МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ
ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

КІНАШ АНАСТАСІЯ ВОЛОДИМИРІВНА

УДК 519.715: 519.857.4

ДИСИПАТИВНІСТЬ НЕАВТОНОМНИХ СИСТЕМ З МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕННЯМИ

01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі прикладної математики Національного університету "Львівська політехніка" Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник : доктор фізико-математичних наук, професор
Кутнів Мирослав Володимирович
Національний університет "Львівська політехніка",
професор кафедри прикладної математики.

Офіційні опоненти : доктор фізико-математичних наук
Самойленко Ігор Валерійович
Київський національний університет імені
Тараса Шевченка МОН України,
доцент кафедри дослідження операцій,

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Шушарін Юрій Вікторович
Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана
МОН України,
доцент кафедри вищої математики.

Захист відбудеться "10" жовтня 2016 р. о $14^{\underline{15}}$ год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.35 Київського національного університету імені Тараса Шевченка, за адресою: м. Київ, проспект Академіка Глушкова, 2-А, географічний факультет, ауд. 312.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці ім. М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул.Володимирська, 58.

Автореферат розісланий " 7 " вересня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради П.М. Зінько

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Аналіз дисипативних систем бере свій початок з розгляду процесу дисипації в фізичних системах. Однією з основних властивостей детермінованих систем є властивість дисипативності, якою займалися, зокрема, такі науковці як Р. З. Хасмінський та В. А. Плисс. Поняття дисипативності детермінованої системи в математичних термінах було введено Levinson N.. Пізніше в роботах Рейссига Р., Сансонса Г. та Конти Р., а також Yoshizawa T. запропоновано критерії дисипативності систем або ж, іншими словами, належності системи до класу D, з використанням стійкості за Ляпуновим. В роботах Хасмінського Р. З. проаналізовано дисипативність як детермінованих, так і стохастичних систем, що базується на застосуванні властивостей функції Ляпунова детермінованої системи.

З іншої сторони, аналіз асимптотичних характеристик випадкових еволюцій з впливом, що визначається рівномірно ергодичним марковським процесом, описано в роботах Королюка В. С. та Чабанюка Я. М.. Зокрема, розглянуто стійкість, збіжність до точки рівноваги та асимптотичну нормальність таких процесів.

Таким чином, актуальним є аналіз дисипативності дифузійних процесів з марковськими переключеннями в схемі серій з малим параметром ε. Випадкові процеси з марковськими переключеннями дозволяють розглянути більш широкий клас прикладних задач, з точки зору розробки методів моделювання та аналізу таких систем. Зокрема, можливим є дослідження економічної діяльності системи міста, яка описується узагальненою математичною моделлю Лоренца за умов впливу на неї зовнішніх факторів, які мають дифузійну природу. Модель Лоренца є важливим інструментом для опису фізичних, економічних та інших систем. А саме, одне з таких застосувань наведено в роботі Олємського О. І., Ющенко О. В. та Кохана С. В., де за допомогою системи Лоренца описується економічна структура суспільства через попит, виробничу функцію та значення умовної ціни.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження було виконано у рамках наукових досліджень кафедри прикладної математики Національного університету “Львівська політехніка” в межах НДР “Побудова і дослідження методів розв'язування задач прикладної математики та інформатики” (номер держреєстрації 0113U005296).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є встановлення достатніх умов асимптотичної дисипативності випадкових еволюцій в схемі дифузійної апроксимації та асимптотично малої дифузії, а також аналіз флуктуацій випадкової еволюції за умов дисипативності граничної еволюції.

Задачі дослідження:

– отримати достатні умови асимптотичної дисипативності випадкової еволюції з дифузійним та з імпульсним збуренням з марковськими переключеннями в схемі дифузійної апроксимації;

– одержати умови асимптотичної дисипативності нормованих флуктуацій асимптотично дисипативного дифузійного процесу в схемі дифузійної апроксимації;

– отримати умови асимптотичної дисипативності випадкового процесу з дифузійним збуренням в схемі асимптотично малої дифузії;

– проаналізувати економічну діяльність системи міста, що описується узагальненою моделлю Лоренца системи трьох стохастичних диференціальних рівнянь.

Об'єкт дослідження – випадкові еволюції, що описуються стохастичним диференціальним рівнянням в рівномірно ергодичному марковському середовищі.

Предмет дослідження – асимптотична дисипативність дифузійного процесу з марковськими переключеннями.

Методи досліджень. У роботі використовуються загальні методи моделювання та аналізу стохастичних систем з марковськими переключеннями, як реалізація систем в умовах невизначеності, в схемі серій з малим параметром, а також в схемах дифузійної апроксимації та асимптотично малої дифузії. Побудова граничного генератора стохастичної системи, як з імпульсним, так і з дифузійним збуренням, базується на розв'язку проблеми сингулярного збурення для дифузійного процесу з марковськими переключеннями.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримано достатні умови асимптотичної дисипативності дифузійного процесу в схемі асимптотично малої дифузії та дифузійної апроксимації через властивості функції Ляпунова детермінованої системи, а також асимптотичну дисипативність флуктуацій асимптотично дисипативної системи з дифузійним збуренням.

А саме, вперше:

– отримано достатні умови асимптотичної дисипативності випадкових еволюцій з дифузійним та імпульсним збуренням в схемі дифузійної апроксимації;

– встановлено умови асимптотичної дисипативності флуктуацій дифузійного процесу за умов дисипативності граничної еволюції та локальної умови балансу;

– отримано достатні умови асимптотичної дисипативності дифузійного процесу з марковськими переключеннями в схемі асимптотично малої дифузії;

– проаналізовано діяльність системи міста, що описується узагальненою моделлю Лоренца за умов асимптотичної дисипативності початкової системи. Економічна діяльність міста вивчалася з урахуванням зовнішніх впливів на систему міста, що забезпечувалося дифузійним доданком та марковськими переключеннями.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційне дослідження має як теоретичне, так і практичне значення. Використання одержаних результатів можливе у подальшому аналізі асимптотичних характеристик стохастичних систем з марковськими переключеннями в схемі дифузійної апроксимації та асимптотично малої дифузії. Варто також зазначити можливість вивчення флуктуацій дифузійного процесу за допомогою методів розроблених в дисертації.

Методи представлені в роботі також можуть бути корисними при розв'язуванні прикладних задач, процеси в яких описуються системами розглянутими в дисертаційному дослідженні. Зокрема, при дослідженні математичних моделей процесів, які описуються узагальненою моделлю Лоренца з випадковими впливами.

Використання отриманих результатів у межах НДР “Побудова і дослідження методів розв'язування задач прикладної математики та інформатики” підтверджується актом впровадження, який наведений у додатку до дисертації.

Особистий внесок здобувача. Результати, встановлені у рамках досліджень дисертаційної роботи, подані у вигляді теорем та лем, строго доведених

дисертантом з посиланнями на використану літературу.

У спільних роботах з Чабанюком Я.М., співавторові належить постановка проблем та рекомендації щодо їх розв'язування, дисертантом проведено доведення теорем та лем, формулювання висновків, а також аналіз отриманих результатів.

У роботах в співавторстві з Хімкою У.Т. участь останньої обмежилась аналізом результатів.

Побудова математичної моделі системи міста з використанням властивості асимптотичної дисипативності дифузійного процесу з марковськими переключеннями належить автору.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідались на всеукраїнських та міжнародних конференціях, а саме на:

– Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" (Кам'янець-Подільський, 2014);

– International Conference "Problems of Decision Making Under Uncertainties" (Mukachevo, 2014; Cesky Rudolec, 2014; Skhidnytsia, 2015; Odessa, 2015);

– IV Міжнародній науковій конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Теоретичні та прикладні аспекти кібернетики" (Kyiv, 2014);

– International conference "Probability, reliability and stochastic optimization" (Kyiv, 2015);

– XVI Міжнародній науковій конференції ім. акад. Михайла Кравчука (Київ, 2015);

– XXI Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS - 2015)" (Львів, 2015).

Результати дисертації були представлені на науковому семінарі кафедри прикладної математики Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету "Львівська Політехніка" (Львів, 2016) та на науковому семінарі кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень і кафедри прикладної статистики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Київ, 2016).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 5 статтях [1 – 5] в наукових журналах (загальним обсягом 1,12 умовних друкованих аркушів), а також, у 9 матеріалах та тезах [6 – 14] всеукраїнських та міжнародних конференцій. Статті [1], [2], [4] та [5] опубліковано у виданнях, які входять до переліку фахових видань МОН України, статті [1], [2], [3] та [5] опубліковані у виданнях, що внесені до міжнародних наукометричних баз даних (Google Scholar, Zentralblatt MATH).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг роботи становить 113 сторінок, список літератури налічує 85 найменувань на 10 сторінках та додаток займає 1 сторінку.

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Кутніву Мирославу Володимировичу за постійну увагу до роботи та доктору фізико-математичних наук, професору Чабанюку Ярославу Михайловичу за постановку задач, розглянутих в спільних роботах.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У *Вступі* обґрунтовано актуальність теми, наведено мету та задачі дослідження, апробацію результатів дисертації, а також сформульовано наукову новизну та практичне значення одержаних результатів

В першому розділі "*Огляд літературних джерел та допоміжні відомості"* описано основні результати теорії дифузійних процесів з марковськими переключеннями та дисипативних систем. Наведено основні положення з теорії марковських процесів, випадкових еволюцій та дисипативності систем, які описуються стохастичними диференціальними рівняннями.

У другому розділі "*Асимптотична дисипативність неавтономного випадкового процесу з дифузійним збуренням"* описано дифузійний процес з марковськими переключеннями в схемі дифузійної апроксимації. Встановлено форму граничного генератора відповідного марковського процесу в схемі дифузійної апроксимації. Знайдено розв'язок проблеми сингулярного збурення для збуреної функції Ляпунова.

У підрозділі 2.1 встановлено достатні умови асиптотичної дисипативності дифузійного процесу, що задається розв'язком стохастичного диференціального рівняння з адитивною дифузійною складовою в схемі дифузійної апроксимації

$$du^{\varepsilon}(t) = C\left(u^{\varepsilon}(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right)dt + \varepsilon^{-1}C_0\left(u^{\varepsilon}(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right)dt + \\ +\sigma\left(u^{\varepsilon}(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(t), \qquad (1)$$

де $u^{\varepsilon}(t) \in R^d, t \geq 0$ – випадкова еволюція;

$x(t)$ – марковський процес;

$\varepsilon > 0$ – малий параметр;

$C(u,\cdot) \in C^2(R^d)$ – функція регресії;

$C_0(u,\cdot) \in C^3(R^d)$ – сингулярне збурення функції регресії;

$w(t)$ – вінерівський процес;

$\sigma(u,x)$ – дифузія.

Марковський процес $x(t), t \geq 0,$ визначений в просторі $(X, \boldsymbol{X})$ зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$.

Генератор марковського процесу визначається співвідношенням

$$\boldsymbol{Q}\varphi(x) = q(x)\int_X Q(x,dy)[\varphi(y) - \varphi(x)], \varphi \in \boldsymbol{B}(X),$$

де $\boldsymbol{B}(X)$ – банаховий простір дійсних обмежених функцій з супремум-нормою

$$\mathrm{P}\varphi\mathrm{P} = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|.$$

Для генератора $\boldsymbol{Q}$ марковського процесу $x(t), t \geq 0,$ визначений потенціал

$$\boldsymbol{R}_0 = \Pi - (\Pi + \boldsymbol{Q})^{-1},$$

де

$$\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dx)\varphi(x)$$

проектор на підпростір $N_{\boldsymbol{Q}}$ нулів оператора $\boldsymbol{Q}$

$$N_{\boldsymbol{Q}} = \{\varphi : \boldsymbol{Q}\varphi = 0\}.$$

Гранична еволюція для системи (1) має представлення

$$du(t) = a(u)dt + \sigma(u)dw(t), \tag{2}$$

де

$$a(u) = \int_X C_0(u,x)\boldsymbol{R}_0 C_0'(u,x)\pi(dx) + \int_X C(u,x)\pi(dx),$$

а гранична дифузія $\sigma(u)$ визначається зі співвідношення

$$\sigma(u)\sigma^*(u) = B(u),$$

де

$$B(u) = 2\int_X C_0(u,x)\boldsymbol{R}_0 C_0(u,x)\pi(dx) + \int_X \sigma^2(u,x)\pi(dx).$$

Для усередненої функції регресії справджується рівність

$$C(u) = \int_X \pi(dx)C(u,x).$$

А також, виконується умова балансу

$$\Pi \boldsymbol{C}_0(x) \equiv 0. \tag{3}$$

Оператор $\overset{\circ}{\boldsymbol{L}}(x)$ має представлення

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{L}}(x)\varphi(u) = \left[a(u) - C_0(u,x)\boldsymbol{R}_0 C_0'(u,x) - C(u,x)\right]\varphi'(u) +$$

$$+\left[\frac{1}{2}B(u) - C_0(u,x)\boldsymbol{R}_0 C_0(u,x) - \frac{1}{2}\sigma^2(u,x)\right]\varphi''(u).$$

Означення 2.1 *Система (1) називається асимптотично дисипативною, якщо* $u^{\varepsilon}(t)$ *слабко збігається до* $u(t)$ *при* $\varepsilon \to 0$ *та гранична еволюція (2) є дисипативною.*

Теорема 2.1 *Нехай існує функція Ляпунова* $V(u) \in C^3(R^d)$ *системи*

$$\frac{du}{dt} = a(u),$$

яка задовольняє умови

C1: $\left|C_0(u,x)\boldsymbol{R}_0[\overset{\circ}{L}(u,x)V'(u)]'\right| < M_1V(u), M_1 > 0;$

C2: $\left|C(u,x)\boldsymbol{R}_0[C_0(u,x)V'(u)]'\right| < M_2V(u), M_2 > 0;$

C3: $\left|\sigma^2(u,x)\boldsymbol{R}_0[C_0(u,x)V'(u)]''\right| < M_3V(u), M_3 > 0;$

C4: $\left|C(u,x)\boldsymbol{R}_0[\overset{\circ}{L}(u,x)V'(u)]'\right| < M_4V(u), M_4 > 0;$

C5: $\left|\sigma^2(u,x)\boldsymbol{R}_0[\overset{\circ}{L}(u,x)V'(u)]''\right| < M_5V(u), M_5 > 0.$

Крім того при $c_1 > 0, c_2 > 0$ *виконуються умови*

$$a(u)V'(u) < -c_1V(u),$$

$$\sup_{u\in R^d} \| \sigma(u) \| < c_2,$$

а також виконується умова балансу (3).

Тоді система (1) асимптотично дисипативна.

У підрозділі 2.2 встановлено умови асимптотичної дисипативності еволюційної системи з марковськими переключеннями в схемі дифузійної апроксимації за відсутності дифузійної адитивної складової, що задається розв'язком стохастичного диференціального рівнянням

$$du^\varepsilon(t) = C\left(u^\varepsilon(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right)dt + \varepsilon^{-1}C_0\left(u^\varepsilon(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right)dt. \qquad (4)$$

Тут $C(u,\cdot)\in C^2(R^d)$ – функція регресії, $C_0(u,\cdot)\in C^3(R^d)$ – сингулярне збурення функції регресії $C(u,\cdot)$.

Гранична еволюція для системи (4) задається розв'язком рівняння

$$du(t) = a(u)dt + \sigma(u)dw(t),$$

де

$$a(u) = \int_X C_0(u,x)\boldsymbol{R}_0C_0'(u,x)\pi(dx) + \int_X C(u,x)\pi(dx).$$

Для граничної дифузії $\sigma(u)$ виконується

$$\sigma(u)\sigma^*(u) = B(u),$$

де

$$B(u) = 2\int_X C_0(u,x)\boldsymbol{R}_0C_0(u,x)\pi(dx).$$

Граничний генератор визначається рівністю

$$\boldsymbol{L}\varphi(u) = a(u)\varphi'(u) + \frac{1}{2}B(u)\varphi''(u).$$

Оператор $\overset{\circ}{\boldsymbol{L}}(x)$ має форму

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{L}}(x)\varphi(u) = \boldsymbol{L}\varphi(u) - \left[\boldsymbol{C}_0(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{C}_0(x) - \boldsymbol{C}(x)\right]\varphi(u),$$

де

$$\boldsymbol{C}_0(x)\varphi(u) = C_0(u,x)\varphi'(u,x)$$

та

$$\boldsymbol{C}(x)\varphi(u) = C(u,x)\varphi'(u,x).$$

Теорема 2.2 *Нехай існує функція Ляпунова* $V(u) \in C^3(R^d)$ *детермінованої системи*

$$\frac{du}{dt} = a(u),$$

для якої виконуються умови

C1: $\left|\boldsymbol{C}_0(x)\boldsymbol{R}_0\overset{\circ}{\boldsymbol{L}}(x)V(u)\right| < M_1V(u), M_1 > 0;$

C2: $\left|\boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)\right| < M_2V(u), M_2 > 0;$

C3: $\left|\boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{R}_0\overset{\circ}{\boldsymbol{L}}(x)V(u)\right| < M_3V(u), M_3 > 0.$

Нехай також виконується умова балансу (3) та мають місце обмеження

$$a(u)V'(u) < -c_1V(u), c_1 > 0,$$

$$\sup_{u\in R^d} \| \sigma(u) \| < c_2, c_2 > 0.$$

Тоді система (4) асимптотично дисипативна.

У підрозділі 2.3 отримано асимптотичну дисипативність флуктуацій еволюційної системи, з використанням властивості асимптотичної дисипативності початкової системи, яка задається розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$du^\varepsilon(t) = C^\varepsilon\left(u^\varepsilon(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon^4}\right)\right)dt, \tag{5}$$

де

$$C^\varepsilon\left(u^\varepsilon, x\right) = C\left(u^\varepsilon, x\right) + \varepsilon^{-1}C_0\left(u^\varepsilon, x\right).$$

Усереднена система задається розв'язком рівняння

$$\frac{du}{dt} = a(u), \tag{6}$$

де

$$a(u) = \Pi C_0(u,x)\boldsymbol{R}_0 C_0^{'}(u,x) + \Pi C(u,x).$$

Флуктуації системи (5) визначені співвідношенням

$$v^{\varepsilon}(t) = \varepsilon^{-1}[u^{\varepsilon}(t) - u(t)]. \tag{7}$$

Система (5) розглядається в умовах асимптотичної дисипативності, що мають вигляд

$$|C_0(u,x)\boldsymbol{R}_0[\overset{\circ}{L}(u,x)V'(u)]'| < M_1 V(u);$$

$$|C(u,x)\boldsymbol{R}_0[C_0(u,x)V'(u)]'| < M_2 V(u);$$

$$|C(u,x)\boldsymbol{R}_0[\overset{\circ}{L}(u,x)V'(u)]'| < M_3 V(u);$$

$$a(u)V'(u) < -c_1 V(u);$$

$$\sup_{u\in R^d} \mathrm{P}\sigma(u)\mathrm{P} < c_2,$$

де $V(u) \in C^3(R^d)$ – функція Ляпунова системи (6) та сталі $c_1 > 0, c_2 > 0$ і $M_i > 0,\ i = \overline{1,3}$.

Нехай також виконується локальна умова балансу

$$\Pi C_0(u,x)\boldsymbol{R}_0 C_0^{'}(u,x) = 0. \tag{8}$$

Функція $\overset{\circ}{L}(u,x)V'(u)$ має вигляд

$$\overset{\circ}{L}(u,x)V'(u) = [a(u) - C_0(u,x)\boldsymbol{R}_0 C_0'(u,x) - C(u,x)]V'(u) +$$

$$+\left[\frac{1}{2}B(u) - C_0(u,x)\boldsymbol{R}_0 C_0(u,x)\right]V''(u).$$

Коефіцієнт граничної дифузії $\sigma(u)$ визначається зі співвідношення

$$\sigma(u)\sigma^{*}(u) = B(u),$$

де

$$B(u) = 2\int_X C_0(u,x)\boldsymbol{R}_0 C_0(u,x)\pi(dx).$$

Граничний генератор флуктуацій визначається співвідношенням

$$\boldsymbol{L}\varphi(v,w) = a_1(v,w)\varphi_v^{'}(v,w) + a_2(w)\varphi_w^{'}(v,w) + \frac{1}{2}B(w)\varphi_v^{''}(v,w)$$

на тест-функціях $\varphi(v,w) \in C^{3,3}(R^d \times R^d)$, де

$$a_1(v,w) = v\int_X \pi(dx) C^{'}(w,x)$$

та

$$a_2(w) = \int_X \pi(dx) C(w,x).$$

Теорема 2.3 *Нехай для функції Ляпунова* $V(v,w) \in C^{3,3}(R^d \times R^d)$ *системи*

$$\frac{dv}{dt} = a_1(v,w)$$

виконується умова

$$a_1(v,w) V_v^{'}(v,w) < -c_3 V(v,w),$$

де $c_3 > 0 - const.$

Тоді за виконання умови балансу (3) та умов асимптотичної дисипативності початкової системи (5) має місце асимптотична дисипативність флуктуацій (7).

У розділі 3 "*Асимптотична дисипативність випадкових процесів з імпульсним збуренням та в схемі асимптотично малої дифузії*" встановлено вигляд достатніх умов асимптотичної дисипативності процесу з імпульсним збуренням в схемі дифузійної апроксимації, а також процесу з дифузійним збуренням в схемі асимптотично малої дифузії.

У підрозділі 3.1 отримано достатні умови дисипативності граничної еволюції процесу з імпульсним збуренням. Отримані результати та Модельна гранична теорема Королюка забезпечують властивість асимптотичної дисипативності еволюційного процесу з марковськими переключеннями, який задається стохастичним диференціальним рівнянням

$$du^{\varepsilon}(t) = C\left(u^{\varepsilon}(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon^4}\right)\right)dt + \varepsilon d\eta^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t) \in R^d, \qquad (9)$$

де $u^{\varepsilon}(t)$ – випадкова еволюція, $t \geq 0$;

$\varepsilon > 0$ – малий параметр серій;

$C(u,\cdot) \in C^2(R^d)$ – функція регресії;

$x(t)$ – марковський процес;

$\eta^{\varepsilon}(t)$ – імпульсний процес збурень.

Марковський процес

$$x\left(\frac{t}{\varepsilon^4}\right), t \geq 0,$$

визначений у фазовому просторі станів $(X, \boldsymbol{X})$ зі стаціонарним розподілом

$\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$, генератором

$$\boldsymbol{Q}\varphi(x) = q(x)\int_X Q(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]$$

і потенціалом до нього

$$\boldsymbol{R}_0 = \Pi - (\Pi + \boldsymbol{Q})^{-1},$$

де Π – проектор на підпростір нулів оператора $\boldsymbol{Q}$.

Імпульсний процес збурень $\eta^\varepsilon(t), t \geq 0$ задано співвідношенням

$$\eta^\varepsilon(t) = \int_0^t \eta^\varepsilon\left(ds, x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right),$$

де сім'я процесів з незалежними приростами визначається генераторами

$$\boldsymbol{\Gamma}_u^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) = \varepsilon^{-4}\int_R [\varphi(u + \varepsilon^2 v, w, x) - \varphi(u, w, x)]\Gamma(dv, x) \tag{10}$$

та

$$\boldsymbol{\Gamma}_w^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) = \varepsilon^{-4}\int_R [\varphi(u, w + \varepsilon^2 v, x) - \varphi(u, w, x)]\Gamma(dv, x). \tag{11}$$

Генератори (10) та (11) на тест-функціях $\varphi(w) \in C^3(R^d)$ мають наступне подання

$$\boldsymbol{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\varphi(w) + \boldsymbol{\Gamma}_2(x)\varphi(w) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w),$$

де

$$\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\varphi(w) = b_1(x)\varphi'(w)$$

та

$$\boldsymbol{\Gamma}_2(x)\varphi(w) = \frac{1}{2}b_2(x)\varphi''(w).$$

Введемо позначення

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{L}}(x)\varphi(u, w) = \int_X C(u, x)\varphi'_u(u, w)\pi(dx) +$$

$$+\int_X b_1(x)\boldsymbol{R}_0 b_1(x)\varphi''_u(u, w)\pi(dx) + \int_X b_2(x)\varphi''_u(u, w)\pi(dx) -$$

$$-[\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{\Gamma}_1(x) + \boldsymbol{\Gamma}_2(x) + \boldsymbol{C}(x)]\varphi(u, w).$$

Гранична еволюція системи (9) є розв'язком диференціального рівняння

$$du(t) = a(u)dt + \sigma dw(t),$$

де $w(t)$ – вінерівський процес.

Зсув $a(u)$ визначається рівністю

$$a(u) = \int_X C(u,x)\pi(dx).$$

Гранична дифузія σ задана співвідношенням $\sigma \cdot \sigma^* = B,$ де

$$B = 2\int_X b_1(x)\boldsymbol{R}_0 b_1(x)\pi(dx) + \int_X b_2(x)\pi(dx).$$

Тут

$$b_1(x) = \int_R v\Gamma(dv,x)$$

та

$$b_2(x) = \int_R v^2\Gamma(dv,x).$$

Нехай також виконується умова балансу

$$\int_X b_1(x)\pi(dx) \equiv 0. \qquad (12)$$

Теорема 3.1 *Нехай існує функція Ляпунова* $V(u) \in C^3(R^d)$ *системи*

$$\frac{du}{dt} = a(u),$$

що задовольняє умови

C1: $|\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\boldsymbol{R}_0[\overset{\circ}{\boldsymbol{L}}(x)V(u)]| < M_1 V(u), M_1 > 0;$

C2: $|\boldsymbol{\Gamma}_1^u(x)\boldsymbol{R}_0[\boldsymbol{\Gamma}_1^u(x)V(u)]| < M_2 V(u), M_2 > 0;$

C3: $|\boldsymbol{\Gamma}_2(x)\boldsymbol{R}_0[\boldsymbol{\Gamma}_1(x)V(u)]| < M_3 V(u), M_3 > 0;$

C4: $|\boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{R}_0[\boldsymbol{\Gamma}_1(x)V(u)]| < M_4 V(u), M_4 > 0;$

C5: $|\boldsymbol{\Gamma}_1^u(x)\boldsymbol{R}_0[\overset{\circ}{\boldsymbol{L}}(x)V(u)]| < M_5 V(u), M_5 > 0;$

C6: $|\boldsymbol{\Gamma}_2(x)\boldsymbol{R}_0[\boldsymbol{\Gamma}_1^u(x)V(u)]| < M_6 V(u), M_6 > 0;$

C7: $|\boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{R}_0[\boldsymbol{\Gamma}_1^u(x)V(u)]| < M_7 V(u), M_7 > 0;$

C8: $|\boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{R}_0[\overset{\circ}{\boldsymbol{L}}(x)V(u)]| < M_8 V(u), M_8 > 0;$

C9: $|\boldsymbol{\Gamma}_2(x)\boldsymbol{R}_0[\overset{\circ}{\boldsymbol{L}}(x)V(u)]| < M_9 V(u), M_9 > 0.$

Нехай виконується умова балансу (12) та нерівності

$$a(u)V'(u) < -c_1 V(u),$$

$$\sup_{u\in R^d} \mathrm{P}\sigma(u)\mathrm{P} < c_2,$$

де $c_1 > 0$ та $c_2 > 0$.

Тоді система (9) асимптотично дисипативна.

У підрозділі 3.2 розглянуто стохастичний процес з дифузійним збуренням в схемі асимптотично малої дифузії, який визначений стохастичним диференціальним рівнянням

$$du^\varepsilon(t) = C\left(u^\varepsilon(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon^3}\right)\right)dt + \varepsilon^{-1}C_0\left(u^\varepsilon(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon^3}\right)\right)dt +$$

$$+\varepsilon^{1/2}\sigma\left(u^\varepsilon(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon^3}\right)\right)dw(t). \qquad (13)$$

Гранична еволюція системи (13) має представлення

$$du(t) = C(u)dt + \frac{1}{2}\varepsilon B(u)dw(t),$$

де

$$C(u) = \int_X C(u,x)\pi(dx).$$

Гранична дифузія σ визначена з рівності $\sigma(u)\sigma^*(u) = B(u)$, де

$$B(u) = \int_X \sigma^2(u,x)\pi(dx).$$

Оператор $\overset{\circ}{\boldsymbol{L}}(x)$ має вигляд

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{L}}(x)\varphi(u) = [C(u) - C(u,x)]\varphi'(u) + \left[B(u) - \frac{1}{2}\varepsilon\sigma^2(u,x)\right]\varphi''(u).$$

Оператор $\boldsymbol{A}_1(x)$ визначається рівністю

$$\boldsymbol{A}_1(x)\varphi(u,x) = C(u,x)\varphi'(u,x) + \frac{1}{2}\varepsilon\sigma^2(u,x)\varphi''(u,x)$$

Теорема 3.2 *Нехай існує функція Ляпунова* $V(u) \in C^4(R^d)$ *системи*

$$\frac{du}{dt} = C(u),$$

яка задовольняє умови

C1: $|C_0(u,x)\boldsymbol{R}_0[C_0(u,x)V'(u)]'| < M_1V(u), M_1 > 0;$

C2: $|C_0(u,x)\boldsymbol{R}_0[\overset{\circ}{L}(u,x)V'(u)]'| < M_2V(u), M_2 > 0;$

C3: $|A_1(u,x)\boldsymbol{R}_0[C_0(u,x)V'(u)]'| < M_3V(u), M_3 > 0;$

C4: $|A_1(u,x)\boldsymbol{R}_0[\overset{\circ}{L}(u,x)V'(u)]'| < M_4V(u), M_4 > 0.$

За умови балансу (3) та умов

$$C(u)V'(u) < -c_1V(u), c_1 > 0,$$

$$\sup_{u\in R^d} \mathrm{P}\sigma(u)\mathrm{P} < c_2, c_2 > 0,$$

система (13) є асимптотично дисипативною.

У четвертому розділі *"Застосування асимптотичної дисипативності дифузійного процесу з марковськими переключеннями"* розглянуто узагальнену систему Лоренца, що описує економіку системи міста за наявності зовнішніх збурень, дифузійної природи. А саме, проаналізовано асимптотичну дисипативність такої моделі із застосуванням властивостей функції Ляпунова усередненої системи, що задовольняє умови асимптотичної дисипативності процесу з дифузійним збуренням та марковськими переключеннями.

Узагальнена система Лоренца, що описує економічну модель системи міста, має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = a_1(a_2Y - a_3X), \\ \dfrac{dY}{dt} = b_1(b_2X - b_3Y) - b_4XZ, \\ \dfrac{dZ}{dt} = c_1XY - c_2Z, \end{cases} \tag{14}$$

де X – обсяг продукції, яка виготовляється системою міста;

Y – кількість корінного населення;

Z – земельна рента.

Константи визначаються наступним чином:

a_1 – коефіцієнт швидкості становлення;

a_2 – параметр, який визначає величину попиту на продукцію міста, нормовану на душу населення;

a_3 – рівень пропозиції продукції всередині міста;

b_2 – попит на працю зі сторони фірм для виробництва одиниці продукції;

b_3 – визначається як частина жителів, які обирають роботу в місті;

c_1 та c_2 – визначають рівень позитивного впливу виробництва та кількості населення міста, а також негативного впливу зростання земельної ренти на її поточне значення, відповідно.

З метою отримання більш повної картини економіки міста розглянуто збурену систему. А саме, в третьому рівнянні розглянуто дифузійно збурений доданок вигляду $\sigma(X,Y,Z)dw(t)$, де $\sigma(X,Y,Z)$ – дифузія та $w(t)$ – вінерівський процес, який описує вплив навколишнього світу на швидкість зміни земельної ренти в місті.

Також розглянуто вплив зовнішнього фактора на коефіцієнт c_2 у вигляді ергодичного марковського процесу $x(t)$ у фазовому просторі станів $\{-0.2, 0.2\}$ зі стаціонарним розподілом $\{0.5, 0.5\}$, тобто

$$P(x = -0.2) = 0.5,$$

$$P(x = 0.2) = 0.5,$$

що зумовлено випадковими змінами величини ренти.

Збурена система (14) має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = a_1(a_2Y - a_3X), \\ \dfrac{dY}{dt} = b_1(b_2X - b_3Y) - b_4XZ, \\ dZ = c_1XYdt - (c_2 + x(t)c_2)Zdt + \sigma(X,Y,Z)dw(t), \end{cases} \tag{15}$$

а гранична система для системи (15) визначається наступним чином

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = a_1(a_2Y - a_3X), \\ \dfrac{dY}{dt} = b_1(b_2X - b_3Y) - b_4XZ, \\ dZ = c_1XYdt - c_2Zdt + \sigma(X,Y,Z)dw(t). \end{cases} \tag{16}$$

Умовами дисипативності системи (16) є

$$C(X,Y,Z)V'(X,Y,Z) < -A_1V(X,Y,Z) \tag{17}$$

та

$$\sup_{(X,Y,Z)\in R^3} \| \sigma(X,Y,Z) \| < A_2, \tag{18}$$

де $A_1 > 0, A_2 > 0$ і $V(X,Y,Z) \in C^3(R^3)$ функція Ляпунова детермінованої системи (14).

Для системи (16) матриця $C(X,Y,Z)$ має вигляд

$$C(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} a_1a_2Y - a_1a_3X \\ b_1b_2X - b_1b_3Y - b_4XZ \\ c_1XY - c_2Z \end{pmatrix}^T. \tag{19}$$

Функція Ляпунова розглядається у формі

$$V(X,Y,Z) = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Таким чином, умова (17) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} a_1a_2Y - a_1a_3X \\ b_1b_2X - b_1b_3Y - b_4XZ \\ c_1XY - c_2Z \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2X \\ 2Y \\ 2Z \end{pmatrix} < -A_1X^2 - A_1Y^2 - A_1Z^2.$$

Звідси, система (15) є асимптотично дисипативною, якщо виконуються умови

$$\begin{cases} A_1 < 2a_1a_3, \\ A_1 \le a_1a_3 + b_1b_3 - \sqrt{(a_1a_3 - b_1b_3)^2 + (a_1a_2 + b_1b_2)^2}, \\ b_4 \ge c_1, \\ A_1 \le 2c_2, \end{cases} \tag{20}$$

та умова (18).

За виконання умови $a_2b_1b_2 \ge a_3b_1b_3$ стаціонарні точки системи (14) визначаються із

$$\begin{cases} X = \pm\sqrt{\dfrac{c_2}{b_4c_1a_3}(a_2b_1b_2 - a_3b_1b_3)}, \\ Y = \pm\dfrac{a_3}{a_2}\sqrt{\dfrac{c_2}{b_4c_1a_3}(a_2b_1b_2 - a_3b_1b_3)}, \\ Z = \dfrac{1}{b_4a_2}(a_2b_1b_2 - a_3b_1b_3). \end{cases}$$

Враховуючи умови (20) асимптотичної дисипативності системи (15), єдиною стаціонарною точкою системи (14) є точка $K_1(0,0,0)$.

Такий чином, навіть при наявності впливу на систему у вигляді дифузійних збурень та марковського процесу, за знайдених умов, зберігається дисипативність розглянутої моделі Лоренца. З економічної точки зору це означає, що економічна система залишається врівноваженою з прогнозованими параметрами.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі встановлено достатні умови асимптотичної дисипативності дифузійного процесу з марковськими переключеннями в схемі асимптотично малої дифузії та дифузійної апроксимації, а також отримано умови асимптотичної дисипативності флуктуацій процесу з дифузійним збуренням за виконання умов асимптотичної дисипативності початкового процесу.

Асимптотична дисипативність випадкових еволюцій як з дифузійним, так і з імпульсним збуренням ґрунтується на збіжності початкового процесу до граничної еволюції, яка задовольняє умови дисипативності. Збіжність процесів з марковськими переключеннями випливає з обмеженості залишкового члена генератора початкового процесу, отриманого при розв'язку проблеми сингулярного збурення. Ключовою умовою дисипативності граничного процесу є умова обмеженості похідної функції Ляпунова детермінованої системи обчисленої вздовж траєкторії процесу.

В дисертаційній роботі вперше отримано наступні результати:

1. Встановлено асимптотичну дисипативність випадкової еволюції з дифузійним збуренням в схемі дифузійної апроксимації. Також отримано достатні

умови асимптотичної дисипативності, коли початкове стохастичне диференціальне рівняння, окрім функції регресії та сингулярного збурення функції регресії, залежить від адитивної дифузійної складової.

2. Отримано достатні умови асимптотичної дисипативності випадкового процесу з імпульсним збуренням в схемі дифузійної апроксимації. Отриманий результат встановлено з урахуванням властивостей марковського процесу, а також процесів з незалежними приростами. Визначальною умовою для розв'язку проблеми сингулярного збурення генератора початкового процесу є умова балансу на усереднену величину стрибка процесу з незалежними приростами.

3. Встановлено умови асимптотичної дисипативності флуктуацій випадкового процесу з дифузійним збуренням з марковськими переключеннями в схемі дифузійної апроксимації. Початковий процес задовольняє умови асимптотичної дисипативності. Розв'язок проблеми сингулярного збурення генератора та побудова граничного генератора трьохкомпонентного марковського процесу флуктуацій встановлюється за виконання локальної умови балансу на сингулярне збурення функції регресії.

4. Знайдено достатні умови дисипативності граничного процесу в схемі асимптотично малої дифузії, з використанням властивостей функції Ляпунова відповідної детермінованої системи. Встановлено, що граничний процес є дифузійним із зсувом та матрицею дифузії, які визначаються функцією регресії та сингулярним збуренням функції регресії. Отриманий результат дозволяє стверджувати асимптотичну дисипативність початкового процесу.

5. Проаналізовано економіку системи міста, що описується узагальненою моделлю Лоренца за наявності зовнішніх випадкових впливів. Впливи навколишнього світу на економіку міста описуються дифузійним доданком, що впливає на швидкість зміни величини земельної ренти в місті, та рівномірно ергодичним марковським процесом. Встановлено, що розглянута модель Лоренца, яка володіє властивістю асимптотичної дисипативності має єдину стаціонарну точку. Розгляд збурених складових в системі дозволяє з більшою точністю дослідити процеси, які протікають в місті.

Усі результати отримані в рамках дисертаційного дослідження сформульовано у вигляді теорем та лем, які строго доведені з використанням наукових праць наведених в списку використаних джерел. Дисертація є комплексним дослідженням, в якому отримано асимптотичну дисипативність дифузійного процесу зі збуреннями різної природи в марковському середовищі.

Дисертаційна робота носить як теоретичний, так і прикладний характер. Розглянуті проблеми є важливими для вивчення асимптотичних характеристик випадкових еволюцій з марковськими переключеннями в схемі серій з малим параметром. Також, отримані результати можуть бути використані для аналізу процесів, що описуються моделлю Лоренца трьох стохастичних диференціальних рівнянь за наявності випадкових адитивних складових.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових фахових виданнях:

1. Кінаш А. В. Асимптотична дисипативність дифузійного процесу. / А. В. Кінаш, Я. М. Чабанюк, У. Т. Хімка // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія фізико-математичні науки. Збірник наук. праць. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка. – 2014. – Вип. 11. – С. 77–87.

2. Кінаш А. В. Флуктуації асимптотично дисипативного процесу з марковськими переключенням. / А. В. Кінаш // Буковинський математичний журнал. – 2015. – Т.3, № 2. – С. 42–47.

3. Kinash A. Asymptotic dissipativity of diffusion process in the asymptotic small diffusion scheme. / A. Kinash, Ya. Chabaniuk, U. Khimka // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. – 2015. – 14(4). – P. 93–103.

4. Kinash A. The asymptotic dissipativity property of the evolutional process with Markov switching. / A. Kinash, Ya. Chabaniuk, U. Khimka // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2016. – Вип. 24. – С. 53–59.

5. Кінаш А. В. Асимптотична дисипативність випадкової еволюції з імпульсним збуренням. / А. В. Кінаш, Я. М. Чабанюк, У. Т. Хімка // Вісник КНУ ім.Т. Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2014. – Вип. № 4. – С. 163–166.

Матеріали та тези доповідей на наукових конференціях:

6. Кінаш А. В. Асимптотична дисипативність дифузійного процесу. / А. В. Кінаш, Я. М. Чабанюк, У. Т. Хімка // XXIII International Conference “Problems of Decision Making Under Uncertainties”. Abstracts. 12–16 May 2014, Mukachevo, Ukraine. – Kyiv. – 2014. – С. 115–116.

7. Кінаш А. В. Властивість асимптотичної дисипативності стохастичного процесу з марковськими переключеннями. / А. В. Кінаш, Я. М. Чабанюк, У. Т. Хімка // XVI Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука. Матеріали конференції І. – 14–15 травня 2015 р., – Київ, Україна. – С. 131–132.

8. Кінаш А. В. Граничний оператор дифузійного процесу в схемі асимптотично малої дифузії. / А. В. Кінаш, Я. М. Чабанюк, У. Т. Хімка // XXI Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (АРАМСS-2015)”. Збірник наукових праць. – 24–25 вересня 2015 р., – Львівський національний університет імені Івана Франка. Львів, Україна. – С. 163–164.

9. Кінаш А. В. Умова дисипативності для граничного дифузійного процесу. / А. В. Кінаш, Я. М. Чабанюк, У. Т. Хімка // VI Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації”. Тези доповідей. – 4–5 квітня 2014 р., – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка. – 2014. – С. 72–73.

10. Kinash A. V. Asymptotic dissipativity of diffusion process in the asymptotic small diffusion scheme. / A. V. Kinash, Ya. M. Chabaniuk, U. T. Khimka // Probability, reliability and stochastic optimization: International Conference. Conference materials. 7–10 April 2015, Kyiv, Ukraine. – Kyiv. – 2015. – P. 72–73.

11. Kinash A. V. Asymptotic dissipativity of the random evolution with impulse perturbation. / A. V. Kinash, Ya. M. Chabaniuk, U. T. Khimka // XXIV International

Conference “Problems of Decision Making Under Uncertainties”. Abstracts. 1–5 September 2014, Cesky Rudolec, Czech Republic. – Київ. – 2014. – P. 56.

12. Kinash A. V. Generator of asymptotically dissipative process fluctuations. / A. V. Kinash, Ya. M. Chabaniuk, U. T. Khimka // XXV International Conference “Problems of Decision Making Under Uncertainties”. Abstracts. 11–15 May 2015, Skhidnytsia, Ukraine. – Київ. – 2015. – P. 31–32.

13. Kinash A. V. Limited generator of asymptotic dissipative process in the asymptotic small diffusion scheme. / A. V. Kinash, Ya. M. Chabaniuk, U. T. Khimka // XXVI International Conference “Problems of Decision Making Under Uncertainties”. Abstracts. 24–28 August 2015, Odessa, Ukraine. – Київ. – 2015. – P. 28–29.

14. Kinash A. V. The fluctuations of dissipativity process with Markov switching. / A. V. Kinash, Ya. M. Chabaniuk, U. T. Khimka // Theoretical and applied aspects of Cybernetics: The 4th International Scientific Conference of Students and Young Scientists. Proceedings. 24–28 November 2014, Kyiv, Ukraine. – Kyiv “Bukrek”. – 2014. – P. 91–97.

АНОТАЦІЯ

Кінаш А. В. *Дисипативність неавтономних систем з марковськими переключеннями***.** – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук, спеціальність 01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2016.

Дисертаційна робота присвячена аналізу властивості асимптотичної дисипативності дифузійного процесу з марковськими переключеннями в схемі серій з малим параметром. Встановлено достатні умови асимптотичної дисипативності випадкових еволюцій з дифузійним та імпульсним збуренням в схемі дифузійної апроксимації та асимптотично малої дифузії. Отримано асимптотичну дисипативність нормованих флуктуацій процесу з дифузійним збуренням за умови асимптотичної дисипативності початкового процесу. Вперше побудовано математичну модель Лоренца розвитку економіки міста за наявності випадкових впливів навколишнього світу, які подані у вигляді дифузійно збуреного доданку та марковським переключенням.

Ключові слова: асимптотична дисипативність, моделювання та аналіз стохастичних систем, марковські переключення, дифузійне збуреня, імпульсне збурення, функція Ляпунова, Модельна гранична теорема, неавтономна система.

АННОТАЦИЯ

Кинаш А. В. *Диссипативность неавтономных систем с марковскими переключениями*. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, специальность 01.05.04 – системный анализ и теория оптимальных решений. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко Министерства

образования и науки Украины, Киев, 2016.

Диссертационная работа посвящена анализу свойства асимптотической диссипативности диффузионного процесса с марковскими переключениями в схеме серий с малым параметром. Получены достаточные условия асимптотической диссипативности случайных эволюций с диффузионным и импульсным возмущением в схеме диффузионной аппроксимации и асимптотически малой диффузии. Получено асимптотическую диссипативность нормированных флуктуаций процесса с диффузионным возмущением при условии асимптотической диссипативности исходного процесса. Впервые построено математическую модель Лоренца развития экономики города при наличии случайных воздействий окружающего мира, которые представлены в виде диффузионно возмущенного слагаемого и марковским переключением.

Для асимптотической диссипативности случайной эволюции с марковскими переключениями должны выполняться условия слабой сходимости исходной эволюции к предельной, а также предельная эволюция должна обладать свойством диссипативности. Сходимость случайной эволюции в марковской среде к предельной эволюции получена с помощью решения проблемы сингулярного возмущения генератора соответствующего марковского процесса на возмущенной функции Ляпунова или возмущенной тест-функции. Рассмотренные функции определялись для каждой задачи в отдельности, опираясь на Модэльную предельную теорему Королюка. Важным условием для решения проблемы сингулярного возмущения является выполнение условия баланса. В случае, когда процесс с диффузионным возмущением, условие баланса накладывается на сингулярное возмущения функции регрессии, если же рассматривается процесс с импульсным возмущением, то условие баланса должно выполняться на усредненную величину скачка процесса с независимыми приращениями. Таким образом, получено вид генератора предельного процесса, а также условия ограниченности остаточного члена генератора марковского процесса. Полученные условия обеспечивают слабую сходимость исходного процесса к предельному.

Условия диссипативности предельной эволюции получено в терминах функции Ляпунова соответствующей детерминированной системы. Ключевым условием в этом случае выступает условие ограниченности производной функции Ляпунова вдоль траектории детерминированной системы.

Ключевые слова: асимптотическая диссипативность, моделирование и анализ стохастических систем, марковские переключения, дифузионное возмущение, импульсное возмущение, функция Ляпунова, Модэльная предельная теорема, неавтономная система.

ANNOTATION

Kinash A. V. *Dissipativity of the non-autonomous systems with Markov switching*. – Manuscript.

The thesis for the scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences, speciality 01.05.04 – system analysis and optimal decisions theory. – Taras

Shevchenko National University of Kyiv of Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2016.

Thesis is devoted to analysis of asymptotic dissipativity properties of diffusion process with Markov switching in the series scheme with a small parameter. Sufficient conditions for asymptotic dissipativity of random evolution with diffusion and impulse perturbation in the diffusion approximation scheme and asymptotically small diffusion scheme are set. Asymptotic dissipativity of the normalized fluctuations of process with diffusion perturbation provided asymptotic dissipativity of the initial process, are obtained. For the first time, the mathematical Lorenz model of city economics development are built in the presence of random effects of the world, which are given in the form of diffusion perturbed summand and by Markov switching.

Key words: asymptotic dissipativity, modeling and analysis of stochastic systems, Markov switching, diffusion perturbation, impulse perturbation, Lyapunov function, Pattern theorem, non-autonomous system.