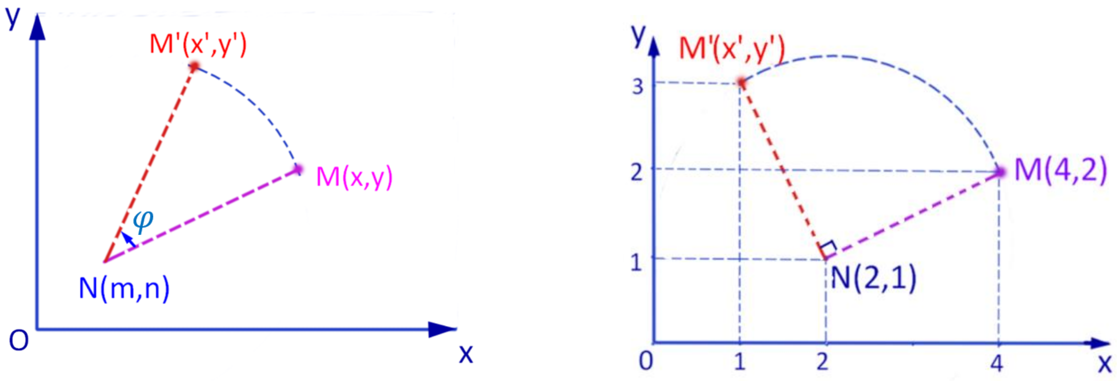
- матриця повороту (rotation) точки відносно початку координат у додатному напрямку:

$$R = R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{6}$$

- матриця розтягу/стиску (dilation) відносно початку координат:

$$D = D(a, d) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Приклад 1. *Побудувати матрицю повороту точки $M(x, y)$ відносно довільної точки $N(m, n)$ на кут φ у додатному напрямі (рис. 5 а)) та визначити координати нового положення точки – $M'(x', y')$, якщо $M(4,2)$, $N(2,1)$, $\varphi = 90^{\circ}$ (рис. 5 б)).*



а) б)

Рис. 5. Поворот точки M у додатному напрямі відносно точки N

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Розв'язання: Матриця R задає поворот точки відносно початку координат. Однорідні координати дають можливість знайти матрицю повороту відносно довільної точки. У загальному випадку поворот відносно довільної точки може бути реалізований шляхом композиції таких базових перетворень:

1) переміщення точки $N(m,n)$ на вектор $(-m,-n)$ так, щоб центр повороту сумістився з початком координат O. Матриця цього перетворення:

$$T^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{pmatrix};$$

2) повороту точки на кут φ у додатному напрямку відносно початку координат. Матриця цього перетворення R визначається формулою (6);
3) переміщення одержаного результату назад так, щоб центр повороту сумістився з точкою N. Матриця цього перетворення T визначається формулою (5).

Отже, для знаходження результуючого повороту точки $M(x,y)$ відносно точки $N(m,n)$ потрібно перемножити матриці T^{-}, R, T у вказаному порядку. В результаті одержимо шукане перетворення у вигляді:

$$(x',y',1) = (x,y,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Зокрема, поворот точки $M(x,y)$ на 90^0 у додатному напрямку відносно точки $N(m,n)$ виконується перетворенням:

$$(x',y',1) = (x,y,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ n+m & n-m & 1 \end{pmatrix}.$$

В останнє співвідношення підставимо координати точок $M(4,2)$ та $N(2,1)$:

$$(x',y',1) = (4{,}2{,}1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (-2+3, 4-1, 1) = (1,3,1).$$

Відповідь: Координати нового положення точки − $M'(1{,}3)$.

3. Практичне завдання

Виконати наступні трансформації 2D-об'єкта-трикутника з вершинами $A(1,1), B(3,1), \mathrm{C}(2,4)$.

1. Зсув на вектор $(2,-1)$.

2. Поворот на 90^0 проти годинникової стрілки відносно початку координат.
3. Масштабування з коефіцієнтами $a = 2, d = 3$.
4. Побудуйте в системі координат початковий трикутник і всі його трансформації.
5. Побудуйте в однорідних координатах матрицю K композиції перетворень та використайте її для одночасного застосування всіх перетворень до початкових координат об'єкта.
6. Виконайте обернене перетворення K^{-1} для повернення об'єкта у початкове положення.

Відповідь: Координати після зсуву: $A'(3,0)$; $B'(5,0)$; $C'(4,3)$.
Координати після повороту: $A''(0,3)$; $B''(0,5)$; $C''(-3,4)$.
Координати після масштабування: $A'''(0,9)$; $B'''(0,15)$; $C'''(-6,12)$.

4. Висновки

Проведене дослідження продемонструвало, що математика відіграє фундаментальну роль у розвитку комп'ютерної графіки, забезпечуючи теоретичну основу для реалізації алгоритмів, що використовуються у візуалізації та моделюванні. Використання геометрії, лінійної алгебри, тригонометрії та інших розділів математики дозволяє ефективно вирішувати завдання, пов'язані з трансформацією об'єктів, створенням тривимірних зображень та реалістичних візуальних ефектів. Матеріали статті демонструють приклади застосування інструментів алгебри та геометрії, які школярі вивчають у класі, і як ці теми дозволяють вирішувати завдання візуалізації, моделювання та створення ефектів у графічних програмах. Це допоможе їм зрозуміти практичне значення математичних концепцій, підвищуючи їхню мотивацію до навчання та розширюючи кругозір щодо майбутніх кар'єрних можливостей у сфері інформаційних технологій та інженерії.

Список використаних джерел

Betar. *Історія виникнення, становлення, розвитку комп'ютерних відеоігор*: http://betar.org.ua/istoriya-viniknennya-stanovlennya-rozvitku-kompyuternih-videoigor-26-foto/

Маценко В.Г. (2023) *Обчислювальна геометрія та комп'ютерна графіка*: Навчальний посібник, Чернівці: Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича. 440 с.

Тмєнова Н.П. (2017) *Комп'ютерна графіка*: навчально-методичний посібник, Київ: ВПЦ «Київський університет». 111 с.

Пічугін М.Ф., Канкін І.О., Воротніков В.В. (2013) *Комп'ютерна графіка*: Навчальний посібник, Київ: Центр учбової літератури. 346 с.

Різник О.Я. (2004) *Технічні, математичні та алгоритмічні основи комп'ютерної графіки*: Підручник, Львів: Львівська політехніка. 162 с.

Отримано редакцією журналу: 25.11.2024
Прорецензовано: 10.12.2024
Схвалено до друку: 19.12.2024

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Olena VASHCHILINA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID: 0000-0001-6867-6216
e-mail: olenavashchilina@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Iryna LEBEDEVA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

APPLICATION OF MATHEMATICS IN COMPUTER GRAPHICS

Abstract. *Computer graphics are based on mathematical methods that provide the ability to create, manipulate and visualize graphic objects. The article examines the main mathematical approaches used to implement graphic algorithms, including geometric models, linear algebra, trigonometric functions, numerical methods and algorithms for modeling physical processes. Particular attention is paid to affine transformations (shift, rotation, scaling), which are basic operations in the graphic environment, matrix representations of these transformations using homogeneous coordinates are considered, an example and tasks for self-testing are given. The practical significance of the study lies in the popularization of mathematical knowledge among schoolchildren, demonstrating their practical importance in the creation of modern technologies. This contributes to the integration of mathematical methods into the school curriculum and the formation of STEM competencies in students.*

Keywords: *computer graphics; mathematical methods; affine transformations; homogeneous coordinates; matrices.*