Міністерство освіти і науки України

Поліський національний університет

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Рассадкіна Марина Валеріївна

УДК 512.56, 512.64, 519.11

ДИСЕРТАЦІЯ

Класифікаційні та комбінаторні задачі в теорії квадратичних форм Тітса

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. М. В. Рассадкіна

Київ – 2025

АНОТАЦІЯ

Рассадкіна М. В. Класифікаційні та комбінаторні задачі в теорії квадратичних форм Тітса. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. – Поліський національний університет – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2025.

У 70-х роках минулого століття розпочався новий етап розвитку теорії зображень, пов'язаний з введенням зображень нових об'єктів — таких як сагайдаки і частково впорядковані множини. Об'єднання двох видів зображень привів до найбільш загальних вільних матричних задач, що дозволило, зокрема, дати точні означення інтуїтивно зрозумілих понять, виник новий метод опису зображень класичних алгебраїчних об'єктів, який полягає в їх зведенні до вільних матричних задач (нових чи вже добре вивчених). Отже, в теорії зображень виникли різні нові можливості досліджень тощо.

Специфікою нових досліджень зображень стала і так звана квадратична форма Тітса. Вперше її ввів у 1972 р. П. Габріель для зображень сагайдаків, а потім в 1974 р. Ю. А. Дрозд для частково впорядкованих множин. Ці результати стали початком нового напрямку в алгебрі, який пов'язаний із вивченням зв'язків між властивостями зображень різних об'єктів та властивостями відповідних квадратичних форм.

Дослідження квадратичних форм Тітса постійно вимагають нових ідей і алгоритмів, вони пов'язані з різними класифікаційними і комбінаторними задачами.

Дисертаційна робота присвячена вивченню квадратичних форм Тітса скінченних частково впорядкованих (скорочено ч.в.) множин з різних

точок зору. Вона складається зі вступу і шести розділів.

У вступі наведено загальну характеристику та мету роботи, обґрунтовано її актуальність і наукову новизну тощо.

У першому розділі дисертаційної роботи викладено основні відомості із теорії зображень категорій, сагайдаків і ч.в. множин, та зв'язок з квадратичними формами Тітса.

У другому розділі детально викладено метод мінімаксної еквівалентності ч.в. множин, включаючи поняття мінімаксної системи твірних для класів ч.в. множин, приведено міркування (з прикладами) про явні і неявні класифікації та модифікації класифікацій. Новими результатами, викладеними в цьому розділі, є модифікована класифікація P-критичних ч.в. множин (в сенсі опису по класам мінімаксних ізоморфізмів множин), опис Тітса і не Тітса P-критичних ч.в. множин та загальну теорему про ч.в. множини верхньої ширини 3. Для довільної ч.в. множини знайдено зв'язок між нижньою і верхньою шириною як найменшою та найбільшою шириною в класі всіх множин, мінімаксно еквівалентних заданій.

У другому розділі вивчаються також ч.в. множини з додатною квадратичною формою Тітса; такі множини називаються додатними. Описано максимальні додатні множини і мінімальні додатні несерійні множини. Доведено, що кожна несерійна додатна множина вкладається в максимальну як нижня або верхня підмножина. Доведено, що множина всіх додатних ч. в. множин має мінімаксну систему твірних із квазіланцюгових ч.в. множин (множин, діаграми Хассе яких є ланцюгами). Доведено, що для неорієнтованого графа Хассе довільної зв'язаної несерійної додатної ч. в. множини існує додатний цикломатичний каркас.

У третьому розділі доведено, що довільна NP-критична ч. в. множина (мінімальна множина, квадратична форма Тітса якої не є невід'ємною) мінімаксно еквівалентна суперкритичній множині Назарової. Більш точно суперкритичні множини (по одному із кожного із шести класів ізоморфізму) утворюють канонічну мінімаксну систему твірних для множини всіх NP-критичних ч. в. множин. Використовуючи це твердження, отримано повну загальну класифікацію NP-критичних ч.в. множин (їх число, з точністю до ізоморфізму і дуальності, дорівнює 115). Отримано також модифіковану класифікацію NP-критичних ч. в. множин в тому сенсі, що (з точністю до ізоморфізму і дуальності) вказано ч.в. множини, що належать кожному із шести класів мінімаксної еквівалентності.

У четвертому розділі описано серійні невід'ємні ч.в. множини з одновимірним цілочисловим ядром їхньої квадратичної форми Тітса (названі Д. Сімсоном основними). Доведена гіпотеза Сімсона про неможливість цілочислової еквівалентності між квадратичними формами Тітса основної ч. в. множини і циклічної розширеної діаграми Динкіна. Введено поняття майже додатної ч.в. множини як невід'ємної множини з максимальною додатною підмножиною. Доведено, що множина недодатних майже додатних множин (названих суттєвими) збігається з множиною основних множин. Це дає можливість при дослідженні основних ч.в. множин замінити комбінаторику квадратичних форм і відповідних їм матриць на комбінаторику самих ч.в. множин. Описано всі суттєві майже додатні множини (з точністю до ізоморфізму і дуальності їх 247, не рахуючи P-критичних). Цей результат завершує опис всіх майже додатних ч.в. множин як аналогів звичайних і розширених діаграм Динкіна.

У п'ятому розділі введено поняття надсуперкритичних ч. в. множин як природне продовження ряду "критичні множини Клейнера — надсуперкритичні множини Назарової". Тоді клас всіх ч.в. множин, які їм мінімаксно ізоморфні, є природним продовженням ряду "P-критичні множини — NP-критичні множини". Згідно отриманого опису ч.в. множин цього класу їх кількість, з точністю до ізоморфізму і дуальності, дорівнює 203. Цей процес можна продовжити до нескінченності, ввівши індуктивно поняття m-надсуперкритичної ч. в. множини для довільного натурального числа.

У шостому розділі досліджуються коефіцієнти транзитивності для різних класів ч.в. множин. Знайдено залежності між шириною, висотою та коефіцієнтом транзитивності для несерійних додатних ч. в. множин. А саме, доведено, що якщо $k_t(S)$ позначає коефіцієнт транзитивності ч.в. множин S, а $w(S)$ і $h(S)$ відповідно її ширину і висоту, то для несерійних додатних множин S і T маємо такі нерівності:

(1) $k_t(T) > k_t(S)$, якщо $h(T) > h(S) + 1$;

(2) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{20}$, якщо $h(T) = h(S) + 1$.

(3) $k_t(T) \geq k_t(S)$, якщо $w(T) = w(S) = 3$ і $h(T) > h(S)$;

(4) $k_t(T) \geq k_t(S)$, якщо $w(T) = w(S) = 2$, $h(T) > h(S)$
і діаграма Хассе множини T не є циклом.

Для P-критичних ч.в. множин S і T маємо такі нерівності:

(5)$k_t(T) > k_t(S)$, якщо $h(T) > h(S) + 1$;

(5) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{10}$, якщо $h(T) = h(S) + 1$.

У випадку ж, коли S і T — ч.в. множини, мінімаксно еквівалентні суперкритичним (відповідно надсуперкритичним) множинам, маємо:

(7) $k_t(T) > k_t(S)$, якщо $h(T) > h(S) + 2$,

(8) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{50}$ (відповідно $-\frac{1}{25}$), якщо $h(T) = h(S) + 2$,

(9) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{5}$, якщо $h(T) = h(S) + 1$.

Окрім того, для різних класів вказано умови, при яких коефіцієнт транзитивності є найбільшим.

Ключові слова; Квадратична форма Тітса, мінімаксна еквівалентність, верхня і нижня ширина, цикломатичний каркас, NP-критична ч.в. множина, майже додатна ч.в. множина, надсуперкритична ч.в. множина, коефіцієнт транзитивності.

ABSTRACT

Rassadkina M. V. Classification and combinatorial problems in the theory of Tits quadratic forms. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree on the specialty 01.01.06 — Algebra and Number Theory. – Polissia National University – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2025.

In the 1970s, a new stage in the development of the representation theory began, associated with the introduction of representations of new objects — such as quivers and partially ordered sets. The combination of the two types of representations led to the most general free matrix problems, which allowed, in particular, to give precise definitions of intuitively understandable concepts, a new method of describing representations of classical algebraic objects arose, which consists in reducing them to free matrix problems (new or already well-studied). Thus, various new research opportunities arose in the representation theory, etc.

The so-called Tits quadratic form became a specific feature of new representation research. It was first introduced in 1972 by P. Gabriel for representations of quivers, and then, in 1974, by Yu. A. Drozd for partially ordered sets. These results marked the beginning of a new direction in algebra, which is associated with the study of the connections between the properties of representations of various objects and the properties of the corresponding quadratic forms.

Studies of Tits quadratic forms constantly require new ideas and algo-

rithms, they are associated with various classification and combinatorial problems.

The dissertation is devoted to the study of Tits quadratic forms of finite partially ordered (abbreviated as posets) sets from different points of view. It consists of an introduction and six sections.

The introduction provides a general description and purpose of the work, substantiates its relevance and scientific novelty, etc.

The first Chapter of the dissertation presents the basic information from the theory of representations of categories, quivers and posets, and the connection with Tits quadratic forms.

The second Chapter presents in detail the method of minimax equivalence of posets, including the concept of a minimax system of generators for classes of posets, and provides considerations (with examples) on explicit and implicit classifications and modifications of classifications. The new results presented in this section are a modified classification of P-critical posets (in the sense of a description by classes of minimax isomorphisms of sets), a description of Tits and non-Tits P-critical posets and a general theorem on posets of upper width 3. For an arbitrary poset a relation between the lower and upper widths as the smallest and largest widths in the class of all sets minimax equivalent to the given one is found.

In the second Chapter, we also study posets with positive quadratic Tits form; such posets are called positive. Maximal positive posets and minimal positive non-serial posets are described. It is proved that every non-serial positive poset is embedded in a maximal one as a lower or upper subset. It is proved that the poset of all positive posets has a minimax system generated from quasi-chain posets (sets whose Hasse diagrams are chains). It is proved that for an undirected Hasse graph of an arbitrary connected non-serial positive poset there exists a positive cyclomatic frame.

In the third Chapter, we show that an arbitrary NP-critical poset (a minimal poset whose Tits quadratic form is not non-negative) is minimax equivalent to a supercritical Nazarova poset. More precisely, supercritical posets (one from each of the six isomorphism classes) form a canonical minimax system of generators for the poset of all NP-critical posets. Using this statement we obtain the complete general classification of NP-critical posets (their number up to isomorphism and duality is equal to 115). We obtain also the modification of classification of NP-critical posets in the sense that (up to isomorphism and duality) it is indicated the posets which belong to each from six classes of minimax equivalence.

In the fourth Chapter, serial nonnegative posets with a one-dimensional integer kernel of their Tits quadratic form (called fundamental by D. Simson) are described. Simson's conjecture on the impossibility of integer equivalence between the Tits quadratic forms of a fundamental poset and a cyclic extended Dynkin diagram is proved. The concept of an almost positive poset as a nonnegative poset with a maximal positive subset is introduced. It is proved that the poset of nonpositive almost positive posets (called essential) coincides with the poset of fundamental posets. This makes it possible to study fundamental posets replace the combinatorics of quadratic forms and their corresponding matrices with the combinatorics of the posets themselves). All essential almost positive posets are described (up to isomorphism and duality, 247 of them, not counting P-critical ones). This result completes the description of all almost added posets as analogues of ordinary and extended Dynkin diagrams.

In the fifth Chapter, the concept of oversupercritical posets is introduced as a natural extension of the series "Kleiner critical sets — Nazarova supercritical posets". Then the class of all posets that are minimax isomorphic to them is a natural extension of the series "P-critical posets — NP-critical critical posets". According to the obtained description of posets of this class, their number, up to isomorphism and duality, is 203. This process can be continued to infinity by inductively introducing the concept of m-oversupercritical poset for an arbitrary natural number.

In the sixth Chapter, transitivity coefficients for different classes of posets are investigated. Dependencies between width, height and transitivity coefficient for non-serial positive posets are found. Namely, it is proved that if $k_t(S)$ denotes the transitivity coefficient of the poset S, and $w(S)$ and $h(S)$ denote its width and height, respectively, then for non-serial positive posets S and T we have the following inequalities:

(1) $k_t(T) > k_t(S)$, if $h(T) > h(S) + 1$;

(2) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{20}$, if $h(T) = h(S) + 1$.

(3) $k_t(T) \geq k_t(S)$, if $w(T) = w(S) = 3$ and $h(T) > h(S)$;

(4) $k_t(T) \geq k_t(S)$, if $w(T) = w(S) = 2$, $h(T) > h(S)$

and the Hasse diagram of the poset T is not a cycle.

For P-critical posets S and T we have the following inequalities:

(5)$k_t(T) > k_t(S)$, if $h(T) > h(S) + 1$;

(5) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{10}$, if $h(T) = h(S) + 1$.

In the case when S and T are posets that are minimax

equivalent to supercritical (respectively oversupercritical) sets, we have:

(7) $k_t(T) > k_t(S)$, if $h(T) > h(S) + 2$,

(8) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{50}$ (respectively $-\frac{1}{25}$), if $h(T) = h(S) + 2$,

(9) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{5}$, if $h(T) = h(S) + 1$.

In addition, the conditions under which the transitivity coefficient is the largest are indicated for different classes.

Keywords: Tits quadratic form, minimax equivalence, down and lower width, cyclomatic scanning tree, NP-critical poset, almost positive poset, oversupercritical poset, transitive coefficient.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати

1. Бондаренко В. М., Степочкина М. В., (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и неотрицательная форма Титса, *УМЖ*, **60** (2008), №9, С. 1157-1168. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0147-7

2. Бондаренко В. М., Степочкина М. В., Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса, *УМЖ*, **61** (2009), №5, С. 611-624. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0245-6

3. Бондаренко В. В., Бондаренко В. М., Степочкина М. В., Червяков И. В., 1-надсуперкритические частично упорядоченные множества с тривиальной группой автоморфизмов и min-эквивалентность, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ*, **22** (2011), №2, С. 17-25.

4. Бондаренко В. М., Степочкина М. В., Червяков И. В., Об M-особых P-критических частично упорядоченных множествах мультицепного типа, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ*, **23** (2012), №2, С. 25-30.

5. Бондаренко В. В., Степочкина М. В., Непримитивное 1-надсуперкритическое частично упорядоченное множество и min-эквивалентность, *Науковий часопис НПУ ім. Драгоманова. Серія 1. фіз.-мат. науки*, **14** (2013), С. 55-61.

6. Стьопочкіна М. В., Черв'яков І. В., Кількість частково впорядкованих множин, (min, max)-еквівалентних множині (1, 2, 7), *Прикл. проблеми мех. і мат*, **13** (2015), С. 18-21.

7. Bondarenko V. M., Chervyakov I. V., Styopochkina M. V., On properties of the Hasse diagram of P-critical posets, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту*, **26**

(2015), №1, С. 12-15.

8. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On properties of the Hasse diagram of nonserial posets with positive quadratic Tits form, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту*, **29** (2016), №2, С. 31-34.

9. Стьопочкіна М. В., Червʼяков І. В., Кількість частково впорядкованих множин, (min, max)-еквівалентних 1-надсуперкритичній частково впорядкованій множині (1, 3, 5), *Прикл. проблеми мех. і мат*, **14** (2016), С. 12-15.

10. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On properties of posets of MM-type (1,3,5), *Науковий вісник Ужгородського університету*, **32** (2018), №1, С. 50-53.

11. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., The classification of serial posets with the non-negative quadratic Tits form being principal, *Algebra and Discrete Mathematics*, **27** (2019), N2, P. 202-211.

12. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Strengthening of a theorem on Coxeter-Euclidean type of principal partyally ordered sets, *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*, **4** (2018), P. 8-15.

13. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On properties of posets of MM-type (1; 2; 7), *Прикладні проблеми механіки і математики*, **17** (2019), С. 7-10. https://doi.org/10.15407/apmm2019.17.7-10

14. Bondarenko V. M., Stepochkina M. V., Stoika M. V., The coefficients of transitiveness of the posets of MM-type being the smallest sypercritical poset of width 3, *Прикладні проблеми механіки і математики*, **18** (2020), С. 11-13. https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.11-13

15. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On posets of sixth order having oversupercritical MM-type, *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Математика і інформатика*, **38** (2021), №1, С. 7-15. doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).7-15

16. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On transitivity coefficients

for posets of MM-type to be oversupercritical non-primitive, *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Математика і інформатика*, **39** (2021), №2, С. 22-29. doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).22-29

17. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On classifying the non-Tits P-critical posets, *Algebra and Discrete Mathematics*, **32** (2021), N2, P. 185-196. http://dx.doi.org/10.12958/adm1912

18. Bondarenko V. M., Stoika M. V., Styopochkina M. V., The coefficients of transitivity of the posets of MM-type being the highest sypercritical poset, *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Математика і інформатика*, **40** (2022), №1, С. 11-18. DOI 10.24144/2616-7700.2022.1(40).11-18

19. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On properties of posets of MM-type (1, 3, 4), *Прикладні проблеми механіки і математики*, **20** (2022), С. 15-18. https://doi.org/10.15407/apmm2022.20.15-18

20. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Classification of the posets of minmax types which are symmetric oversupercritical posets of the eighth order, *Математичні методи та фізико-механічні поля*, **66** (2023), №1-2, С. 5-15. https://doi.org/10.15407/mmpmf2023.66.1-2.5-15

21. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Combinatorial properties of non-serial posets with positive Tits quadratic form, *Algebra and Discrete Mathematics*, **36** (2023), N1, P. 1-13. DOI:10.12958/adm2151

22. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On the transitivity coefficients for minimal posets with nonpositive quadratic Tits form, *Journal of Mathematical Sciences*, **274** (2023), no.5, P. 583-593. DOI 10.1007/s10958-023-06624-6

23. Styopochkina M. V., The coefficients of transitivity of the posets minimax isomorphic to the sypercritical non-primitive poset, *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Математика і інформатика*, **43** (2023), №2, С. 62-66.

24. Styopochkina M. V., The coefficients of transitiveness of the posets minimax isomorphic to the non-primitive supercritical poset, *Прикладні проблеми механіки і математики*, **21** (2023), C. 17-20. doi.org/10.15407/apmm2023.21.17-20

25. Styopochkina M. V., On properties of the Hasse diagrams of NP-critical posets of order less than 8, *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*, **78** (2024), №1, P. 33-35. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2024/1.5

26. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Classification of the posets of MM-type being the symmetric oversupercritical poset of order 9, *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Математика і інформатика*, **44** (2024), №1, C. 7-14. doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).7-14

27. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On minimal minimax systems of generators for positive posets, *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Математика і інформатика*, **45** (2024), №2, C. 46-55. doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).46-55

28. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Existence of Dynkin scanning trees for non-serial posets with positive Tits quadratic form, *Algebra and Discrete Mathematics*, **38** (2024), N2, P. 158-165. DOI: http://dx.doi.org/10.12958/adm2368

29. Bondarenko V., Petravchuk A., Styopochkina M. Polynomial similarity of pairs of matrices. *Linear Algebra and its Applications*, (708), no,3, P. 150-158. https://doi.org/10.1016/j.laa.2024.11.029

30. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Classification of the almost positive posets, *Algebra and Discrete Mathematics*, *Algebra and Discrete Mathematics*, **39** (2025), N1, P. 65-88. DOI: http://dx.doi.org/10.12958/adm2391

Публікації, які додатково відображають наукові результати дисертації

1. Бондаренко В. М., Стьопочкіна М. В., О частично упорядоченных множествах верхней ширины 3, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту*, **16** (2008), С. 31-34.

2. Стьопочкіна М. В., Про зв'язок між верхньою та нижньою шириною скінченної частково впорядкованої множини, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту*, **17** (2008), С. 230-235.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. О неотрицательных формах Титса для конечных ч. у. множеств. *XII Міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука* : Тези доп., 15-17 трав. 2008р. Київ : ТОВ "Задруга", 2008. С. 513.

2. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. Classification of NP-critical posets. *VII Int. Algebraic Conf. in Sd*: тези доп., August 18-23, 2009. Kharkov, 2009. P. 31-32.

3. Степочкина М. В. Связь между неотрицательными и слабо неотрицательными формами Титса. *Укр. мат. конгрес*: тези доп., 27-29 серпня 2009р. Київ : КНУ, 2009. Р. 104.

4. Рассадкина (Степочкина) М. В. Квадратичные формы Титса и сильная (min, max)-эквивалентность. *Int. Conf. of Humboldt-Kolleg Series in Kiev, Ukraine*: abstracts, November 19-22, 2009. Kiev, 2009. P. 38-39.

5. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. Critical posets and posets with nonnegative Tits form. *8th Int. Algebraic Conf. in Ukraine*: abstracts, July 5-12, 2011. Lugansk, 2011. P. 153.

6. Бондаренко В. В., Стьопочкіна М. В., Черв'яков І. В. Про надсуперкритичні частково впорядковані множини. *The International Mathematical Conference on occasion 70th anniversary of Professor Vladimir Kirichenko*: abstracts, June 13-19, 2012. Mykolaiv, 2012. P. 143.

7. Bondarenko V. M., Styopochkina M.V. On classifying the posets with non-negative quadratic Tits form. *Int. Algebraic Conf. Dedicated to 100th anniversary of L.A. Kaluzhnin*: abstracts, July 7-12, 2014. Kyiv, 2014. P. 20-21.

8. Styopochkina M. V. On the Hasse diagram of P-critical posets. *10th Int. Algebraic Conf. in Ukraine*: abstracts, August 20-27, 2015. Odessa, 2015. P. 111.

9. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. Minimax equivalence and self-duality of posets with positive quadratic Tits form. *Groups and Actions: Geometry and Dynamics*: abstracts, December 19-22, 2016. Kyiv, 2016. P. 16.

10. Styopochkina M.V. On coefficients of transitiveness of posets of special type. *11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko*: abstracts, July 3-7, 2017. Kyiv, 2017. P. 131.

11. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On coefficients of transitiveness of posets critical with respect to the positivity of the quadratic Tits form. *Сучасні проблеми механіки та математики*: збірник наукових праць у 3-х т. (за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра). Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. (Львів: 22-25 травня, 2018). 2018. Т. 3. С. 246-247.

12. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On the classification of the serial principal posets. *XII міжнародна алгебраїчна конференція в Україні*: тези доповідей (Вінниця: 02-06 липня, 2019). Вінниця, 2019. С. 19-20.

13. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On CoxeterEuclidean type of principal posets and generalizations to other posets. *International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of department of algebra*

and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv: abstracts, (Kyiv: July 14-17, 2020). Kyiv, 2020. P. 24.

14. Styopochkina M.V. On the coefficients of transitiveness of the posets minimax isomorphic to supercritical posets. *11-th International Skorobohatko Mathematical Conference*: abstracts, (Lviv, Ukraine, 26-30 October, 2020). Lviv, 2020. P. 112.

15. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On serial posets with respect to properties of the Tits quadratic form. *The 13th International algebraic conference in Ukraine*: abstracts (Kyiv: July 6-9, 2021). Kyiv, 2021. P. 23.

16. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On Tits P-critical posets. *International Algebraic Conference "At the End of the Year 2021"*: abstracts (Kyiv: December 27-28, 2021). Kyiv, 2021. P. 8.

17. Рассадкіна М.В. Коефіцієнти транзитивності ч. в. множини виду (N,5). *Всеукраїнська науково-методична конференція "Сучасні науково - методичні проблеми математики у вищій школі"*: тези доп., (Київ: 23-24 травня, 2022). Київ: НУХТ, 2022. С. 65-67.

18. Бондаренко В.М., Стойка М.В., Стьопочкіна М.В. Про комбінаторні властивості ч.в. множин 6-го порядку надсуперкритичного мінімаксного типу. *Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023"*: тези доп., (Львів: 23-25 травня, 2023). Львів, 2023. С. 417-418.

19. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On classification of almost positive posets. *International Scientific Conference "Algebraic and Geometric s of Analysis"devoted to 160 anniversary of Dvytro Grave*: abstracts (Odesa, Ukraine: May 29 - June 1, 2023). Odesa, 2023. P. 18-21.

20. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. Classification of posets close to ones with positive Tits quadratic form. *14th Ukraine Algebra Conference*: abstracts, (Sumy, Ukraine: July 3-7, 2023). Sumy, 2023. P. 36.

21. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On transitivity coefficients for

one class of positive posets. *Ukraine Algebraic Conference "At the End of the Year 2023"*: abstracts, (Kyiv: December 26-27, 2023). Kyiv, 2023. P. 14.

22. Бондаренко В.М., Стьопочкіна М.В. Мінімаксна еквівалентність і надсуперкритичні ч.в. множини. *Конференція молодих учених "Підстригачівські читання - 2024"*: тези доп., (Львів: 27-29 травня, 2024). Львів, 2024.

23. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On representation type of incident algebras of extensions of positive posets. *International Scientific Conference "Algebraic and Geometric Methods of Analysis"*: abstracts, (Odesa: May 27-30, 2024). Odesa, 2024. P. 12-13.

24. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On minimax systems of generators for positive posets. *Ukraine Mathematics Conference "At the End of the Year 2024"*: abstracts, (Kyiv: December 16-18, 2024). Kyiv, 2024. P. 18.

Зміст

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. У 70-х роках минулого століття розпочався новий етап розвитку теорії зображень, пов'язаний з введенням зображень нових об'єктів — таких як сагайдаки і частково впорядковані множини (відповідно П. Габріелем в [1] і Л. О. Назаровою, А. В. Ройтером в [2]). Обидва види зображень є вільними матричними в сенсі відсутності алгебраїчних співвідношень. Скінченновимірні алгебри почали розглядатися як алгебри шляхів сагайдаків зі співвідношеннями, а зображення частково впорядкованих множин отримали різні узагальнення. Об'єднання двох видів зображень привело до найбільш загальних вільних матричних задач, що дозволило, зокрема, дати точні означення таких інтуїтивно зрозумілих понять, як ручні та дикі матричні задачі (Ю. А. Дрозд [3, 4]); з'явилися різні непрямі методи визначення належності до таких класів. Виник новий метод опису зображень класичних алгебраїчних об'єктів, який полягає в їх зведенні до вільних матричних задач (нових чи вже добре вивчених). Отже, в теорії зображень виникли різні нові можливості досліджень. Зокрема, саме вони дозволили описати всі ручні скінченні групи над полями довільної характеристики (В. М. Бондаренко, Ю. А. Дрозд [5]).

Специфікою нових досліджень зображень стала і так звана квадратична форма Тітса. Її змінними є координати вектор-розмірності зображення і визначається вона як різниця між числом параметрів групи, яка діє на цих зображеннях, і числом параметрів самих зображень. Вперше її ввів у 1972 р. П. Габріель [1] для зображень сагайдаків. Він показав, що (скінченний) сагайдак має скінченний зображувальний тип над полем (тобто скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень) тоді і лише тоді, коли його квадратична форма Тітса є додатною. На мові самих сагайдаків такими є лише сагайдаки, для яких відповідні неорієнтовані графи всіх її зв'язних компонент є діаграмами Динкіна (з однократними зв'язками). Ці результати П. Габріеля стали початком нового напрямку в алгебрі, який пов'язаний із вивченням зв'язків між властивостями зображень різних об'єктів та властивостями відповідних квадратичних форм.

Згодом, в 1974 р. Ю. А. Дрозд [6] вперше розглянув квадратичну форму Тітса для частково впорядкованих (скорочено ч. в.) множин. Він довів, що (скінченна) ч. в. множина має скінченний зображувальний тип над полем тоді і лише тоді, коли її квадратична форма Тітса є слабко додатною (тобто додатною на множині векторів з невід'ємними координатами). На мові самих ч. в. множин це означає, що множина не містить п'яти підмножин спеціального вигляду, вказаних в [7] і названих критичними.

Підкреслимо, що квадратична форма Тітса сагайдака є слабко додатною тоді і лише тоді, коли вона є додатною (для ч. в. множин це не так). Цей факт відіграв вирішальну роль в природності досліджень, пов'язаних з кандидатською (і в значній мірі з теперішньою) дисертацією автора. А саме, виникає задача про опис всіх ч. в. множин з додатною формою Тітса, яка є природною сама по собі, а тим більше враховуючи, що згідно вже сказаного такі ч. в. множини є аналогами діаграм Динкіна. Ч. в. множини з додатною квадратичною формою Тітса описані автором разом з В. М. Бондаренком в роботі [8, 9]. Вони, як і у випадку сагайдаків, діляться на несерійні та серійні (несерійні є аналогами діаграм Динкіна E_6, E_7 і E_8, а серійні — діаграм Динкіна A_n і D_n). Загальне число несерійних ч. в. множин з точністю до ізоморфізму і дуальності дорівнює 108; число серій дорівнює 3 (дві 2-параметричні і одна 3-параметрична). У згаданій статті [9] описані також мінімальні ч. в.

множини з недодатною квадратичною формою Тітса, які названі P-критичними (відносно слабкої недодатності ними є критичні множини). Їх число з точністю до ізоморфізму і дуальності дорівнює 75.

Повертаючись до історичного огляду, зауважимо, що умова слабкої додатності квадратичної форми Тітса зустрічається в багатьох дослідженнях зображень різних об'єктів. Критерій, аналогічний отриманому Ю. А. Дроздом, має місце у загальному випадку для матричних задач без співвідношень [11].

Властивості квадратичних форм Тітса вивчали також М. Барот, К. Бонгартц, П. Дрекслер, С. А. Овсієнко, Х. А. де ла Пенья, К. Рінгель, Д. Сімсон та інші (див., зокрема, [12]–[26]). При цьому досліджувалися як властивості форм Тітса, так і властивості зображень різних об'єктів, які можна охарактеризувати в термінах таких форм.

Із тематикою дисертації тісно пов'язані зображення ручних сагайдаків і ч. в. множин. Л. О. Назарова [27] і незалежно П. Донован та М. Р. Фройсліх [28] довели, що зв'язний сагайдак має ручний нескінченно зображувальний тип над полем тоді і лише тоді, коли відповідний йому неорієнтований граф є розширеною діаграмою Динкіна. З іншої сторони, такими сагайдаками вичерпуються всі зв'язні сагайдаки, квадратична форма Тітса яких є одночасно невід'ємною і не додатною [29]. Звідси (з врахуванням згадуваних вище результатів роботи [1]) випливає, що сагайдак має ручний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли його квадратична форма Тітса невід'ємна. Якщо ж говорити про ч. в. множину, то вона має ручний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її квадратична форма Тітса слабко невід'ємна [30]. На мові самих ч. в. множин це означає, що множина не містить шести підмножин спеціального вигляду, вказаних в [31] і названих суперкритичними. І оскільки для сагайдака невід'ємність і слабка невід'ємність збігаються, а для ч. в. множини такої властивості немає, то виникає природна задача про вивчення ч. в. множин з невід'ємною квадратичною формою Тітса. Така задача детально розглядається в цій дисертації для майже додатних ч. в. множин, які є узагальненням додатних (тобто, за означенням, таких, квадратична форма яких є додатною). Окрім повного опису таких множин, для них вказані мінімальні мінімаксні системи твірних. Описано також мінімальні ч. в. множини, що не є невід'ємними, які названі NP-критичними (відносно слабкої невід'ємності ними є суперкритичні множини).

У дисертації розглядаються також інші класи ч. в. множин, розв'язується низка класифікаційних і комбінаторних задач. Зокрема, доведена гіпотеза Д. Сімсона про зв'язок між квадратичними формами Тітса ч.в. множин і сагайдаків.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами.

Докторська дисертація підготовлена здобувачем самостійно. Вона виконано відповідно наукового напрямку "Математичні науки та природничі науки" № БФ 30-2021, який проводиться на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Мета і завдання дослідження. Основною тематикою роботи є дослідження скінченних частково впорядкованих множин та природним чином відповідних їм графів, пов'язаних з невід'ємними квадратичними формами.

Метою дослідження є класифікація майже додатних частково впорядкованих множин, мінімальних частково впорядкованих множин, форма Тітса яких не є невід'ємною, частково впорядкованих множин, мінімаксно ізоморфних надсуперкритичним множинам та опис пов'язаних з цими класами множин дискретних параметрів і вивчення співвідношень між ними.

Об'єктом дослідження є частково впорядковані множини разом з їхніми діаграмами Хассе та квадратичні форми Тітса.

Предмет дослідження — майже додатність та невід'ємність частково впорядкованих множин і мінімальність мінімаксних систем твірних.

Методи дослідження. *Основними методами*, що використовуються у дослідженні, є стандартні методи комбінаторного аналізу та введений доктором фіз.-мат. наук В. М. Бондаренком метод мінімаксної еквівалентності частково впорядкованих множин.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертації отримано нові результати для скінченних частково впорядкованих (скорочено ч. в. множин), основними з яких є такі:

1. Для довільної ч.в. множини знайдено зв'язок між нижньою і верхньою шириною як найменшою та найбільшою шириною в класі всіх множин, мінімаксно еквівалентних заданій.

2. Описано максимальні додатні ч.в. множини (множини з додатною квадратичною формою Тітса). Доведено, що кожна несерійна додатна множина вкладається в деяку максимальну як нижня або верхня підмножина.

3. Введено поняття (верхнього) вузлового розширення порядку m довільної несерійної ч.в. множини і вивчається зображувальний тип його графа Хассе як комутативного сагайдака у випадку несерійної додатної множини. Доведено, що скінченний зображувальний тип визначається лише відсутністю в якості верхніх підсагайдаків комутативного сагайдака направлених розширених діаграм Динкіна.

4. Доведено, що клас всіх додатних ч. в. множин має мінімаксну систему твірних із квазі-ланцюгових ч.в. множин (тобто таких, для яких діаграми Хассе є ланцюгами). Множина всіх мінімальних недодатних множин (які називаються P-критичними) такої властивості не має.

5. Доведено, що для неорієтованого графа Хассе довільної зв'язної

несерійної додатної ч. в. множини існує додатний цикломатичний каркас (іншими словами, ациклічний підграф з тим же числом вершин, який є діаграмою Динкіна).

6. Знайдено залежності між шириною, висотою та коефіцієнтом транзитивності для несерійних додатних і P-критичних ч. в. множин.

7. Доведено, що суперкритичні ч.в. множини Назарової (мінімальні множини, квадратична форма Тітса яких не є слабко невід'ємною), по одній з кожного із шести класів ізоморфізму, утворюють мінімальну мінімаксну систему твірних для NP-критичних ч.в. множин (мінімальних множин, форма Тітса яких не є невід'ємною). Як наслідок отримано повну класифікацію NP-критичних ч.в. множин (їх число, з точністю до ізоморфізму і дуальності, дорівнює 115).

8. Описано серійні невід'ємні ч.в. множини з одновимірним цілочисловим ядром їхньої квадратичої форми Тітса (названих Д. Сімсоном головними).

9. Доведена гіпотеза Сімсона про неможливість цілочислової еквівалентності між квадратичними формами Тітса головної ч. в. множини і циклічної розширеної діаграми Динкіна.

10. Введено поняття майже додатної ч.в. множини як невід'ємної множини з максимальною додатною підмножиною. Доведено, що множина недодатних майже додатних ч.в. множин (названих суттєвими) збігається з множиною головних ч.в множин. Це дало можливість при дослідженні несерійних основних множин замінити складну комбінаторику квадратичних форм (доступну лише для комп'ютерних програм) на комбінаторику самих ч.в. множин.

11. Показано, що будь-який клас мінімаксного ізоморфізму, породжений суттєвою майже додатною ч.в. множиною, має в якості канонічного представника серійну розширену діаграму Динкіна: цикл, якщо клас замкнутий відносно дуальності, і другу – в іншому випадку.

12. Описано (з точністю до ізоморфізму і дуальності) всі несерійні суттєві майже додатні ч.в. множини; їх 247, не рахуючи P-критичних. Цей результат завершує опис всіх майже додатних ч.в. множин як аналогів звичайних і розширених діаграм Динкіна.

13. Введено поняття надсуперкритичних ч. в. множин як природне продовження ряду “критичні множини Клейнера — суперкритичні множини Назарової”. Описані (з точністю до ізоморфізму і дуальності) ч.в. множини, їм мінімаксно еквівалентні, що утворюють клас, який є природним продовженням ряду “P-критичні множини — NP-критичні множини”.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані результати є внеском в теорію частково впорядкованих множин і графів, теорію квадратичних форм, в комбінаторну теорію алгебраїчних об’єктів. Вони можуть бути використані для подальших досліджень частково впорядкованих множин зі строго невід’ємною формою Тітса і підготовці спеціалізованих курсів та монографій.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно.

У спільних статтях з проф. В. М. Бондаренком співавтору належить постановка задачі та загальне керівництво роботою, основні результати отримані дисертантом особисто.

У роботі [36] усі результати і їхні доведення дисертант отримав самостійно, В. В. Бондаренко та І. В. Черв’яков перевіряли обчислення і брали участь в обговоренні результатів.

У роботі [37] усі результати та їхні доведення дисертант отримав самостійно, І. В. Черв’яков перевіряв таблицю.

У роботі [38] постановка задачі й доведення основних результатів належить дисертанту, В. В. Бондаренко перевіряв обчислення та брав участь в обговоренні теорем 1 і 2.

У роботах [39, 42] план дослідження і доведення усіх результатів належить дисертанту, І. В. Черв'яков перевіряв обчислення.

У роботі [40] усі результати та їхні доведення дисертант отримав самостійно, І. В. Черв'яков перевіряв таблицю та брав участь в обговореннях.

У роботах [47, 51] усі результати та їхні доведення дисертант отримав самостійно, М. В. Стойка перевіряв таблиці.

У статті [62] постановка задачі належить А. П. Петравчуку, ідея та конструкція доведення — В. М. Бондаренку, а обчислення, пов'язані з доведенням основної теореми, належать здобувачу.

Апробація матеріалів дисертації.

Результати дисертаційної роботи оприлюднено на наступних конференціях:

1. XII Міжнародна конференція ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 15-17 травня, 2008р.),
2. VII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні (м. Харків, 18-23 серпня, 2009р.),
3. Український математичний конгрес (м. Київ, 27-29 серпня, 2009р.),
4. Conference of Humboldt-Kolleg (Kiev, November 19-22, 2009),
5. VII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні (м. Луганськ, 5-12 липня, 2011р.),,
6. Міжнародна алгебраїчна конференція, присвячена 70-річчю з дня народження професора Володимира Кириченка (м. Миколаїв, 13-19 липня, 2012р.).
7. Міжнародна конференція, присвячена 100-річчю з дня народження Л. А. Калужніна (м. Київ, 7-12 липня, 2014р.),

8. X Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні (м. Одеса, 20-27 серпня, 2015р.),
9. Conference “Groups and Actions: Geometry and Dynamics"(Kyiv, December 19-22, 2016),
10. XI Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 75-річчю з дня народження В. В. Кириченка (м. Київ, 3-7 липня, 2017р.),
11. Конференція “Сучасні проблеми механіки та математики"(м. Львів: 22-25 травня, 2018р.),
12. XII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні (м. Вінниця, 2-6 липня, 2019р.),
13. International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv (Kyiv, July 14-17, 2020),
14. International Skorobohatko Mathematical Conference (Lviv, Ukraine, 26-30 October, 2020),
15. XII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні (м. Київ, 6-9 липня, 2021р.),
16. International Algebraic Conference "At the End of the Year 2021"(Kyiv, December 27-28, 2021),
17. Всеукраїнська науково-методична конференція "Сучасні науково - методичні проблеми математики у вищій школі (м. Київ, 23-24 травня, 2022р.),
18. Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023"(м. Львів, 23-25 травня, 2023р.),

19. International Scientific Conference "Algebraic and Geometric Methods of Analysis"devoted to 160 anniversary of Dvytro Grave (Odesa, May 29 -June 1, 2023),
20. XIV Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні (м. Суми, 3-7 липня, 2023р.),
21. International Algebraic Conference "At the End of the Year 2023"(Kyiv, December 26-27, 2023),
22. Конференця молодих учених "Підстригачівські читання - 2024"(м. Львів: 27-29 травня, 2024),
23. International Scientific Conference "Algebraic and Geometric Methods of Analysis"(Odesa: May 27-30, 2024),
24. Ukraine Mathematics Conference "At the End of the Year 2024"(Kyiv, December 16-18, 2024).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 30 наукових роботах у фахових виданнях [34]–[63], роботах [32] і [33], які додатково відображають наукові результати, та тезах конференцій [64] – [87]. З них 10, а саме [34, 35, 44, 50, 54, 55, 58, 61, 62, 63], проіндексовані у міжнародній наукометричній базі Scopus. Стаття [62] як опублікована у виданні, віднесеному до квартиля Q1 (відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank) прирівнюється до трьох публікацій, а кожна з п'яти робіт [34, 35, 44, 61, 63] як опублікована у виданні, віднесеному до квартиля Q3 — до двох публікацій (п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 р.). Отже, 30 статей, у яких відображено основні результати дисертації, зараховується як 37 фахових публікацій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із анотацій, вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків, які містять список публікацій здобувача за темою дисертації і відомості про апробацію результатів. Загальний обсяг дисертації становить 351 сторінки, основний текст займає 302 сторінки.

Автор висловлює щиру подяку своєму Вчителю, професору, доктору фізико-математичних наук Віталію Михайловичу Бондаренку за постійну підтримку, нові ідеї та корисні поради.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в розділах 2–6.

У другому розділі розглядаються нові ідеї щодо попередніх досліджень додатних і P-критичних ч.в. множин. У підрозділі 2.1 наведено основні означення для ч.в. множин.

Підрозділ 2.2 присвячений опису основного методу досліджень ч. в. множин разом з їхніми квадратичними формами Тітса, який називається методом мінімаксної еквівалентності.

Для мінімального (відповідно максимального) елемента $a \in S$ введемо ч. в. множину $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $S_a^{\downarrow}$), рівну S як звичайній множині і такій, що

a) a — максимальний (відповідно мінімальний) елемент $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $S_a^{\downarrow}$);

b) якщо $x, y \neq a$, то $x < y$ в $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $S_a^{\downarrow}$) тоді і лише тоді, коли $x < y$ в S;

c) $a > x$ в $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $a < x$ $S_a^{\downarrow}$) тоді і лише тоді, коли $a \nless\ngtr x$ в S.

Ч. в. множина T називається (min, max)-еквівалентною ч. в. множині S, якщо T дорівнює якійсь ч. в. множині вигляду $\overline{S} = S_{x_1 x_2 \ldots x_p}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p}$ $(p \geq 0)$, де $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ і, для кожного $i = 1, \ldots, p$, x_i — мінімальна (відповідно максимальна) точка $\overline{S}_{i-1} = S_{x_1 x_2 \ldots x_{i-1}}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{i-1}}$, якщо $\varepsilon_i =\uparrow$ (відповідно $\varepsilon_i =\downarrow$); при $p = 0$ вважаємо, що $\overline{S} = S$. Добуток (min, max)-еквівалентності і ізоморфізму називається (min, max)-ізоморфізмом.

Основною мотивацією введення поняття (min, max)-еквівалентності є той факт, що вона зберігає $\mathbb{Z}$-еквівалентність відповідних квадратичних форм Тітса.

Пізніше ці поняття стали називати також мінімаксною еквівалентністю та мінімаксним ізоморфізмом. В результаті багаторічного використання цих понять при дослідженні різних класів ч.в. множин (в чому активну участь брала здобувач) виникли нові поняття, одним з яких є поняття мінімаксної системи твірних. Про це йде мова в підрозділі 2.3. А саме мінімаксною системою твірних для довільного класу ч.в. множин, замкутого відносно ізоморфізму та дуальності, називається такий фіксований набір елементів цього класу, що будь-який інший елемент є мінімаксно ізоморфний одному із вибраних. Мінімальна (або близька до такої) система твірних дає змогу ефективно застосувати алгоритм, наведений в кінці підрозділу 2.2, для розв'язку класифікаційних задач.

У підрозділі 2.4 говориться про явні та неявні класифікації, а в наступних трьох підрозділах отримано модифіковані в різних сенсах класифікації додатних та P-критичних ч.в. множин.

Підрозділ 2.8 присвячений подальшому розвитку методу мінімаксної еквівалентності: введено поняття нижньої і верхньої ширини довільної ч.в. множини (як найменшої і найбільшої ширини в класі всіх множин, мінімаксно еквівалентних заданій) та доведено низку відповідних тверджень.

У підрозділі 2.9 описано, з точністю до ізоморфізму і дуальності всі максимальні додатні ч.в. множини; окрім того, показано, що кожна несерійна додатна множина вкладається в деяку максимальну як нижня або верхня підмножина. В наступному підрозділі описано всі мінімальні несерійні додатні ч.в. множини.

У підрозділі 2.11 доведено, що клас всіх додатних ч. в. множин має мінімаксну систему твірних із квазі-ланцюгових ч.в. множин (тобто таких, для яких діаграми Хассе є ланцюгами).

Заключний підрозділ 2.12 присвячений застосуванню додатних ч.в. множин до графів Хассе. У першій його частині доведено, що для неорієтованого графа Хассе довільної зв'язної несерійної додатної ч. в. множини існує додатний цикломатичний каркас (іншими словами, ациклічний підграф з тим же числом вершин, який є діаграмою Динкіна). А в другій частині введено поняття (верхнього) вузлового розширення порядку m довільної ч.в. множини і вивчається зображувальний тип його графа Хассе як комутативного сагайдака у випадку додатної множини. Доведено, що скінченний зображувальний тип визначається лише відсутністю в якості верхніх підсагайдаків комутативного сагайдака направлених розширених діаграм Динкіна. Наведена деяка достатня умова дикості таких задач.

Третій розділ присвячено вивченню мінімальних ч.в. множин, що не є невід'ємними; такі множини називаються NP-критичними. Доведено, що суперкритичні ч.в. множини Назарової (мінімальні множини, квадратична форма Тітса яких не є слабко невід'ємною), а саме

$\mathcal{N}_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$\mathcal{N}_2 = \{1, 2, 3, 4 \prec 5\}$,

$\mathcal{N}_3 = \{1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7\}$,

$\mathcal{N}_4 = \{1, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$,

$\mathcal{N}_5 = \{1, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$,

$\mathcal{N}_6 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 7, 6 \prec 8 \prec 9\}$,

утворюють мінімальну мінімаксну систему твірних для NP-критичних ч.в. множин. Використовуючи це твердження, отримано повну загальну класифікацію NP-критичних ч.в. множин (їх число, з точністю до ізоморфізму і дуальності, дорівнює 115). Отримано також модифіковану класифікацію NP-критичних ч. в. множин в тому сенсі, що (з точністю до ізоморфізму і дуальності) вказано ч.в. множини, що належать кожному із шести класів мінімаксної еквівалентності.

Модифікований опис дозволив сформулювати та довести таке твердження, яке використовується в останньому розділі.

Твердження 3.20. *Нехай $\mathcal{N}$ — деяка множина Назарової і $m = m(\mathcal{N})$ — найбільший порядок підмножини вузлових елементів серед усіх множин X, мінімаксно ізоморфних множині $\mathcal{N}$. Тоді m дорівнює висоті множини $\mathcal{N}$. Така підмножина вузлових елементів, зокрема, завжди реалізується як верхня (нижня) підмножина деякої множини X.*

А із загального списку випливає наступне твердження, яке відображає якісні, а не кількісні властивості.

Твердження 3.19. *Підмножина S_0 всіх вузлових елементів довільної NP-критичної ч.в. множини S є (неперетинним) об'єднанням $S_0 = S_0^- \cup S_0^+$ відповідно нижньої та верхньої підмножин множини S.*

Підкреслимо, що класифікація NP-критичних множин вказується як на теоретико-множинні мові, так і на геометричній мові (в термінах діаграм Хассе). Перше задання множин важливе для строгих доведень в різних застосуваннях, а друге є, звичайно ж, більш наглядним.

У четвертому розділі вивчається клас невід'ємних ч.в. множин, який названий майже додатним.

Невід'ємна множина S називається майже додатною, якщо $S \setminus x$ додатна для деякого $x \in S$. Очевидно, додатні та P-критичні ч.в. множини майже додатні. Будь-яка майже додатна множина, яка не є додатною, називається строго майже додатною, а якщо додатково не є і P-критичною, — то суттєвою майже додатною. Доведено, що останні збігаються з головними, які за означенням Д. Сімсона складаються із невід'ємних ч.в. множин, квадратична форма Тітса яких має одновимірне цілочислове ядро. Це дало можливість при дослідженні несерійних основних множин замінити складну комбінаторику квадратичних форм (доступну лише для комп'ютерних програм) на комбінаторику самих ч.в. множин.

У цьому розділі доведена гіпотеза Сімсона про неможливість цілочислової еквівалентності між квадратичними формами Тітса основних ч.в. множин та циклічними розширеними діаграмами Динкіна. Описано серійні та несерійні строго майже додатні ч.в. множини. Кількість несерійних без P-критичних (з точністю до ізоморфізму і дуальності) дорівнює 247. Останній результат завершує опис всіх майже додатних ч.в. множин як аналогів звичайних і розширених діаграм Динкіна.

У п'ятому розділі введено узагальнення суперкритичних ч.в. множин Назарової, які названі надсуперкритичними множинами. За означенням P-критичні ч. в. множини — це найменші (відносно вкладення) недодатні ч. в. множини, яким відповідають критичні множини Клейнера в тому сенсі, що будь-яка P-критична ч. в. множина мінімаксно ізоморфна одній (і лише одній) із множин Клейнера. В термінах мінімаксних систем твірних це означає, що критичні множини Клейнера (по одному із кожного класу ізоморфізму) утворюють мінімаксну систему твірних для множини всіх P-критичних ч. в. множин (до того ж, ця система твірних є мінімальною). Аналогічно, NP-критичні ч. в. множини — це найменші множини, що не є невід'ємними, і їм відповідають суперкритичні множини. Виникає запитання — а чи не можна продовжити цей ряд, враховуючи, що квадратичні форми, що не є невід'ємними, не мають природньої градації?

У першій частині розділу пропонується позитивне вирішення цієї проблеми. А саме, розглядаються так звані надсуперкритичні множини, які відрізняються від суперкритичних в такій мірі, як суперкритичні відрізняються від критичних; при цьому кожна суперкритична ч. в. множина є підмножиною деякої надсуперкритичної ч. в. множини (відмітимо, що і кожна критична множина належить деякій суперкритичній множині).

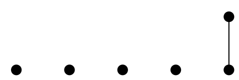
Формально це здійснюється наступним чином:

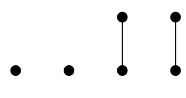
1. Для ч.в. множини X позначимо через $\mathcal{X}^+$ множину всіх одноелементних розширень $X \cup a$ множини X таких, що елемент a разом із порівняльними з ним елементами утворює ланцюг.

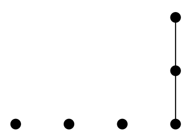
2. Зафіксуємо суперкритичні ч.в. множини $\mathcal{N}_i$ (по одній із кожного класу ізоморфізму) і розглянемо в об'єднанні всіх множин $\mathcal{N}_i^+$ підмножину мінімальних (відносно включення) ч. в. множин. Елементи цієї підмножини називаємо надсуперкритичними ч.в. множинами. Мотивацією для такого означення є твердження 5.1, за яким суперкритичні ч. в. множини можна отримати таким же самим способом із критичних.

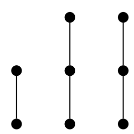
Усі надсуперкритичні ч.в. множини самодуальні (як і критичні та суперкритичні) і згідно твердження 5.2 вичерпуються (з точністю до ізоморфізму) такими множинами:

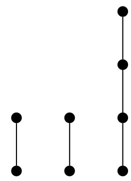
$OS_1 = (1,1,1,1,1,1) =$

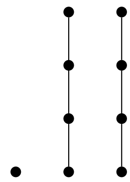
$OS_2 = (1,1,1,1,2) =$ 

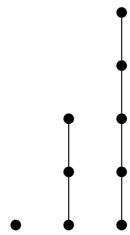
$OS_3 = (1,1,2,2) =$ 

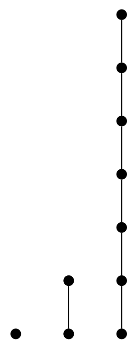
$OS_4 = (1,1,1,3) =$ 

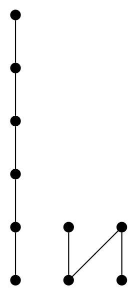
$OS_5 = (2,3,3) =$ 

$OS_6 = (2, 2, 4) =$ 

$OS_7 = (1, 4, 4) =$ 

$OS_8 = (1, 3, 5) =$ 

$OS_9 = (1, 2, 7) =$ 

$OS_{10} = (6, \text{И}) =$ 

Отже, введені таким чином надсуперкритичні ч.в. множини є природним продовженням ряду “критичні множини Клейнера — суперкритичні множини Назарової”

Цей матеріал викладено в підрозділах 5.1 і 5.2.

У підрозділі 5.3 описані (з точністю до ізоморфізму і дуальності) всі ч.в. множини, які мінімаксно ізоморфні кожному із надсуперкритичних множин, вказаних вище. Їх загальна кількість — 203. Усі разом вони є продовженням ряду "P-критичні множини — NP-критичні множини" (бо надсуперкритичні ч.в. множини утворюють їхню мінімальну мінімаксну систему твірних).

Цей процес можна продовжити до нескінченності, якщо індуктивно ввести поняття s-надсуперкритичних множин для довільного натурального числа s.

В останньому, шостому розділі розглядається одна комбінаторна задача для тих класів ч.в. множин, елементи яких описувалися в попередніх розділах.

Нехай S — (скінченна) ч.в. множина і $S^2_< := \{(x, y) \,|\, x, y \in S, x < y\}$. Якщо $(x, y) \in S^2_<$ і немає елемента $z \in S$, що задовольняє нерівність $x < z < y$, то елементи x і y називаються сусідніми. Покладемо $n_w = n_w(S) := |S^2_<|$ і позначимо через $n_e = n_e(S)$ кількість пар сусідніх елементів. Відношення $k_t = k_t(S)$ чисел $n_w - n_e$ і n_w називається коефіцієнтом транзитивності ч.в. множини S; у випадку $n_w = 0$ (тоді $n_e = 0$) вважається, що $k_t = 0$. Очевидно, що дуальні ч.в. множини мають однаковий коефіцієнт транзитивності.

У цьому розділі описуються коефіцієнти транзитивності для несерійних додатних, P-критичних і NP-критичних ч.в. множин та ч.в. множин надсуперкритичного MM-типу.

Із отриманого опису випливають, зокрема, такі теореми про зв'язок між коефіцієнтами транзитивності $k_1(S)$ і $k_1(T)$ ч.в. множин S і T та їхніми параметрами (висотою h і шириною w) і умови, за яких коефіцієнти транзитивності приймають найбільші значення.

Теорема 6.11. *Нехай S і T — несерійні додатні множини. Тоді*

(1) $k_t(T) > k_t(S)$, *якщо* $h(T) > h(S) + 1$;

(2) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{20}$, *якщо* $h(T) = h(S) + 1$.

Теорема 6.12. *Нехай* S *і* T *— несерійні додатні множини. Тоді*

(3) $k_t(T) \geq k_t(S)$, *якщо* $w(T) = w(S) = 3$ *і* $h(T) > h(S)$;

(4) $k_t(T) \geq k_t(S)$, *якщо* $w(T) = w(S) = 2$, $h(T) > h(S)$ *і діаграма Хассе множини* T *не є циклом.*

Теорема 6.29. *Нехай* S *і* T *—* P*-критичні множини. Тоді*

(1) $k_t(T) > k_t(S)$, *якщо* $h(T) > h(S) + 1$;

(2) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{10}$, *якщо* $h(T) = h(S) + 1$.

Теорема 6.67. *Нехай* S *і* T *— множини мінімаксно еквівалентні суперкритичним (відповідно надсуперкритичним) множинам. Тоді*

(1) $k_t(T) > k_t(S)$, *якщо* $h(T) > h(S) + 2$,

(2) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{p}$, *якщо* $h(T) = h(S) + 2$,

(3) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{5}$, *якщо* $h(T) = h(S) + 1$,

де $p = 50$ *(відповідно* $p = 25$*).*

Теорема 6.68. *Коефіцієнт транзитивності* $k_t(S)$ *множини* S *є найбільшим серед усіх множин, мінімаксно еквівалентних фіксованій множині Клейнера (відповідно Назарової чи надсуперкритичній) тоді і тільки тоді, коли* S *містить щільну підмножину з вузлових елементів, порядок якої дорівнює висоті фіксованої множини. Більшого числа вузлових елементів бути не може.*

Теорема 6.69. *Коефіцієнт транзитивності* $k_t(S)$ *множини* S *є найбільшим серед усіх множин, мінімаксно еквівалентних множинам Клейнера (відповідно Назарової чи надсуперкритичній) тоді і тільки тоді, коли* S *містить щільну підмножину з найбільш можливим числом вузлових елементів.*

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Категорії над полем

Вкажемо спочатку основні поняття класичної теорії категорій.

Множина об'єктів категорії Φ позначається через $\mathrm{Ob}\,\Phi$, а множина її морфізмів — через $\mathrm{Mor}\,\Phi$; множина морфізмів з об'єкта X в об'єкт Y позначається через $\mathrm{Hom}_\Phi(X,Y)$ або $\Phi(X,Y)$. Замість $X \in \mathrm{Ob}\,\Phi$ часто пишуть $X \in \Phi$; запис $X \cong Y$ означає, що X і Y ізоморфні. Ізоморфізм називають ще оборотним морфізмом; інакше кажучи, морфізм $\alpha \in \Phi(X,Y)$ оборотний, якщо існує морфізм $\beta \in \Phi(Y,X)$ такий, що $\alpha\beta = 1_X$ і $\beta\alpha = 1_Y$ (1_Z позначає одиничний морфізм об'єкта Z).

Скелетом категорії називається її повна підкатегорія, що складається з представників всіх класів ізоморфних об'єктів.

Коваріантний функтор, як правило, називається просто функтором. Категорії Φ і Ψ називаються ізоморфними, якщо існують функтори $F : \Phi \to \Psi$ і $G : \Psi \to \Phi$ такі, що FG і GF — тотожні функтори. Але в теорії категорій більш важливим є поняття еквівалентності категорій (див., напр., [88]). На практиці зручніше користуватися не самим поняттям, а відповідним критерієм.

Функтор $F : \Phi \to \Psi$ називається *строгим*, якщо для довільних об'єктів X, Y категорії Φ відображення

$$F(X,Y) : \mathrm{Hom}_\Phi(X,Y) \to \mathrm{Hom}_\Psi(XF, YF)$$

(яке визначається відображенням $F : \mathrm{Mor}\,\Phi \to \mathrm{Mor}\,\Psi$) ін'єктивне, і *повним*, якщо це відображення сюр'єктивне. Далі, функтор $F : \Phi \to \Psi$ називається *щільним*, якщо для кожного $Y \in \Psi$ існує ізоморфний йому об'єкт вигляду XF, $X \in \Phi$.

Теорема 1.1. *Функтор $F : \Phi \to \Psi$ є еквівалентністю категорій тоді і лише тоді, коли він строгий, повний і щільний.*

Переходимо тепер до категорій над полями.

Категорією над полем k або просто k-категорією називається довільна категорія Φ, всі множини морфізмів якої є (не обов'язково скінченновимірними) векторними просторами над k такими, що композиція морфізмів k-білінійна; тоді множини $\Phi(X, X)$ є k-алгебрами. Якщо всі простори $\Phi(X, Y)$ є скінченновимірними, то категорія Φ називається *скінченновимірною*. Елемент $X \in \Phi$ називається нульовим, якщо $\Phi(X, X) = 0$ або, що те ж саме, $1_X = 0$ (зауважимо, що в k-категорії не завжди існують нульові об'єкти).

Функтор $F : \Phi \to \Psi$ між k-категоріями Φ і Ψ називається k-лінійним, якщо всі відповідні йому відображення $F(X, Y)$ є k-лінійними; іноді такий функтор називають k-функтором. Як правило, між k-категоріями розглядають тільки k-лінійні функтори.

Кожній категорії Φ можна природно зіставити k-категорію $k\Phi$, що називається *k-лінійною оболонкою* або k-лінеаризацією Φ; вона має ті ж об'єкти, що і категорія Φ, а $k\Phi(X, Y)$ — це векторний k-простір з базисом $\Phi(X, Y)$. Очевидно, що довільний функтор $F : \Phi \to \Psi$, де Ψ — k-категорія, однозначно продовжується до k-лінійного функтора $F^k : k\Phi \to \Psi$.

Двостороннім ідеалом (або просто ідеалом) $\mathcal{I}$ k-категорії Φ називається набір підпросторів $\mathcal{I}(X, Y) \subseteq \Phi(X, Y)$, де $X, Y \in \Phi$, таких, що $\lambda\alpha\gamma \in \Phi(W, Z)$ щораз, коли $\alpha \in \mathcal{I}(X, Y)$, $\lambda \in \Phi(W, X)$, $\gamma \in \Phi(Y, Z)$. З кожним ідеалом $\mathcal{I}$ зв'язаний фактор-k-категорія $\Phi/\mathcal{I}$ з тими ж об'єктами, що і категорія Φ, і множинами морфізмів $(\Phi/\mathcal{I})(X,Y) = \Phi(X,Y)/\mathcal{I}(X,Y)$ для всіх $X, Y \in \Phi$. Зауважимо, що якщо $1_X \in \mathcal{I}$, то об'єкт X категорії $\Phi/\mathcal{I}$ є нульовим. Канонічні проекції (просторів) $\Phi(X,Y) \to \Phi/\mathcal{I}(X,Y)$ задають функтор-проекцію $\Pi : \Phi \to \Phi/\mathcal{I}$.

Як важливий приклад, пов'язаний із цими поняттями, можна вказати наступний приклад. Нехай $F : \Phi \to \Psi$ — k-функтор між k-категоріями, що є повним і щільним. Позначимо через $\mathrm{Ker}F$ ядро функтора F, тобто множина всіх морфізмів α таких, що $\alpha F = 0$; очевидно, що $\mathrm{Ker}F$ — ідеал в Φ. Тоді F індукує еквівалентність $\Phi/\mathrm{Ker}F \cong \Psi$.

Скінченновимірна k-категорія Ψ називається *спектроїдом*, якщо її об'єкти попарно неізоморфні і всі алгебри ендоморфізмів $\Psi(X,X)$ локальні (локальна алгебра — це алгебра з $1 \neq 0$, всі необоротні елементи якої утворюють ідеал). Зауважимо, що умова про локальність всіх алгебр ендоморфізмів еквівалентна тому, що всі необоротні морфізми Ψ утворюють ідеал. Цей ідеал називається *радикалом спектроїда* Ψ; позначаємо його через $\mathcal{R}_\Psi$. Таким чином, маємо $\mathcal{R}_\Psi(X,Y) = \Psi(X,Y)$ для $X \neq Y$, а $\mathcal{R}_\Psi(X,X)$ — це максимальний ідеал (радикал) локальної алгебри $\Psi(X,X)$.

Якщо $\mathcal{I}$ — ідеал спектроїда Ψ і $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}_\Psi$, то, мабуть, $\Psi/\mathcal{I}$ також є спектроїдом; якщо ж $\mathcal{I}$ не належить $\mathcal{R}_\Psi$, то множина $P = \{X \in \Psi \mid 1_X \in \mathcal{I}\}$ непорожня і значить фактор-категорія $\Psi/\mathcal{I}$ не є спектроїдом (оскільки об'єкти $X \in P$ стають нульовими об'єктами $\Psi/\mathcal{I}$, алгебри ендоморфізмів $\Psi/\mathcal{I}(X,X)$ не є локальними). Однак у другому випадку спектроїдом є повна підкатегорія категорії $\Psi/\mathcal{I}$, що складається з ненульових об'єктів.

Адитивною k-категорією (або k-адитивною категорією) називається довільна k-категорія, що є адитивною (тобто має скінченні прямі суми і нульовий об'єкт). Відзначимо, що кожній k-категорії Φ можна природно зіставити адитивну k-категорію $\oplus\Phi$, що називається адитивною оболонкою Φ. Її об'єктами є скінченні послідовності $(X_1, \ldots, X_s)$ об'єктів з

Φ, а морфізми $(X_1, \dots, X_s) \to (Y_1, \dots, Y_t)$ ототожнюються з "матрицями" $\mu = (\mu_{ij}) \in \bigoplus_{i,j} \Phi(X_i, Y_j)$; композиція морфізмів визначається правилом множення матриць.

Очевидно, що довільний k-лінійний функтор з Φ в Ψ, де Ψ — адитивна k-категорія, можна природно продовжити до k-лінійного функтора з $\oplus\Phi$ в Ψ.

Скінченновимірна адитивна k-категорія називається *категорією Крулля-Шмідта*, якщо кожний її об'єкт розкладається в пряму суму нерозкладних об'єктів з локальними алгебрами ендоморфізмів. Повну підкатегорію категорії Крулля-Шмідта Φ, що складається з представників всіх класів ізоморфізмів нерозкладних об'єктів, будемо позначати через Φ_0; очевидно, що категорія Φ_0 визначена однозначно з точністю до ізоморфізму категорій і є спектроїдом. Назвемо її *головним спектроїдом* категорії Φ.

Поняття радикала, що введено вище для спектроїдів, можна ввести також і для категорій Крулля-Шмідта.

Нехай Φ — категорія Крулля-Шмідта. Морфізм $\alpha \in \Phi(X, Y)$ називається *радикальним*, якщо для кожного $\beta \in \Phi(Y, X)$ морфізми $1_X + \alpha\beta$ і $1_Y + \beta\alpha$ оборотні (насправді досить вимагати одну з цих умов). Всі радикальні морфізми утворюють ідеал, що називається радикалом категорії Φ; позначаємо його через $\mathcal{R}_\Phi$. Зауважимо, що між просторами $\mathcal{R}_\Phi(\oplus_i X_i, \oplus_j Y_j)$ і $\oplus_{i,j}\mathcal{R}_{\Phi_0}(X_i, Y_j)$ існує природний (канонічний) ізоморфізм.

1.2. Зображення k-категорій

Нехай Φ — деяка k-категорія і $\operatorname{mod} k$ — категорія скінченновимірних векторних k-просторів. Під зображенням категорії Φ розуміємо k-функтор з Φ в $\operatorname{mod} k$. Два зображення називаємо еквівалентними або ізоморфними, якщо ізоморфні відповідні функтори. Інакше кажучи, категорія зображень $\mathit{Rep}\,\Phi$ категорії Φ — це категорія $\mathit{Funct}(\Phi, \operatorname{mod} k)$ функторів з Φ в $\operatorname{mod} k$. З добре відомих загальних теорем випливає, що $\mathit{Rep}\,\Phi$ — категорія Крулля-Шмідта. Легко показати, що якщо категорії $\mathit{Funct}(\Phi, \operatorname{mod} k)$ і $\mathit{Funct}(\Psi, \operatorname{mod} k)$ еквівалентні, то еквівалентними є Φ і Ψ (для цього потрібно зафіксувати пару взаємно квазіоборотних функторів між Φ і Ψ і після цього подивитися на зв'язок між функторами $F : \Phi \to \operatorname{mod} k$ і $G : \Psi \to \operatorname{mod} k$). Зокрема, еквівалентними є категорії $\mathit{Funct}(\Phi, \operatorname{mod} k)$ і $\mathit{Funct}(\overline{\Phi}, \operatorname{mod} k)$, де $\overline{\Phi}$ — скелет категорії Φ.

Частину з щойно сказаного сформулюємо у вигляді твердження, яким часто користуються.

Твердження 1.2. *Якщо Φ — категорія Крулля-Шмідта і Φ_0 — її головний спектроїд, то $\Phi \cong \oplus\Phi_0$ і категорії $\mathit{Rep}\,\Phi$ і $\mathit{Rep}\,\Phi_0$ еквівалентні.*

Назвемо k-категорію Φ категорією *скінченного типу*, якщо вона має (з точністю до ізоморфізму) скінченне число нерозкладних об'єктів, і категорією *rep-скінченного типу*, якщо $\mathit{Rep}\,\Phi$ — категорія скінченного типу.

Зображення k-категорій самим прямим чином пов'язані з зображеннями алгебр.

Нехай Φ — k-категорія; будемо вважати, що число її об'єктів скінченне. Цій категорії можна природно зіставити скінченновимірну k-алгебру $\mathcal{A}(\Phi)$. Саме покладемо

$$\mathcal{A}(\Phi) = \bigoplus_{X,Y \in \Phi} \Phi(X, Y)$$

(тут розглядається пряма сума векторних k-просторів). Добуток в $\mathcal{A}(\Phi)$ досить визначити для довільних морфізмів $\alpha \in \Phi(X, Y)$ і $\beta \in \Phi(Z, T)$:

добуток α і β дорівнює морфізму $\alpha\beta$, якщо $Y = Z$, і нульовому елементу (простору $\mathcal{A}(\Phi)$), якщо $Y \neq Z$.

Алгебру $\mathcal{A}(\Phi)$ можна визначити і для k-категорії з нескінченним числом об'єктів (см. [89, §2]).

Зрозуміло, що між зображеннями k-категорії Φ і k-алгебри $\mathcal{A}\Phi$ є природна взаємно однозначна відповідність (їх категорії зображень ізоморфні).

1.3. Зображення сагайдаків

Сагайдаком називається довільний орієнтований граф $Q = (Q_0, Q_1)$ з множиною вершин Q_0 і множиною стрілок Q_1. У дисертації зустрічатимуться лише *скінченні* сагайдаки, тобто такі що обидві множини Q_0 і Q_1 скінченні. Початкову і кінцеву вершини стрілки λ позначаємо відповідно через $s(\lambda)$ і $t(\lambda)$. У такому випадку ще пишуть $\lambda : x \to y$, де $x = s(\lambda)$ і $y = t(\lambda)$.

Шляхом довжини $n \geqslant 1$ з початковою вершиною x і кінцевою вершиною y називається послідовність $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ стрілок α_i така, що $s(\alpha_1) = x$, $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ для будь-якого $1 \leqslant i < n$ і $t(\alpha_n) = y$. Окрім того, з формальних міркувань вважаємо, що при $x = y$ існує шлях $\alpha = 1_x$ довжини 0. Початкова і кінцева вершини шляху α позначаються відповідно через $s(\alpha)$ і $t(\alpha)$. У цьому випадку ще кажуть, що шлях іде з вершини x у вершину y. Два шляхи α і β називаються *паралельними*, якщо збігаються їхні початкові і кінцеві вершини.

Довільному сагайдаку $Q = (Q_0, Q_1)$ природнім чином можна зіставити категорію його шляхів PQ, об'єктами якої є елементи множини Q_0 (вершини сагайдака), а множина морфізмів $PQ(x, y)$ складається із всіх шляхів з вершини x у вершину y; добуток (композиція) шляхів визначається природним чином (приписуванням другого шляху до першого). Звідси, зокрема, маємо, що добуток довільного шляху на шлях довжини 0 (чи шляху довжини 0 на довільний) дорівнює саме зафіксованому довільному шляху. І, отже, кожна напівгрупа $PQ(x, y)$ є моноїдом.

Лінійна оболонка kPQ категорії PQ називається *k-категорією шляхів* сагайдака Q. Вона позначається просто через kQ У випадку, коли Q скінченний, можна розглянути алгебру $\mathcal{A}(Q)$ його шляхів; це скінченновимірна алгебра, базис якої складається із всіх шляхів. (Вище ми визначили скінченновимірну алгебру за будь-якою скінченною k-категорією, і якщо цю конструкцію застосувати до k-категорії kQ, то одержимо саме алгебру $\mathcal{A}(Q)$.)

Зображення $\overline{U}$ сагайдака $Q = (Q_0, Q_1)$ над полем k складається зі скінченних векторних k-просторів $U_i, i \in Q_0$, і лінійних відображень $\gamma_\alpha : U_x \to U_y$, де $\alpha : x \to y$ пробігає Q_1. Вектор $\overline{d} = (d_x), x \in Q_0$, де $d_x = \dim U_x$ $(i = 1, \dots, n)$, називається вектором-розмірністю зображення $\overline{U}$. Морфізм φ з $\overline{U}$ в $\overline{U'}$ складається з лінійних відображень $\varphi_x : U_x \to U'_x, x \in Q_0$ таких, що для кожної стрілки $\alpha : x \to y$ діаграма

$$\begin{array}{ccc} U_x & \xrightarrow{\gamma_\alpha} & U_y \\ {\scriptstyle \varphi_x}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_y} \\ U'_x & \xrightarrow{\gamma'_\alpha} & U'_y \end{array}$$

комутативна.

Для зображення $\overline{U}$ сагайдака Q покладемо $U = \{U_x \,|\, x \in Q_0\}$ і $\gamma = \{\gamma_\alpha \,|\, \alpha \in Q_1\}$. Використовуючи ці набори, $\overline{U}$ можна записати в короткій формі: $\overline{U} = (U, \gamma)$.

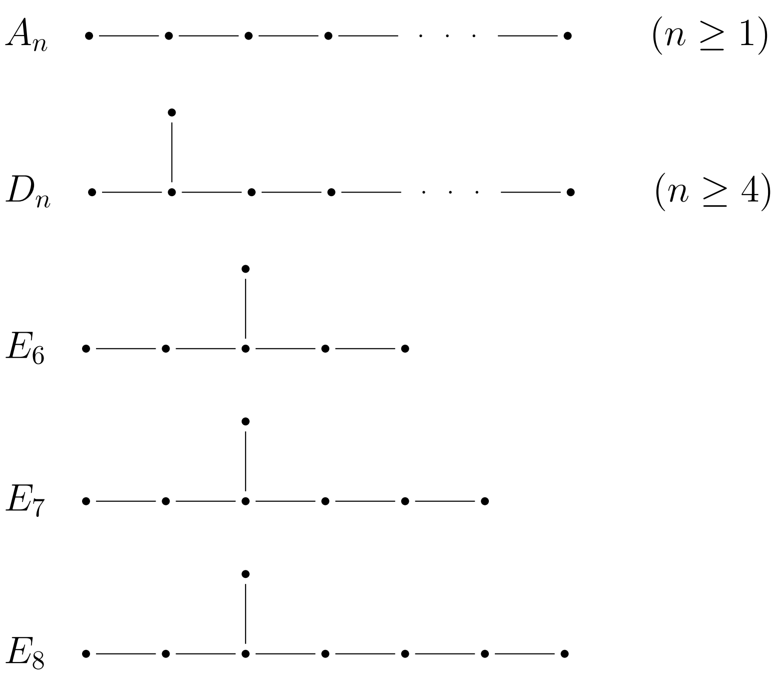
Категорію зображень сагайдака Q (яка є категорією Крулля-Шмідта) будемо позначати через $Rep_k\, Q$ або просто $Rep\, Q$ (якщо поле k фіксоване).

Очевидно, що між зображеннями сагайдака Q і k-категорії k є природна взаємно однозначна відповідність; більш того, їх категорії зображень ізоморфні. Звідси і зі сказаного в попередньому пункті випливає, що взаємно однозначна відповідність є між зображеннями скінченного сагайдака Q і зображеннями скінченної алгебри $\mathcal{A}(Q)$.

Кажуть, що сагайдак Q має скінченний (нескінченний) зображувальний тип над полем k, якщо $Rep_k\,Q$ — категорія скінченного (нескінченного) типу, тобто він має скінченне (нескінченне) число класів еквівалентності нерозкладних зображень.

Сагайдаки скінченного типу описав П. Габріель у роботі [1].

Теорема 1.3. *Зв'язний сагайдак Q має скінченний тип над полем k тоді і лише тоді, коли він є деякою діаграмою Динкіна з довільним напрямком стрілок:*



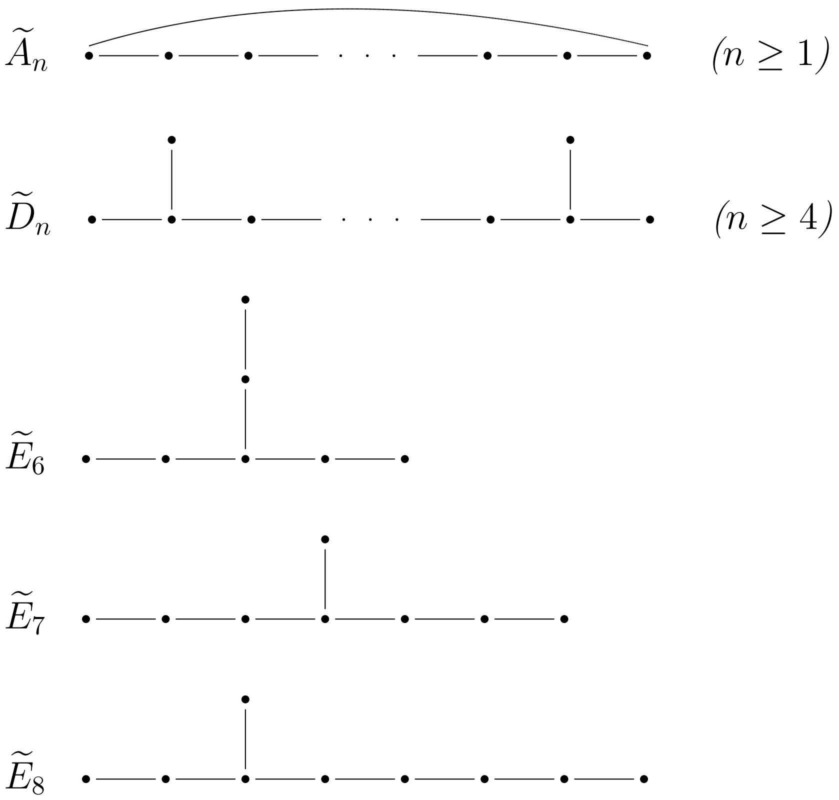
(*графи A_n та D_n мають n вершин*).

Зображення незв'язного сагайдака очевидним чином зводиться до зображень його зв'язних компонент. А значить незв'язний сагайдак має скінченний тип тоді і лише тоді, коли він є неперетинним об'єднанням діаграм Динкіна (з довільним напрямком стрілок).

Сагайдак називається *диким* якщо задача про опис його зображень містить в собі класичну нерозв'язну задачу про пару матриць, і *ручним* в іншому випадку. Щодо точних означень ручних та диких матричних задач див. роботи Ю. А. Дрозда [3], [4]. Щодо прикладів застосування цих означень див., зокрема, [5], [90].

У працях [27] і [28] незалежно доведена наступна теорема.

Теорема 1.4. *Зв'язний сагайдак Q нескінченного типу є ручним над полем k тоді і лише тоді, коли він є деякою розширеною діаграмою Динкіна з довільним напрямком стрілок:*



(*графи $\widetilde{A}_n$ та $\widetilde{D}_n$ мають n вершин*).

1.4. Зображення сагайдаків із співвідношеннями

Співвідношенням для сагайдака $Q = (Q_0, Q_1)$ називають довільну k-лінійну комбінацію його паралельних шляхів. Нехай $\lambda = \{\lambda_i \,|\, i \in I\}$ — деякий набір співвідношень для Q. Зображенням сагайдака Q зі співвідношеннями λ_i, $i \in I$, називається довільне зображення $\overline{U} = (U, \gamma)$ сагайдака Q таке, що при підстановці у кожне λ_i замість всіх його стрілок відповідних ним лінійних відображень виходить нульове відображення (якщо в λ_i входить який-небудь шлях 1_x довжини 0, то йому зіставляється тотожне відображення простору U_x). Виходячи з останнього визначення, у цій ситуації часто говорять, що маємо сагайдак Q зі співвідношеннями $\lambda_i = 0$ $(i \in I)$.

Зауважимо, що сагайдак зі співвідношеннями $(Q, \lambda) = (Q_0, Q_1, \lambda)$ визначає k-категорію $k/\mathcal{I}$, де $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\lambda)$ — ідеал в k, породжений λ_i $(i \in I)$. В зворотному напрямку, якщо розглянути ідеал $\mathcal{I}$ категорії k і зафіксувати в ньому морфізми λ_i, які його породжують (зокрема, у якості таких морфізмів можна взяти всі морфізми з $\mathcal{I}$), то будемо мати сагайдак зі співвідношеннями (Q, λ), де λ позначає множину всіх λ_i.

Зображення сагайдака зі співвідношеннями (Q, λ) утворюють категорію, яка є повною підкатегорією категорії $Rep\, Q$; позначимо її $Rep_k\,(Q, \lambda)$ або просто $Rep\,(Q, \lambda)$ (якщо поле фіксоване). Очевидно, що між зображеннями сагайдака Q зі співвідношеннями $\lambda_i = 0$ $(i \in I)$ і зображеннями k-категорії $k/\mathcal{I}$, де $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\lambda)$, існує природна взаємно однозначна відповідність; більш того, що відповідні категорії зображень ізоморфні. Те ж саме можна сказати й про зв'язок між зображеннями розглянутого сагайдака зі співвідношеннями і зображеннями алгебри $\mathcal{A}(Q)/\mathcal{I}^\circ$, де $\mathcal{I}^\circ = \mathcal{I}^\circ(\lambda)$ — ідеал в $\mathcal{A}(Q)$, породжений λ_i (зауважимо, що $\mathcal{A}(Q)/\mathcal{I}^\circ \cong \mathcal{A}(k/\mathcal{I})$).

Кажуть, що сагайдак із співвідношеннями (Q, λ) має скінченний тип над полем k, якщо $Rep_k\, Q$ — категорія скінченного типу.

Найбільш простими сагайдаками зі співвідношеннями є дерева зі співвідношеннями та комутативні сагайдаки (комутативний сагайдак — це сагайдак без орієнтованих циклів, у якому довільні два шляхи ненульової довжини, які мають однакові початкову та кінцеву вершини, рівні між собою). Сагайдаки зі співвідношеннями скінченного типу в першому випадку описані в роботі [16], а в іншому випадку — в роботі [91] (див. також [92]); відносно довільного сагайдаку із співвідношеннями скінченного типу (у випадку скінченновимірної алгебри шляхів) див. [89, §14].

Розглянемо більш детально випадок комутативних сагайдаків [91]. Без обмеження загальності можна, мабуть, вважати, що не існує стрілки α, яка дорівнює деякому шляху $\beta \neq \alpha$ (оскільки такі стрілки можна викинути); таку стрілку називають лишньою.

Нехай $\overline{Q} = (Q, \lambda)$ — комутативний сагайдак (λ — множина всіх співвідношень вигляду $\alpha - \beta$, де α і β — паралельні шляхи ненульової довжини. Вершину $x \in Q_0$ називають $(+)$-*допустимою* ((-)-*допустимою*), якщо вона не є кінцем (початком) якого-небудь ребра.

Підсагайдаком комутативного сагайдака $\overline{Q}$ називається всякий сагайдак Q', який можна отримати з Q за допомогою комбінації наступних операцій:

a) відкидання $(+)$- або (-)-допустимої вершини (разом із ребрами, які її містять);

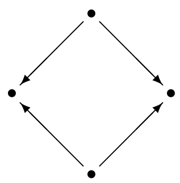
b) ототожнення кінців деякого ребра (стягування ребра в точку) з подальшим відкиданням зайвих ребер.

При цьому Q розглядається як сагайдак із усіма співвідношеннями, які індукуються співвідношеннями із λ.

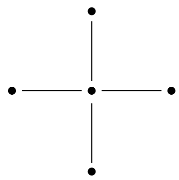
У роботі [91] доведена така теорема.

Теорема 1.5. *Комутативний сагайдак має скінченний тип над полем k тоді і лише тоді, коли він не містить, з точністю до антиізоморфізму, ні одного із наступних підсагайдаків (там де напрямок ребра не вказаний, він може бути довільним):*

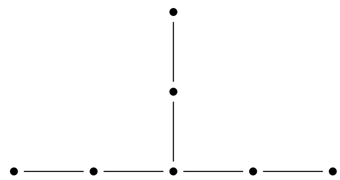
I



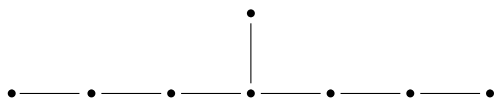
II



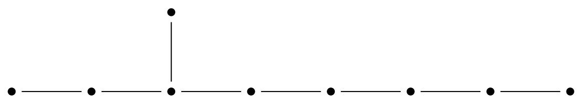
III



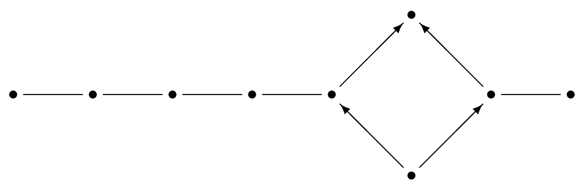
IV



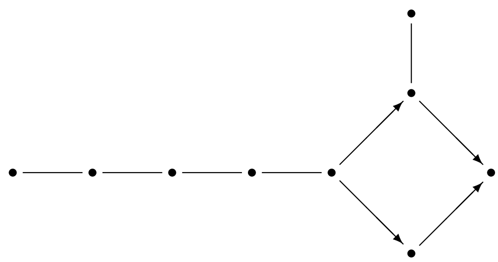
V



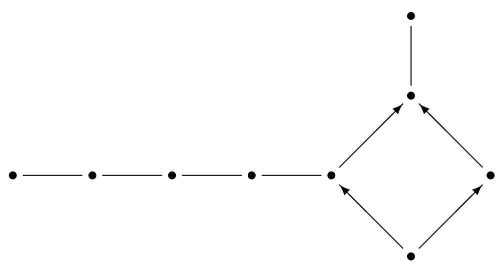
VI



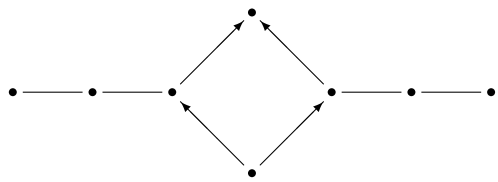
VII



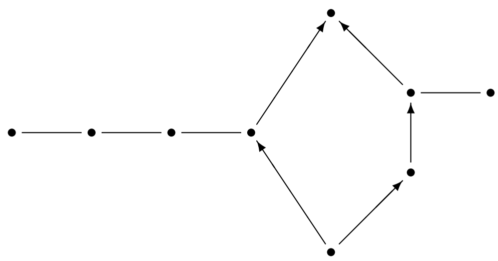
VIII



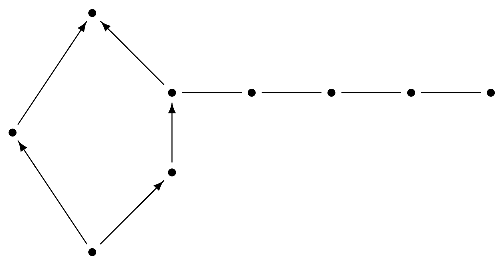
IX



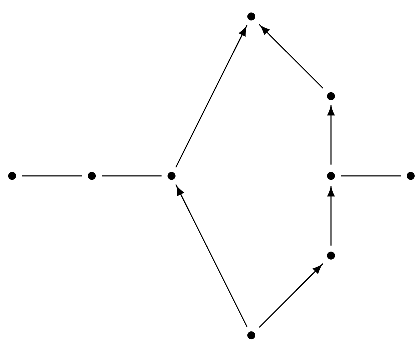
X



XI



XII



Зображення сагайдаків зі співвідношеннями вивчалися також багатьма іншими авторами (див., наприклад, [93]–[113]). Як показує наступний підрозділ, сагайдаки зі співввідношеннями виникають при дослідженні довільної категорії Крулля-Шмідта.

1.5. Сагайдак із співвідношеннями категорії Крулля-Шмідта

Нехай Ψ — спектроїд. Будемо вважати, що число його об'єктів скінченне. Сагайдак Q_Ψ категорії Ψ визначається в такий спосіб. Q_Ψ має в якості вершин об'єкти з Ψ. Число стрілок з вершини X у вершину Y дорівнює розмірності простору $\mathcal{R}_\Psi(X,Y)/\mathcal{R}_\Psi^2(X,Y)$. Далі, зіставимо кожній стрілці $\alpha : X \to Y$ сагайдака Q_Ψ радикальний морфізм $\overline{\alpha} \in \mathcal{R}_\Psi(X,Y)$ таким чином, щоб для кожної пари (X,Y) простір $\mathcal{R}_\Psi(X,Y)$ був прямою сумою підпростору $\mathcal{R}_\Psi^2(X,Y)$ і підпростору, породженого всіма морфізмами $\overline{\alpha} : X \to Y$. Маємо функтор $F : k_\Psi \to \Psi$ такий, що $XF = X$ для кожної вершини X і $\alpha F = \overline{\alpha}$ для кожної стрілки α. Оскільки k-категорія Ψ скінченна і число її об'єктів скінченне, то $\mathcal{R}_\Psi^s = 0$ для деякого натурального s, і легко бачити, що функтор F повний. Тому маємо еквівалентність категорій $k_\Psi/\mathrm{Ker}F \to \Psi$.

Якщо тепер зафіксувати в ідеалі $\mathrm{Ker}F$ морфізми λ_i, $i \in I$, які його породжують, то будемо мати сагайдак із співвідношеннями $\overline{Q}_\Psi = (Q_\Psi, \lambda)$, де λ позначає множину всіх λ_i (див. попередній пункт). Будемо його називати сагайдаком із співвідношеннями спектроїда Ψ. Зауважимо, що сагайдак Q_Ψ визначається категорією Ψ однозначно, а сагайдак із співвідношеннями $\overline{Q}_\Psi$ — ні.

У випадку, коли Φ — k-категорія Крулля-Шмідта, що має (з точністю до ізоморфізму) скінченне число нерозкладних об'єктів, назвемо її сагайдаком із співвідношеннями $\overline{Q}_\Phi$, сагайдак із співвідношеннями $\overline{Q}_{\Phi_0}$, де Φ_0 — головний спектроїд Φ.

1.6. Зображення частково впорядкованих множин

Під підмножиною X ч. в. множини A завжди розуміємо повну ч. в. підмножину (тобто, для $x, y \in X$, $x < y$ в X тоді і лише тоді, коли $x < y$ в A).

Дамо означення зображення ч. в. множини A [2] у термінах градуйованих векторних просторів [90] (в [2] використовується матрична мова).

Нехай A — ч. в. множина і k — довільне поле.

Дамо спочатку означення категорії A-градуйованих векторних просторів над k [90]. A-градуйований векторний простір над k (або просто A-градуйований k-простір) — це пряма сума $U = \bigoplus_{x \in A} U_x$ векторних k-просторів U_x. Цілочисленний вектор $\overline{d} = \overline{d}(U) = (d_x), x \in A$, де $d_x = \dim U_x$, називається вектором-розмірністю простору U; його розмірність $\dim U = \sum_{x \in A} d_x$ позначається скорочено через $d = d(U)$.

Лінійне відображення $\varphi : U \to U'$, де U, U' — A-градуйовані k-простори, називається A-*відображенням*, якщо $\varphi_{bc} = 0$ щораз, коли $b \nleq c$, де φ_{xy} позначає лінійне відображення U_x в U'_y, індуковане відображенням φ (тобто $\varphi_{xy} = i_x \varphi \pi'_y$, де i_x — вкладення U_x в U, а π'_y — проекція U' на U'_y). Множина всіх A-відображень U в U' (яке є підпростором в $\mathrm{Hom}(U, U')$) позначаємо через $\mathrm{Hom}_A(U, U')$. A-відображення φ природно ототожнювати з матрицею (φ_{xy}), $x, y \in A$; тоді сума і добуток A-відображень визначаються відповідно сумою і добутком цих матриць (звідки, зокрема, випливає, що сума і добуток A-відображень є A-відображеннями).

Категорія A-градуйованих векторних просторів над полем k — це категорія, об'єктами якої є A-градуйовані векторні простори над k, а морфізмами — A-відображення. Цю категорію, що є категорією Крулля-Шмідта, будемо позначати через $\mathrm{mod}_A k$, за аналогією з категорією скінченних векторних k-просторів $\mathrm{mod}\, k$.

Переходимо тепер до визначення зображень ч. в. множин.

Зображення ч. в. множин A — це трійка $X = (V, U, \gamma)$, що складається з просторів $V \in \mathrm{mod}\, k$, $U \in \mathrm{mod}_A k$ і лінійного відображення $\gamma : V \to U$. Ототожнюємо відображення γ з вектором (γ_a), $a \in A$, де γ_a — відображення V в U_a, індуковане γ. Прямою сумою зображень $X = (V, U, \gamma)$ і $X' = (V', U', \gamma')$ називається зображення $X \oplus X' = (V \oplus V', U \oplus U', \gamma \oplus \gamma')$.

Вектор $\overline{d} = \overline{d}(X) = (d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n)$, де $d_0 = \dim V$ і $d_i = \dim U_i$, називається вектором-розмірністю зображення X, а число $d = d(X) = \dim V + \dim U$ — його розмірністю.

Морфізмом з (V, U, γ) в (V', U', γ') є довільна пара (μ, ν) лінійних відображень $\mu \in \mathrm{Hom}(V, V')$ і $\nu \in \mathrm{Hom}_A(U, U')$ таких, що діаграма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\gamma} & U \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\nu} \\ V' & \xrightarrow{\gamma'} & U' \end{array}$$

комутативна. Перемножуються морфізми покоординатно. Очевидно, що морфізм (μ, ν) є ізоморфізмом тоді і лише тоді, коли μ — ізоморфізм в $\mathrm{mod}\, k$ і ν — ізоморфізм в $\mathrm{mod}_A k$.

Категорія зображень (над полем k) ч. в. множин A позначається через $Rep_k A$ або просто через $Rep A$. Згідно основного результату роботи [114] вона є категорією Крулля-Шмідта.

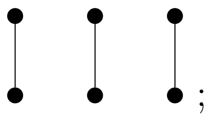
Кажуть, що ч. в. множина A має скінченний тип, якщо $Rep A$ — категорія скінченного типу.

Частково впорядковані множини скінченного типу над довільним полем описує наступна теорема, доведена в роботі [7].

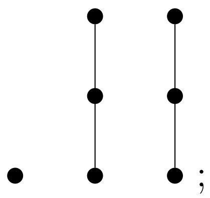
Теорема 1.6. *Частково впорядкована множина A має скінченний тип тоді і лише тоді, коли вона не містить у собі підмножин такого вигляду:*

$\mathcal{K}_1$:

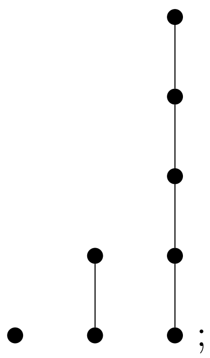
$\mathcal{K}_2$:



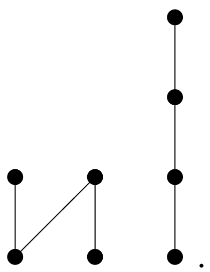
$\mathcal{K}_3$:



$\mathcal{K}_4$:



$\mathcal{K}_5$:



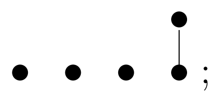
Частково впорядковані множини $\mathcal{K}_t$ називають критичними множинами або критичними множинами Клейнера (оскільки вони вперше виникли в його статті).

Ручні частково впорядковані множини над довільним полем описує наступна теорема, доведена в роботі [31].

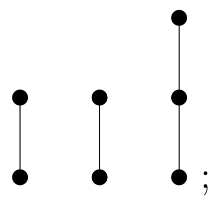
Теорема 1.7. *Частково впорядкована множина A має скінченний тип тоді і лише тоді, коли вона не містить у собі підмножин такого вигляду:*

$\mathcal{N}_1$:

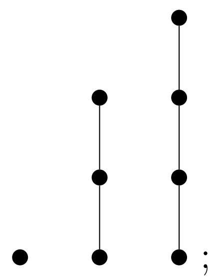
$\mathcal{N}_2$:



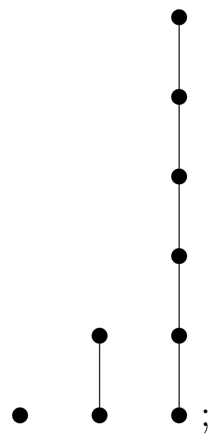
$\mathcal{N}_3$:



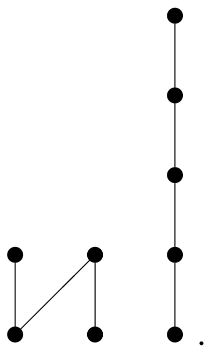
$\mathcal{N}_4$:



$\mathcal{N}_5$:



$\mathcal{N}_6$:



Частково впорядковані множини N_t називаються *суперкритичними* множинами або суперкритичними множинами Назарової (оскільки вони вперше виникли в її статті).

Зображення ч. в. множин вивчалися також в багатьох інших працях (див., напр., [115]–[122]).

1.7. Квадратичні форми Тітса

Квадратичні форми виникали і продовжують виникати при розв'язанні багатьох задач в різних областях математики. Серед них важливу роль відіграють квадратичні форми Тітса для різних алгебраїчних об'єктів (графів, частково впорядкованих множин, алгебр, тощо).

У цьому параграфі розглянемо означення форм Тітса (для тих об'єктів, які будуть зустрічатися надалі) та розглянемо деякі їх властивості.

Як звичайно, $\mathbb{Z}$ позначає кільце цілих чисел, а $\mathbb{Q}$ — поле раціональних чисел.

Протягом дисертації додатно визначені форми $q_{\mathbb{Z}}^n \to \mathbb{Z}$ часто називаємо просто додатними. Слабко додатною формою називається форма q, додатно визначена на множині всіх векторів із невід'ємними координатами.

1.7.1. Форма Тітса скінченного сагайдака. Квадратична форма (скінченного) сагайдака $Q = (Q_0, Q_1)$ — це згідно означення форма q_Q :

$\mathbb{Z}^{Q_0} \to \mathbb{Z}$, яка задається наступною рівністю:

$$q_Q(z) = \sum_{i \in Q_0} z_i^2 - \sum_{i \to j} z_i z_j,$$

де $i \to j$ пробігає множину Q_1.

Легко показати (див. [1]), що сагайдак Q має додатно визначену форму Тітса тоді і лише тоді, коли він є неперетинним об'єднанням діаграм Динкіна (з довільним напрямком стрілок).

Дамо тепер означення квадратичної форми Тітса для сагайдака з співвідношеннями $\overline{Q} = (Q, \lambda)$, де $\lambda = \{\lambda_i \,|\, i \in I\}$.

Покладемо $\Gamma = k$ і позначимо через $\mathcal{R}$ радикал Γ. Позначимо далі через $\mathcal{I}$ ідеал в Γ, породжений всіма λ_i, через $\mathcal{J}$ ідеал в Γ, породжений всіма стрілками і через $\mathcal{K}$ ідеал в Γ, породжений ідеалами $\mathcal{I}$ і $\mathcal{J}$. Будемо вважати, що кожне λ_i належить $\mathcal{R}^2$ і що категорія $\Gamma = k/\mathcal{I}$ скінченна (тоді Γ — спектроїд). Квадратичною формою Тітса сагайдака зі співвідношеннями $\overline{Q}$ називається наступна форма $q_{\overline{Q}} : \mathbb{Z}^{Q_0} \to \mathbb{Z}$:

$$q_{\overline{Q}}(z) = \sum_{x \in Q_0} z_x^2 - \sum_{x \to y} z_x z_y + \sum_{x,y \in Q_0} r_{xy} z_x z_y,$$

де $x \to y$ пробігає множину Q_1 і $r_{xy} = \dim\mathcal{I}(x,y) - \dim\mathcal{K}(x,y)$.

1.7.2. Форма Тітса спектроїда. Визначимо форму Тітса $q_\Psi(z)$ для спектроїда Ψ зі скінченним числом об'єктів: $q_\Psi(z)$ — це форма Тітса $q_{\overline{Q}}(z)$ для сагайдака зі співвідношеннями $\overline{Q}$ спектроїда Ψ (див. попередній пункт).

У випадку, коли Φ — k-категорія Крулля-Шмідта, що має (з точністю до ізоморфізму) скінченне число нерозкладних об'єктів, назвемо її формою Тітса $q_\Phi(z)$ форму Тітса $q_{\Phi_0}(z)$, де Φ_0 — головний спектроїд Φ.

1.7.3. Форма Тітса скінченної ч. в. множини. Квадратична форма ч. в. множини S — це форма $q_S(z) : \mathbb{Z}^{S \cup 0} \to \mathbb{Z}$, яка задається наступною рівністю:

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i\in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j\in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i\in S} z_i$$

(з формальних міркувань треба вважати, що ні один із елементів S не позначений числом 0).

У роботі [6] доведено, що ч. в. множина S має скінченний тип над полем тоді і лише тоді, коли її форма Тітса слабко додатна. Звідси, враховуючи теорему із 1.6, випливає, що ч. в. множина S має слабо додатну квадратичну форму Тітса тоді і лише тоді, коли вона не містить як підмножину ніяку критичну множину Клейнера.

Далі, у роботі [30] доведено, що ч. в. множина S має ручний тип над полем тоді і лише тоді, коли її форма Тітса слабко невід'ємна. Звідси, враховуючи теорему із [2], випливає, що ч. в. множина S має слабко невід'ємну квадратичну форму Тітса тоді і лише тоді, коли вона не містить як підмножину ніяку критичну множину Назарової.

1.8. Класифікація додатних частково впорядкованих множин

Нагадаємо, що частково впорядкована множина називається *додатною*, якщо додатна її квадратичні форма Тітса. Додатні ч.в. множини бувають серійні та несерійні.

Ч. в. множину S із додатно визначеною формою Тітса називатимемо *серійною*, якшо для будь-якого натурального m існує ч. в. множина T така, що

а) S є підмножиною T;

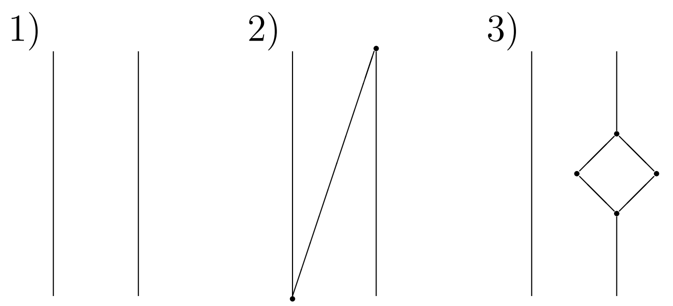
б) $|T \setminus S| = m$;

в) форма Тітса множини T додатно визначена.

Теорема 1.8. *Будь-яка додатна множина порядку $n < 5$ або $n > 7$ є серійною.*

Серійні ч.в. множини задаються такою теоремою.

Теорема 1.9. *Серійні додатні ч.в. множини вичерпуються наступними множинами:*

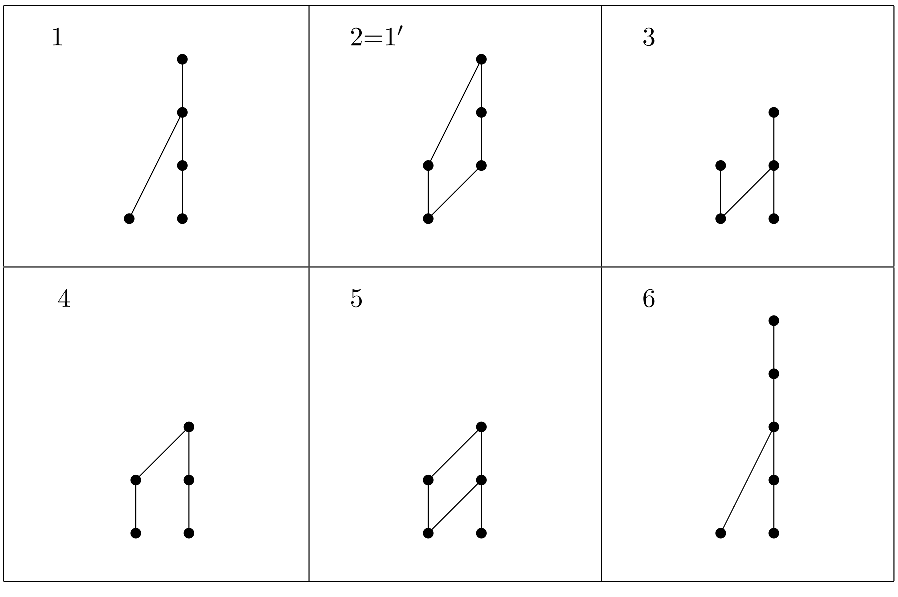


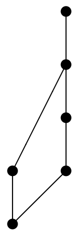
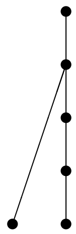
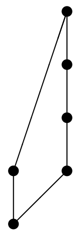
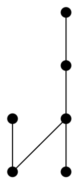
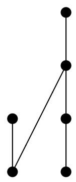
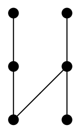
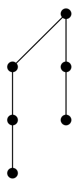
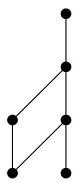
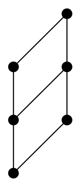
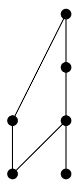
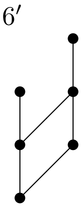
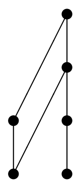
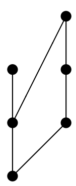
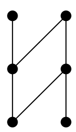
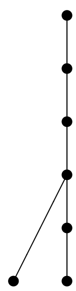
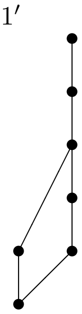
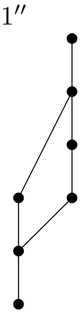
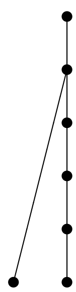
Вертикальні лінії - це лінійно-впорядковані множини (ланцюги), а похилі лінії не мають проміжних точок.

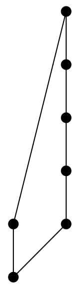
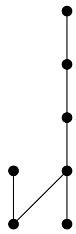
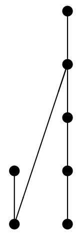
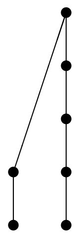
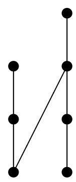
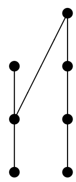
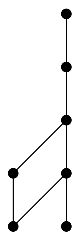
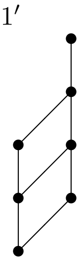
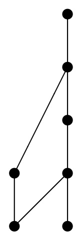
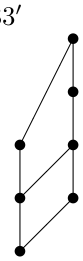
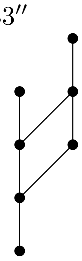
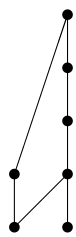
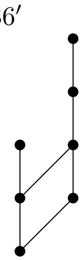
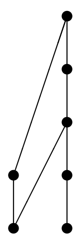
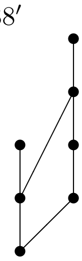
Зауважимо, що у випадках 1) і 3) ланцюги можуть бути порожніми.

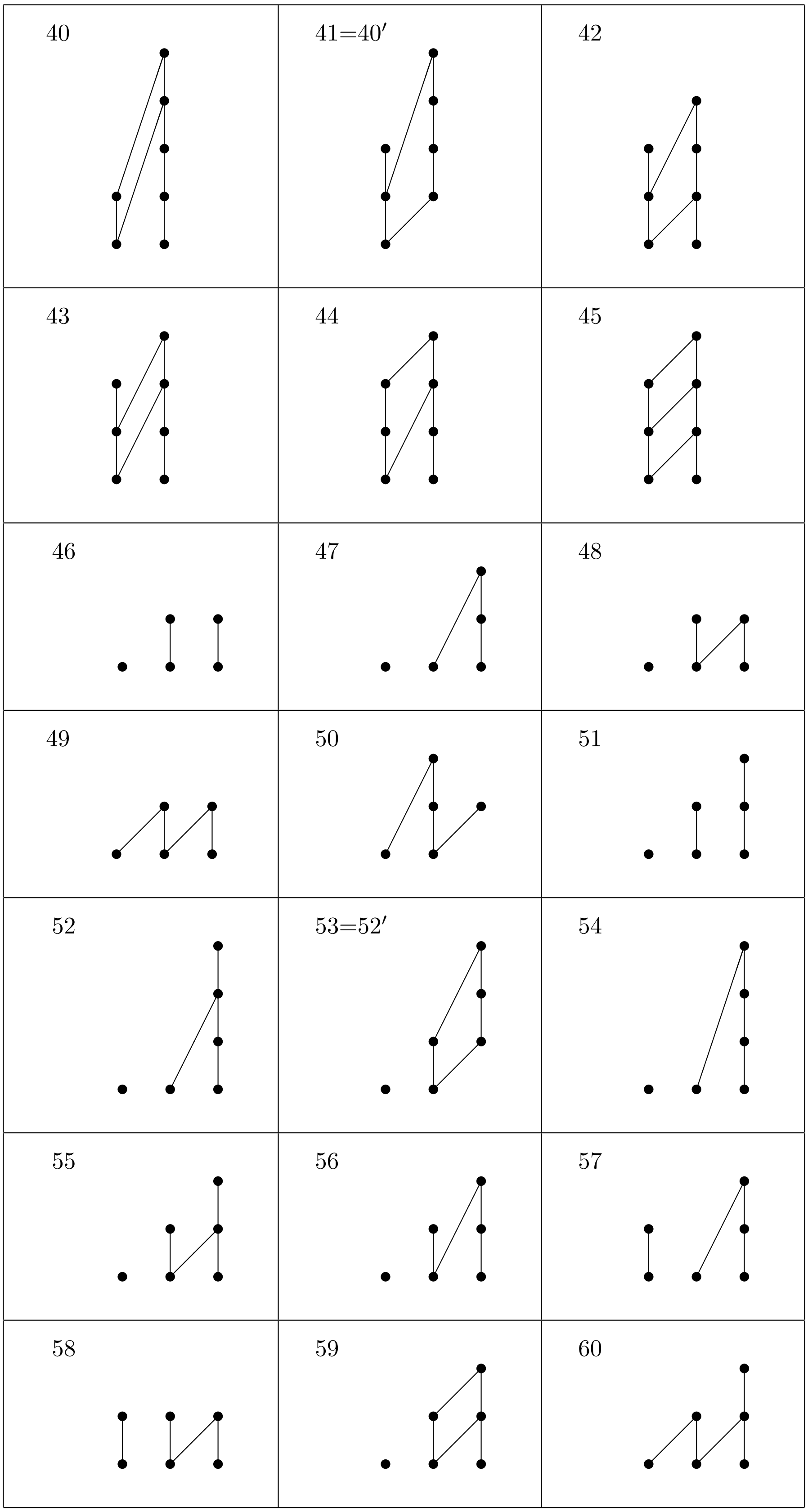
Для несерійних додатних ч.в. множин маємо наступну теорему.

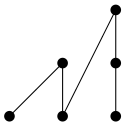
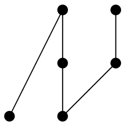
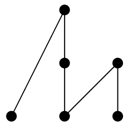
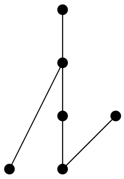
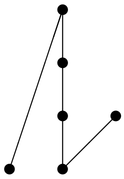
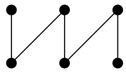
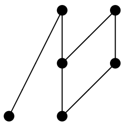
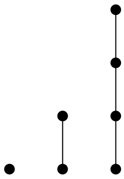
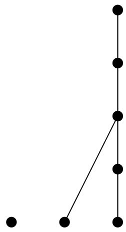
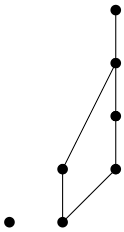
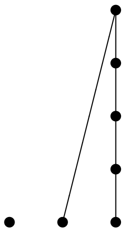
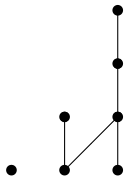
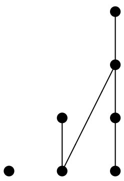
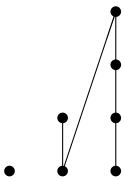
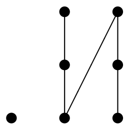
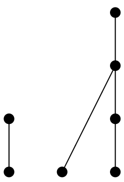
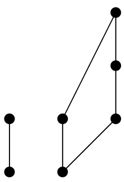
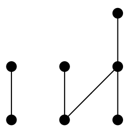
Теорема 1.10. *Несерійні додатні ч.в. множини вичерпуються (з точністю до ізоморфізму і дуальності) наступними множинами:*

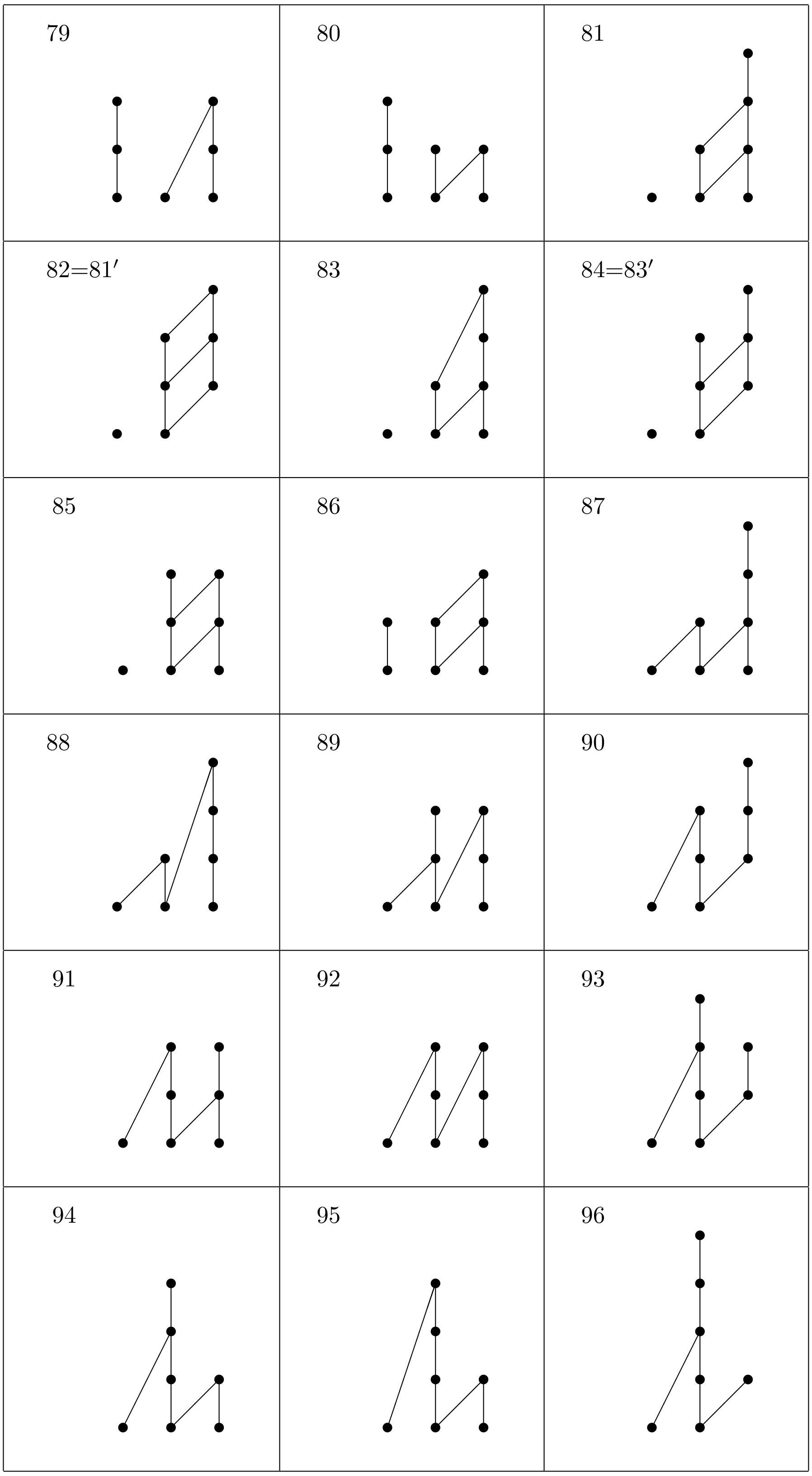


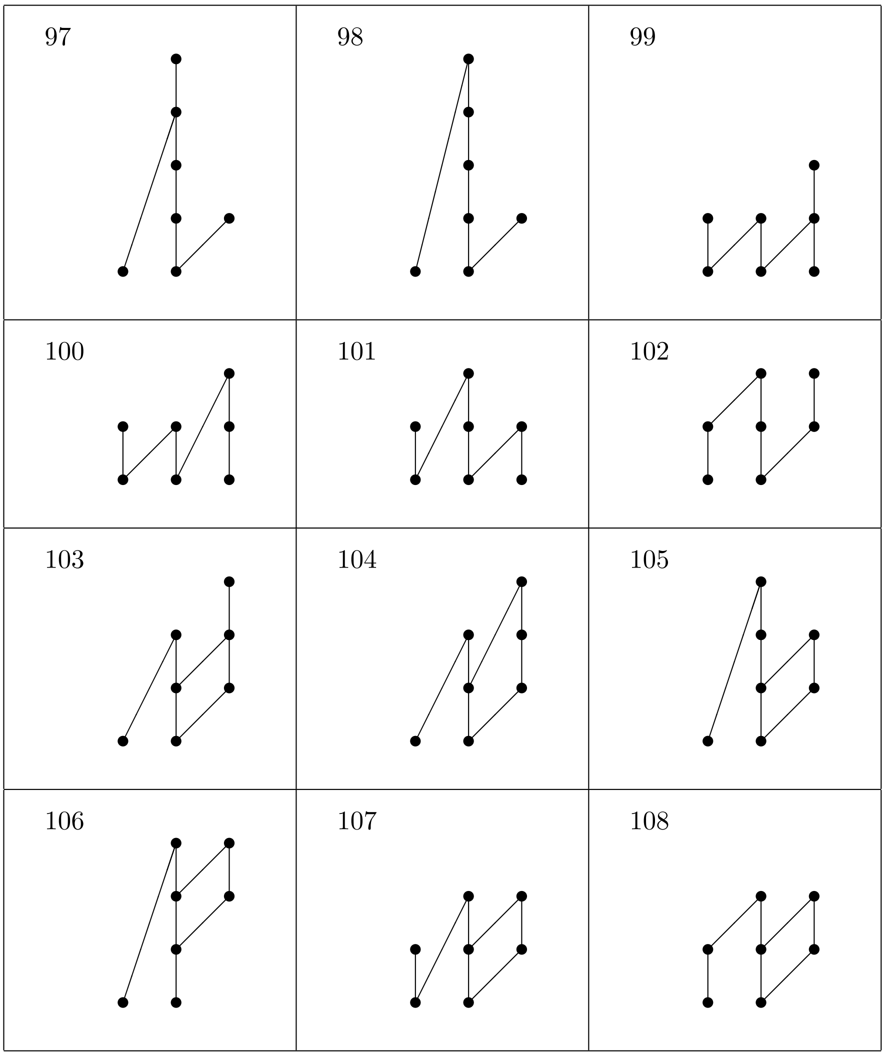
7=6′ 	8 	9=8′ 
10 	11 	12 
13 	14 	15=14′ 
16 	17=16′ 	18 
19=18′ 	20 	21 
22=21′ 	23=21″ 	24 

25=24′ 	26 	27 
28 	29 	30 
31 	32=31′ 	33 
34=33′ 	35=33″ 	36 
37=36′ 	38 	39=38′ 


40
41=40′
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53=52′
54
55
56
57
58
59
60

61 	62 	63 
64 	65 	66 
67 	68 	69 
70=69′ 	71 	72 
73 	74 	75 
76 	77=76′ 	78 


79
80
81
82=81′
83
84=83′
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96

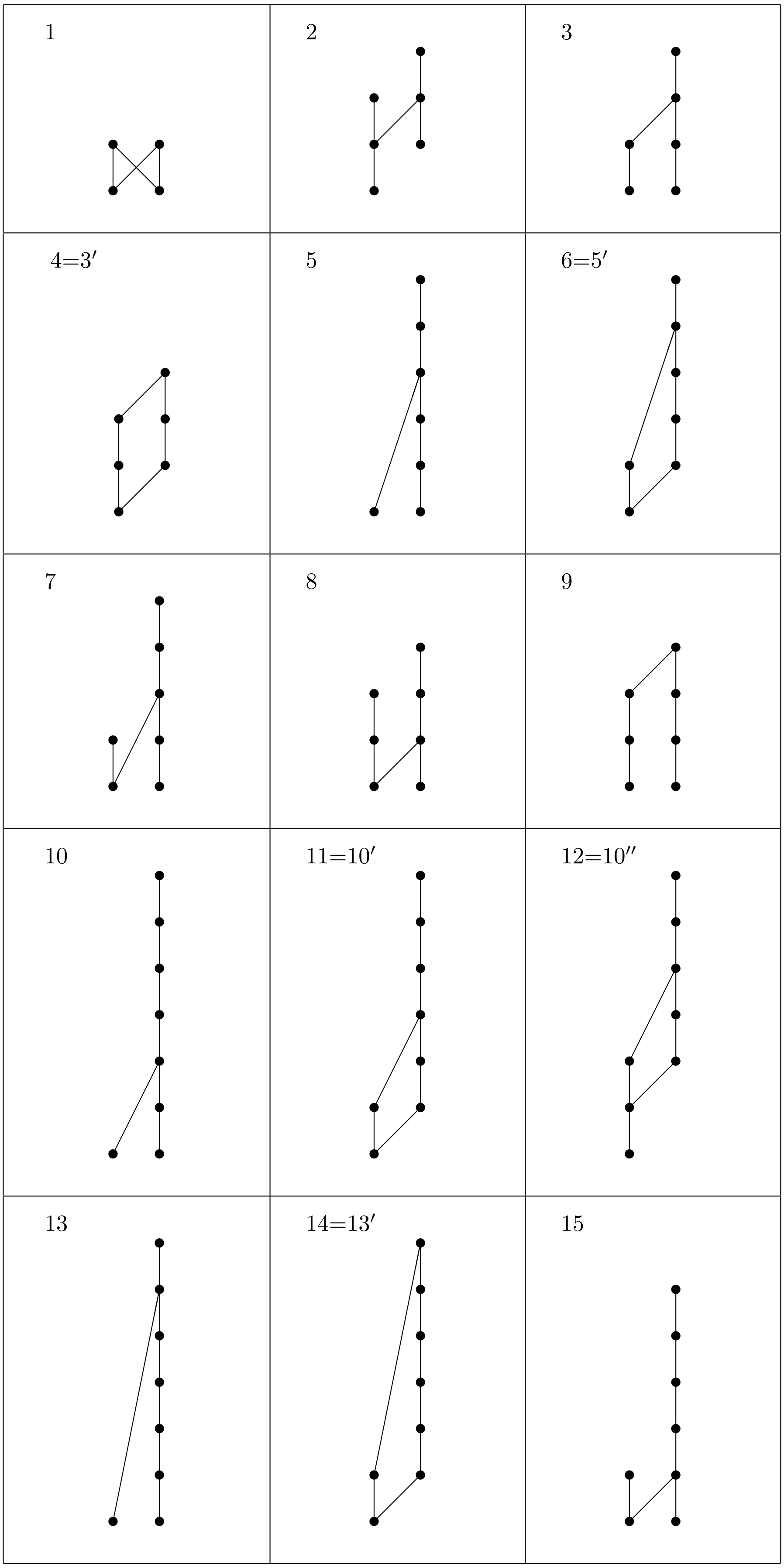


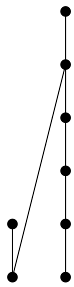
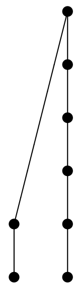
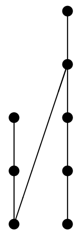
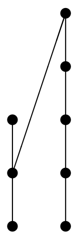
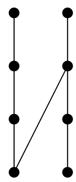
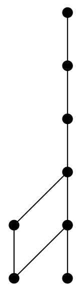
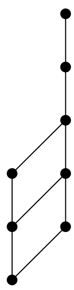
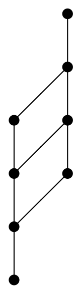
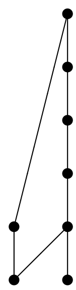
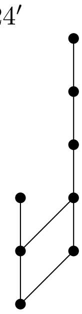
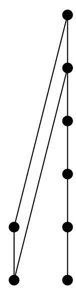
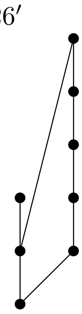
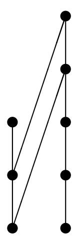
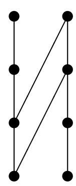
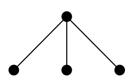
Результати цього підрозділу опубліковані в роботі [9].

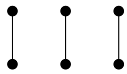
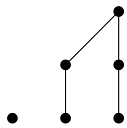
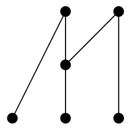
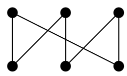
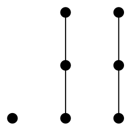
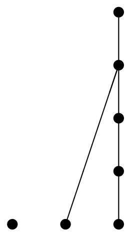
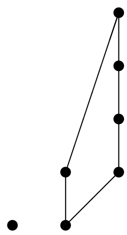
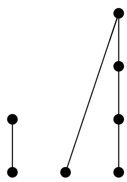
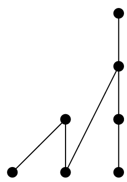
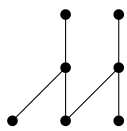
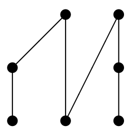
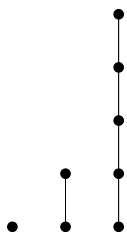
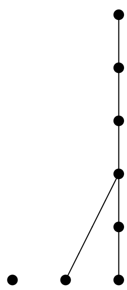
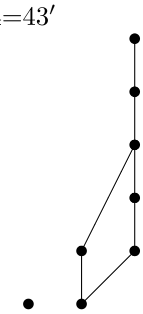
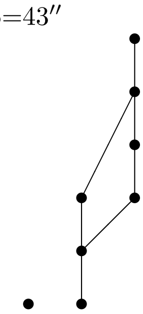
1.9. Класифікація P-критичних частково впорядкованих множин

Ч. в. множину S назвемо *P-критичною*, якщо форма Тітса будь-якої її власної підмножини є додатною, але форма Тітса самої S такою не є.

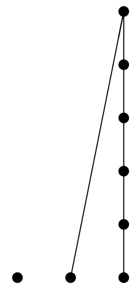
Теорема 1.11. *P-критичні ч.в. множини вичерпуються наступними множинами:*


1
2
3
4=3′
5
6=5′
7
8
9
10
11=10′
12=10″
13
14=13′
15

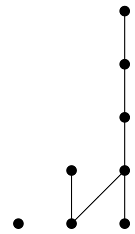
16 	17 	18 
19 	20 	21 
22=21′ 	23=21″ 	24 
25=24′ 	26 	27=26′ 
28 	29 	30 

31 	32 	33 
34 	35 	36 
$37=36'$ 	38 	39 
40 	41 	42 
43 	$44=43'$ 	$45=43''$ 

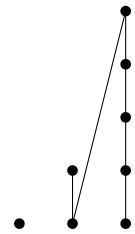
46



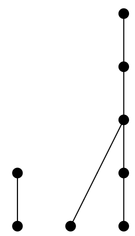
47



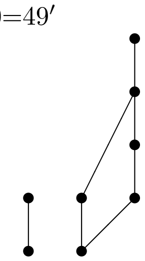
48



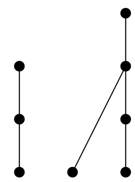
49



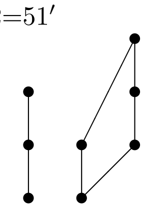
50=49′



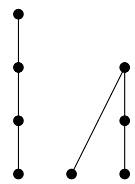
51



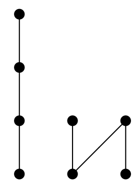
52=51′



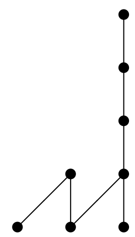
53



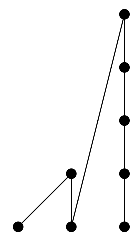
54



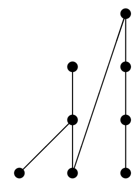
55



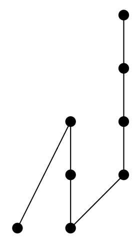
56



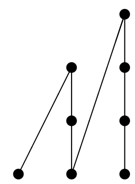
57



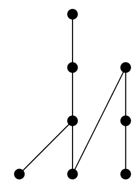
58

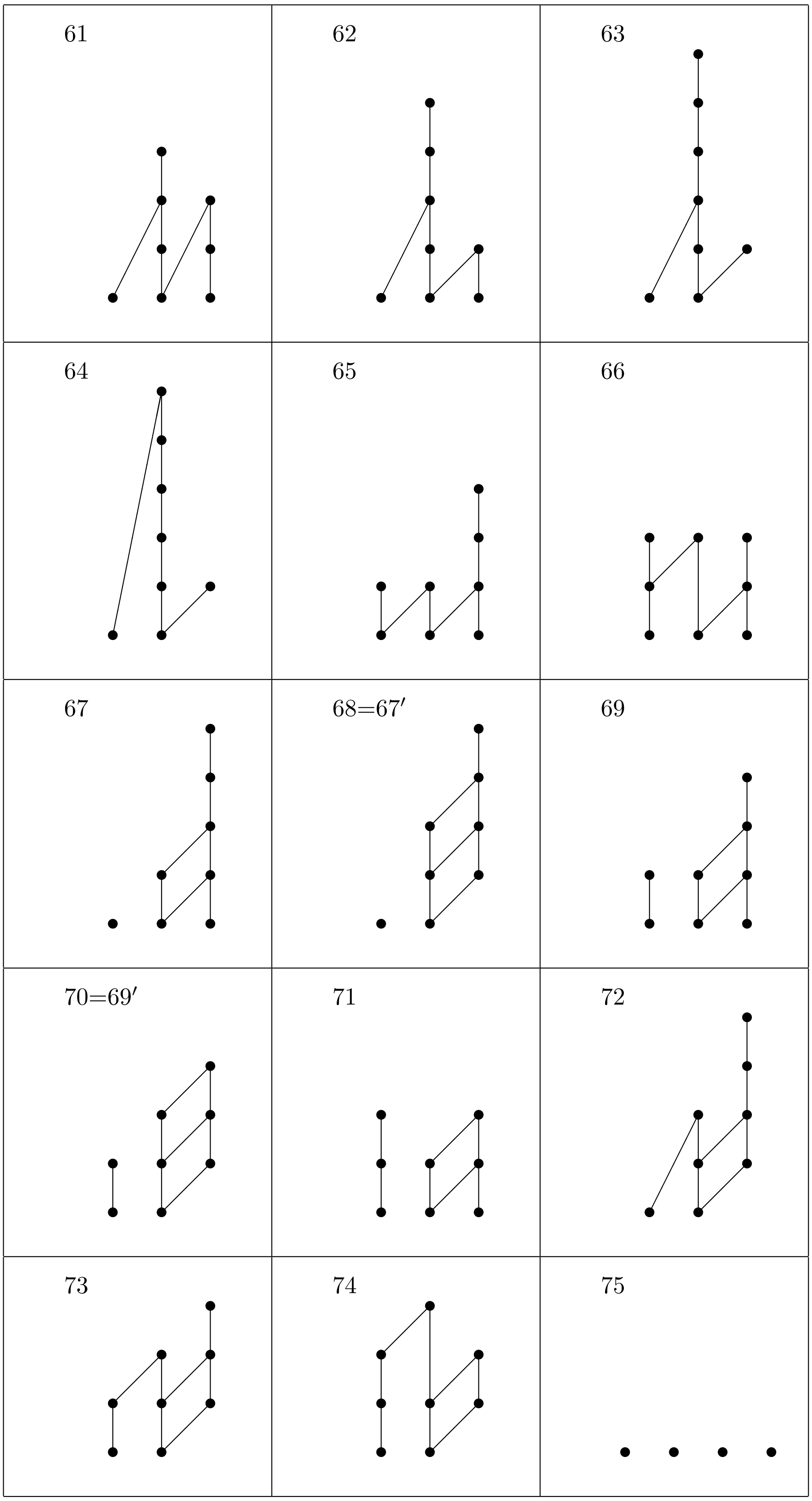


59



60





Результати цього підрозділу опубліковані в роботі [9].

Розділ 2

НОВІ ІДЕЇ ЩОДО ДОДАТНИХ І БЛИЗЬКИХ ДО НИХ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН

На початкових кроках досліджень класів частково впорядкованих (скорочено ч.в.) множин, пов'язаних з їхніми квадратичними формами, основна увага приділялася повній класифікації тих чи інших класів. Основним методом був (і залишається) метод мінімаксної еквівалентності, детально викладений в першому підрозділі (в розвитку цього методу активну участь приймала автор). Інші ідеї також були присутні, але на них, як правило, не фіксувалася увага в такій степені, щоб це призводило до нових застосувань. Про нові ідеї і поняття, які виникли в процесі досліджень, результати яких викладено в цій дисертації, і буде йти мова в цьому розділі. Але спочатку про загальні означення і позначення, які стосуються частково впорядкованих (скорочено ч.в.) множин і які будуть використовуватися протягом всієї дисертації.

2.1. Означення і позначення для ч. в. множин

Протягом всіх розділів розглядаються лише скінченні ч. в. множини без елементів, позначених символом 0. У випадку, коли немає двозначностей, часто замість "ч. в. множина" пишемо просто "множина". Ч. в. множина називається *додатною, невід'ємною* тощо, якщо такою є її квадратична форма Тітса.

Ч. в. множини вважаються непорожніми, хоча в означеннях і формулюваннях тверджень деякі підмножини можуть бути порожніми. Як звичайна множина ч. в. множина S позначається (коли це потрібно) через S_0.

Частковий порядок позначається через $\leq$, або через $\preceq$, коли елементи ч. в. множини занумеровані натуральними числами. Під підмножиною ч. в. множини S завжди розуміємо повну підмножину, тобто з відношенням порядку, який індукується заданим порядком на всій множині. Підмножину $U \subseteq S$ назвемо *нижньою* (відповідно *верхньою*), якщо $x \in U$ кожного разу, коли $x < y$ (відповідно $x > y$) і $y \in U$. і *щільною*, якщо $U = S \setminus (X \cup Y)$ для деякої нижньої підмножини X і деякої верхньої підмножини Y ($X = \varnothing$ чи $T = \varnothing$ не виключається).

Шириною ч. в. множини T називається максимальна кількість її попарно непорівняльних елементів; позначається вона через $w(T)$. *Висотою* $h(T)$ множини T називається найбільша довжина m ланцюга $x_1 < x_2 \ldots < x_m$, де $x \in T$. Ч. в. множина T називається *дуальною* до ч. в. множини S і позначається через S^{op}, якщо $T = S$ як звичайні множини і $x < y$ в T тоді і лише тоді, коли $x > y$ в S.

Об'єднання попарно неперетинних ч. в. множин $S_1, S_2, \ldots S_m$ називається їх *сумою*; якщо елементи різних множин непорівняльні, то сума називається прямою. Ці операції позначаються відповідно символами $+$ і $\coprod$. Ч. в. множина називається *примітивною*, якщо вона є прямою сумою ланцюгів (лінійно впорядкованих множин). А запис $S_1 < S_2$ означатиме, що $x_1 < x_2$ для довільних $x_1 \in S_1$ і $x_2 \in S_2$.

Позначення $T \cong S$ для ч. в. множин означає що T ізоморфна S. Коли множина S є фіксованою простого вигляду, також кажемо, що T має форму S, і під словами "T містить S" розуміємо існування підмножини в T ізоморфної множині S.

Ч. в. множина S часто зображується сагайдаком $Q = (Q_0, Q_1)$, де множина вершин Q_0 дорівнює S_0, а множина ребер Q_1 складається зі стрілок $(x, y) : x \to y$ із сусідніми елементами $x < y$ і y (тобто для яких не існує елемента z, який задовольняє нерівність $x < z < y$). Позначимо цей сагайдак Q через $\overrightarrow{H}(S)$. Під діаграмою Хассе ч. в. множини S ми розуміємо відповідний йому неорієнтований граф $H(S)$. У випадку, коли діаграма Хассе зображується на площині, ребро (x, y) (де, нагадаємо, $x < y$) завжди йде знизу вгору від вершини x до вершини y. Для повного (відносно ребер) підграфа F графа $H(S)$, позначаємо через $F^{\leq}$ відповідну ч. в. підмножину в S; тоді $H(F^{\leq}) = F$.

Для зручності в подальшому будемо нагадувати деякі із означень, вказаних в цьому підрозділі.

2.2. (Min, max)-еквівалентність частково впорядкованих множин

У цьому підрозділі нагадаємо деякі поняття, які визначають основний метод дослідження ч.в. множин (який запропонував у свій час В. М. Бондаренко).

2.2.1. Означення (min, max)-еквівалентності. Нехай S — скінченна частково впорядкована множина. Підмножина X називається *нижньою* (відповідно *верхньою*), якщо $x \in X$ щораз, коли $x < y$ (відповідно $x > y$) і $y \in X$. Запис $x \not\lessgtr y$ буде означати, що елементи x і y непорівняльні. Множину елементів $x \in S$, непорівняльних з фіксованим елементом $a \in S$, будемо позначати $S^{\not\lessgtr}(a)$; для підмножин Y і Z множини S пишемо $Y < Z$, якщо $y < z$ для будь-яких $y \in Y, z \in Z$ (це заздалегідь виконується, коли Y або Z є порожньою). Одноелементні підмножини S ототожнюються із самими елементами.

Для ч.в. множин X і Y пишемо $X =_0 Y$, якщо X і Y рівні як звичайні множини (тобто без розгляду порядків на них). Якщо ж $X =_0 Y$ і при цьому $x < y$ в X тоді і лише тоді, коли $x < y$ в Y, то X і Y називаються *рівними* як ч. в. множини.

Дуальну до S ч. в. множину будемо позначати через S^{op}. Ч. в. множини S і T називаються *антиізоморфними*, якщо S ізоморфно T^{op}.

Поняття (min, max)-еквівалентності ч. в. множин введене в роботі [123]. Нагадаємо його.

Для мінімального (відповідно максимального) елемента $a \in S$ введемо ч. в. множину $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $S_a^{\downarrow}$) наступним чином: це об'єднання (без перетину) підмножин $\{a\}$ і $S \setminus a$ з найменшим частковим порядком, який містить заданий на $S \setminus a$ порядок, і при цьому $a > S^{\asymp}(a)$ (відповідно $a < S^{\asymp}(a)$). Іншими словами, $S_a^{\uparrow} =_0 S$ (відповідно $S_a^{\downarrow} =_0 S$) і відношення часткового порядку задається такими умовами:

a) a — максимальний (відповідно мінімальний) елемент $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $S_a^{\downarrow}$);

b) якщо $x, y \neq a$, то $x < y$ в $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $S_a^{\downarrow}$) тоді і лише тоді, коли $x < y$ в S;

c) $a > x$ в $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $a < x$ $S_a^{\downarrow}$) тоді і лише тоді, коли $a \asymp x$ в S.

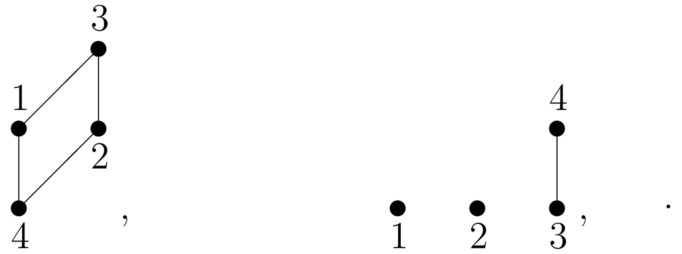
Надалі пишемо $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ замість $(S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow}$ і т. д.

Нехай S і T — ч. в. множини такі, що $S =_0 T$. Ч. в. множину T назвемо (min, max)-*еквівалентною* ч. в. множині S, якщо T дорівнює якійсь ч. в. множині вигляду

$$\overline{S} = S_{x_1 x_2 \ldots x_p}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p} \ (p \geq 0),$$

де $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ і, для кожного $i = 1, \ldots, p$, x_i — мінімальний (відповідно максимальний) елемент $\overline{S}_{i-1} = S_{x_1 x_2 \ldots x_{i-1}}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{i-1}}$, якщо $\varepsilon_i =\uparrow$ (відповідно $\varepsilon_i =\downarrow$); при $p = 0$ вважаємо, що $\overline{S} = S$. Зауважимо, що не вимагається, щоб елементи $x_1 x_2 \ldots x_p$ були різні. Той факт, що введене відношення є відношенням еквівалентності, ми доведемо у наступному параграфі.

Наприклад, якщо за S та T взяти відповідно ч. в. множини



то $T = (S)^{\uparrow\downarrow}_{34}$.

Поняття (min, max)-еквівалентності можна продовжити звичайним чином до поняття (min, max)-ізоморфізма. Саме назвемо ч. в. множини S і S' (min, max)-*ізоморфними*, якщо існує ч. в. множина T, яка (min, max)-еквівалентна S та ізоморфна S'. Замість (min, max)-еквівалентність будемо часто говорити мінімаксна еквівалентність (і аналогічно для ізоморфізму).

Надалі, коли пишеться $S^{\uparrow}_{x}$, $S^{\downarrow}_{y}$, $S^{\uparrow\downarrow}_{xy}$ і т. д., не завжди вказується, що x є мінімальним, y є максимальним і т. д. (тобто завжди передбачається, що виписані вирази подібного типу мають сенс).

2.2.2. Первинні властивості (min, max)-еквівалентних частково впорядкованих множин. Безпосередньо з означення (min, max)-еквівалентних ч. в. множин випливають наступні їхні властивості.

Лема 2.1. a) $(S^{\uparrow}_{a})^{\mathrm{op}} = (S^{\mathrm{op}})^{\downarrow}_{a}$ *для будь-якого мінімального елемента* $a \in S$*;*

b) $S^{\uparrow\downarrow}_{aa} = S$ *для будь-якого мінімального елемента* $a \in S$*;*

b′) $S^{\downarrow\uparrow}_{aa} = S$ *для будь-якого максимального елемента* $a \in S$*;*

c) $S^{\uparrow\uparrow}_{ab} = S^{\uparrow\uparrow}_{ba}$ *для будь-яких (різних) мінімальних елементів* $a, b \in S$*; при цьому в* $S^{\uparrow\uparrow}_{ba}$ *елементи* a *і* b *є максимальними;*

c$'$) $S^{\downarrow\downarrow}_{ab} = S^{\downarrow\downarrow}_{ba}$ *для будь-яких (різних) максимальних елементів* $a, b \in S$; *при цьому в* $S^{\downarrow\downarrow}_{ba}$ *елементи* a *і* b *є мінімальними.*

Наслідок 2.2. *Відношення* $(\min, \max)$*-еквівалентності є відношенням еквівалентності.*

У випадку, коли ч. в. множини S і T (min, max)-еквівалентні, пишеться $S \cong_{(\min,\max)} T$.

Нагадаємо, що квадратична форма Тітса ч. в. множини S — це форма $q_S(z) : \mathbb{Z}^{S\cup 0} \to \mathbb{Z}$, яка задається наступною рівністю:

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i\in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j\in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i\in S} z_i$$

(передбачається, що жоден з елементів S не позначений символом 0); тут $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел і $\mathbb{Z}^{S\cup 0}$ множина векторів $z = (z_i)$, де $z_i \in \mathbb{Z}$ і $i \in S \cup 0$.

Основною мотивацією введення поняття "(min, max)-еквівалентних ч. в. множин"є наступне твердження із роботи [123].

Твердження 2.3. *Нехай* S *і* T — (min, max)*-еквівалентні ч. в. множини. Тоді їхні форми Тітса* $\mathbb{Z}$*-еквівалентні.*

2.2.3. Min-еквівалентні частково впорядковані множини та їх властивості. Будемо тепер розглядати ч. в. множини вигляду $\overline{S} = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1x_2\ldots x_p}$; як і в загальному випадку, не вимагається, щоб елементи $x_1x_2\ldots x_p$ були різні. Якщо ч. в. множина T дорівнює якійсь ч. в. множині вигляду $\overline{S}$ ($p \geq 0$), то будемо говорити, що T є min-еквівалентною ч. в. множині S і писати $T \cong_{\min} S$.

Послідовність

$$\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p), \quad 0 \leq p < \infty,$$

елементів $x_i \in S$ назвемо min-*допустимою*, якщо вираз $\overline{S} = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1x_2\ldots x_p}$ має сенс. Число p назвемо *довжиною* α і позначимо $d(\alpha)$. У цьому випадку також пишеться $\overline{S} = S^{\uparrow}_{\alpha}$. Помітимо, що порожня послідовність α_0 (довжини 0) є min-допустимою. Множина всіх min-допустимих послідовностей елементів з S позначимо $\mathcal{P}(S)$.

Для послідовності $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathcal{P}(S)$ і $0 \leq i \leq p$ покладемо $\alpha_{(i)} = (x_1, x_2, \dots, x_i)$ та $\alpha^{(i)} = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_p)$. Очевидно, що $\alpha_{(i)} \in \mathcal{P}(S)$ і $\alpha^{(i)} \in \mathcal{P}(S^{\uparrow}_{\alpha_{(i-1)}})$. Покладемо, далі,

$$[\alpha]_S = \{x \in S \,|\, x = x_i \ \text{ для деякого } \ i\}.$$

Кратність входження $a \in S$ в $\alpha \in \mathcal{P}(S)$ позначаємо через $m_\alpha(a)$. Іншими словами, $m_\alpha(a)$ дорівнює числу $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ таких, що $x_i = a$.

Лема 2.4. *Якщо $\alpha \in \mathcal{P}(S)$, то підмножина $[\alpha]_S \subseteq S$ є нижньою.*

Множину всіх послідовностей

$$\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathcal{P}(S)$$

таких, що $m_\alpha(x) \leq k$ для довільного $x \in S$, позначимо через $\mathcal{P}_k(S)$. Зокрема, $\mathcal{P}_1(S)$ — це множина всіх min-допустимих послідовностей без повторень (що містить, між іншим, послідовність α_0). Помітимо, що $\mathcal{P}_k(S) \subseteq \mathcal{P}_s(S)$, якщо $k < s$.

Сформулюємо тепер деякі твердження, які пов'язані з властивостями послідовностей з $\mathcal{P}(S)$ і які знадобляться надалі. Порядок ч. в. множини S позначаємо через n.

Лема 2.5. *Нехай S_1 позначає множину всіх мінімальних елементів в S і (індуковано) $S_i, i > 1$, — множина мінімальних елементів в $S \setminus (\cup_{j=1}^{i-1} S_j)$ (очевидно, що $\cup_{i=1}^{r} S_i = S$, де r — найбільше i таке, що $S_i \neq \varnothing$); запис $h(x) = i$ для елемента $x \in S$ буде означати, що $x \in S_i$. Тоді будь-яка послідовність без повторень $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ така, що $h(x_1) \leq h(x_2) \leq \ldots \leq h(x_n)$, належить $\mathcal{P}(S)$ (а значить і $\mathcal{P}_1(S)$).*

Наслідок 2.6. *Нехай X — підмножина S. В $\mathcal{P}_1(S)$ існує послідовність α така, що $[\alpha] = X$, тоді і лише тоді, коли підмножина X нижня.*

Твердження 2.7. *Нехай $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ послідовність із $\mathcal{P}_1(S)$ (тоді $m \leq n$) і нехай $a, b \in S$. Тоді $a < b$ в $\overline{S} = S_\alpha^\uparrow$ в тому і лише в тому випадку, коли виконується одна з наступних умов:*

a) *$a < b$ в S і або $a, b \in [\alpha]_S$, або $a, b \notin [\alpha]_S$;*

b) *$a \lessgtr b$ в S і $b \in [\alpha]_S, a \notin [\alpha]_S$.*

Наслідок 2.8. *Якщо $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$ і $[\alpha]_S = S$, то $S_\alpha^\uparrow = S$.*

Наслідок 2.9. *Якщо $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$, то $[\alpha]_{S_\alpha^\uparrow}$ — верхня ч. в. підмножина в $S_\alpha^\uparrow$, рівна $[\alpha]_S$.*

Наслідок 2.10. *Якщо $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_1(S)$, причому β утворюється з α перестановкою її членів (або, іншими словами, $[\alpha]_S = [\beta]_S$), то $S_\alpha^\uparrow = S_\beta^\uparrow$.*

Через $S_X^\uparrow$, де X — нижня підмножина S, будемо позначати ч. в. множину $S_\alpha^\uparrow$, де α — послідовність із $\mathcal{P}_1(S)$ така, що $[\alpha] = X$. Існування такого α випливає з леми 2.5, а незалежність введеної ч. в. множини від вибору α — з наслідку 2.10. Із сказаного випливає, що при обчисленні порядку на $S_X^\uparrow$ можна не фіксувати відповідну послідовність, а відразу скористатися умовами *a*) і *b*) твердження 2.7. Зокрема, $S_S^\uparrow = S$.

Лема 2.11. *Нехай X і Y — нижні підмножини S такі, що $x \lessgtr y$ для будь-яких $x \in X, y \in Y$. Тоді $(S_X^\uparrow)_Y^\uparrow = (S_Y^\uparrow)_X^\uparrow = S_{X \cup Y}^\uparrow$.*

З вищесказаного випливає наступне твердження.

Твердження 2.12. *Наступні умови еквівалентні:*

a) *T min-еквівалентна S;*

b) *T (min, max)-еквівалентна S.*

Звідси випливає, що відношення min-еквівалентності є відношенням еквівалентності.

Природно можна ввести min-ізоморфізм ч. в. множин (це робиться, виходячи з min-еквівалентності, у такий же спосіб, як раніше визначався (min, max)-ізоморфізм, виходячи з (min, max)-еквівалентності).

Розглянуті вище твердження про послідовності з $\mathcal{P}_1(S)$ можна узагальнити на послідовності з $\mathcal{P}_2(S)$.

Для $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{P}_2(S)$ позначимо через $[\alpha]_S^2$ підмножину в $[\alpha]_S$, що складається з тих елементів S, які зустрічаються в послідовності α два рази.

Твердження 2.13. *Нехай $\alpha \in \mathcal{P}_2(S)$ і нехай $a, b \in S$. Тоді $a < b$ в $\overline{S} = S_\alpha^\uparrow$ тоді і лише тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

a) *$a < b$ в S і $m_\alpha(a) = m_\alpha(b)$;*

b) *$b < a$ в S і $m_\alpha(a) = 0, m_\alpha(b) = 2$;*

c) *$a \not\lessgtr b$ в S і $m_\alpha(b) = m_\alpha(a) + 1$.*

Наслідок 2.14. *Якщо $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_2(S)$, причому β утворюється із α перестановкою її членів (або, іншими словами, $[\alpha]_S = [\beta]_S$ і $[\alpha]_S^2 = [\beta]_S^2$), то $S_\alpha^\uparrow = S_\beta^\uparrow$.*

Лема 2.15. *Якщо $\alpha \in \mathcal{P}_2(S)$, то $[\alpha]_S^2$ є нижньою підмножиною в $[\alpha]_S$ (а значить і в S) і $[\alpha]_S^2 < S \setminus [\alpha]_S$.*

Доведення. Припустимо, що $[\alpha]_S^2$ не є нижньою. Тоді існують елементи $b \in [\alpha]_S^2$ і $a \notin [\alpha]_S^2$ такі, що $a < b$; нехай i та $j > i$ позначають такі числа, що $x_i = x_j = b$. Оскільки підмножина $[\alpha]_S$ є нижньою і $[\alpha]_S^2 \subseteq [\alpha]_S$, то $a \in [\alpha]_S$. Тоді $a = x_s$ для деякого s, і оскільки елемент b є мінімальним в $S_{\alpha_{(i-1)}}^\uparrow$, то $s < i$, а значить $a \not\lessgtr b$ в $S_{\alpha_{(i-1)}}^\uparrow$. Отже, $a < b$ в $S_{\alpha_{(i)}}^\uparrow$, а значить і в $S_{\alpha_{(j-1)}}^\uparrow$, а тоді елемент b не є мінімальним в $S_{\alpha_{(j-1)}}^\uparrow$; значить α не є min-допустимою, тому приходимо до протиріччя. Далі, припустимо, що зазначена в умові нерівність не виконується. Тоді існують $a \in [\alpha]_S^2$ і $b \in$

$S \setminus [\alpha]_S$ такі, що $a \not\lessgtr b$ (оскільки $[\alpha]_S^2$ — нижня підмножина, то випадок $b < a$ неможливий). Нехай $a = x_i = x_j$, де $i < j$. Тому що $b \notin [\alpha]_S$, то $a \not\lessgtr b$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(i-1)}$, а тому $b < a$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(i)}$; по тій же причині $b < a$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(j-1)}$ і значить в цій ч. в. множині $x_j = a$ не може бути мінімальним елементом; знову прийшли до протиріччя. $\square$

Будемо писати (аналогічно з послідовностями) $S^{\uparrow\uparrow}_{YX}$ замість $(S^{\uparrow}_{Y})^{\uparrow}_{X}$.

Лема 2.16. *Нехай Y — нижня підмножина S, а X — нижня підмножина Y, причому $X < S \setminus Y$. Тоді вираз $S^{\uparrow\uparrow}_{YX} = (S^{\uparrow}_{Y})^{\uparrow}_{X}$ коректний.*

Твердження 2.17. *Нехай X і Y — підмножини S. В $\mathcal{P}_2(S)$ існує послідовність α така, що $[\alpha]_S = Y$ і $[\alpha]_S^2 = X$, тоді і лише тоді, коли Y — нижня підмножина S, X — нижня підмножина Y і при цьому $X < S \setminus Y$.*

Зауважимо, що можна вивчати ч. в. множини вигляду $\overline{S} = S^{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{x_1 x_2 \ldots x_p}$. Для них легко переформулювати все, що було сказано вище для ч. в. множин вигляду $\overline{S} = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1 x_2 \ldots x_p}$ (зокрема, ввести поняття max-еквівалентності і max-ізоморфізму ч. в. множин). Відповідні означення і доведення розглядаються аналогічним чином; їх можна також одержати з вищенаведених переходом до дуальної ч. в. множини з урахуванням твердження а) леми 2.1 та випливає з рівності $S^{\uparrow\uparrow}_{XS\setminus X} = S$.

Лема 2.18. *Нехай X — нижня підмножина S. Тоді $S^{\uparrow}_{X} = S^{\downarrow}_{S\setminus X}$.*

В якості прикладів приведемо ще деякі корисні твердження про зв'язок між min- та max-еквівалентністю.

Нехай Y та X задовольняють умовам леми 2.16, тобто Y — нижня підмножина S, X — нижня підмножина Y та при цьому $X < S \setminus Y$. Оскільки підмножина Y однозначно задається підмножиною $Z = S \setminus Y$, то замість Y та X можна розглядати підмножини Z та X такі, що Z — верхня підмножина S, X — нижня підмножина Y, причому $Z \cap X = \varnothing$

та $X < Z$. При цьому ч. в. множина $S^{\uparrow\uparrow}_{YX}$ обчислюється в нових термінах наступним чином.

Лема 2.19. $S^{\uparrow\uparrow}_{YX} = S^{\uparrow\downarrow}_{XS\setminus Y} = S^{\downarrow\uparrow}_{S\setminus YX}$.

Лема 2.20. *Нехай X — верхня підмножина ч.в. множини S. Тоді*
(a) $S^{\downarrow}_{X} = S^{\uparrow}_{S\setminus X}$;
(b) $(S^{\downarrow}_{X})^{\mathrm{op}} = (S^{\mathrm{op}})^{\uparrow}_{X^{\mathrm{op}}}$.

Наслідок 2.21. *Якщо множина S самодуальна, тоді для нижньої підмножини Y, $S^{\uparrow}_{Y} = (S^{\uparrow}_{S\setminus Y^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}}$.*

Дійсно, $X = Y^{\mathrm{op}}$ верхня підмножина ч.в. множини $S^{\mathrm{op}} = S$ і з рівності (b) маємо $(S^{\downarrow}_{Y^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}} = S^{\uparrow}_{Y}$, звідки за рівністю (a) маємо $S^{\uparrow}_{B} = (S^{\uparrow}_{S\setminus B^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}}$.

Важливим є наступне твердження.

Твердження 2.22. *Нехай $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{P}(S)$ і X — підмножина S. Позначимо через α_X підпослідовність α, яка складається із всіх $x_i \in X$. Тоді $\alpha_X \in \mathcal{P}(X)$ і $X^{\uparrow}_{\alpha_X}$ — підмножина $S^{\uparrow}_{\alpha}$.*

2.2.4. Алгоритм побудови всіх частково впорядкованих множин, min-еквівалентних заданій множині. У цій частині розділу вкажемо алгоритм, який дозволяє виписати всі ч. в. множини, min-еквівалентні заданій ч. в. множині.

Спочатку розглянемо деякі додаткові твердження про властивості min-еквівалентних ч. в. множин.

Нехай S — довільна ч. в. множина і $n = |S|$.

Лема 2.23. *Нехай α — послідовність із $\mathcal{P}(S)$ і при цьому $[\alpha]_S = S$. Тоді існує послідовність $\beta \in \mathcal{P}(S)$ довжини $d(\beta) = d(\alpha) - n$ така, що $S^{\uparrow}_{\beta} = S^{\uparrow}_{\alpha}$.*

Наслідок 2.24. *Нехай $T \cong_{\min} S$. Тоді існує послідовність $\gamma \in \mathcal{P}_2(S)$ така, що $T = S^{\uparrow}_{\gamma}$.*

За наслідком 2.24 для опису всіх ч. в. множин, min-еквівалентних фіксованій ч. в. множині S, досить обмежитися послідовностями з $\mathcal{P}_2$. Якщо врахувати викладене в 2.2.3, то такий опис можна проводити за наступною схемою:

I. Описати всі нижні підмножини $X \neq S$ в S і для кожної з них побудувати ч. в. множину $S_X^{\uparrow}$.

II. Описати всі пари (Y, X), що складаються із власної нижньої підмножини Y в S і непорожньої нижньої підмножини X в Y такої, що $X < S \setminus Y$; для кожної такої пари побудувати ч. в. множину $(S_Y^{\uparrow})_X^{\uparrow}$.

III. Серед отриманих в I і II ч. в. множин вибрати по одній з кожного класу ізоморфних множин.

Назвемо дві вказані в I підмножини X і X' *сильно ізоморфними*, якщо існує автоморфізм $\varphi : S \to S$ такий, що $\varphi(X) = X'$ (як ч. в. підмножини). Аналогічно, дві вказані в II пари (Y, X) і (Y', X') назвемо *сильно ізоморфними*, якщо існує автоморфізм $\varphi : S \to S$ такий, що $\varphi(Y) = Y'$ і $\varphi(X) = X'$. Очевидно, що підмножини в I і пари підмножин в II досить описувати з точністю до сильного ізоморфізму.

Результати цього підрозділу опубліковані в роботі [9] (вони входили в кандидатську дисертацію автора, а результатами цієї дисертації не вважаються).

2.3. Мінімаксні системи твірних

Викладений в попередньому підрозділі матеріал з перших же робіт став для здобувача основним методом дослідження. Він дозволяє описувати з точністю до ізоморфізму ч.в. множини, які належать різним, часто досить складним, класам (див., зокрема, роботу [9]). На основі досвіду, пов'язаного з такими дослідженнями, виникли нові поняття [124]. Про одне з них буде йти мова в цьому підрозділі.

Нехай $\mathcal{K}$ клас (скінченних) ч.в. множин, замкнутий відносно ізоморфізму і дуальності (або, що те саме, відносно ізоморфізму і антиізоморфізму). Нехай далі $U = \{U_i\}$ — фіксована множина ч.в. множин із цього класу $U_i \in \mathcal{K}$, де i пробігає (скінченну або нескінченну) множину I. Множина U називається *мінімаксною системою твірних* для класу $\mathcal{K}$, якщо будь-яка множина X із цього класу мінімаксно ізоморфна ч.в. множині U_i для деякого $i \in I$. Природним чином визначається мінімальна мінімаксна система твірних. Система твірних U називається *самодуальною*, якщо самодуальними є всі твірні U_i. Якщо відома така система U, класифікацію відповідних множин можна отримати застосуванням вказаного вище алгоритму до всіх твірних U_i.

Приклад. Із теореми 2 [9] випливає, що мінімаксною системою твірних для всіх P-критичних ч.в. множин є множини Клейнера.

У цьому і в наступних розділах (в процесі різних класифікацій) мінімаксні системи твірних будуть вказані для багатьох класів ч.в. множин.

Деяка модифікація таких систем твірних (яка також вказана в [124]) приведена в розділі 3.

2.4. Явні та неявні класифікації

Розглянемо спочатку приклад явної класифікації.

У роботі [1], присвяченій зображенням сагайдаків, П. Габріель показав, що (скінченний) сагайдак має скінченний зображувальний тип (тобто скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень) тоді і лише тоді, коли його квадратична форма Тітса є додатною. На мові самих сагайдаків це означає, що відповідні неорієнтовані графи всіх її зв'язних компонент є схемами Динкіна (з однократними зв'язками). Незважаючи на те, що схем Динкіна нескінченна кількість, всі вони добре відомі (див.

теорему 1.3). Отже, в даному випадку ми маємо явний опис сагайдаків з додатною квадратичною формою Тітса.

Ю. А. Дрозд [6] довів, що (скінченна) ч. в. множина має скінченний зображувальний тип над полем тоді і лише тоді, коли її квадратична форма Тітса є слабко додатною (тобто додатною на множині векторів з невід'ємними координатами). На мові самих ч. в. множин це означає, що множина не містить п'яти підмножин спеціального вигляду, вказаних в [7] і названих критичними (див. теорему 1.6). Отже, ці критичні множини є неявним описом ч.в. множин зі слабко додатною квадратичною формою Тітса. Явний опис не отримано. Критичних ч.в. множин "настільки мало", що "більшість" множин мають не слабко додатну квадратичну форму Тітса.

Критичних ч.в. множин відносно додатності квадратичної форми Тітса (які називаються P-критичними) вже набагато більше, а саме 75, з точністю до ізоморфізму і дуальності. І тому не дивно, що всі множини з додатною формою Тітса можна явно описати. Див. у зв'язку з цим Вступ і підрозділи 1.8 і 1.9 попереднього розділу.

У наступних розділах дисертації зустрічається як неявний опис ч.в. множин (а саме критичних множин відносно невід'ємності квадратичної форми Тітса, названих NP-критичними), так і явний (майже додатних множин і множин, мінімаксно ізоморфних надсуперкритичним).

2.5. Модифікації

Коли вже отримана повна класифікація ч.в. множин, що належать досить великому класу, навіть незначна її модифікація може бути корисною при застосуваннях чи навіть підказати деякі нові твердження. Приклади таких модифікацій приводяться нижче в підрозділі про модифікації описів серійних і несерійних додатних ч.в. множин.

Найбільш ефективними модифікаціями загальних описів ч.в. множин деякого класу (замкнутого відносно ізоморфізмів) є виділення підкласів мінімаксно ізоморфних множин. Це дозволяє сформулювати нові твердження, які використовуються в тих чи інших застосуваннях. Виділення вказаних класів здійснюється по наступній схемі: із доведення загальної класифікації за допомогою застосування вказаного в кінці підрозділу 2.2 алгоритму (який застосовується до деякої фіксованої мінімаксної системи твірних) по черзі виділяються множини, які відповідають конкретним твірним.

За приклад візьмемо опис P-критичних множин (див. підрозділ 1.9). Згідно викладеного в підрозділі 2.3 канонічною мінімаксною системою твірних для такого класу множин є множина всіх множин Клейнера (по одному представнику із кожного класу ізоморфізму).

У кожному з випадків ми спочатку виписуємо відповідні ч.в. множини в теоретико-множинній формі (вказуючи в дужках відповідну множину із загальної класифікації), а потім для наглядності виписуємо їх діаграми Хассе.

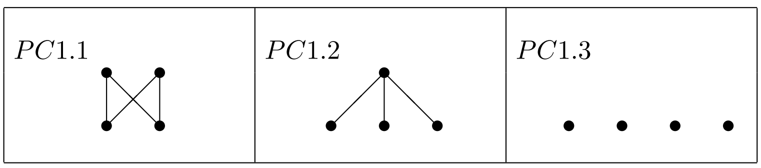
У випадку, коли ч.в. множина X мінімаксно ізоморфна ч.в. множині P, будемо скорочено говорити, що X має MM-тип P.

Теорема 2.25. *P-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{K}_1$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 3 множинами:*

1) $PC1.1(1) = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 2 \prec 3, 2 \prec 4\}$;

2) $PC1.2(30) = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 4 \prec 3\}$;

3) $PC1.3(75) = \{1, 2, 3, 4\}$.



Теорема 2.26. *P-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{K}_2$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 7 множинами:*

1) $PC2.1(3) = \{1 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6\}$;

2) $PC2.2(2) = \{1 \prec 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6\}$;

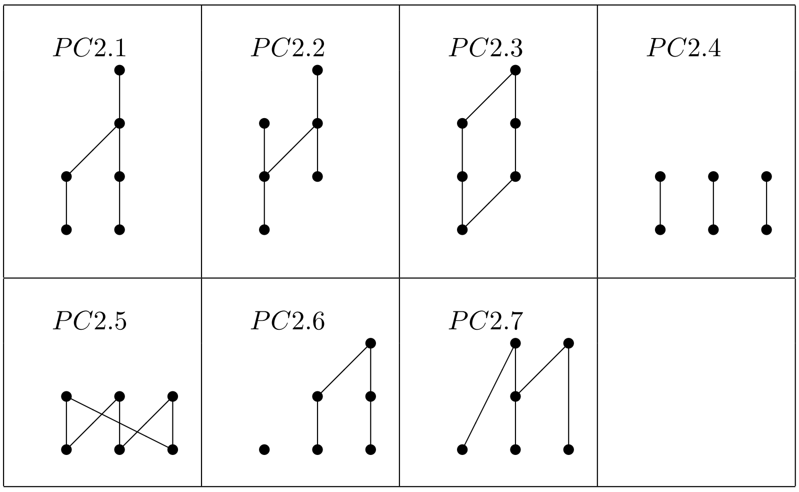
3) $PC2.3(4) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 1 \prec 4 \prec 5 \prec 6\}$;

4) $PC2.4(31) = \{1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6\}$;

5) $PC2.5(34) = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 1, 5 \prec 6\}$.

6) $PC2.6(32) = \{1, 2 \prec 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6\}$;

7) $PC2.7(33) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6\}$.



Теорема 2.27. *P-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{K}_3$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 12 множинами:*

1) $PC3.1(8) = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

2) $PC3.2(9) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

3) $PC3.3(7) = \{1 \prec 2, 1 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

4) $PC3.4(5) = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

5) $PC3.5(6) = \{1 \prec 2 \prec 6, 1 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

6) $PC3.6(35) = \{1, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7\}$;

7) $PC3.7(40) = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7\}$;

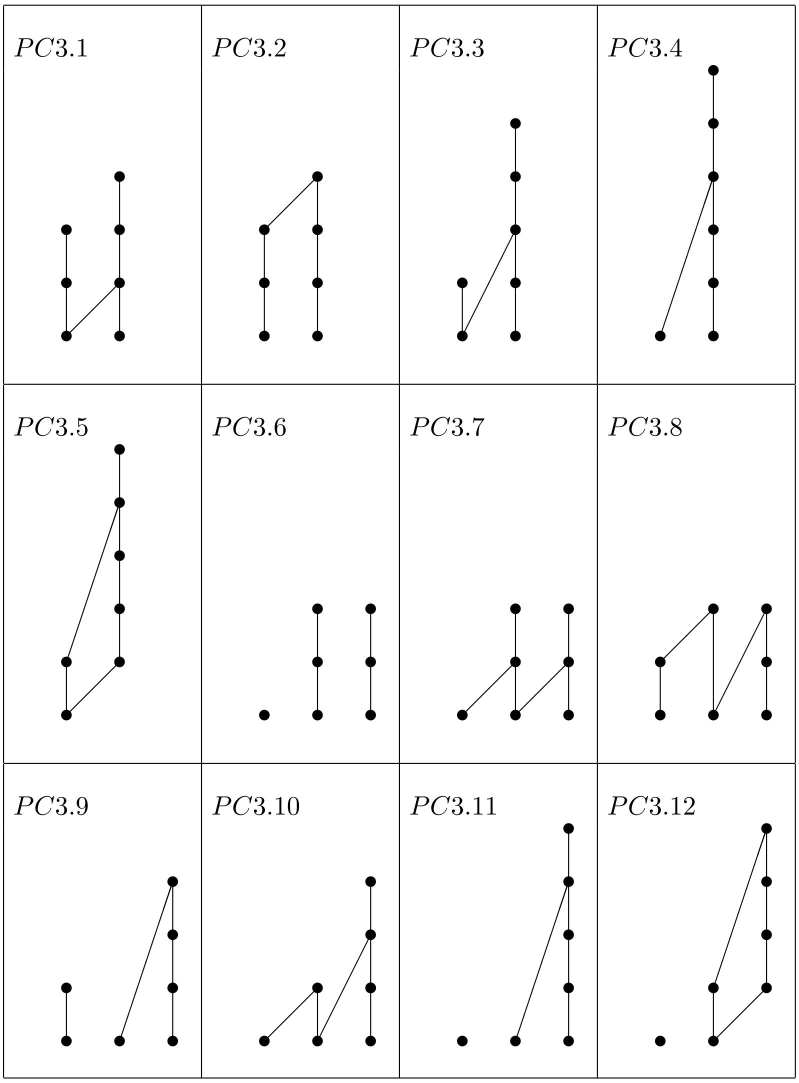
8) $PC3.8(41) = \{1 \prec 2 \prec 4, 2 \prec 3, 2 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7\}$;

9) $PC3.9(38) = \{1 \prec 2, 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

10) $PC3.10(39) = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

11) $PC3.11(36) = \{1, 2 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

12) $PC3.12(37) = \{1, 2 \prec 3 \prec 7, 2 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$.



Теорема 2.28. *P-критичні ч.в. множини MM-типу* $\mathcal{K}_4$ *вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 25 множинами:*

1) $PC4.1(20) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 1 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

2) $PC4.2(18) = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

3) $PC4.3(19) = \{1 \prec 2 \prec 3, 2 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

4) $PC4.4(15) = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

5) $PC4.5(16) = \{1 \prec 2, 1 \prec 7, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

6) $PC4.6(17) = \{1 \prec 2 \prec 8, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

7) $PC4.7(10) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

8) $PC4.8(13) = \{1 \prec 7, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

9) $PC4.9(11) = \{1 \prec 2 \prec 5, 1 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

10) $PC4.10(14) = \{1 \prec 2 \prec 8, 1 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

11) $PC4.11(12) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 2 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

12) $PC4.12(51) = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

13) $PC4.13(53) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

14) $PC4.14(52) = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

15) $PC4.15(57) = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

16) $PC4.16(60) = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8\}$.

17) $PC4.17(42) = \{1, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

18) $PC4.18(49) = \{1 \prec 2, 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

19) $PC4.19(50) = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 7, 3 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

20) $PC4.20(55) = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

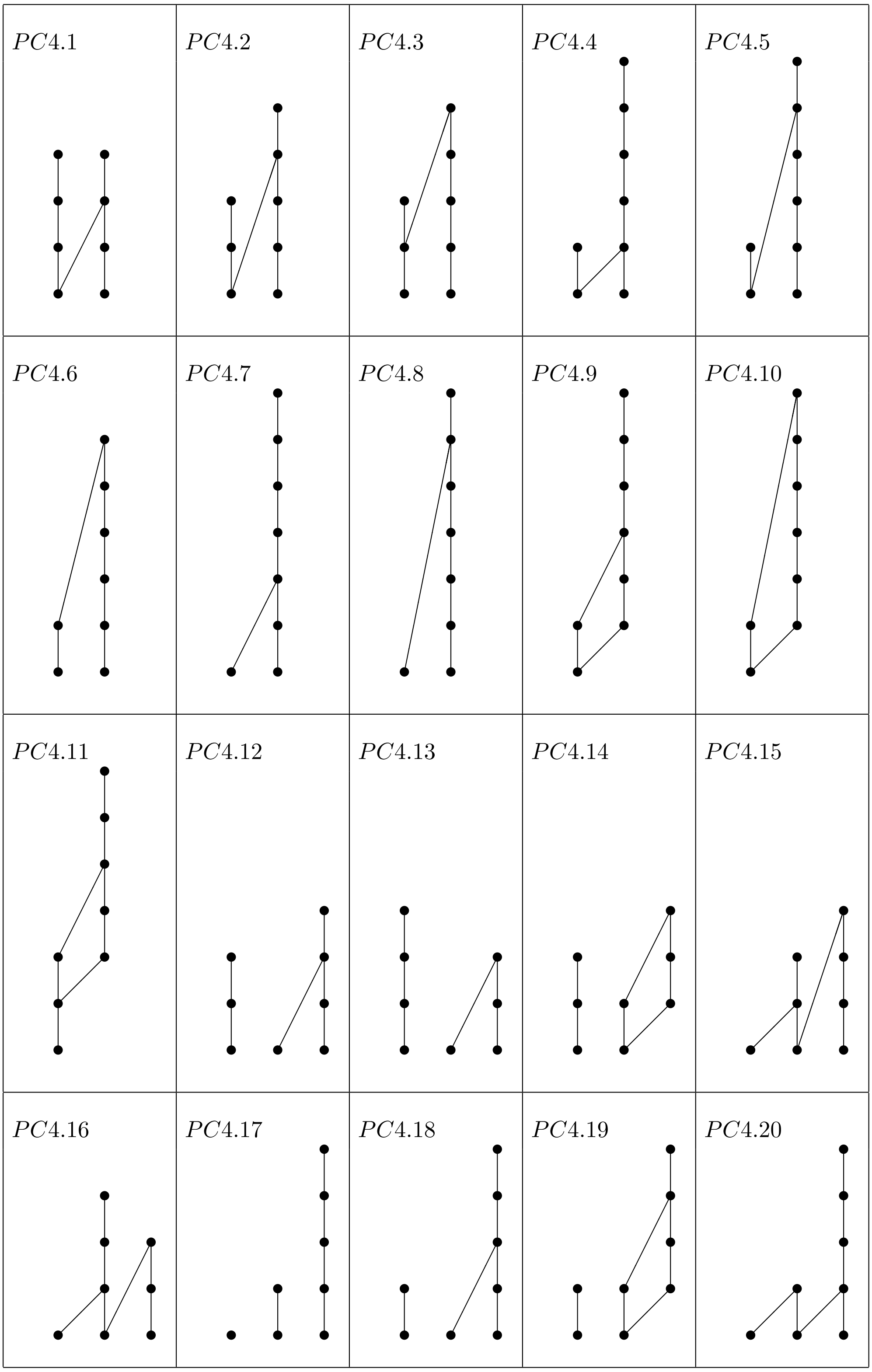
21) $PC4.21(56) = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

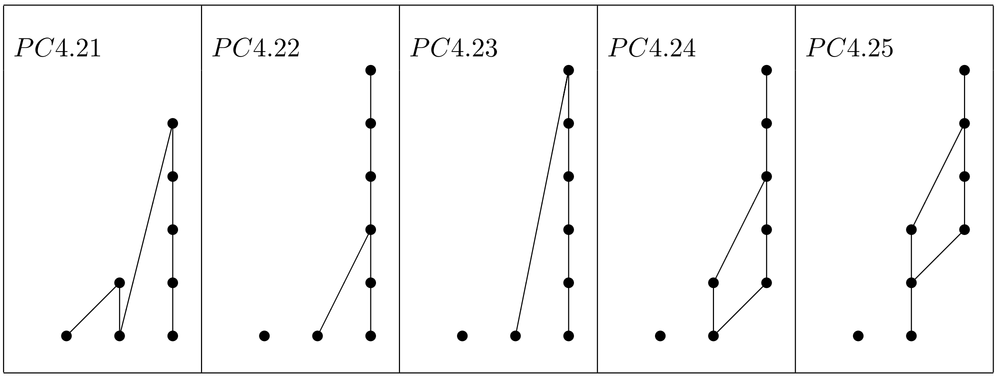
22) $PC4.22(43) = \{1, 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

23) $PC4.23(46) = \{1, 2 \prec 8, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

24) $PC4.24(44) = \{1, 2 \prec 3 \prec 6, 2 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

25) $PC4.25(45) = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 3 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$.


$PC4.1$
$PC4.2$
$PC4.3$
$PC4.4$
$PC4.5$
$PC4.6$
$PC4.7$
$PC4.8$
$PC4.9$
$PC4.10$
$PC4.11$
$PC4.12$
$PC4.13$
$PC4.14$
$PC4.15$
$PC4.16$
$PC4.17$
$PC4.18$
$PC4.19$
$PC4.20$



Теорема 2.29. *P-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{K}_5$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 28 множинами:*

1) $PC5.1(29) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 1 \prec 7, 2 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

2) $PC5.2(28) = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 7, 2 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

3) $PC5.3(21) = \{1 \prec 2 \prec 5, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

4) $PC5.4(24) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 1 \prec 6, 2 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

5) $PC5.5(26) = \{1 \prec 2 \prec 8, 1 \prec 7, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

6) $PC5.6(27^{op}) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 1 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

7) $PC5.7(25^{op}) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

8) $PC5.8(22) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 2 \prec 5, 1 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

9) $PC5.9(23) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 3 \prec 6, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

10) $PC5.10(71) = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

11) $PC5.11(66) = \{1 \prec 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 5, 4 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

12) $PC5.12(54) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6, 5 \prec 8, 7 \prec 8\}$;

13) $PC5.13(69) = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 7, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

14) $PC5.14(59) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

15) $PC5.15(61) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

16) $PC5.16(65) = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

17) $PC5.17(70) = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 7, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

18) $PC5.18(73) = \{1 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 4 \prec 7, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

19) $PC5.19(74) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6, 5 \prec 8, 4 \prec 7 \prec 8\}$;

20) $PC5.20(47) = \{1, 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

21) $PC5.21(48) = \{1, 2 \prec 3, 2 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

22) $PC5.22(67) = \{1, 2 \prec 3 \prec 6, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

23) $PC5.23(58) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

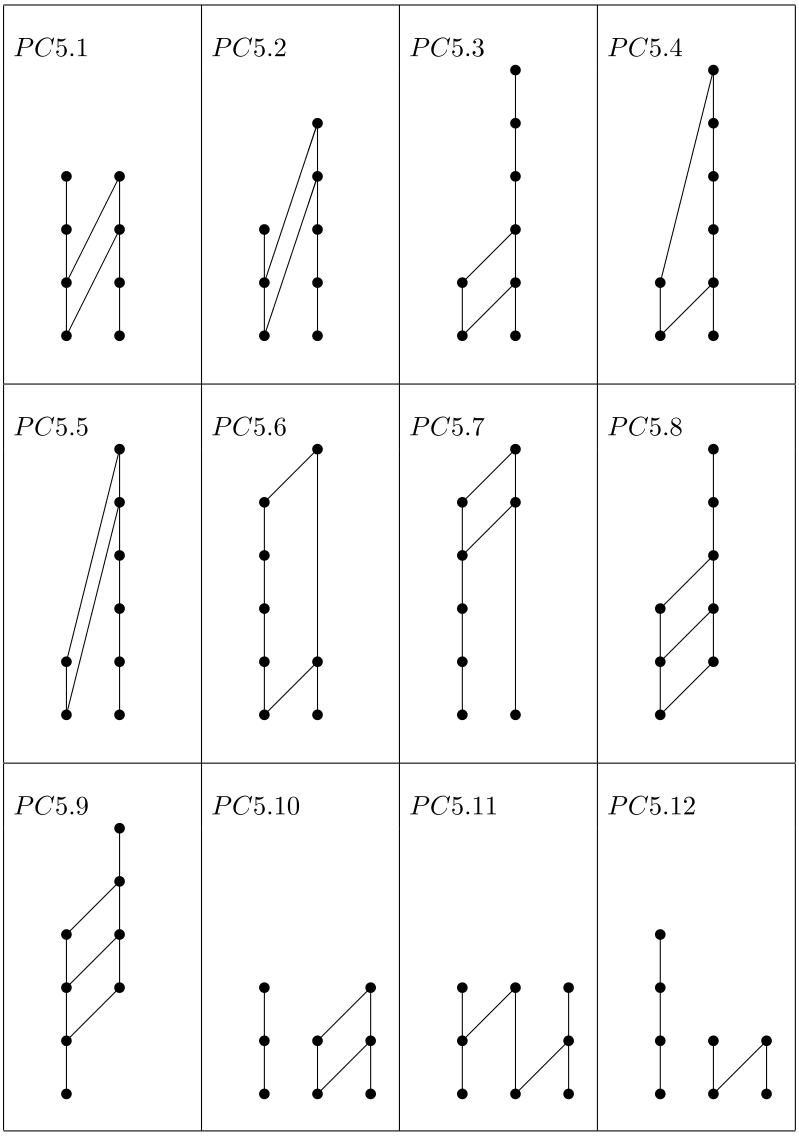
24) $PC5.24(62) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 2 \prec 8, 7 \prec 8\}$;

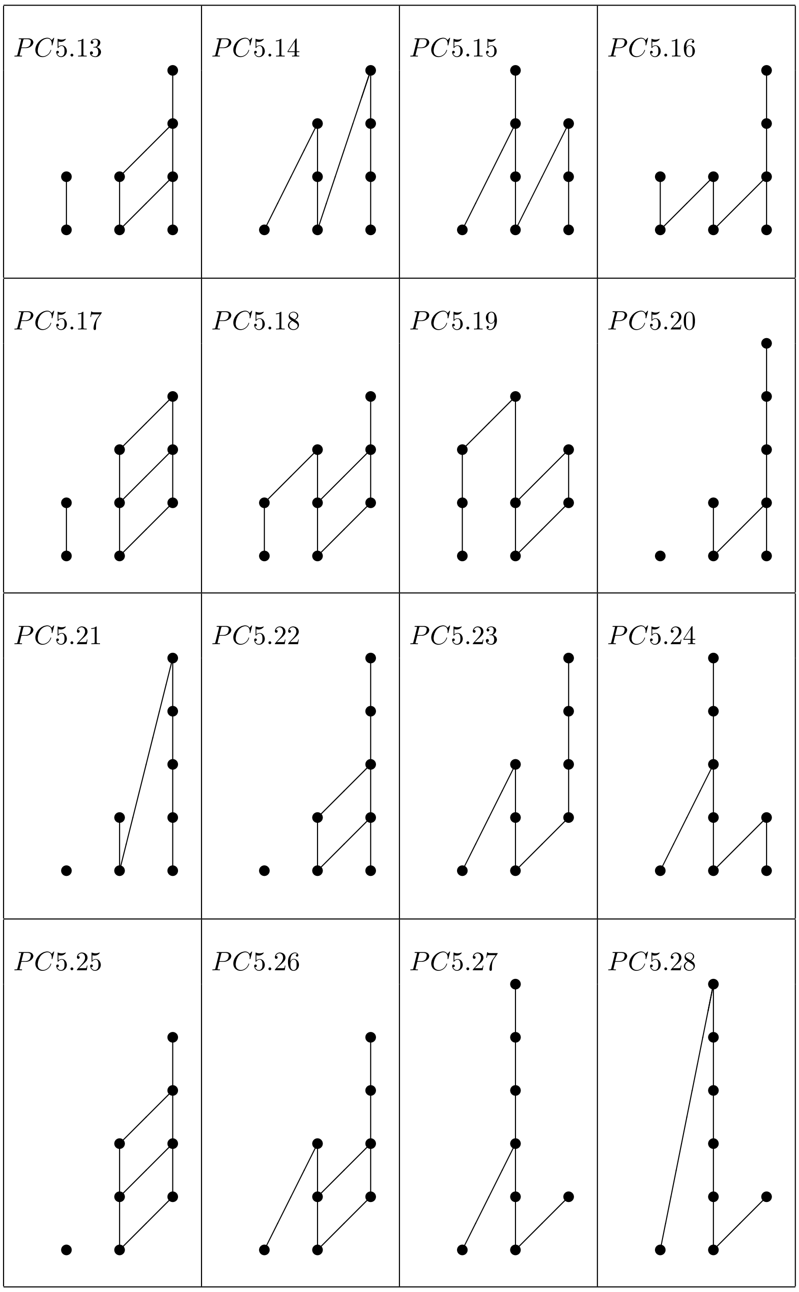
25) $PC5.25(68) = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 3 \prec 6, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

26) $PC5.26(72) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 3 \prec 6, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

27) $PC5.27(63) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 8\}$;

28) $PC5.28(64) = \{1 \prec 7, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 8\}$.





Вкажемо деякі наслідки з модифікованої класифікації.

Нагадаємо, що об'єднання попарно неперетинних ч.в. множин $X_1, \ldots, X_s$ $(s > 1)$ таке, що елементи різних множин завжди непорівняльні, називається їхньою прямою сумою.

Твердження 2.30. *Якщо в фіксованому класі мінімаксно ізоморфних P-критичних множин існує пряма сума S лінійно впорядкованих підмножин, то множина S ізоморфна деякій множині Клейнера.*

Твердження 2.31. *Якщо P-критична множина S висоти h має лінійно впорядкований прямий доданок L, порядок якого l є найбільшим серед всіх множин такого ж вигляду із її класу мінімаксно ізоморфних множин, то $l = h$.*

Елемент ч.в. множини називається вузловим, якщо він порівняльний з усіма іншими елементами. Із загальної таблиці P-критичних ч.в. множин (див. підрозділ 1.9) випливає, що підмножина S_0 всіх вузлових елементів довільної P-критичної множини S є (неперетинним) об'єднанням $S_0 = S_0^- \cup S_0^+$ нижньої та верхньої підмножин множини S. А із модифікованої класифікації додатково маємо наступне: для довільних фіксованих $p, q \geq 0$, що задовольняють рівність $p+q = |S_0|$, серед всіх P-критичних множин T таких, що $|T| = |S|$ і $|T_0| = |S_0|$ існує ч.в. множина $F = F(p, q)$, мінімаксно ізоморфна S, для якої $|F_0^-| = p$ і $|F_0^+| = q$. І якщо врахувати, що лінійно впорядкована підмножина $S_0^+ \cup S_0^-$ (з $x < y$ для довільних $x \in S_0^+$ і $y \in S_0^-$) ч.в. множини $S^{\uparrow\downarrow}_{S_0^- S_0^+}$ є її прямим доданком та, в позначеннях твердження 2.31, підмножина L в $S^{\uparrow}_{L}$ є верхньою підмножиною з вузлових елементів, то матимемо наступне твердження.

Твердження 2.32. *Нехай — деяка множина Клейнера і $m = m(\mathcal{K})$ — найбільший порядок підмножини вузлових елементів серед усіх множин X, мінімаксно ізоморфних множині $\mathcal{K}$. Тоді m дорівнює висоті множини $\mathcal{K}$. Така підмножина вузлових елементів, зокрема, завжди реалізується як верхня (нижня) підмножина деякої множини X.*

Це твердження знадобиться в останньому розділі дисертації.

У розділі 3 дисертації буде отримана як загальна класифікація мінімальних ч.в. множин, квадратична форма Тітса яких не є невід'ємною, так і модифікована класифікація (по класам мінімаксно ізоморфних множин).

Зауважимо, що інші класифікації, отримані в дисертації (для майже додатних ч.в. множин та ч.в. множин надсуперкритичного MM-типу) зразу були отримані по класам мінімаксних ізоморфізмів множин (як більш ефективні типи класифікацій).

2.6. Не Тітса P-критичні частково впорядковані множини

Розглянемо ще одну різновидність класифікаційних задач, коли із вже отриманої класифікації треба виділити ч.в. множини, що задовольняють додатковим умовам. Мова йде про не Тітс P-критичні ч.в. множини, як деякий підклас P-критичних ч.в. множин. Він введений в роботі [125] з посиланням на нашу класифікацію P-критичних множин [9].

2.6.1. Постановка задачі. Нагадаємо, що мінімальні недодатні ч.в. множини, які вперше описані в роботі [9], називаються P-критичними. Іншими словами (див. підрозділ 1.9), ч.в. множина S називається P-критичною, якщо виконуються такі умови:

(a) квадратична форма Тітса $q_S(z)$ множини S не є додатною;

(b) квадратична форма Тітса довільної власної підмножини множини S додатна.

Умова (b) означає, що якщо форма $q_S(z)$ розглядається з $z_i = 0$ для довільного фіксованого $0 \neq i \in S$, то вона додатна.

Значно пізніше, в 1914 р. А. Полак і Д. Сімсон [125] обчислили P-критичні множини за допомогою комп'ютерних програм. При цьому вони виділили деякий підклас P-критичних множин, який назвали Тітса P-критичними множинами. А саме, P-критична ч.в. множина S називається *Тітса P-критичною*, якщо квадратична форма $q_S(z)$ при $z_0 = 0$ також є додатною. Незважаючи на те, що опис всіх P-критичних множин вже був відомим, опис частини таких множин зі вказаною додатковою умовою є далеко не простою технічною задачею. Такий опис отримали А. Полак і Д.

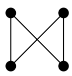
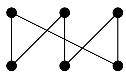
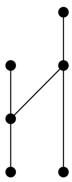
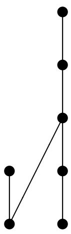
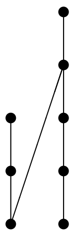
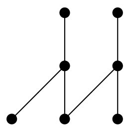
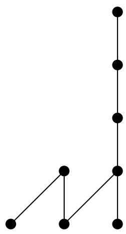
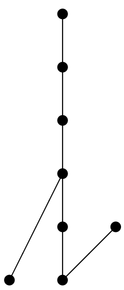
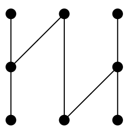
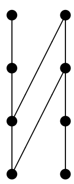
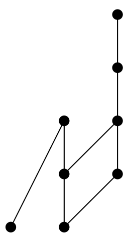
Сімсон в тій же статті (також із застосуванням комп'ютерних програм).

У цьому підрозділі описуються (методом мінімаксної еквівалентності) не Тітса P-критичні ч.в. множини без використання повної класифікації P-критичних множин. І тоді доповнення отриманих множин до повної класифікації буде описувати Тітса P-критичні множини.

Згідно основного результату цього підрозділу, число не Тітса P-критичних ч.в. множин дорівнює 11 з точністю до ізоморфізму і дуальності. Тоді кількість Тітса P-критичних ч.в. множин дорівнює 64 (з точністю до ізоморфізму і дуальності).

2.6.2. Формулювання основної теореми.

Теорема 2.33. *З точністю до ізоморфізму і дуальності, не Тітса P-критичні ч.в. множини задаються наступною таблицею.*

Всього 11 *смд. 5* *не смд. 6*	***nTPC*1** ***sd*** 	***nTPC*2** ***sd*** 	***nTPC*3** ***sd*** 
***nTPC*4** 	***nTPC*5** 	***nTPC*6** 	***nTPC*7** 
***nTPC*8** 	***nTPC*9** ***sd*** 	***nTPC*10** ***sd*** 	***nTPC*11** 

Зауважимо, що (sd) в основній клітині таблиці означає, що відповідна ч.в. множина самодуальна, а смд (не смд) в першій клітині означає самодуальні (не самодуальні); після цього вказано їх кількість в таблиці.

Теорема 2.33 буде доведена методом мінімаксної еквівалентності. Підкреслимо, що мінімаксна еквівалентність зберігає $\mathbb{Z}$-еквівалентність квадратичних форм. Про це говорить твердження 2.3, яке сформулюємо тут більш конкретно (а саме з врахуванням його доведення в роботі [123]).

Твердження 2.34. *Нехай S ч.в. множина і нехай $T = S_A^{\uparrow}$ або $T = S_A^{\downarrow}$. Тоді $q_S(z) = q_T(z')$, де $z'_0 = z_0 - \sum_{a\in A} z_a$, $z'_x = -z_x$ для $x \in A$ і $z'_x = z_x$ для $x \notin A$.*

2.6.3. Зв'язок між P-критичними ч.в. множинами і множинами Клейнера. Нагадаємо (див. розділ 1), що критичними множинами (тепер множинами Клейнера) називаються множини вигляду K_1–K_5, які утворюють повну систему мінімальних множин зі слабко недодатною квадратичною формою Тітса.

З точністю до ізоморфізму, множини Клейнера мають такий вигляд:

$K_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ (без відношень),

$K_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \,|\, 1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6\}$,

$K_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \,|\, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7\}$,

$K_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \,|\, 1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6, 7 \prec 8, 5 \prec 8\}$,

$K_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$.

Для ч.в. множини S порядку n визначимо *ядро* $q_S(z)$ таким чином: $\operatorname{Ker} q_S(z) := \{u \in \mathbb{Z}^{n+1} \,|\, q_S(u) = 0\}$. Наступне твердження показує, що для кожної множини Клейнера K ядро $q_K(z)$ є нескінченною циклічною групою.

Твердження 2.35. *Покладемо $q_i(z) := q_{K_i}(z)\,(1 \le i \le 5)$. Квадратичні форми $q_i(z)$ є невід'ємними і*

$\operatorname{Ker} q_1(z) = (2, 1, 1, 1, 1)\mathbb{Z}$,

$\operatorname{Ker} q_2(z) = (3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)\mathbb{Z}$,

$\operatorname{Ker} q_3(z) = (4, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)\mathbb{Z}$,

$\operatorname{Ker} q_4(z) = (5, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1)\mathbb{Z}$,

$\operatorname{Ker} q_5(z) = (6, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)\mathbb{Z}$.

Дійсно, співвідношення $\supseteq$ перевіряються прямими обчисленнями, і тоді співвідношення $=$, а також невід'ємність випливають з роботи [126] (див. також теорему 2 розділу 1.0 [16] і [117]).

Наслідок 2.36. *Нехай $v = (v_0, v_1, \ldots, v_m) \in \operatorname{Ker} q_K(z)$ з K є множиною Клейнера. Тоді $2v_0 = v_1 + v_2 + \ldots + v_m$.*

Згідно Теореми 2 [9] для P-критичних множин виконується наступна теорема.

Теорема 2.37. *Ч.в. множина S є P-критичною тоді і тільки тоді, коли вона мінімаксно ізоморфна деякій множині Клейнера.*

Із тверджень 2.34, 2.35 і теореми 2.37, маємо такий наслідок.

Наслідок 2.38. *Нехай S — P-критична множина порядку n. Тоді квадратична форма Тітса множини S є невід'ємною і $\operatorname{Ker} q_S(z) = v\mathbb{Z}$ для деякого вектора $v = (v_i)_{i \in 0 \cup S} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ з $v_i \neq 0$ для будь-якого $i \neq 0$, яка визначається S однозначно з точністю до знака.*

2.6.4. 0-збалансовані підмножини. Вектор $v = (v_i)_{i \in 0 \cup S} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ зазначений у наслідку 2.38 позначається $v^S = (v_i^S)_{i \in 0 \cup S}$; невелика двозначність вектора v^S несуттєва (можна, наприклад, зафіксувати $v_s \neq 0$ і вибрати v^S з $v_s^S > 0$). Підмножина X P-критичної множини S називається *малою*, якщо $|X|$ не перевищує цілу частину $(|S| + 1)/2$, і 0-*збалансованою*, якщо $v_0^S = \sum_{i \in X} v_i^S$. З цих означень і твердження 2.35 випливають наступні дві леми.

Лема 2.39. *Для будь-якої множини Клейнера K_i $(1 \le i \le 5)$ не існує* 0*-збалансованої підмножини вигляду $X = A \cup B$, $A < B$.*

Лема 2.40. *Для множин Клейнера K_i малі* 0*-збалансовані нижні підмножини A_{ij} вичерпуються з точністю до автоморфізму (K_i) такими підмножинами:*

(1) $A_{11} = \{1, 2\}$;

(2) $A_{21} = \{1, 2, 3\}$, $A_{22} = \{1, 3, 5\}$;

(3) $A_{31} = \{1, 2, 3\}$, $A_{32} = \{1, 2, 5\}$;

(4) $A_{41} = \{1, 2, 3, 7\}$, $A_{42} = \{1, 2, 5, 6\}$, $A_{43} = \{1, 2, 5, 7\}$, $A_{44} = \{1, 5, 7, 8\}$, $A_{45} = \{5, 6, 7\}$;

(5) $A_{51} = \{1, 2, 4\}$, $A_{52} = \{1, 4, 5, 6\}$, $A_{53} = \{2, 3, 4, 5\}$.

Повним перерахуванням усіх випадків можна довести наступну лему (з використанням попередньої леми), але вона випливає безпосередньо з наслідків 2.21 і 2.36 (за наслідком 2.36, для будь-якої множини Клейнера K підмножини X і $K \setminus X$ одночасно є або не є 0-збалансованими).

Лема 2.41. *Нехай X — немала* 0*-збалансована нижня підмножина множини Клейнера $K = K_i$. Тоді існує мала* 0*-збалансована нижня підмножина Y з K така, що $K_X^{\uparrow} = (K_Y^{\uparrow})^{\mathrm{op}}$.*

2.6.5. Доведення теореми 2.33. З наслідку 2.38 (приймаючи до уваги означення P-критичних і Тітса P-критичних ч.в. множин) випливає таке твердження.

Твердження 2.42. *P-критична множина S є не Тітса P-критичною тоді і тільки тоді, коли $v_0^S = 0$.*

За теоремою 2.37 і твердженнями 2.34, 2.42, щоб довести теорему 2.33, достатньо показати, що множина всіх ч.в. множин, отриманих як результат застосування алгоритму, вказаному в кінці підрозділу 2.2, до всіх 0-збалансованих підмножин X (див. Крок I) і 0-збалансованих пар підмножин (X, Y) (див. Крок II) всіх множин Клейнера $K = K_1, \ldots, K_5$ збігається, з точністю до ізоморфізму і дуальності, з множиною всіх ч.в. множин із таблиці теореми 2.33.

Із леми 2.39 випливає, що Крок II згаданого алгоритму є в цьому випадку порожнім, а за лемою 2.41 для Кроку I можна брати лише малі підмножини. Отже, залишилось обчислити ч.в. множини K_A, де $K = K_1, \ldots, K_5$ і A пробігає підмножини, вказані в лемі 2.40, а потім порівняти їх з ч.в. множинами, вказаними в таблиці теореми 2.33. Маємо:

для $K = K_1$, $A = A_{11}$, множина K_A ізоморфна $nTPC1$;

для $K = K_2$, $A = A_{21}$, множина K_A ізоморфна $nTPC3$;

для $K = K_2$, $A = A_{22}$, множина K_A ізоморфна $nTPC2$;

для $K = K_3$, $A = A_{31}$, множина K_A ізоморфна $nTPC4^{\text{op}}$;

для $K = K_3$, $A = A_{32}$, множина K_A ізоморфна $nTPC6^{\text{op}}$;

для $K = K_4$, $A = A_{41}$, множина K_A ізоморфна $nTPC11$;

для $K = K_4$, $A = A_{42}$, множина K_A ізоморфна $nTPC10$;

для $K = K_4$, $A = A_{43}$, множина K_A ізоморфна $nTPC9$;

для $K = K_4$, $A = A_{44}$, множина K_A ізоморфна $nTPC11^{\text{op}}$;

для $K = K_4$, $A = A_{45}$, множина K_A ізоморфна $nTPC8^{\text{op}}$;

для $K = K_5$, $A = A_{51}$, множина K_A ізоморфна $nTPC7^{\text{op}}$.

для $K = K_5$, $A = A_{52}$, множина K_A ізоморфна $nTPC5^{\text{op}}$;

для $K = K_5$, $A = A_{53}$, множина K_A ізоморфна $nTPC5$.

Таким чином, множина всіх ч.в. множин вигляду K_A збігається з точністю до ізоморфізму та дуальності з сукупністю множин із таблиці теореми. Теорему 2.33 доведено.

2.7. Модифікація опису додатних частково впорядкованих множин

У цьому розділі ми розглянемо модифікації як серійних, так і несерійних ч.в. множин (див. підрозділ 1.8).

Для серійних множин вона полягає у фіксації параметрів для кожної серії та накладання таких обмежень на них, що множини, які належать різним серіям завжди неізоморфні; така модифікація застосовується в розділі 4 про майже додатні множини і явно використовується при доведенні однієї із теорем. Для несерійних множин модифікація опису полягає в розташуванні 108-и множин в порядку зростання їх порядків. Така модифікація і допомагає, зокрема, сформулювати твердження про максимальні додатні множини.

2.7.1. Випадок серійних ч.в. множин. Додатна ч. в. множина S називається *серійною*, якщо існує строго зростаюча нескінченна послідовність $S \subseteq S_1 \subseteq S_2 \ldots$, всі члени S_i якої є також додатними множинами.

Модифікація полягає в тому, що серійні множини записуються параметрами таким чином, що різні серії не перетинаються.

Сума $S = A + B$ ч.в. множин $A, B \neq \varnothing$ називається *лівою* (відповідно *правою*), якщо $a < b$ (відповідно $b < a$) для деяких $a \in A, b \in B$ і немає $a' \in A, b' \in B$, що задовольняє $a' > b'$ (відповідно $b' > a'$). І ліва, і права суми називаються *односторонніми.* Сума $S = A + B$ називається *двосторонньою*, якщо $a < b$ і $a' > b'$ для деяких $a, a' \in A, b, b' \in B$. Нарешті, одностороння (ліва або права) або двостороння сума $S = A + B$ називається *мінімаксною*, якщо $x < y$, де x і y належать до різних доданків, та x є мінімальним, а y максимальним в S.

Лінійна впорядкована множина з $n \geq 0$ елементів називається *ланцюгом довжини* n. Множина з однією парою непорівняльних елементів $a_1 < \ldots < a_p < \{b, c\} < d_1 < \ldots d_q\,(p, q \geq 0)$ називається *майже ланцюгом довжини* $n = p + q + 1$.

Теорема 2.43. *Ч.в. множина T є серійною додатною тоді і тільки тоді, коли вона ізоморфна одній з наступних множин S :*

(1) *S є прямою сумою ланцюга довжиною $k \geq 0$ і ланцюга довжиною $s \geq 1$, де $k \leq s$;*

(2) *S — ліва мінімаксна сума двох ланцюгів довжин $k \geq 1$ і $s \geq 2$, де $k + s \geq 3$;*

(3) *S є прямою сумою майже ланцюга довжиною $k \geq 1$ і ланцюга довжиною $s \geq 0$, де $k + s > 1$.*

Окрім того, усі ці ч.в. множини попарно неізоморфні.

Доведення. Легко бачити, що (1) при $k < s$ має вигляд (1); (2) при $k = s = 1$ має вигляд (1) при $k = 0$; (2) при $k = 1, s = 2$ або $k = 2, s = 1$ має вигляд (3) при $s = 0$; (3) при $k = 1, s = 0$ має вигляд (1) $k = s = 1$. Залишилося врахувати теорему 1.9. □

2.7.2. Випадок несерійних ч.в. множин. Модифікація полягає в тому, що несерійні ч.в. множини описуються не загальним списком (як раніше), а окремо кожного порядку (5, 6, 7). Множини виписані таким чином (щодо пари із двох взаємно дуальних множин), якщо дивитися на діаграму Хассе, що в кожній незв'язній компоненті, яка не є ланцюгом, кількість мінімальних вузлових елементів не менша за кількість максимальних.

Для підмножин X, Y множини S позначимо $X \sqcup Y$ їх пряму суму (тобто таке об'єднання, що елементи з різних підмножин непорівняльні). З теореми Ділворта випливає, що будь-яку ч.в. множину можна представити у формі $\sqcup_{i=1}^m X_i$, де X_i є ланцюжками та додатковими співвідношеннями $y < z$ для y і z, що належать різним компонентам.

A_s, B_s, C_s позначають відповідно ланцюги $a_1 < \ldots < a_s$, $b_1 < \ldots < b_s$, $c_1 < \ldots < c_s$.

Додатні несерійні ч.в. множини класифіковані в [9] через їх діаграми Хассе. Наступні три теореми є теоретико-множинним переформулюванням нашої класифікації, сортуючи їх за порядком (який може дорівнювати лише 5, 6 або 7), (m у дужках означає відповідне число з [9], а m^{op} означає, що необхідно взяти дуальну множину із числом m).

Теорема 2.44. *Несерійні додатні множини порядку 5 вичерпано, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 10 множинами:*

$NSP5.1(3)$ $A_2 \sqcup B_3$, $a_1 \prec b_2$;

$NSP5.2(4)$ $A_2 \sqcup B_3$, $a_2 \prec b_3$;

$NSP5.3(5)$ $A_2 \sqcup B_3$, $a_1 \prec b_2$, $a_2 \prec b_3$;

$NSP5.4(1)$ $A_1 \sqcup B_4$, $a_1 \prec b_3$;

$NSP5.5(2)$ $A_2 \sqcup B_3$, $a_1 \prec b_1$, $a_2 \prec b_3$;

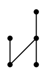
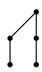
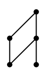
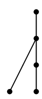
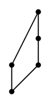
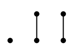
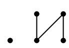
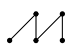
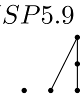
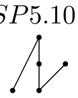
$NSP5.6(46)$ $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_2$;

$NSP5.7(48)$ $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_2$, $b_1 \prec c_2$;

$NSP5.8(49)$ $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_2$, $a_1 \prec b_2$, $b_1 \prec c_2$;

$NSP5.9(47)$ $A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_3$, $b_1 \prec c_3$;

$NSP5.10(50)$ $A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_1$, $a_1 \prec b_3$, $b_1 \prec c_1$;

w=2 h=3,4	$NSP5.1$ 	$NSP5.2$ 	$NSP5.3$ 	$NSP5.4$ 	$NSP5.5$  sd
w=3 h=2,3	$NSP5.6$  sd	$NSP5.7$  sd	$NSP5.8$ 	$NSP5.9$ 	$NSP5.10$  sd

Зауважимо, що самодуальні множини в таблиці позначені в нижніх лівих кутах sd. Несерійних ч.в. множин порядку 5 з точністю до ізоморфізму 16.

Теорема 2.45. *Несерійні додатні множини порядку 6 вичерпано, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 32 множинами:*

$NSP6.1(12)$ $A_3 \sqcup B_3,\ a_1 \prec b_2;$

$NSP6.2(20)$ $A_3 \sqcup B_3,\ a_1 \prec b_2,\ a_2 \prec b_3;$

$NSP6.3(10)$ $A_2 \sqcup B_4,\ a_1 \prec b_2;$

$NSP6.4(11)$ $A_2 \sqcup B_4,\ a_1 \prec b_3;$

$NSP6.5(13)$ $A_2 \sqcup B_4,\ a_2 \prec b_4;$

$NSP6.6(14)$ $A_2 \sqcup B_4,\ a_1 \prec b_2,\ a_2 \prec b_3;$

$NSP6.7(16)$ $A_2 \sqcup B_4,\ a_1 \prec b_2,\ a_2 \prec b_4;$

$NSP6.8(18)$ $A_2 \sqcup B_4,\ a_1 \prec b_3,\ a_2 \prec b_4;$

$NSP6.9(19^{op})$ $A_3 \sqcup B_3,\ a_1 \prec b_2,\ a_3 \prec b_3;$

$NSP6.10(14^{op})$ $A_3 \sqcup B_3,\ a_2 \prec b_2,\ a_3 \prec b_3;$

$NSP6.11(15)$ $A_3 \sqcup B_3,\ a_1 \prec b_1,\ a_2 \prec b_2,\ a_3 \prec b_3;$

$NSP6.12(6)$ $A_1 \sqcup B_5,\ a_1 \prec b_3;$

$NSP6.13(8)$ $A_1 \sqcup B_5,\ a_1 \prec b_4;$

$NSP6.14(7)$ $A_2 \sqcup B_4,\ a_1 \prec b_1,\ a_2 \prec b_3;$

$NSP6.15(9)$ $A_2 \sqcup B_4,\ a_1 \prec b_1,\ a_2 \prec b_4;$

$NSP6.16(58)$ $A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2,\ b_1 \prec c_2;$

$NSP6.17(66)$ $A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2,\ a_1 \prec b_2,\ b_1 \prec c_2;$

$NSP6.18(51)$ $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_3;$

$NSP6.19(55)$ $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_3,\ b_1 \prec c_2;$

$NSP6.20(56)$ $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_3,\ b_1 \prec c_3;$

$NSP6.21(57)$ $A_2 \sqcup B_1 \sqcup C_3,\ b_1 \prec c_3;$

$NSP6.22(60)$ $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_3,\ a_1 \prec b_2,\ b_1 \prec c_2;$

$NSP6.23(61)$ $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_3,\ a_1 \prec b_2,\ b_1 \prec c_3;$

$NSP6.24(62)$ $A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_2,\ a_1 \prec b_3,\ b_1 \prec c_1;$

$NSP6.25(63)\ A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_2,\ a_1 \prec b_3,\ b_1 \prec c_2;$

$NSP6.26(59)\ A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_3,\ b_1 \prec c_2,\ b_2 \prec c_3;$

$NSP6.27(67)\ A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_2,\ a_1 \prec b_3,\ b_1 \prec c_1,\ b_2 \prec c_2;$

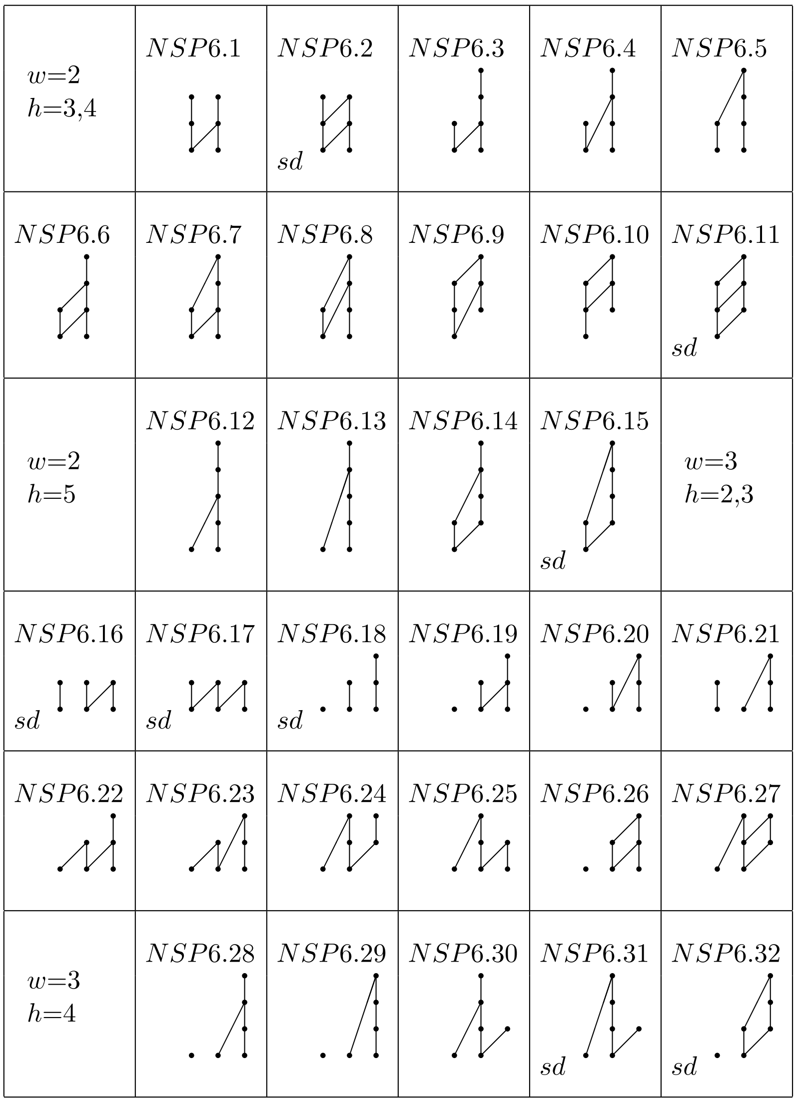
$NSP6.28(52)\ A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_4,\ b_1 \prec c_3;$

$NSP6.29(54)\ A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_4,\ b_1 \prec c_4;$

$NSP6.30(64)\ A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_1,\ a_1 \prec b_3,\ b_1 \prec c_1;$

$NSP6.31(65)\ A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_1,\ a_1 \prec b_4,\ b_1 \prec c_1;$

$NSP6.32(53)\ A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_3,\ b_1 \prec c_1,\ b_2 \prec c_3;$



Несерійних ч.в. множин порядку 6 з точністю до ізоморфізму 56.

Теорема 2.46. *Несерійні додатні множини порядку 7 вичерпано, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 66 множинами:*

$NSP7.1(29)$ $A_3 \sqcup B_4,\ a_1 \prec b_3;$

$NSP7.2(30)$ $A_3 \sqcup B_4,\ a_2 \prec b_4;$

$NSP7.3(42)$ $A_3 \sqcup B_4,\ a_1 \prec b_2,\ a_2 \prec b_4;$

$NSP7.4(43)$ $A_3 \sqcup B_4,\ a_1 \prec b_3,\ a_2 \prec b_4;$

$NSP7.5(44)$ $A_3 \sqcup B_4,\ a_1 \prec b_3,\ a_3 \prec b_4;$

$NSP7.6(45)$ $A_3 \sqcup B_4,\ a_1 \prec b_2,\ a_2 \prec b_3,\ a_3 \prec b_4;$

$NSP7.7(26)$ $A_2 \sqcup B_5,\ a_1 \prec b_2;$

$NSP7.8(27)$ $A_2 \sqcup B_5,\ a_1 \prec b_4;$

$NSP7.9(28)$ $A_2 \sqcup B_5,\ a_2 \prec b_5;$

$NSP7.10(31)$ $A_2 \sqcup B_5,\ a_1 \prec b_2,\ a_2 \prec b_3;$

$NSP7.11(33)$ $A_2 \sqcup B_5,\ a_1 \prec b_2,\ a_2 \prec b_4;$

$NSP7.12(36)$ $A_2 \sqcup B_5,\ a_1 \prec b_2,\ a_2 \prec b_5;$

$NSP7.13(38)$ $A_2 \sqcup B_5,\ a_1 \prec b_3,\ a_2 \prec b_5;$

$NSP7.14(40)$ $A_2 \sqcup B_5,\ a_1 \prec b_4,\ a_2 \prec b_5;$

$NSP7.15(35^{op})$ $A_3 \sqcup B_4,\ a_2 \prec b_2,\ a_3 \prec b_3;$

$NSP7.16(41^{op})$ $A_4 \sqcup B_3,\ a_1 \prec b_2,\ a_4 \prec b_3;$

$NSP7.17(39^{op})$ $A_4 \sqcup B_3,\ a_2 \prec b_2,\ a_4 \prec b_3;$

$NSP7.18(37^{op})$ $A_4 \sqcup B_3,\ a_3 \prec b_2,\ a_4 \prec b_3;$

$NSP7.19(32)$ $A_3 \sqcup B_4,\ a_1 \prec b_1,\ a_2 \prec b_2,\ a_3 \prec b_3;$

$NSP7.20(34)$ $A_3 \sqcup B_4,\ a_1 \prec b_1,\ a_2 \prec b_2,\ a_3 \prec b_4;$

$NSP7.21(21)$ $A_1 \sqcup B_6,\ a_1 \prec b_3;$

$NSP7.22(24)$ $A_1 \sqcup B_6,\ a_1 \prec b_5;$

$NSP7.23(22)$ $A_2 \sqcup B_5,\ a_1 \prec b_1,\ a_2 \prec b_3;$

$NSP7.24(25)$ $A_2 \sqcup B_5,\ a_1 \prec b_1,\ a_2 \prec b_5;$

$NSP7.25(23)$ $A_3 \sqcup B_4,\ a_2 \prec b_1,\ a_3 \prec b_3;$

$NSP7.26(75)$ $A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_3,\ b_1 \prec c_3;$

$NSP7.27(78)\ A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_3,\ b_1 \prec c_2;$

$NSP7.28(79)\ A_3 \sqcup B_1 \sqcup C_3,\ b_1 \prec c_3;$

$NSP7.29(80)\ A_3 \sqcup B_2 \sqcup C_2,\ b_1 \prec c_2;$

$NSP7.30(89)\ A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_3,\ a_1 \prec b_2,\ b_1 \prec c_3;$

$NSP7.31(91)\ A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_3,\ a_1 \prec b_3,\ b_1 \prec c_2;$

$NSP7.32(92)\ A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_3,\ a_1 \prec b_3,\ b_1 \prec c_3;$

$NSP7.33(99)\ A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_3,\ a_1 \prec b_2,\ b_1 \prec c_2;$

$NSP7.34(100)\ A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_3,\ a_1 \prec b_2,\ b_1 \prec c_3;$

$NSP7.35(101)\ A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_2,\ a_1 \prec b_3,\ b_1 \prec c_2;$

$NSP7.36(102)\ A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_2,\ a_2 \prec b_3,\ b_1 \prec c_1;$

$NSP7.37(85)\ A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_3,\ b_1 \prec c_2,\ b_2 \prec c_3;$

$NSP7.38(86)\ A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_3,\ b_1 \prec c_2,\ b_2 \prec c_3;$

$NSP7.39(108)\ A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_2,\ a_2 \prec b_3,\ b_1 \prec c_1,\ b_2 \prec c_2;$

$NSP7.40(108^{op})\ A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_2,\ a_1 \prec b_2,\ a_2 \prec b_3,\ b_1 \prec c_2;$

$NSP7.41(68)\ A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_4;$

$NSP7.42(72)\ A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_4,\ b_1 \prec c_2;$

$NSP7.43(73)\ A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_4,\ b_1 \prec c_3;$

$NSP7.44(74)\ A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_4,\ b_1 \prec c_4;$

$NSP7.45(76)\ A_2 \sqcup B_1 \sqcup C_4,\ b_1 \prec c_3;$

$NSP7.46(87)\ A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_4,\ a_1 \prec b_2,\ b_1 \prec c_2;$

$NSP7.47(88)\ A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_4,\ a_1 \prec b_2,\ b_1 \prec c_4;$

$NSP7.48(90)\ A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_3,\ a_1 \prec b_3,\ b_1 \prec c_1;$

$NSP7.49(93)\ A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_2,\ a_1 \prec b_3,\ b_1 \prec c_1;$

$NSP7.50(94)\ A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_2,\ a_1 \prec b_3,\ b_1 \prec c_2;$

$NSP7.51(95)\ A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_2,\ a_1 \prec b_4,\ b_1 \prec c_2;$

$NSP7.52(81)\ A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_4,\ b_1 \prec c_2,\ b_2 \prec c_3;$

$NSP7.53(83)\ A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_4,\ b_1 \prec c_2,\ b_2 \prec c_4;$

$NSP7.54(84^{op})\ A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_3,\ b_2 \prec c_2,\ b_3 \prec c_3;$

$NSP7.55(77)\ A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_3,\ b_1 \prec c_1,\ b_2 \prec c_3;$

$NSP7.56(103)$ $A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_3,\ a_1 \prec b_3,\ b_1 \prec c_1,\ b_2 \prec c_2;$

$NSP7.57(104)$ $A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_3,\ a_1 \prec b_3,\ b_1 \prec c_1,\ b_2 \prec c_3;$

$NSP7.58(105)$ $A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_2,\ a_1 \prec b_4,\ b_1 \prec c_1,\ b_2 \prec c_2;$

$NSP7.59(106)$ $A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_2,\ a_1 \prec b_4,\ b_2 \prec c_1,\ b_3 \prec c_2;$

$NSP7.60(82)$ $A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_3,\ b_1 \prec c_1,\ b_2 \prec c_2,\ b_3 \prec c_3;$

$NSP7.61(69)$ $A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_5,\ b_1 \prec c_3;$

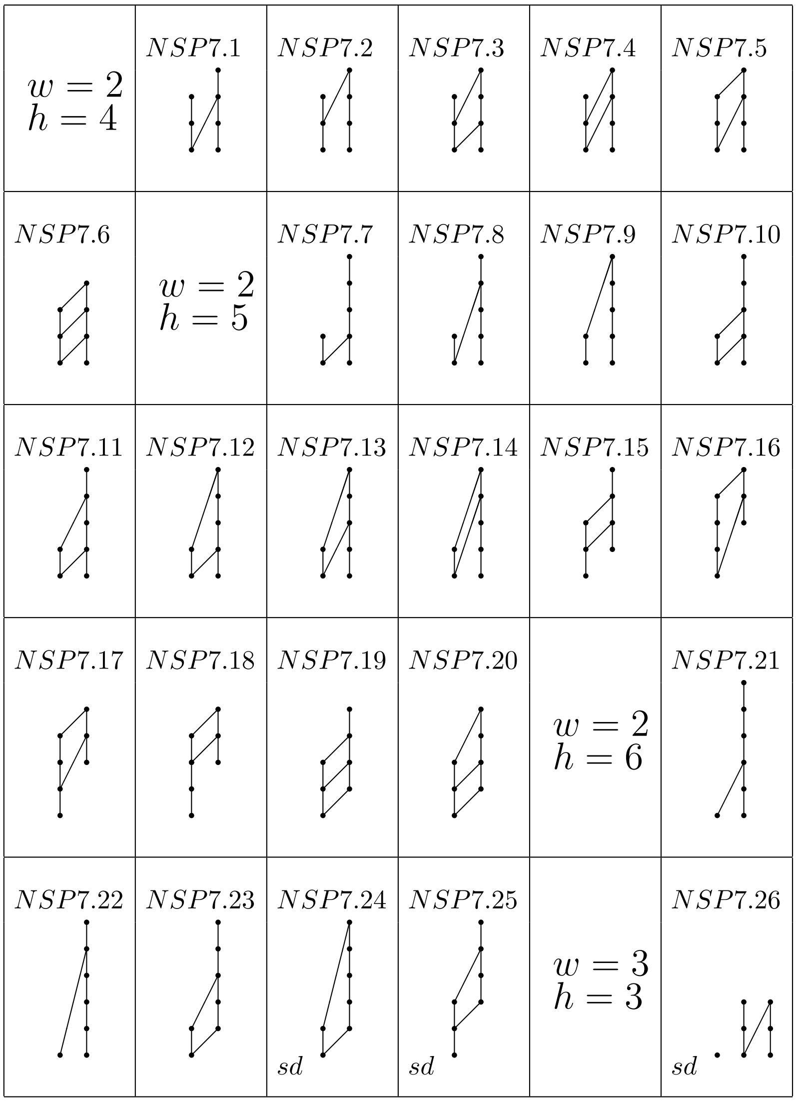
$NSP7.62(71)$ $A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_5,\ b_1 \prec c_5;$

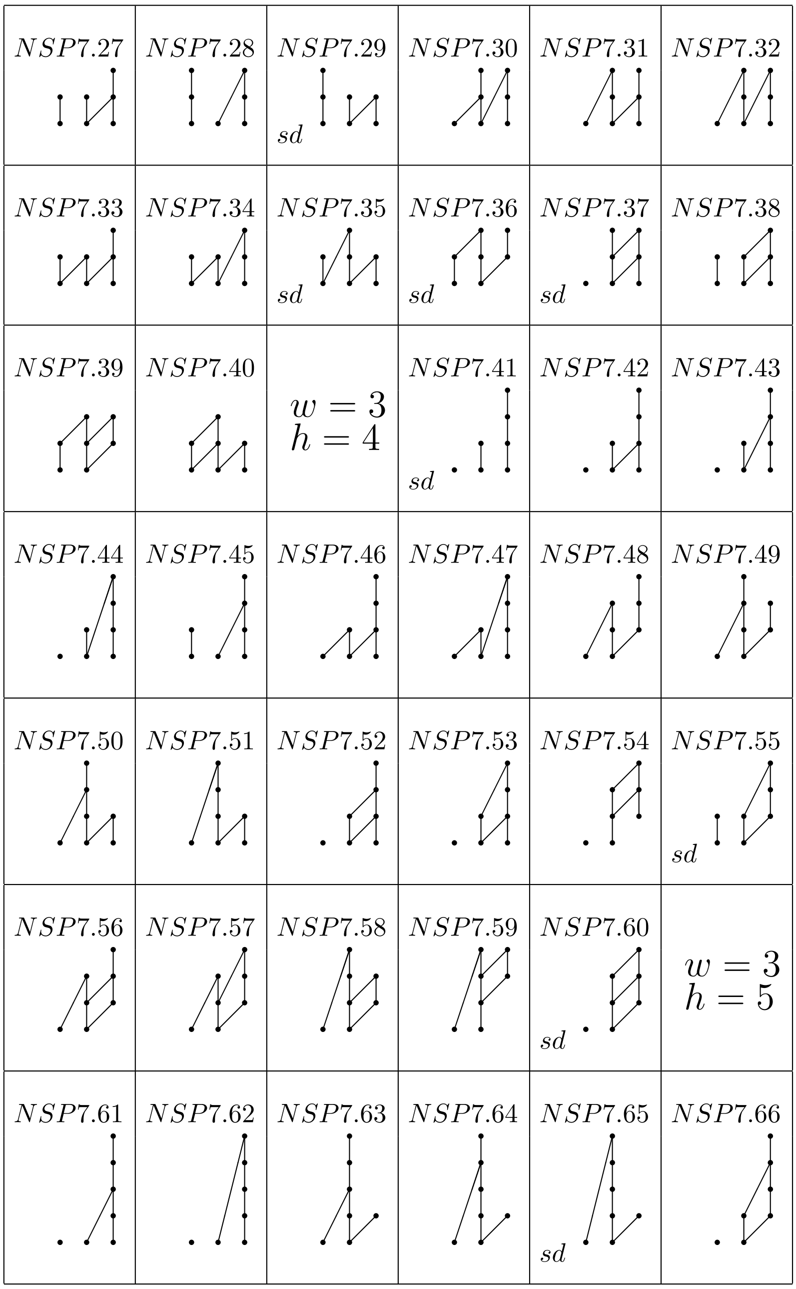
$NSP7.63(96)$ $A_1 \sqcup B_5 \sqcup C_1,\ a_1 \prec b_3,\ b_1 \prec c_1;$

$NSP7.64(97)$ $A_1 \sqcup B_5 \sqcup C_1,\ a_1 \prec b_4,\ b_1 \prec c_1;$

$NSP7.65(98)$ $A_1 \sqcup B_5 \sqcup C_1,\ a_1 \prec b_5,\ b_1 \prec c_1;$

$NSP7.66(70)$ $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_4,\ b_1 \prec c_1,\ b_2 \prec c_3.$





Несерійних ч.в. множин порядку 7 з точністю до ізоморфізму 121.

2.8. Верхня і нижня ширина частково впорядкованих множин

Додатні ч.в. множини вперше описані в роботах [8] і [9]. В першій роботі був розглянутий випадок ширини 2, а потім в другій – загальний випадок.

При цьому в другій роботі спочатку було доведено, що будь-яка ч.в. множина ширини 3 мінімаксно еквівалентна деякій множині ширини 2 (а ширина 4 неможлива). З іншого боку із указаних описів випливає, що додатні ч.в. множини ширини 2 є лівими сумами двох ланцюгів. У наступному пункті ця ситуація узагальнюється на випадок довільних ч.в. множин так званої верхньої ширини 3, а в 2.8.2 вивчається зв'язок між верхньою та нижньою множиною.

Нагадаємо, що шириною $w(S)$ ч.в. множини називається найбільше число її попарно непорівняльних елементів. Введемо два нові поняття. *Верхньою шириною ч. в. множини* S назвемо число $w_+(S) = \max_{T\cong_{(\min,\max)}S} w(T)$, а *нижньою шириною* — число $w_-(S) = \min_{T\cong_{(rmmin,max)}S} w(T)$.

2.8.1. Про частково впорядковані множини верхньої ширини 3. Введемо ще одне поняття. Сума $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_m (m > 0)$ називається *односторонньою*, якщо з точністю до перестановки доданків з $x < y$ і $x \in S_i, y \in S_j$, де $i \neq j$, випливає, що $i < j$. Позначимо через $R_0(S)$ множину усіх пар $(x, y) \in S \times S$ сусідніх елементів x і y (тобто порівняльних елементів x і y, таких, що немає елемента z, що задовольняє нерівності $x < z < y$, якщо $x < y$, і нерівності $x > z > y$, якщо $x > y$). Якщо $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_m$, то число

$$r_0(S) = \frac{1}{2}(|R_0(S)| - \sum_{i=1}^{m} |R_0(S_i)|)$$

називається *рангом* заданої суми. Очевидно, що суми рангу 0 — це прямі суми, і тільки вони.

Нагадаємо, що *ланцюгом* називається будь-яка лінійно впорядкована множина. Елемент ч.в. множини називається вузловим або вузлом, якщо він порівняльний з усіма елементами.

Лема 2.47. *Якщо ч. в. множина* S *ширини* 2 *не містить* *підмножини P виду $\{a, b\} < \{c, d\}$, де a і b (відповідно c і d) непорівняльні, то S є односторонньою сумою двох ланцюгів.*

Зауважимо, що обернене твердження очевидне.

Покажемо спочатку, що множина вузлів S_0 є об'єднанням нижньої та верхньої підмножин. Припустимо, що це не так. Тоді існує вузол f, непорівняльні елементи a, b і непорівняльні елементи c, d, такі, що $\{a, b\} < f < \{c, d\}$. Тому S містить підмножину виду P і дійшли до протиріччя. Отже, S_0 є об'єднанням нижньої підмножини S_{01} та верхньої підмножини S_{02}.

Як ч. в. множина ширини 2 підмножина $S \setminus S_0$ є сумою двох ланцюгів, скажімо, A і B, причому ця сума одностороння, інакше підмножина $S \setminus S_0$, що складається з усіх його мінімальних і максимальних елементів, має вигляд P. Отже (з точністю до перенумерації A та B) немає елементів $a \in A, b \in B$, таких, що $a > b$. Тоді S є односторонньою сумою ланцюгів $S_{01} \cup A = [S_{01} < A]$ та $B \cup S_{02} = [B < S_{02}]$, що і потрібно було довести.

Очевидно, що ч.в. множина має верхню ширину 1 тільки у тому випадку, коли вона складається з одного елемента.

Лема 2.48. *Ланцюг довжини $d > 1$ і пряма сума двох ланцюгів мають верхню ширину 2.*

Дійсно, якщо S — ланцюг довжини $d > 1$, то ч. в. множини виду $S_a^{\uparrow}$ і $S_b^{\downarrow}$ є прямими сумами двох ланцюгів, а якщо S — пряма сума двох ланцюгів A і B, то $S_c^{\uparrow}$ (відповідно $S_c^{\downarrow}$) є прямою сумою двох ланцюгів, якщо ланцюг C ($X = A$ або $C = B$), що містить елемент c, має довжину $d(C) > 1$, і ланцюгом, якщо $d(C) = 1$. Отже, застосовуючи операції вигляду $S_a^{\uparrow}$ і $S_b^{\downarrow}$, в обох випадках ніколи не "вийдемо"за межі ч. в. множин ширини 2. Зі сказаного очевидно випливає твердження леми.

Тепер переходимо до основної теореми.

Теорема 2.49. *Нехай S - ч. в. множина верхньої ширини 3. Тоді S (min, max)-еквівалентна односторонній сумі двох ланцюгів рангу $r > 0$.*

Нехай S — ч. в. множина верхньої ширини 3. Зафіксуємо максимальний елемент a і позначимо через $\{a\}^<$ множину всіх елементів $x \in S$ таких, що $x < a$ (не включаємо в позначення символ S, так як у кожному випадку буде ясно, про яку ч. в. множину йде мова). Тоді при $X = \{a\}^<$ маємо: $S_X^{\uparrow} = X \coprod S'$, де S' — деяка підмножина ч. в. множини $S_X^{\uparrow}$. З того, що верхня ширина S дорівнює 3, випливає, що ширина S' не перевищує двох. З іншого боку, згідно леми 2.48 ширина S' не може бути рівною одиниці. Отже, ширина S' дорівнює двом. А тоді ч. в. множина $T = (S_X^{\uparrow})_a^{\uparrow}$ має також ширину 2, причому a є його вузлом. З того, що a — вузол, випливає, що за будь-якого представлення T у вигляді суми двох ланцюгів (як ч. в. множини ширини 2) ранг цієї суми не дорівнює нулю.

Якщо взяти до уваги лему 2.47, то, щоб завершити доведення теореми, достатньо показати, що T не містить підмножини $P = \{a, b\} < \{c, d\}$, де a і b (відповідно c і d) непорівняльні. Припустимо протилежне і покладемо $Y = \{a\}^< \cup \{b^<\} \cup \{a, b\}$. Тоді в ч. в. множині $T_Y^{\uparrow}$ елементи a, b, c, d попарно непорівняльні, а це неможливо через те, що верхня ширина S (а значить і T) дорівнює 3. Теорему 2.49 доведено.

2.8.2. Зв'язок між нижньою та верхньою шириною. Сформулюємо основну теорему.

Теорема 2.50. *Нехай S – ч. в. множина верхньої ширини $w_+(S) > 1$. Тоді виконується нерівність $\left[\frac{w_+(S)+1}{2}\right] \leq w_-(S) \leq w_+(S) - 1$.*

Для верхньої ширини 2 та 3 доведення теореми випливають із леми 2.48 та теореми 2.49.

Нехай тепер S — ч. в. множина верхньої ширини ≥ 3. Зафіксуємо в ній максимальний елемент a і позначимо через $\{a\}^<$ множину всіх елементів $x \in S$, таких, що $x < a$ (не включаємо в позначення символ S тому що в кожному випадку буде ясно, про яку ч. в. множину йде мова). Тоді при $X = \{a\}^{<}$ маємо: $S_X^{\uparrow} = S' \coprod \{a\}$, де S' — деяка підмножина ч. в. множини $S_X^{\uparrow}$. З того, що верхня ширина S більша за 3, випливає, що ширина S' не перевищує $w_+(S) - 1$. А тоді ширина ч. в. множини $T = (S_X^{\uparrow})_a^{\uparrow}$ не перевищує $w_+(S) - 1$, бо a є його вузлом. Оскільки $w_-(S) \le w_(T)$, то $w_-(S) \le w_+(S) - 1$.

З іншого боку, нехай P — ч. в. множина ширини $w(P) = w_-(S)$. Візьмемо довільну нижню підмножину X. Тоді з рівності $w(P) = w_-(S)$ маємо $w(X) \le w_-(S)$ та $w(P \backslash X) \le w_-(S)$. А отже, $w(P_X^{\uparrow}) \le 2w_-(S)$.

Якщо взяти в P нижню підмножину Y таку, що $Y < (P \backslash X)$, то $Y > (P \backslash X)$ в множині $P_{XY}^{\uparrow\uparrow}$, а тому ширина $P_{XY}^{\uparrow\uparrow}$ не може бути більшою за ширину $P_X^{\uparrow}$. Отже, для довільної множини T (min,max)-еквівалентної множині S $w(T) \le 2w_-(S)$, звідки $w_-(S) \ge \frac{w_+(S)}{2}$.

Легко перевірити, що якщо верхня ширина множини S парна, то

$$w_-(S) \ge \frac{w_+(S)}{2} = \left[\frac{w_+(S)}{2}\right] = \left[\frac{w_+(S)+1}{2}\right]$$

Якщо ж верхня ширина множини S непарна, то з того, що $w_-(S)$ натуральне, випливає

$$w_-(S) \ge \frac{w_+(S)+1}{2} = \left[\frac{w_+(S)+1}{2}\right]$$

Теорема 2.50 доведена.

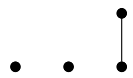
Приклади. Розглянемо спочатку наступний простий приклад.

Приклад 1. $S = \{1, 2, 3 \mid 2 \prec 3\}$.

До даної множини (min)-еквівалентною є множина $T = \{1, 2, 3 \mid 2 \prec 3 \prec 1\}$. Тому $w_+(S) = 2$ та $w_-(S) = 1$, що задовольняє теоремі 2.50.

У більш складних випадках, щоб зменшити перебір, будемо користуватися алгоритмом 2.2.4.

Приклад 2. $S = \{1, 2, 3, 4 \mid 3 \prec 4\}$.



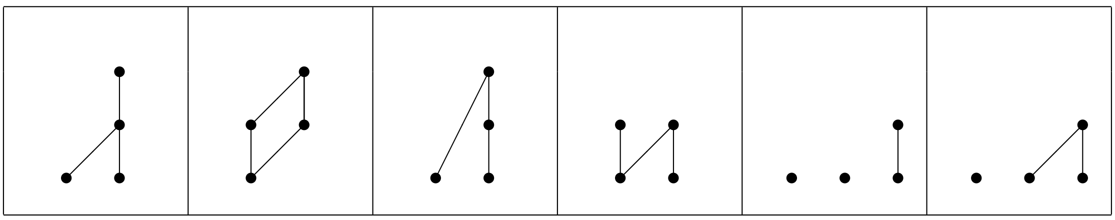
Крок I. Опишемо (з точністю до ізоморфізму) всі нижні підмножини в множині S. Ними будуть: $A_1 = \varnothing$, $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{1,2\}$, $A_5 = \{1,3\}$,$A_6 = \{3,4\}$, $A_7 = \{1,2,3\}$, $A_8 = \{1,3,4\}$.

Позначимо через S_i ч. в. множину $S_X^{\uparrow}$ при $X = A_i$, а через T_i – i-ту ч. в. множину з таблиці, яка нижче. Тоді легко переконатися в тому, що $S_1 \cong T_5$, $S_2 \cong T_3$, $S_3 \cong T_6$, $S_4 \cong T_1^{\mathrm{op}}$, $S_5 \cong T_4$, $S_6 \cong T_1$, $S_7 \cong T_6^{\mathrm{op}}$, $S_8 \cong T_3^{\mathrm{op}}$.

Крок II. Опишемо (з точністю до ізоморфізму) всі пари (Y, X) нижніх власних підмножин в множині S, такі, що $X \subseteq Y$ і $X < S \setminus Y$. Ними будуть: $B_1 = (A_7, \{3\})$.

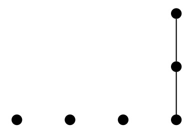
Позначимо через S_i' ч. в. множину $(S_Y^{\uparrow})_X^{\uparrow}$ при $(Y, X) = B_i$; очевидно, $S_i' = (S_i)_X^{\uparrow}$. Тоді легко переконатися в тому, що $S_1' \cong T_2$.

Крок III. Отже, бачимо, що в I і II кожна із ч. в. множин T_i і T_i^{op}, де $i = 1, 2, \ldots, 6$ зустрічається один раз (при цьому, якщо $T_i^{\mathrm{op}} \cong T_i$, то T_i зустрічається, а T_i^{op} немає).



Отже, $w_+(S) = 3$ та $w_-(S) = 2$, що задовольняє теоремі 2.50.

Приклад 3. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \mid 4 \prec 5 \prec 6\}$.



Крок I. Опишемо (з точністю до ізоморфізму) всі нижні підмножини в множині S. Ними будуть: $A_1 = \varnothing$, $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \{4\}$, $A_4 = \{1,2\}$, $A_5 = \{1,4\}$,$A_6 = \{4,5\}$, $A_7 = \{1,2,3\}$, $A_8 = \{1,2,4\}$, $A_9 = \{1,4,5\}$,

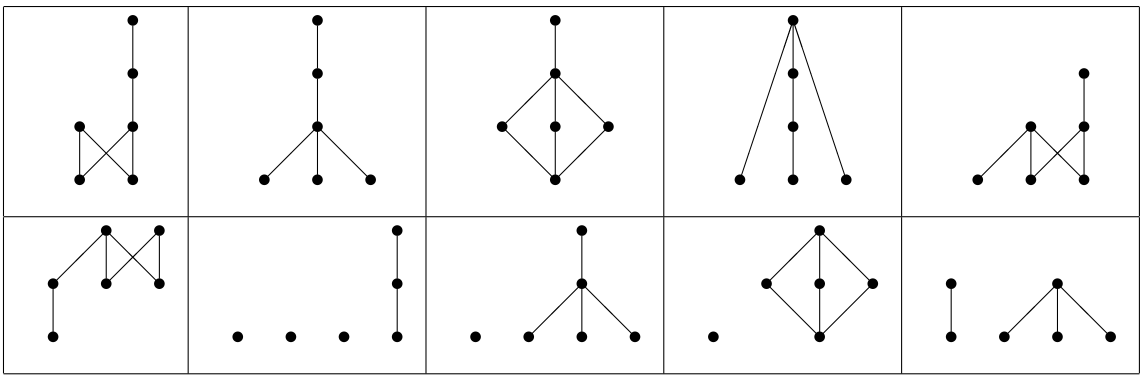
$A_{10} = \{4,5,6\}$, $A_{11} = \{1,2,3,4\}$, $A_{12} = \{1,2,4,5\}$, $A_{13} = \{1,4,5,6\}$, $A_{14} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{15} = \{1,2,4,5,6\}$.

Позначимо через S_i ч. в. множину $S_X^{\uparrow}$ при $X = A_i$, а через T_i – i-ту ч. в. множину з таблиці, яка нижче. Тоді легко переконатися в тому, що $S_1 \cong T_7$, $S_2 \cong T_4$, $S_3 \cong T_{10}$, $S_4 \cong T_1^{\mathrm{op}}$, $S_5 \cong T_6$, $S_6 \cong T_8$, $S_7 \cong T_2^{\mathrm{op}}$, $S_8 \cong T_5^{\mathrm{op}}$, $S_9 \cong T_5$, $S_{10} \cong T_2$, $S_{11} \cong T_8^{\mathrm{op}}$, $S_{12} \cong T_6^{\mathrm{op}}$, $S_{13} \cong T_1$, $S_{14} \cong T_{10}^{\mathrm{op}}$, $S_{15} \cong T_4^{\mathrm{op}}$.

Крок II. Опишемо (з точністю до ізоморфізму) всі пари (Y, X) нижніх власних підмножин в множині S, такі, що $X \subseteq Y$ і $X < S \setminus Y$. Ними будуть: $B_1 = (A_{11}, \{4\})$, $B_2 = (A_{14}, \{4\})$, $B_3 = (A_{14}, \{4,5\})$.

Позначимо через S_i' ч. в. множину $(S_Y^{\uparrow})_X^{\uparrow}$ при $(Y, X) = B_i$; очевидно, $S_i' = (S_i)_X^{\uparrow}$. Тоді легко переконатися в тому, що $S_1' \cong T_3^{\mathrm{op}}$, $S_2' \cong T_9$, $S_3' \cong T_3$.

Крок III. Легко бачити, що в I і II кожна із ч. в. множин T_i і T_i^{op}, де $i = 1, 2, \ldots, 10$ зустрічається один раз (при цьому, якщо $T_i^{\mathrm{op}} \cong T_i$, то T_i зустрічається, а T_i^{op} немає).



Таким чином, $w_+(S) = 4$ та $w_-(S) = 2$, що задовольняє теоремі 2.50.

2.9. Опис максимальних додатних частково впорядкованих множин

Оскільки серед серійних додатних ч.в. множин немає максимальних, то будемо розглядати лише несерійні множини. Наступна теорема класифікує всі додатні множини S, які є максимальними (тобто не містяться в інших несерійних додатних множинах як повні підмножини).

Теорема 2.51. *Нехай S — додатна несерійна ч.в. множина. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(1) *S — максимальна;*

(2) *S має порядок 7;*

(3) *S є ізоморфна або антиізоморфна множині з теореми 2.46.*

Доведення. Імплікація (3) $\Rightarrow$ (2) очевидна і (2) $\Rightarrow$ (1) випливає з теореми 1.8. Імплікація (2) $\Rightarrow$ (3) випливає з Теорема 2.46.

Очевидно, що для завершення доведення теореми достатньо довести імплікацію (1) $\Rightarrow$ (2). Оскільки S і S^{op} є одночасно максимальними чи не максимальними, усі подальші міркування може бути виконано з точністю до дуальності.

Отже, по суті, потрібно показати, що всі множини, зазначені в Теоремах 2.44 і 2.45 не є максимальними. Це випливає з наступних фактів, які легко перевірити:

(c.1) $5.1 \cong 7.7\backslash\{b_4, b_5\}$, $5.2 \cong 7.36\backslash\{c_1, c_2\}$, $5.3 \cong 7.10\backslash\{b_4, b_5\}$, $5.4 \cong 7.21\backslash\{b_5, b_6\}$, $5.5 \cong 7.23\backslash\{b_5, b_6\}$, $5.6 \cong 7.41\backslash\{c_3, c_4\}$, $5.7 \cong 7.29\backslash\{a_2, a_3\}$, $5.8 \cong 7.46\backslash\{c_3, c_4\}$, $5.9 \cong 7.61\backslash\{c_4, c_5\}$, $5.10 \cong 7.63\backslash\{b_4, b_5\}$;

(c.2) $6.1 \cong 7.2^{op}\backslash\{b_1\}$, $6.2 \cong 7.6\backslash\{b_4\}$, $6.3 \cong 7.7\backslash\{b_5\}$, $6.4 \cong 7.1\backslash\{a_3\}$, $6.5 \cong 7.2\backslash\{a_3\}$, $6.6 \cong 7.10\backslash\{b_5\}$, $6.7 \cong 7.3\backslash\{b_3\}$, $6.8 \cong 7.4\backslash\{a_3\}$, $6,9 \cong 7,3^{op}\backslash\{b_1\}$, $6.10 \cong 7.15\backslash\{b_4\}$, $6.11 \cong 7.19\backslash\{b_4\}$, $6.12 \cong 7.21\backslash\{b_6\}$, $6.13 \cong 7.8\backslash\{a_2\}$, $6.14 \cong 7.23\backslash\{b_6\}$, $6,15 \cong 7,16^{op}\backslash\{b_1\}$, $6.16 \cong 7.29\backslash\{a_3\}$, $6.17 \cong 7.33\backslash\{c_3\}$, $6.18 \cong 7.41\backslash\{c_4\}$, $6.19 \cong 7.42\backslash\{c_4\}$, $6.20 \cong 7.32\backslash\{b_3\}$, $6.21 \cong 7.45\backslash\{c_4\}$, $6.22 \cong 7.46\backslash\{c_4\}$, $6.23 \cong 7.33\backslash\{a_2\}$, $6.24 \cong 7.48\backslash\{c_3\}$, $6.25 \cong 7.50\backslash\{b_4\}$, $6.26 \cong 7.52\backslash\{c_4\}$, $6.27 \cong 7.56\backslash\{c_3\}$, $6.28 \cong 7.61\backslash\{c_5\}$, $6.29 \cong 7.47\backslash\{b_2\}$, $6.30 \cong 7.63\backslash\{b_5\}$, $6.31 \cong 7.64\backslash\{b_5\}$, $6.32 \cong 7.66\backslash\{c_4\}$.

Теорему 2.51 доведено.

$\square$

Підмножина X множини S називається *нижньою* (відповідно, верхньою), якщо $x \in X$ тоді коли $x < y$ (відповідно $x > y$) і $y \in X$. Назвемо підмножину *екстремальною*, якщо вона нижня або верхня.

З доведення теореми 2.51 випливає наступна теорема.

Теорема 2.52. *Нехай $n, m \in \{5, 6, 7\}$ і $n < m$. Тоді для будь-якої несерійної додатної множини S порядку n, існує несерійна додатна множина T порядку m така, що S ізоморфна підмножині T. Можна вважати, що образ ізоморфізму є екстремальною підмножиною.*

Доведення. Випадок $n = 5, m = 7$ випливає з $(c.1)$ і випадок $n = 6, m = 7$ з $(c.1)$ (див. доведення теореми 2.51).

Випадок $n = 5$, $m = 6$ випливає з ізоморфізмів $5.1 \cong 6.3\backslash\{b_4\}$, $5.2 \cong 6.1^{op}\backslash\{b_1\}$, $5.3 \cong 6.6\backslash\{b_4\}$, $5.4 \cong 6.12\backslash\{b_5\}$, $5.5 \cong 6.14\backslash\{b_4\}$, $5.6 \cong 6.18\backslash\{c_3\}$, $5.7 \cong 6.169\backslash\{a_2\}$, $5.8 \cong 6.22\backslash\{c_3\}$, $5.9 \cong 6.28\backslash\{c_4\}$, $5,10 \cong 6,30\backslash\{b_4\}$.

Очевидно, в будь-якому випадку $n = 5$, $m = 7$, $n = 6$, $m = 7$, $n = 5$, $m = 6$ усі праві частини ізоморфізмів є нижніми підмножинами у додатних множинах порядку 7, 7, 6 відповідно.

Зауважимо, що $S \cong T$ означає $S^{op} \cong T^{op}$. Отже, якщо повторити попередні міркування для всіх множин дуальних до тих, що містяться в теоремах 2.44, 2.45 і 2.46, отримуємо що праві частини ізоморфізмів є верхніми підмножинами.

Теорема 2.52 доведена.

$\square$

Нарешті, маємо наступну теорему, яка випливає з теореми 2.52 і класифікації серійних додатних множин [9], [10].

Теорема 2.53. *Нехай m — натуральне число. Для немаксимальної додатної множини S порядку m, існує додатна множина T порядку $m + 1$ така, що S ізоморфна підмножині T.*

2.10. Опис мінімальних додатних несерійних частково впорядкованих множин

Наступна теорема класифікує всі несерійні додатні множини S, які є мінімальними (тобто не містять несерійних повних підмножин).

Теорема 2.54. *Нехай S — несерійна додатна множина. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(1) *S є мінімальна;*

(2) *S має порядок 5;*

S є ізоморфна або антиізоморфна множині з теореми 2.44.

Доведення. Імплікація (3) $\Rightarrow$ (2) очевидна і (2) $\Rightarrow$ (1) випливає з теореми 1.8. Імплікація (2) $\Rightarrow$ (3) випливає з теореми 2.44.

Очевидно, що для завершення доведення теореми достатньо довести імплікацію (1) $\Rightarrow$ (2). Оскільки S і S^{op} є водночас мінімальними чи не мінімальними, усі подальші міркування може бути виконано з точністю до дуальності.

Отже, по суті, потрібно показати, що всі множини, зазначені в Теоремах 2.45 і 2.46 не є мінімальними. Це випливає з наступних фактів, які легко перевірити:

(a.1) кожна з множин 6.1–6.2, 6.4–6.9, 6.13, 6.15–6.16, 6.26–6.27, 6.31–6.32 теореми 2.45 без елемента b_1 є ізоморфною або антиізоморфною одній з множин з Теореми 2.44;

(a.2) кожна з множин 6.6, 6.10–6.11, 6.14, 6.21–6.22, 6.24, 6.28 теореми 2.45 без елемента a_1 є ізоморфною або антиізоморфною одній з множин з Теореми 2.44;

(a.3) кожна з множин 6.17–6.20, 6.23, 6.25, 6.29–6.30 теореми 2.45 без елемента c_1 є ізоморфною або антиізоморфною одній з множин з Теореми 2.44;

(a.4) кожна з множин 6.3, 6.12 теореми 2.45 без елемента b_4 є ізоморфною або антиізоморфною одній з множин з Теореми 2.44;

(b.1) кожна з множин 7.1–7.6, 7.8–7.9, 7.11–7.14, 7.16–7.17, 7.20, 7.22, 7.24, 7.26–7.27, 7.29, 7.35–7.39, 7.51–7.60, 7.64–7.66 теореми 2.46 без елемента b_1 є ізоморфною або антиізоморфною одній з множин з Теореми 2.45;

(b.2) кожна з множин 7.10, 7.15, 7.18–7.19, 7.23, 7.25, 7.28, 7,45–7,46, 7,48, 7,61 теореми 2.46 без елемента a_1 є ізоморфною або антиізоморфною одній з множин з Теореми 2.45;

(b.3) кожна з множин 7.10, 7.15, 7.18–7.19, 7.23, 7.25, 7.28, 7,45–7,46, 7,48, 7,61 теореми 2.46 без елемента a_1 є ізоморфною або антиізоморфною одній з множин з Теореми 2.45;

(b.4) кожна з множин 7.30–7.24, 7.40–7.44, 7.47, 7.49–7.50, 7.62–7.63 теореми 2.46 без елемента c_1 є ізоморфною або антиізоморфною одній з множин з Теореми 2.45;

(b.5) кожна з множин 7.7, 7.21 теореми 2.46 без елемента b_4 є ізоморфною або антиізоморфною одній з множин з Теореми 2.45. □

2.11. Додатні частково впорядковані множини і графи Хассе

2.11.1. Квазілацюгова система мінімаксних твірних для додатних ч.в. множин. Ми називаємо ч.в. множину квазіланцюговою, якщо її діаграма Хассе є ланцюгом.

Теорема 2.55. *Класи серійних і несерійних ч.в. множин мають мінімаксні системи квазіланцюгових ч.в. множин.*

Розглянемо спочатку випадок серійних ч.в. множин.

Нехай S – серійна множина (див. теорему 2.43. Із означення $S_x^{\uparrow}$ маємо наступні твердження:

(1) якщо S має вигляд (1), $S := S_{1ks} = \{a = a_1 < \ldots < a_k\} \coprod \{b = b_1 < \ldots b_s\}$, тоді (при $k \neq 0$) $S_a^{\uparrow} \cong S_{1,k-1,s+1}$ і $S_b^{\uparrow} \cong S_{1,k+1,s-1}$;

(2) якщо S має вигляд (2), $S := S_{2ks} = \{a = a_1 < \ldots < a_k\} \coprod \{b = b_1 < \ldots b_s\}$ із $a_1 < b_s$, тоді $S_a^{\uparrow}$ ізоморфна множині $\{a_2 < \ldots < a_k\} \coprod \{b_1 < \ldots b_{s-1} < (b_s, a_1)\}$ вигляду (3) (або $S_{3,k-1,s,s-1}$ в запису (3)) і (при $s > 1$) $S_b^{\uparrow} \cong S_{2,k+1,s-1}$;

(3) якщо S має вигляд (3), $S := S_{3kst} = \{a = a_1 < \ldots < a_k\} \coprod \{b = b_1 < \ldots b_t < (c, d) < b_{t+1} < \ldots < b_{s-1}\}$, тоді (при $k \neq 0$) $S_a^{\uparrow} \cong S_{3,k-1,s+1,t}$, $S_b^{\uparrow} \cong S_{3,k+1,s-1,t-1}$, коли $t \neq 0$, і $S_c^{\uparrow} \cong S_{2,s,k+1}$, коли $t = 0$.

Простий аналіз показує, що із цих тверджень маємо наступне: ч.в. множини $S_{1,0,n}$, де n пробігає $\mathbb{N}$, і $S_{2,1,m}$, де m пробігає $\mathbb{N} \setminus 1$, утворюють мінімальну мінімаксну систему квазіланцюгових твірних для класу серійних додатних ч.в. множин.

Теорема 2.55 для серійних ч.в. множин доведена.

Розглянемо тепер випадок несерійних ч.в. множин (див. таблицю в теоремі 1.10, в якій множини виписані з точністю до ізоморфізму і дуальності).

Твердження 2.56. *Всі несерійні додатні ч.в. множини діляться 8 класів мінімаксного ізоморфізму:*

(I) 1, 2, 3, $\overline{4}$, 46, 47, $\overline{49}$;

(II) 5, 48, $\overline{50}$;

(III) 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 $\overline{13}$, 51, 52, 53, 54, 57, 60, $\overline{61}$;

(IV) 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 55, 56, 58, 59, $\overline{62}$, $\overline{63}$, 64, $\overline{65}$, $\overline{66}$, 67;

(V) 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, $\overline{28}$, 29, 30, 68, 69, 70, 71, 76, 77, 79, 87, $\overline{88}$, 89;

(VI) 31, 32, 36, 37, 40, 41, 43, 72, 74, 80, 81, 82, 86, $\overline{90}$, $\overline{92}$, 94, 96, $\overline{98}$, 99, 103, 108;

(VII) 33. 34, 35, 38, 39, 42, 44, 73, 75, 78, 83, 84, 91, 93, $\overline{95}$, 97, $\overline{100}$, $\overline{102}$, 104, 106, 107;

(VIII) 45, 85, $\overline{101}$, 105.

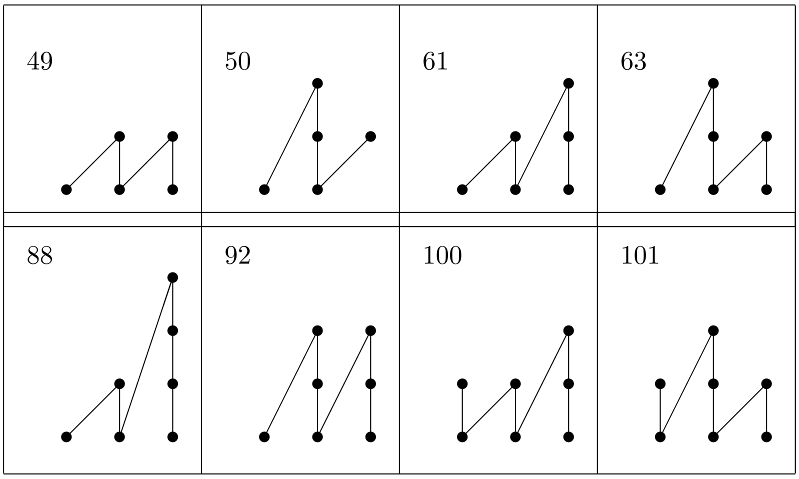
Підкреслені зверху множини (і лише вони) є квазіланцюговими.

Твердження випливає з результатів роботи [9], але потрібні деякі пояснення.

В [9] показано (якщо користуватися термінологією підрозділу 2.3), що множина ч.в. множин ширини 2 $M = \{1, 5, 6, 14, 21, 31, 33, 45\}$ разом з множиною M^{op} (яка складається із відповідних дуальних ч.в. множин) утворює мінімальну мінімаксну систему твірних для всіх несерійних додатних ч.в. множин. Більш того, із доведень в [9] маємо, що кожна ч.в. множина із таблиці і множина, дуальна до неї, мінімаксно ізоморфна деякій ч.в. множиі із M. Іншими словами, кожний клас мінімаксного ізоморфізму є замкнутим відносно дуальності. Таким чином, і сама множина M є мінімальною мінімаксною системою твірних для несерійних додатних ч.в. множин. Тому в умові твердження 2.56 ч.в. множини виписані лише з точністю до ізоморфізму.

Тепер уже із твердження 2.56 випливає теорема 2.55 для несерійних ч.в. множин.

В якості мінімальної мінімаксної системи твірних із квазіланцюгових множин (для класу несерійних ч.в. множин) можна взяти, наприклад, таку систему:



2.11.2. Наявність каркасів Динкіна для несерійних ч.в. множин з додатною квадратичною формою Тітса У цьому пункті під графом мається на увазі скінченний неорієнтований граф. Під підграфом графа $G = (G_0, G_1)$ з множиною вершин G_0 та множиною ребер G_1 розуміємо будь-який граф $G' = (G'_0, G'_1)$ з $G'_0 \subseteq G_0$ та $G'_1 \subseteq G_1$. Під підмножиною S' ч.в. множини S завжди розуміємо повну підмножину (тобто з відношенням порядку, індукованим заданим відношенням на S).

Ч.в. множина $S = (A, \leq)$ зазвичай зображується сагайдаком $Q = (Q_0, Q_1)$, де $Q_0 = A$ та Q_1 складається зі стрілок $(x, y) : x \to y$ таких, що $x < y$ та x, y сусідні (тобто немає z, що задовольняє $x < z < y$). Позначаємо сагайдак Q через $\overrightarrow{H}(S)$, але під діаграмою Хассе S замість цього сагайдака ми маємо на увазі відповідний йому неорієнтований граф $H(S)$. У цьому випадку діаграма Хассе на площині зображується таким чином, що ребро (x, y), де $x < y$, завжди йде вгору від x до y. Для підграфа F графа $H(S)$ позначимо через $F^{\leq}$ відповідну підмножину S (тоді $H(F^{\leq}) = F$).

Нехай G — зв'язний граф (для наших цілей достатньо розглянути тільки прості графи, тобто без петель і кратних ребер). Мінімальна кількість $cr(G)$ ребер, які необхідно видалити, щоб отримати граф без циклів, називається *циклічним* або *цикломатичним рангом* G. Якщо такі ребра фіксовані, то граф, який залишається, називається *каркасом* G. Циклічний ранг можна легко обчислити за формулою $cr(G) = m - n + 1$, де m і n кількістю ребер і вершин G відповідно, і дорівнює кількості незалежних циклів в G. Докладніше про цю тему див. [127, 128].

Переходимо безпосередньо до формулювання основних теорем.

Ч.в. множина S називається *зв'язною*, якщо такою є її діаграма Хассе. Елемент множини S називається *вузловим*, якщо він порівняльний з усіма іншими елементами. Для простоти пишемо $\overline{cr}(S)$ замість $cr[H(S)]$.

Теорема 2.57. *Нехай є будь-яка зв'язна несерійна додатна ч.в. множина S, $\overline{cr}(S) < 3$. Якщо $\overline{cr}(S) = 2$, то S має такий вузловий елемент x, що $\overline{cr}(S \setminus x)] = 1$.*

Теорема 2.58. *Нехай S — зв'язна несерійна додатна множина. Тоді граф Хассе $H(S)$ має такі каркаси F, що*

(1) *граф F додатний;*

(2) *множина $F^{\leq}$ додатна.*

За результатами П. Габрієля [1], (1) еквівалентна наступній умові: F — діаграма Динкіна з простою схемою (тобто A_n, D_m, E_6, E_7, E_8).

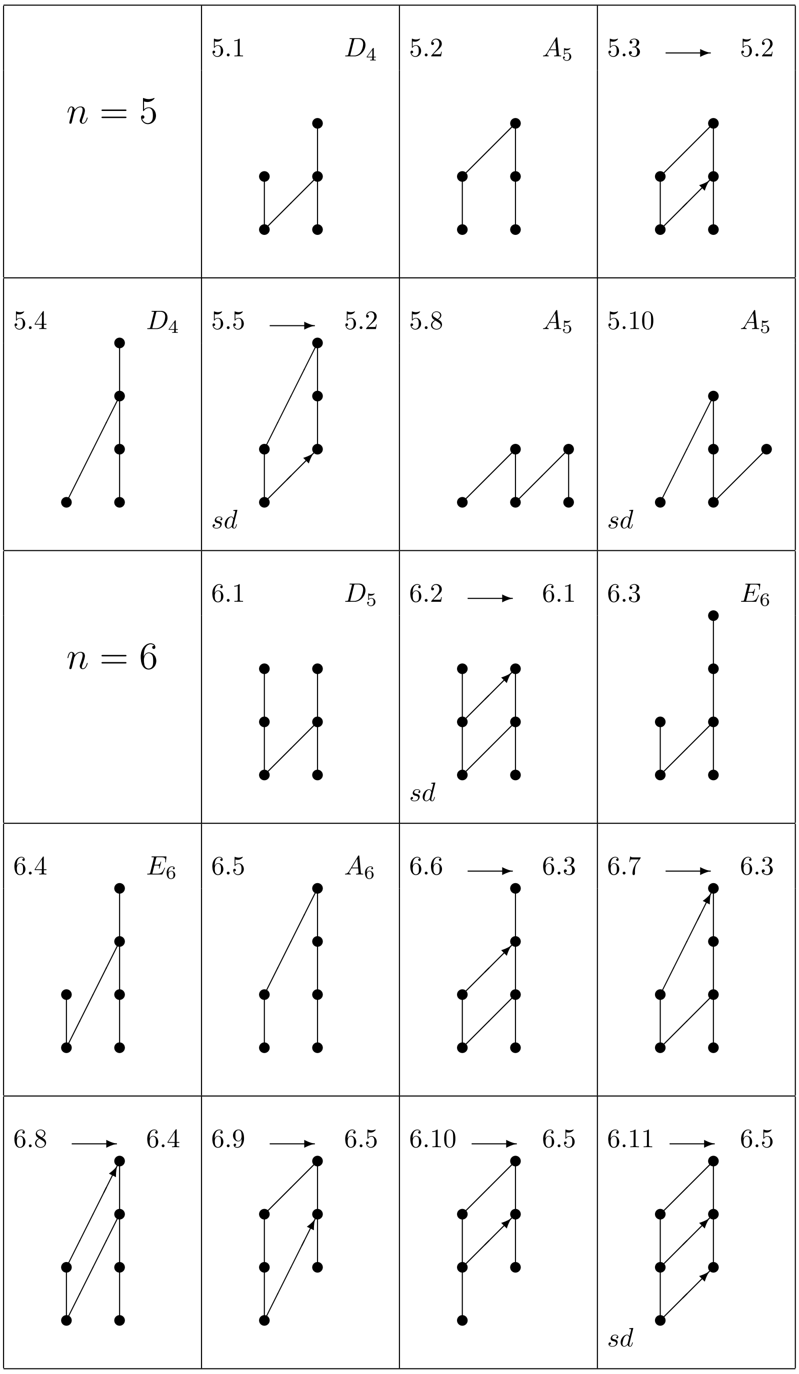
Неважко помітити, що теореми випливають із класифікації Таблиці A, що додається нижче у складі модифікованої класифікації (див. теореми 2.44, 2.45 і 2.46) разом з додатковою інформацією для кожної діаграми Хассе, пронумерованою $p.q$ у верхньому лівому куті. А саме:

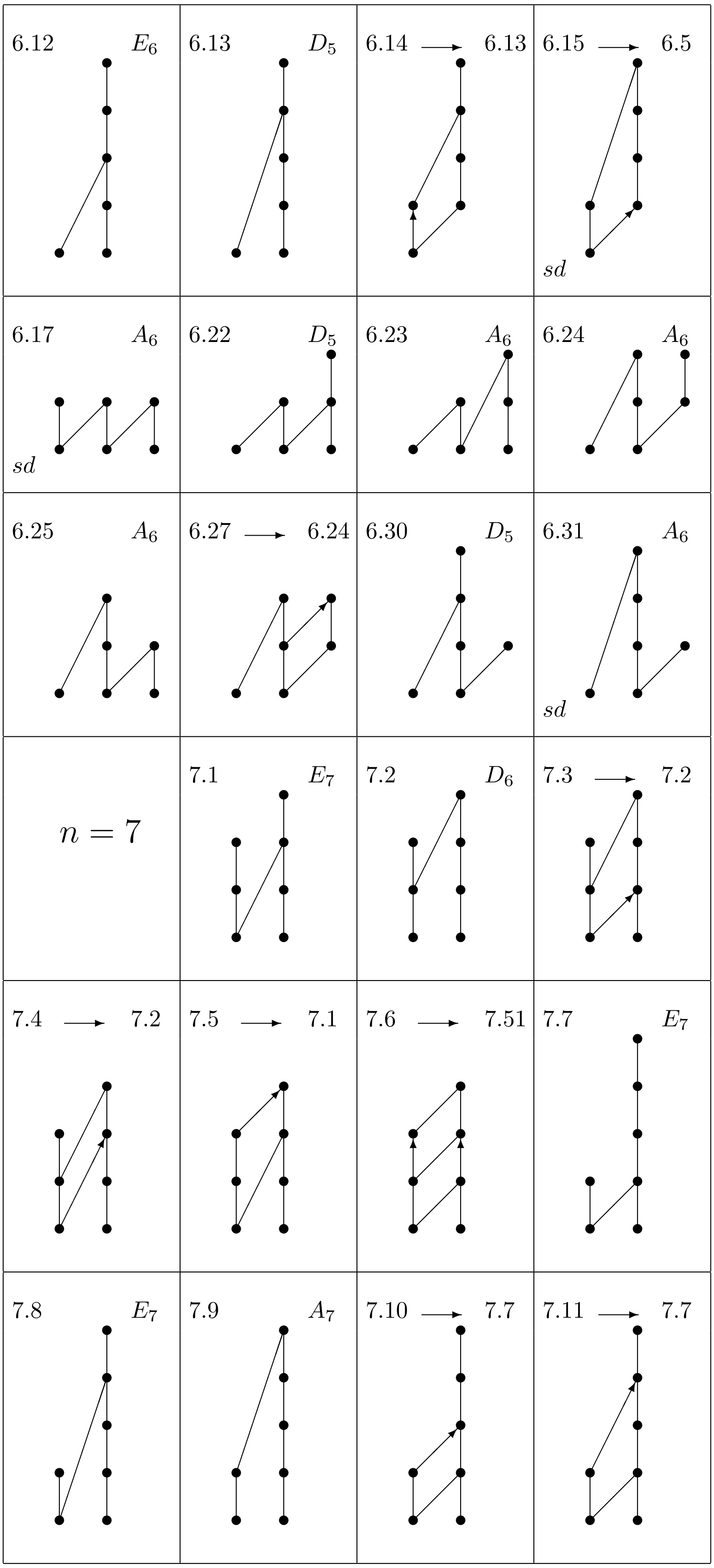
(a) якщо граф $p.q$ ациклічний, то він ізоморфний діаграмі Динкіна, яка вказана у верхньому правому куті;

(b), якщо граф $p.q$ має цикл, верхній рядок $p.q \to s.t$ означає, що граф $s.t$ є каркасом для графа $p.q$ після видалення ребер, виділених стрілками (спрямованих ребер).

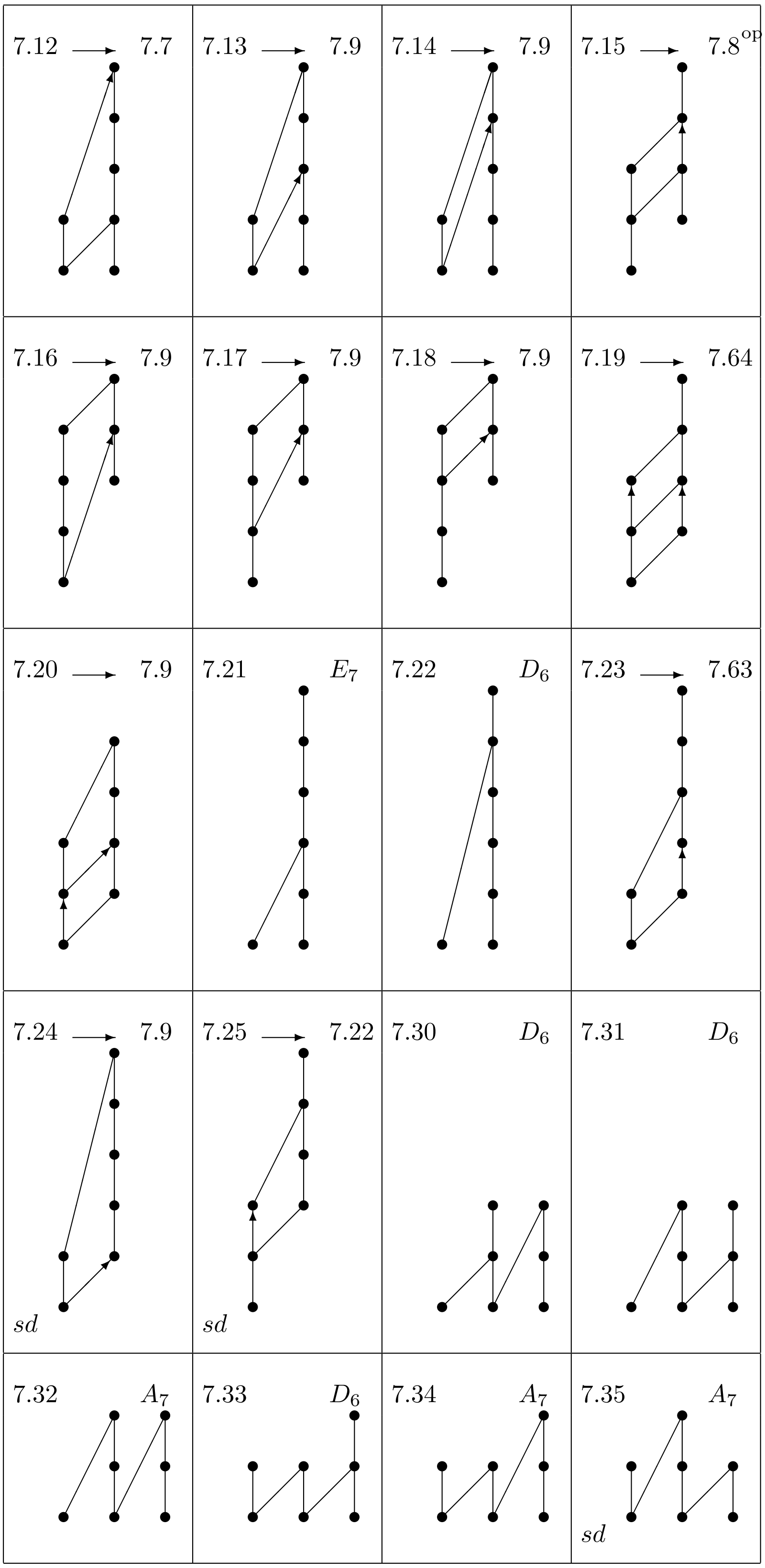
Слід також використати згаданий результат П. Габріеля.

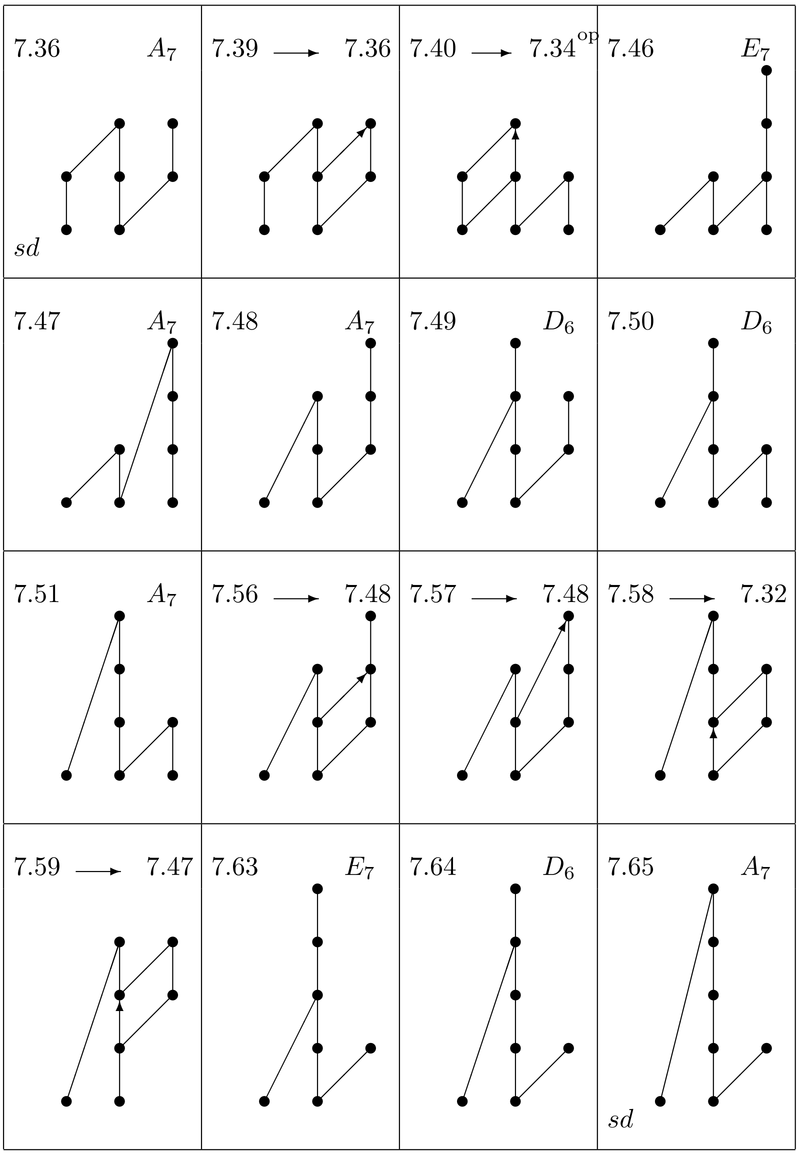
Таблиця А зв'язних несерійних додатних множин з точністю до ізоморфізму та дуальності (з додатковою інформацією).





6.12 E_6
6.13 D_5
6.14 $\longrightarrow$ 6.13
6.15 $\longrightarrow$ 6.5
sd
6.17 A_6
sd
6.22 D_5
6.23 A_6
6.24 A_6
6.25 A_6
6.27 $\longrightarrow$ 6.24
6.30 D_5
6.31 A_6
sd
$n = 7$
7.1 E_7
7.2 D_6
7.3 $\longrightarrow$ 7.2
7.4 $\longrightarrow$ 7.2
7.5 $\longrightarrow$ 7.1
7.6 $\longrightarrow$ 7.51
7.7 E_7
7.8 E_7
7.9 A_7
7.10 $\longrightarrow$ 7.7
7.11 $\longrightarrow$ 7.7


7.12 $\longrightarrow$ 7.7
7.13 $\longrightarrow$ 7.9
7.14 $\longrightarrow$ 7.9
7.15 $\longrightarrow$ 7.8^{op}
7.16 $\longrightarrow$ 7.9
7.17 $\longrightarrow$ 7.9
7.18 $\longrightarrow$ 7.9
7.19 $\longrightarrow$ 7.64
7.20 $\longrightarrow$ 7.9
7.21 E_7
7.22 D_6
7.23 $\longrightarrow$ 7.63
7.24 $\longrightarrow$ 7.9
sd
7.25 $\longrightarrow$ 7.22
sd
7.30 D_6
7.31 D_6
7.32 A_7
7.33 D_6
7.34 A_7
7.35 A_7
sd



Зауважимо, що в доведенні не розглядаються множини, дуальні тим, що розташовані в таблиці (за винятком самодуальних, позначених як sd), оскільки всі властивості множин, що вивчаються, є замкнутими над дуальністю.

2.11.3. Зображувальний тип графів Хассе вузлових розширень додатних ч.в. множин. У теорії зображень груп, напівгруп, алгебр, сагайдаків, ч.в. множин тощо основною задачею є опис зображень над полем з точністю до еквівалентності. Але в більшості випадків це неможливо, бо задача про опис зображень містить в собі класичну задачу про пару матриць (тобто задачу про приведення пари квадратних матриць одночасними перетвореннями подібності). Такі задачі про опис (а також самі об'єкти) називаються дикого зображувального типу або просто дикими, а всі інші – ручного зображувального типу або просто ручними (точні означення приведені в статтях [3], [4]). Частинним випадком ручних задач є задачі скінченного зображувального типу; в цьому випадку число нерозкладних зображень з точністю до еквівалентності скінченне. Теорія зображень розвивається багато десятиліть; щодо результатів про знаходження зображувального типу див., зокрема, роботи [1, 5, 7, 12, 16, 27, 28, 30, 31, 90, 103, 104, 109, 120], [129]–[136].

Серед робіт про зображувальний тип особливе місце займає стаття [137]. Із основного результату (якщо його переформулювати в матричній формі) маємо таку задачу: з парою квадратних комутуючих нільпотентних матриць A, B над полем можна робити не лише одночасно одні й ті ж самі перетворення подібності, а й замінювати пару A, B на пару $\overline{A} = aA + bB$, $\overline{B} = cA + dB$, де a, b, c, d — такі елементи поля, що вектори (a, b) і (c, d) лінійно незалежні. У роботі [137] доведено, що ця задача є дикою.

У статті здобувача [62] (якому належать основні обчислення) розглядається узагальнення цієї задачі на "поліноміальну" лінійну комбінацію. Більш точно, нехай $P = (A, B)$ і $\overline{P} = (\overline{A}, \overline{B})$ — дві пари комутуючих нільпотентних матриць над полем K. Будемо говорити, що пара P поліноміально еквівалентна парі $\overline{P}$ і писати $P \sim_{K[x]} \overline{P}$, якщо $\overline{A} = f(A, B), \overline{B} = g(A, B)$ для деяких поліномів $f, g \in K[x, y]$ над полем K, що задовольняють умови

$$f(0,0) = 0, g(0,0) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{df}{dx}(0,0) & \frac{df}{dy}(0,0) \\ \frac{dg}{dx}(0,0) & \frac{dg}{dy}(0,0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доведено, що задача про опис пари матриць вказаного типу з точністю до поліноміальної еквівалентності є дикою.

Тепер переходимо до ч.в. множини S і через $\overrightarrow{H}(S)$ будемо позначати її граф Хассе як орієнтовний граф, у якому будь-які 2 шляхи з тими ж самими початковою і кінцевою вершинами рівні. Згідно підрозділу 1.4 такий граф називається комутативним сагайдаком.

Нагадаємо (див. підрозділ 2.1), що підмножина U ч.в. множини S називається щільною, якщо $U = S \setminus (X \cup Y)$ для деякої нижньої підмножини X і деякої верхньої підмножини Y ($X = \varnothing$ чи $T = \varnothing$ не виключається, тобто нижні і верхні підмножини вважаються щільними). Назвемо повний щодо стрілок підсагайдак V сагайдака $\overrightarrow{H}(S)$ нижнім, верхнім чи щільним, якщо відповідна йому підмножина ч.в. множини S є відповідно нижньою, верхньою чи щільною. Тоді теорему 1.5 в випадку ч.в. множин можна сформулювати наступним чином.

Теорема 2.59. *Комутативний сагайдак $\overrightarrow{H}(S)$ має скінченний зображувальний тип над полем k тоді і лише тоді, коли він не містить, з точністю до дуальності (антиізоморфізму), ні одного зі щільних підсагайдаків, що мають вигляд, вказаний в теоремі 1.5 (там де напрямок стрілок не вказаний, він може бути довільним).*

Для ч.в. множини S покладемо $S = S^{(1)} \cup \infty$, де $x < \infty$ для довільного $x \in S$. Таку ч.в. множину назвемо (верхнім) вузловим розширенням порядку 1 множини S.

Наслідок 2.60. *Якщо ч.в. множина S додатна, то комутативний сагайдак $\overrightarrow{H}(S^{(1)})$ (а зачить і $\overrightarrow{H}(S)$) має скінченний зображувальний тип над полем k.*

Це твердження вперше вказане в кандидатській дисертації здобувача (Стьопочкіна М.В. (MIN,MAX)-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ СКІНЧЕННИХ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН ТА ДОДАТНА

ВИЗНАЧЕНІСТЬ КВАДРАТИЧНОЇ ФОРМИ ТІТСА, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ-2007); див. Теорему 5.3.

Поняття вузлового розширення порядку 1 можна узагальнити на довільний порядок $m > 1$. А саме, вузловим розширенням порядку m ч.в. множини S назвемо будь-яку множину вигляду $S^{(m)} = S \cup L$, де L — ланцюг і $S < L$ в сенсі $x < y$ для довільних $x \in S, y \in L$.

Основним результатом цієї частини дисертації є наступна теорема.

Теорема 2.61. *Комутативний сагайдак $\overrightarrow{H}(S^{(m)})$ розширення порядку m несерійної додатної ч.в. множини S має скінченний зображувальний тип над полем k тоді і лише тоді, коли будь-який його верхній підсагайдак без циклів є (без врахування напрямків стрілок) діаграмою Динкіна.*

Теорема випливає із теореми 2.59, наслідка 2.60, теореми Габріеля 1.3 і наступного твердження.

Твердження 2.62. *Нехай G — комутативний сагайдак з циклом, який входить в перелік сагайдаків в теоремі 1.5 і має такий напрямок стрілок, що всі (направлені) шляхи закінчуються в одній і тій же вершині. Тоді відповідна йому ч.в. множина S не є додатною. Більш того, якщо $S \setminus S_0^+$, де S_0^+ — найбільша верхня підмножина S з вузлових елементів, не є серійною додатною, то вона не є і несерійною додатною.*

Дійсно, така ч.в. множина не може бути несерійною додатною, бо її порядок більший семи (див. пункт 2.7.2). Якщо ж вона серійна, то згідно пункту 2.7.1 є майже ланцюгом (тобто існує елемент, відкинувши який, отримаємо ланцюг), і легко бачити, що такій ч.в. множині не відповідає ні один сагайдак із теореми 1.5. Далі, якщо сагайдак G має вигляд VI, VII, IX, X, XI або XII, то легко бачити, що множина $S \setminus S_0^+$ не є ні серійною додатною (згідно 2.7.1), ні несерійною додатною (згідно 2.7.2). У випадку ж VIII множина $S \setminus S_0^+$ є серійною додатною. Твердження доведено.

Приклади до теореми 2.61.

1. Для ч.в. множини $NSP7.1$ (див. пункт 2.7.2) вузлове розширення другого порядку має скінченний зображувальний тип, а третього порядку – дикий.

2. Для ч.в. множини $NSP5.3$ (див. пункт 2.7.2) вузлові розширення порядку 2, 3 і 4 мають скінченний зображувальний тип, порядку 5 – нескінченний, а порядку 6 – дикий.

3. Для ч.в. множини $NSP7.10$ (див. пункт 2.7.2) вузлове розширення другого порядку має скінченний зображувальний тип, третього – нескінченний, а четвертого – дикий.

4. Для додатної ч.в. множини з трьома максимальними елементами вузлове розширення другого порядку є диким.

5. Для ланцюга і напівланцюга вузлове розширення довільного порядку має скінченний зображувальний тип.

2.12. Висновки до розділу

У цьому розділі детально викладено метод мінімаксної еквівалентності ч.в. множин, включаючи поняття мінімаксної системи твірних для класів ч.в. множин, приведено міркування (з прикладами) про явні і неявні класифікації та модифікації класифікацій. Новими результатами, викладеними в цьому розділі, є, зокрема, модифікована класифікація P-критичних ч.в. множин (в сенсі опису по класам мінімаксних ізоморфізмів множин), опис Тітса і не Тітса P-критичних ч.в. множин, теореми про верхню і нижню ширину ч.в. множин, опис максимальних додатних ч.в. множин та теореми про властивості неорієнтованих та орієнтованих графів Хассе додатних множин.

Розділ 3

NP-КРИТИЧНІ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ

Нагадаємо, що квадратична форма $f(z) = f(z_1, \ldots, z_m) : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел) називається *слабко невід'ємною*, якщо вона приймає невід'ємне значення на будь-якому векторі з невід'ємними координатами. Форма, яка набуває невід'ємне значення на всіх векторах, називається *невід'ємною*; у такому випадку пишемо $f(z) \geq 0$.

Ч. в. множину S назвемо *NP-критичною* (відповідно *WNP-критичною*), якщо форма Тітса будь-якої її власної підмножини є невід'ємною (відповідно слабко невід'ємною), але форма Тітса самої S такою не є. Іншими словами, NP-критичні (відповідно WNP-критичні) ч. в. множини — це найменші (відносно вкладення) множини, що не є невід'ємними (відповідно слабко невід'ємними).

У цьому розділі приведено повний опис NP-критичних ч. в. множин.

3.1. Додаткові твердження про min-еквівалентні ч. в. множини

Підмножина X ч. в. множини S називається *нижньою* (відповідно *верхньою*), якщо $x \in X$ щоразу, коли $x < y$ (відповідно $x > y$) і $y \in X$, і *щільною*, якщо $x \in X$ щоразу, коли $y < x < z$ і $y, z \in X$. Очевидно, що нижні та верхні підмножини є щільними. Через $\overleftarrow{A}$ і $\overrightarrow{A}$, де A — підмножина T, будемо позначати відповідно найменшу нижню і найменшу верхню підмножину в T, що містить A. Підмножину $\overleftrightarrow{A}=\overleftarrow{A}\cap\overrightarrow{A}$, що є найменшою щільною підмножиною, яка містить A, будемо називати *замиканням підмножини A в S*.

Нагадаємо, що запис $X<Y$ для підмножин T означає, що $x<y$ для будь-яких $x\in X, y\in Y$. Запис $x\lessgtr y$ означатиме, що елементи x та y непорівняльні. Покладемо $T^{\lessgtr}(a)=\{x\in T\,|\,x\lessgtr a\}$. Для елемента $a\in T$ позначимо через $\{a\}^{<}$ (відповідно $\{a\}^{>}$) підмножину всіх $x\in T$ таких, що $x<a$ (відповідно $x>a$).

Min-еквівалентність ч. в. множин (див. останній підрозділ розділу 1) позначається символом $\cong_{\min}$ (а $\cong$ означає ізоморфізм ч. в. множин). Якщо $T_2\cong_{\min}T_1$, то (згідно з означенням) T_2 і T_1 рівні як звичайні множини; кожна підмножина $X\subset T_1$ є підмножиною і T_2, але не обов'язково з тим самим частковим порядком. Якщо ж відношення порядку на X не змінилося, то часто (щоб наголосити на цьому факті) будемо писати X° замість X (для $X\subset T_2$).

Нехай S — ч. в. множина. Скінченну послідовність $\alpha=(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ елементів $x_i\in S$ назвемо min-*допустимою*, якщо вираз $\overline{S}=S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1x_2\ldots x_p}$ має сенс (випадок $p=0$ не виключається). У цьому випадку будемо також писати $\overline{S}=S^{\uparrow}_{\alpha}$.

Множину всіх min-допустимих послідовностей позначаємо $\mathcal{P}(S)$, а множину таких послідовностей без повторень — $\mathcal{P}_1(S)$. Підмножина S, що складається з всіх елементів x_i послідовності $\alpha\in\mathcal{P}_1(S)$, будемо позначати через $[\alpha]_S$. Зауважимо, що якщо S і T min-еквівалентні, то не завжди існує $\alpha\in\mathcal{P}_1(S)$ таке, що $T=S^{\uparrow}_{\alpha}$.

Відповідно до наслідка 2.6 в $\mathcal{P}_1(S)$ існує послідовність α така, що $[\alpha]_S=X$, тоді і тільки тоді, коли підмножина X нижня. А згідно з наслідком 2.10, якщо $\alpha,\beta\in\mathcal{P}_1(S)$ і $[\alpha]_S=[\beta]_S$, то $S^{\uparrow}_{\alpha}=S^{\uparrow}_{\beta}$. Отже, для нижньої підмножини X природно визначити ч. в. множину $S^{\uparrow}_{X}$, вважаючи, що $S^{\uparrow}_{X}=S^{\uparrow}_{\alpha}$, де $\alpha\in\mathcal{P}_1(S)$ — будь-яка з послідовностей, що $[\alpha]_S=X$. З наслідка 2.9 випливає, що в $\overline{S} = S_X^{\uparrow}$ підмножина X буде верхньою, а отже $Y = S \setminus X$ — нижньою (з тими самими частковими порядками); при цьому $y < x$ для $y \in Y$ і $x \in X$ (в $\overline{S}$) тоді і тільки тоді, коли $y \lessgtr x$ в S. Зокрема, якщо $S = X \coprod Y$ (відповідно $S = \{X < Y\}$), то $S_X^{\uparrow} = \{Y < X\}$ (відповідно $S_X^{\uparrow} = X \coprod Y$).

Розглянемо тепер деякі твердження, які знадобляться в подальшому. Як і раніше, S — довільна ч. в. множина. Через $M_-(S)$ (відповідно $M_+(S)$) будемо позначати множину всіх її мінімальних (відповідно максимальних) елементів.

Лема 3.1. *Нехай $X = R \coprod \{M < N\}$ — підмножина ч. в. множини S. Тоді існують $T_1, T_2 \cong_{\min} S$, в яких відповідно $X = M^\circ \coprod \{N^\circ < R^\circ\}$ і $X = N^\circ \coprod \{R^\circ < M^\circ\}$.*

Дійсно, в якості T_1 і T_2 можна взяти ч. в. множину $T = S_Y^{\uparrow}$ відповідно при $Y = S \setminus \overrightarrow{N}$ і $Y = \overleftarrow{M}$.

Наслідок 3.2. *Якщо S містить підмножини A і B такі, що $A < B$, то $A \cup B = A^\circ \coprod B^\circ$ у деякому $T \cong_{\min} S$.*

Справді, за умови леми потрібно покласти $M = A, N = B, R = \varnothing$.

Наслідок 3.3. *Нехай $L = L_1 \coprod \ldots \coprod L_m$ — примітивна підмножина S ($L_1, \ldots, L_m$ — непорожні ланцюги) і нехай c — елемент S такий, що $c > L_i$ для будь-якого $i \neq m$ і $\{c\}^< \cap L_m = \varnothing$. Тоді існує $T_1 \cong_{\min} S$, що містить примітивну підмножину $L' = L_1^\circ \coprod \ldots \coprod L_{m-1}^\circ \coprod L_m'$, де L_m' — ланцюг порядку $|L_m| + 1$, що містить L_m°.*

Дійсно, випадок $w(L) < 3$ тривіальний, а за $w(L) \geq 3$ потрібно застосувати лему при $M = L_1 + \ldots + L_{m-1}, N = \{c\}, R = L_m$.

Лема 3.4. *Нехай L — щільна підмножина S. Тоді існує $T \cong_{\min} S$, в якому L є нижньою підмножиною з тим самим частковим порядком.*

Дійсно, в якості T можна взяти $T = S_P^{\uparrow}$ при $P = \cup_{x \in M_-(L)} \{x\}^<$.

Також знадобиться ще одне твердження, а саме

Твердження 3.5. *Нехай* $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{P}(S)$ *і* X *— підмножина* S. *Позначимо через* α_X *підпослідовність* α, *що складається з усіх* $x_i \in X$. *Тоді* $\alpha_X \in \mathcal{P}(X)$ *і* $X_{\alpha_X}^{\uparrow}$ *— підмножина* $S_\alpha^{\uparrow}$.

3.2. Властивості квадратичної форми Тітса, пов'язані з її невід'ємністю

Відповідно до основного результату роботи [123] квадратичні форми Тітса min-еквівалентних ч. в. множин є $\mathbb{Z}$-еквівалентними. Звідси, зокрема, маємо таке твердження.

Твердження 3.6. *Нехай* S *і* T *—* min-*еквівалентні ч. в. множини. Тоді їхні форми Тітса одночасно є чи не є невід'ємними.*

Нагадаємо, що *напівланцюгом* називається ординальна сума $S = \{A_1 < A_2 \ldots < A_s\}$ антиланцюгів A_i довжини 1 і 2 (антиланцюг довжини m — це ч. в. множина, що складається з m попарно непорівняльних елементів). Це еквівалентно тому, що $w(S) < 3$ і S не містить підмножин ширини 2 виду $\{a\} \coprod \{b < c\}$. Множини A_i називаються *ланками* напівланцюга. У випадку, коли всі ланки одноелементні, S — ланцюг.

Твердження 3.7. *Якщо ч. в. множина* S *є прямою сумою двох напівланцюгів, то його форма Тітса невід'ємна.*

Доведення. Згідно леми 3.1 при $X = S, M = \varnothing$ і твердження 3.6 досить вважати, що S — напівланцюг; крім того, можна, очевидно, вважати, що всі її ланки двоелементні. Отже, нехай $S = \{A_1 < A_2 \ldots < A_s\}$, де $A_i = \{i^-, i^+\}$. Тоді легко бачити, що $2q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i=1}^{s}(z_{i^-} - z_{i^+})^2 + (z_0 - \sum_{j \in S} z_j)^2$, звідки маємо, що форма $q_S(z)$ невід'ємна. $\square$

Нарешті, розглянемо твердження про невід'ємність форми Тітса для деяких конкретних ч.в. множин, яке знадобиться в подальшому.

Лема 3.8. *Квадратична форма Тітса є невід'ємною для наступних ч.в. множин:*

$S_1 = \{1 \prec 5, 2 \prec 6, 3 \prec 7, 4 \prec 8, 1 \prec 6, 2 \prec 7, 3 \prec 8, 4 \prec 5\}$;

$S_2 = \{2 \prec 5, 3 \prec 6, 4 \prec 7, 2 \prec 6, 3 \prec 7, 4 \prec 5\}$;

$S_3 = \{2 \prec 5, 3 \prec 6, 4 \prec 7, 1 \prec 5, 1 \prec 6, 1 \prec 7\}$;

$S_4 = \{2 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9, 3 \prec 4, 3 \prec 6\}$;

$S_5 = \{2 \prec 5 \prec 6, 4 \prec 7 \prec 8, 3 \prec 5, 3 \prec 7\}$;

$S_6 = \{1 \prec 4, 2 \prec 5, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9, 2 \prec 4, 3 \prec 5, 3 \prec 7\}$;

$S_7 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 4 \prec 6, 5 \prec 6, 2 \prec 7, 4 \prec 7, 7 \prec 8\}$;

$S_8 = \{1 \prec 3 \prec 4, 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 3, 2 \prec 9, 5 \prec 7, 5 \prec 9\}$;

$S_9 = \{1 \prec 4 \prec 7, 2 \prec 5 \prec 8, 3 \prec 6 \prec 9, 1 \prec 8, 2 \prec 9, 3 \prec 7\}$;

$S_{10} = \{1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9, 3 \prec 7\}$;

$S_{11} = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9, 1 \prec 5, 3 \prec 8\}$;

$S_{12} = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 7 \prec 8 \prec 9, 1 \prec 5, 3 \prec 9\}$;

$S_{13} = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6, 7 \prec 8 \prec 9, 5 \prec 8\}$;

$S_{14} = \{2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9, 2 \prec 8\}$.

В умовах леми передбачається, що кожна з множин S_i складається з елементів $1, 2, \ldots, s$, де s — найбільше число, що явно зустрічається в її визначенні.

$q_{S_1} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_0^2 + x_1x_5 + x_1x_6 + x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_7 + x_3x_8 + x_4x_5 + x_4x_8 - x_0(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) = (x_1 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_2 + \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_7 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_3 + \frac{1}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_8 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_4 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_8 - \frac{1}{2}x_0)^2 + \frac{1}{2}(x_5 - \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_8)^2 + \frac{1}{4}(x_6 - x_8)^2 + \frac{1}{2}(x_7 - \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_8)^2 \geq 0$

$q_{S_2} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_0^2 + x_2x_5 + x_2x_6 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_7 - x_0(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) = (x_1 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_2 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_3 + \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_7 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_4 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_7 - \frac{1}{2}x_0)^2 + \frac{1}{2}(x_5 -$

$\frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_7)^2 + \frac{3}{8}(x_6 - x_7)^2 \geq 0$

$q_{S_3} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_0^2 + x_1x_5 + x_1x_6 + x_1x_7 + x_2x_5 + x_3x_6 + x_4x_7 - x_0(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) = (x_1 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_7 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_2 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_3 + \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_4 + \frac{1}{2}x_7 - \frac{1}{2}x_0)^2 + \frac{1}{2}(x_5 - \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_7)^2 + \frac{3}{8}(x_6 - x_7)^2 \geq 0$

$q_{S_4} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_9^2 + x_0^2 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_3x_8 + x_3x_9 + x_5x_6 + x_5x_7 + x_5x_8 + x_5x_9 + x_6x_7 + x_6x_8 + x_6x_9 + x_7x_8 + x_7x_9 + x_8x_9 - x_0(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) = (x_1 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_2 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_8 + \frac{1}{2}x_9 - \frac{1}{2}x_0)^2 + \frac{1}{2}(x_4 - \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_7 - \frac{1}{2}x_8 - \frac{1}{2}x_9)^2 + (x_5 + \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_8 + \frac{1}{2}x_9 - \frac{1}{2}x_0)^2 + \frac{3}{8}(x_6 - \frac{1}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 - \frac{1}{3}x_9)^2 + \frac{1}{3}(x_7 - \frac{1}{2}x_8 - \frac{1}{2}x_9)^2 + \frac{1}{4}(x_8 - x_9)^2 \geq 0$

$q_{S_5} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_0^2 + x_2x_5 + x_2x_6 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_3x_8 + x_4x_7 + x_4x_8 + x_5x_6 + x_7x_8 - x_0(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) = (x_1 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_2 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_3 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_8 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_4 + \frac{1}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_8 - \frac{1}{2}x_0)^2 + \frac{1}{2}(x_5 - \frac{1}{2}x_7 - \frac{1}{2}x_8)^2 + \frac{1}{2}(x_6 - \frac{1}{2}x_7 - \frac{1}{2}x_8)^2 + \frac{1}{2}(x_7 - x_8)^2 \geq 0$

$q_{S_6} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_9^2 + x_0^2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_5 + x_3x_7 + x_3x_8 + x_3x_9 + x_6x_7 + x_6x_8 + x_6x_9 + x_7x_8 + x_7x_9 + x_8x_9 - x_0(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) = (x_1 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_2 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_3 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_8 + \frac{1}{2}x_9 - \frac{1}{2}x_0)^2 + \frac{1}{2}(x_4 - x_5)^2 + \frac{3}{8}(x_5 - \frac{2}{3}x_7 - \frac{2}{3}x_8 - \frac{2}{3}x_9)^2 + (x_6 + \frac{1}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_8 + \frac{1}{2}x_9 - \frac{1}{2}x_0)^2 + \frac{1}{3}(x_7 - \frac{1}{2}x_8 - \frac{1}{2}x_9)^2 + \frac{1}{4}(x_8 - x_9)^2 \geq 0$

$q_{S_7} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_0^2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_7 + x_2x_8 + x_4x_6 + x_4x_7 + x_4x_8 + x_5x_6 + x_7x_8 - x_0(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) = (x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_8 - \frac{1}{2}x_0)^2 + \frac{1}{2}(x_3 - \frac{1}{2}x_7 - \frac{1}{2}x_8)^2 + (x_4 + \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_8 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_5 + \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_0)^2 + \frac{1}{2}(x_6 - \frac{1}{2}x_7 - \frac{1}{2}x_8)^2 + \frac{1}{4}(x_7 - x_8)^2 \geq 0$

$q_{S_8} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_9^2 + x_0^2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_9 + x_3x_4 + x_5x_7 + x_5x_8 + x_5x_9 + x_6x_7 + x_6x_8 + x_7x_8 - x_0(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) = (x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_0)^2 + \frac{1}{2}(x_3 - \frac{1}{2}x_9)^2 + \frac{1}{2}(x_4 - \frac{1}{2}x_9)^2 + (x_5 + \frac{1}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_8 + \frac{1}{2}x_9 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_6 + \frac{1}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_8 - \frac{1}{2}x_0)^2 + \frac{1}{2}(x_7 - \frac{1}{2}x_9)^2 + \frac{1}{2}(x_8 - \frac{1}{2}x_9)^2 \geq 0$

$q_{S_9} = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+x_9^2+x_0^2+x_1x_4+x_1x_7+x_1x_8+x_2x_5+x_2x_8+x_2x_9+x_3x_6+x_3x_7+x_3x_9+x_4x_7+x_5x_8+x_6x_9-x_0(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9) = (x_1+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_7+\frac{1}{2}x_8-\frac{1}{2}x_0)^2+(x_2+\frac{1}{2}x_5+\frac{1}{2}x_8+\frac{1}{2}x_9-\frac{1}{2}x_0)^2+(x_3+\frac{1}{2}x_6+\frac{1}{2}x_7+\frac{1}{2}x_9-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_4+\frac{1}{3}x_7-\frac{1}{3}x_8-\frac{1}{3}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_5+\frac{1}{3}x_8-\frac{1}{3}x_9-\frac{1}{3}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_6-\frac{1}{3}x_7+\frac{1}{3}x_9-\frac{1}{3}x_0)^2+\frac{1}{3}(x_7-\frac{1}{2}x_8-\frac{1}{2}x_9)^2+\frac{1}{4}(x_8-x_9)^2 \geq 0$

$q_{S_{10}} = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+x_9^2+x_0^2+x_1x_2+x_3x_4+x_3x_7+x_3x_8+x_3x_9+x_5x_6+x_5x_7+x_5x_8+x_5x_9+x_6x_7+x_6x_8+x_6x_9+x_7x_8+x_7x_9+x_8x_9-x_0(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9) = (x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_2-\frac{1}{3}x_0)^2+(x_3+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_7+\frac{1}{2}x_8+\frac{1}{2}x_9-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_4-\frac{1}{3}x_7-\frac{1}{3}x_8-\frac{1}{3}x_9-\frac{1}{3}x_0)^2+(x_5+\frac{1}{2}x_6+\frac{1}{2}x_7+\frac{1}{2}x_8+\frac{1}{2}x_9-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_6+\frac{1}{3}x_7+\frac{1}{3}x_8+\frac{1}{3}x_9-\frac{1}{3}x_0)^2+\frac{1}{3}(x_7-\frac{1}{2}x_8-\frac{1}{2}x_9)^2+\frac{1}{4}(x_8-x_9)^2 \geq 0$

$q_{S_{11}} = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+x_9^2+x_0^2+x_1x_2+x_1x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_3x_8+x_3x_9+x_4x_5+x_6x_7+x_6x_8+x_6x_9+x_7x_8+x_7x_9+x_8x_9-x_0(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9) = (x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_5-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_2-\frac{1}{3}x_0)^2+(x_3+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5+\frac{1}{2}x_8+\frac{1}{2}x_9-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_4+\frac{1}{3}x_5-\frac{1}{3}x_8-\frac{1}{3}x_9-\frac{1}{3}x_0)^2+\frac{1}{3}(x_5-\frac{1}{2}x_8-\frac{1}{2}x_9)^2+(x_6+\frac{1}{2}x_7+\frac{1}{2}x_8+\frac{1}{2}x_9-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_7+\frac{1}{3}x_8+\frac{1}{3}x_9-\frac{1}{3}x_0)^2+\frac{1}{4}(x_8-x_9)^2 \geq 0$

$q_{S_{12}} = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+x_9^2+x_0^2+x_1x_2+x_1x_5+x_1x_6+x_3x_4+x_3x_5+x_3x_6+x_3x_9+x_4x_5+x_4x_6+x_5x_6+x_7x_8+x_7x_9+x_8x_9-x_0(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9) = (x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_5+\frac{1}{2}x_6-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_2-\frac{1}{3}x_6-\frac{1}{3}x_0)^2+(x_3+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5+\frac{1}{2}x_6+\frac{1}{2}x_9-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_4+\frac{1}{3}x_5+\frac{1}{3}x_6-\frac{1}{3}x_9-\frac{1}{3}x_0)^2+\frac{1}{3}(x_5-\frac{1}{2}x_6-\frac{1}{2}x_9)^2+\frac{1}{4}(x_6-x_9)^2+(x_7+\frac{1}{2}x_8+\frac{1}{2}x_9-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_8+\frac{1}{3}x_9-\frac{1}{3}x_0)^2 \geq 0$

$q_{S_{13}} = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+x_9^2+x_0^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_4x_5+x_4x_6+x_4x_8+x_4x_9+x_5x_6+x_5x_8+x_5x_9+x_7x_8+x_7x_9+x_8x_9-x_0(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9) = (x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_2+\frac{1}{3}x_3-\frac{1}{3}x_0)^2+\frac{2}{3}(x_3-\frac{1}{4}x_0)^2+(x_4+\frac{1}{2}x_5+\frac{1}{2}x_6+\frac{1}{2}x_8+\frac{1}{2}x_9-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{3}{4}(x_5+\frac{1}{3}x_6+\frac{1}{3}x_8+\frac{1}{3}x_9-\frac{1}{3}x_0)^2+\frac{2}{3}(x_6-\frac{1}{2}x_8-\frac{1}{2}x_9-\frac{1}{4}x_0)^2+(x_7+\frac{1}{2}x_8+\frac{1}{2}x_9-\frac{1}{2}x_0)^2+\frac{1}{4}(x_8-x_9)^2 \geq 0$

$q_{S_{14}} = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+x_9^2+x_0^2+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_8+x_2x_9+x_3x_4+x_5x_6+x_5x_7+x_5x_8+x_5x_9+x_6x_7+x_6x_8+x_6x_9+x_7x_8+x_7x_9+x_8x_9-x_0(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9) =$

$(x_1 - \frac{1}{2}x_0)^2 + (x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_8 + \frac{1}{2}x_9 - \frac{1}{2}x_0)^2 + \frac{3}{4}(x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_8 - \frac{1}{3}x_9 - \frac{1}{3}x_0)^2 + \frac{2}{3}(x_4 - \frac{1}{4}x_8 - \frac{1}{4}x_9 - \frac{1}{4}x_0)^2 + (x_5 + \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_8 + \frac{1}{2}x_9 - \frac{1}{2}x_0)^2 + \frac{3}{4}(x_6 + \frac{1}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 + \frac{1}{3}x_9 - \frac{1}{3}x_0)^2 + \frac{2}{3}(x_7 + \frac{1}{4}x_8 + \frac{1}{4}x_9 - \frac{1}{4}x_0)^2 + \frac{1}{4}(x_8 - x_9)^2 \geq 0$

Невід'ємність квадратичної форми Тітса для перерахованих ч.в. множин доведена.

3.3. WNP-критичні ч. в. множини

Нехай (p) означає ланцюг $1 < 2 < \ldots < p$, а $(p, q, \ldots, r)$ — пряму суму ланцюгів $(p), (q), \ldots, (r)$. Покладемо $И = \{1 \prec 2, 3 \prec 4, 1 \prec 4\}$.

Твердження 3.9. *Ч. в. множина є WNP-критичною тоді і лише тоді, коли вона ізоморфна одній з наступних ч.в. множин:* $\mathcal{N}_1 = (1,1,1,1,1)$, $\mathcal{N}_2 = (1,1,1,2)$, $\mathcal{N}_3 = (2,2,3)$, $\mathcal{N}_4 = (1,3,4)$, $\mathcal{N}_5 = (1,2,6)$, $\mathcal{N}_6 = (5, И)$.

Доведення. Згідно теореми А [30] наступні твердження еквівалентні:

(1) ч. в множина S не містить підмножин вигляду $\mathcal{N}_i$;

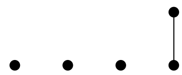
(2) ч. в множина S є слабко невід'ємною.

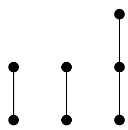
Звідси випливає, що ч. в. множина S з підмножинами вигляду $\mathcal{N}_i$ не є слабко невід'ємною і що не слабко невід'ємна ч. в. множина містить підмножину вигляду $\mathcal{N}_i$.

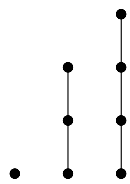
Далі, при доведенні теореми В [30] показано, що форма Тітса кожної з $\mathcal{N}_i$ не є слабко невід'ємною. З цих фактів випливає, очевидно, справедливість твердження, що доводиться. □

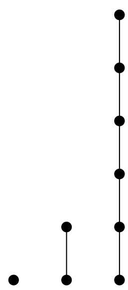
Ч. в. множини вигляду $\mathcal{N}_1$–$\mathcal{N}_6$ вперше виникли в статті Л. О. Назарової [31] (присвяченій опису ручних ч. в. множин). Вона назвала їх *суперкритичними.* Надалі називатимемо їх *суперкритичними ч.в. множинами Назарової* або просто *множинами Назарової.* Випишемо їх на мові діаграм Хассе:

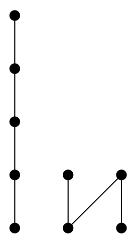
$$\mathcal{N}_1 = (1,1,1,1,1) =$$

$$\mathcal{N}_2 = (1,1,1,2) =$$ 

$$\mathcal{N}_3 = (2,2,3) =$$ 

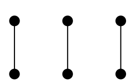
$$\mathcal{N}_4 = (1,3,4) =$$ 

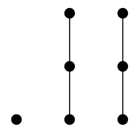
$$\mathcal{N}_5 = (1,2,6) =$$ 

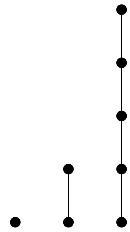
$$\mathcal{N}_6 = (5,\text{И}) =$$ 

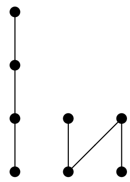
Їхні підмножини $\mathcal{K}_1 = (1,1,1,1)$, $\mathcal{K}_2 = (2,2,2)$, $\mathcal{K}_3 = (1,3,3)$, $\mathcal{K}_4 = (1,2,5)$, $\mathcal{K}_5 = (4,\text{И})$, або на мові діаграм Хассе

$$\mathcal{K}_1 = (1,1,1,1) =$$

$$\mathcal{K}_2 = (2,2,2) =$$ 

$\mathcal{K}_3 = (1, 3, 3) =$ 

$\mathcal{K}_4 = (1, 2, 5) =$ 

$\mathcal{K}_5 = (4, \text{И}) =$ ,

які виникли раніше в роботі [7] і називаються, як уже було сказано вище, (критичними) множинами Клейнера, грають таку ж роль, як і суперкритичні множини Назарової, але вже при описі P-критичних ч. в. множин.

Якщо P — заздалегідь визначена ч. в. множина (напр., $P = \mathcal{K}_i$ або $P = \mathcal{N}_i$), то казатимемо, що ч. в. множина T містить P, якщо T містить X, ізоморфне P; якщо при цьому $T = P$, то казатимемо, що T має вигляд P.

Безпосередньо з означень маємо такі твердження.

Лема 3.10. *Замикання нещільної підмножини вигляду $\mathcal{K}_i$ містить деякий $\mathcal{N}_j$.*

Лема 3.11. *Якщо примітивна ч.в. множина T містить як власну підмножину деяку $\mathcal{K}_i$, то вона містить деяку $\mathcal{N}_j$.*

З останньої леми та наслідків 3.2, 3.3 маємо таке твердження.

Лема 3.12. *Якщо ч. в. множина S містить деяку примітивну $K = \mathcal{K}_i$ і $x \in S$ — такий елемент, що $K' = K \cap \{x\}^{<}$ має ширину $w \geq w(S) - 1$*

і виділяється прямим доданком з K (зокрема, співпадає з K), то існує $T \cong_{\min} S$, що містить деяку $\mathcal{N}_j$.

Справді це випливає з леми 3.11, якщо попередньо у випадку $w(K') = w(S)$ скористатися наслідком 3.2 при $A = K$, $B = x$ (з урахуванням того, що в цьому випадку $K' = K$), а у випадку $w(K') = w(S) - 1$ — наслідком 3.3 при $L = K, L_m = K \setminus K'$.

Доведемо тепер таке твердження.

Твердження 3.13. *Будь-яка WNP-критична ч. в. множина є NP-критичною.*

Доведення. Згідно з означенням форма Тітса WNP-критичної множини не є невід'ємною. Далі, легко бачити, використовуючи твердження 3.9, що будь-яка максимальна підмножина M кожної WNP-критичної множини або є підмножиною (не обов'язково власною) деякої критичної множини Клейнера, або є прямою сумою двох напівланцюгів (загальне число двохелементних ланок яких вбирається у 1). В першому випадку форма Тітса множини M невід'ємна за лемою 3.8, а в другому за твердженням 3.7 (згідно з твердженням 21 [9] у другому випадку форма Тітса навіть додатна). □

3.4. Теорема про ч. в. множини без WNP-критичних підмножин

Розглянемо такі ч. в. множини, що будь-які min-еквівалентні їм ч. в. множини не містять суперкритичних множин Назарової; сукупність усіх таких ч. в. множин позначимо через $\mathcal{F}$.

Теорема 3.14. *Форма Тітса ч. в. множини $S \in \mathcal{F}$ невід'ємна.*

Очевидно, що $w(S) \le 4$ (інакше $S \supset \mathcal{N}_1$). Якщо будь-яка ч. в. множина $T \cong_{\min} S$ не містить критичних множин Клейнера, то згідно з твердженням 24 [9] форма Тітса ч. в. множини S додатна. Тому вважатимемо, що S містить хоча б одну $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_i\,(1 \le i \le 5)$, причому $S \ne \mathcal{K}$ (бо ч. в. множини $\mathcal{K}_i$ мають невід'ємну форму Тітса; це випливає хоча б із леми 3.8).

Розглянемо спочатку випадок, коли $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_1$.

За лемою 3.4 при $L = \mathcal{K}_1$ можна вважати, що $\mathcal{K} = M_-(S)$; нехай $\mathcal{K} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Підмножину $\{a_i\}^> \cap \{a_j\}^>$ позначимо через L_{ij}; оскільки $L_{ji} = L_{ij}$, то в подальшому, при розгляді цих множин, завжди вважатимемо (з міркувань зручності), що $i < j$. Оскільки $w(S) = 4$ і $S \not\supseteq \mathcal{N}_2$, то об'єднання всіх $\widehat{L}_{ij} = L_{ij} \cup \{a_i, a_j\}$ і S. Крім того, за лемою 3.12 підмножини L_{ij} і L_{pq} не перетинаються при $(i,j) \ne (p,q)$. Тоді кожна L_{ij} — напівланцюг (можливо, порожній), інакше $\mathcal{K} \cup L_{ij}$ містить $\mathcal{N}_1$ або $\mathcal{N}_2$ (залежно від того, чи існує в L_{ij} підмножина $X \cong (1,1,1)$ або $Y \cong (1,2)$).

Якщо не порожнім є лише один з напівланцюгів L_{ij} (ширини 1 або 2) або непорожні тільки два напівланцюги L_{ij} і L_{pq} при $\{i,j\} \cap \{p,q\} = \varnothing$, то S — пряма сума двох напівланцюгів і з твердження 3.7 $q_S(z) \ge 0$. Тут також враховується випадок, коли існує хоча б один L_{ij}, що є напівланцюгом ширини 2, оскільки тоді кожний L_{pq} при $|\{i,j\} \cap \{p,q\}| = 1$ є порожнім, бо в іншому випадку підмножина, що складається з двох непорівняльних елементів $a, b \in L_{ij}$, будь-якого елемента $c \in L_{pq}$ та елементів підмножини $\mathcal{K} \setminus \{a_i, a_j\}$ (порядку 2), має вид $\mathcal{N}_2$.

Таким чином, для $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_1$ залишилося розглянути випадок, коли кожне L_{ij} є ланцюгом (можливо, порожнім), причому всі L_{ij} попарно не перетинаються і існують $L_{pq}, L_{rs} \ne \varnothing$ такі, що $|\{p,q\} \cap \{r,s\}| = 1$. Покладемо $l_{ij} = |L_{ij}|$ і позначимо через $m = m(S)$ число непорожніх L_{ij}.

Якщо при цьому або a) $m = 4$, або b) $m = 3$ і для (попарно різних і непорожніх) L_{ij}, L_{pq}, L_{rs} виконуються рівності $|\{i,j\} \cap \{p,q\}| = 1$, $|\{p,q\} \cap$

$\{r,s\}| = 1$, $|\{i,j\} \cap \{r,s\}| = 1$, $|\{i,j\} \cap \{p,q\} \cap \{r,s\}| = 0$; або c) $m = 3$ і для (попарно різних і непорожніх) L_{ij}, L_{pq}, L_{rs} виконується рівність $|\{i,j\} \cap \{p,q\} \cap \{r,s\}| = 1$, то (з точністю до перенумерації мінімальних елементів) має місце один із таких випадків: **1.1)** $l_{12} = l_{23} = l_{34} = l_{14} = 1$; **1.2)** $l_{12} \geq 1, l_{23} \geq 1, l_{34} \geq 1, l_{14} > 1$; **2.1)** $l_{12} = l_{23} = l_{13} = 1$; **2.2)** $l_{12} \geq 1, l_{23} \geq 1, l_{13} > 1$. **3.1)** $l_{12} = l_{13} = l_{14} = 1$; **3.2)** $l_{12} \geq 1, l_{13} \geq 1, l_{14} > 1$. Тут випадки 1.1) та 1.2) відповідають умові a), випадки 2.1) та 2.2) — умові b), випадки 3.1) та 3.2) — умові c). Зауважимо, що не вказані l_{ij} вважаємо нульовими. Це буде мати місце і при розгляді випадків $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_i$ при $i > 1$.

Якщо ж не виконується жодна з умов a) - c), то (з точністю до перенумерації мінімальних елементів) або $m = 2$ і при цьому $L_{23}, L_{34} \neq \varnothing$, або $m = 3$ і при цьому $L_{12}, L_{23}, L_{34} \neq \varnothing$. Покладемо у цих випадках відповідно $l = (l_{23}, l_{34})$ і $l = (l_{12}, l_{23}, l_{34})$, вважаючи за можливе (при розгляді конкретних ч. в. множин) деякі координати вектора l задавати не конкретним числом, а нерівностями виду $> z$ і $\geq z$, де z — деяке натуральне число, а також зручнішими нерівностями виду $z_1 \leq s \leq z_2$. У цій ситуації має місце, як легко бачити, один із таких випадків: **4.1)** $l = (1, 1 \leq s \leq 4)$; **4.2)** $l = (1, > 4)$; **5.1)** $l = (2, 2)$; **5.2)** $l = (\geq 2, > 2)$; **6.1)** $l = (1, 1, 1 \leq s \leq 3)$; **6.2)** $l = (1, 1, > 3)$; **7.1)** $l = (1, 2, 1)$; **7.2)** $l = (1, > 2, 1)$; **8.1)** $l = (2, 1, 2)$; **8.2)** $l = (\geq 2, 1, > 2)$; **9)** $l = (\geq 1, > 1, > 1)$.

Проаналізуємо тепер усі випадки 1.1)-9).

У випадках i.1) при $i = 1, 2, \ldots, 8$ ч. в. множина S міститься, з точністю до ізоморфізму, в S_i (див. лему 3.8). У випадках 1.2) та 2.2) S містить $\mathcal{N}_2$, у випадках 3.2), 7.2) і 9) S містить $\mathcal{N}_3$, у випадках 5.2) та 8.2) S містить $\mathcal{N}_4$, у випадку 4.2) S містить $\mathcal{N}_5$ і в випадку 6.2) S містить $\mathcal{N}_6$. Звідси (з урахуванням леми 3.8) випливає, що якщо $S \in \mathcal{F}$, то її форма Тітса невід'ємна.

Тепер вважатимемо, що $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_i$ при $i > 1$. І нехай будь-яке $T \cong_{\min} S$ не містить $\mathcal{K}_1$ (оскільки випадок $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_1$ вже розглянутий); тоді за наслідком 3.2 ч. в. множина T не містить підмножин виду $Q_{13} = \{R_1 < R_3\}$, $Q_{31} = \{R_3 < R_1\}$ і $Q_{22} = \{R_2 < R_2'\}$, де $R_1 \cong (1)$ – множина, що складається з одного елемента u_0, $R_2 \cong (1,1)$ (відповідно $R_2' \cong (1,1)$) — множина, що складається з двох непорівняльних елементів u_1 і u_2 (відповідно u_1' і u_2') і $R_3 \cong (1,1,1)$ —множина, що складається з трьох попарно непорівняльних елементів v_1, v_2 і v_3.

Далі, за лемою 3.10 підмножина $\mathcal{K}$ є щільною, а тоді за лемою 3.4 при $L = \mathcal{K}_i$ можна вважати, що $\mathcal{K}$ — нижня підмножина S; звідси, зокрема, маємо, що $M_-(\mathcal{K}) = M_-(S)$. Покладемо $M_-(\mathcal{K}) = \{a_1, a_2, a_3\}$ і $M_+(\mathcal{K}) = \{b_1, b_2, b_3\}$, причому вважаємо, що $a_1 \leq b_1$, $a_2 < b_2$, $a_3 < b_3$.

Розглянемо спочатку випадки $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_i$ при $i \neq 5$.

Припустимо, $B_{ij} = \{b_i\}^> \cap \{b_j\}^>$ і $L_{ij} = \{a_i\}^> \cap \{b_j\}^>$, які розглядатимемо тільки для $i \neq j$, і, крім того, $C_i = \{b_i\}^< \cup b_i$. За лемою 3.11 $\mathcal{K}$ є максимальною примітивною підмножиною як в S, так і в кожному $T \cong_{\min} S$, у якому $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_i$. Тоді за лемою 3.12 $B_{ij} = \varnothing$, а це означає, що $S \setminus \mathcal{K}$ є об'єднанням усіх підмножин L_{ij} (інакше S містить $\mathcal{K}_1$), причому вони попарно не перетинаються (інакше $S \supset Q_{31}$). Крім того, якщо L_{ij} непорожня, то L_{is} при $j \neq s$ і L_{ji} є порожніми (інакше, відповідно, $S \supset Q_{13}$ і $S \supset Q_{22}$). З $B_{ij} = \varnothing$ та $w(S) = 3$ випливає також, що L_{ij} є ланцюгом.

Як і у випадку $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_1$, кількість непорожніх L_{ij} позначимо через $m = m(S)$ і покладемо $l_{ij} = |L_{ij}|$.

Нехай спочатку $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_2$. Якщо при цьому $m = 3$, то (з точністю до перестановки в індексах чисел $1, 2, 3$) має місце один із наступних випадків: **10.1)** $l_{12} = l_{23} = l_{31} = 1$; **10.2)** $l_{12} \geq 1, l_{23} \geq 1, l_{31} > 1$. Якщо ж $m = 1, 2$, має місце один із таких випадків (у яких не вказані l_{ij} є нульовими): **11.1)** $1 \leq l_{12} \leq 3$; **11.2)** $l_{12} > 3$; **12.1)** $l_{12} = 1, l_{23} = 2$; **12.2)** $l_{12} \geq 1, l_{23} > 2$; **13.1)** $l_{12} = 2, l_{23} = 1$; **13.2)** $l_{12} > 2, l_{23} \geq 1$.

Проаналізуємо тепер усі випадки 10.1)-13.2).

У випадках i.1) за $i = 10, 11, 12, 13$ ч. в. множина S міститься, з точністю до ізоморфізму, в S_{i-1} (див. лему 3.8). У випадках 10.2), 11.2), 12.2) та 13.2) S містить відповідно $\mathcal{N}_3$, $\mathcal{N}_5$, $\mathcal{N}_6$ і $\mathcal{N}_4$. Звідси (з з урахуванням леми 3.8) випливає, що якщо $S \in \mathcal{F}$, то її форма Тітса невід'ємна.

Нехай тепер $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_3$; при цьому можна вважати, що будь-яка $T \cong_{\min} S$ не містить $\mathcal{K}_2$ (бо випадок $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_2$ вже розглянуто). Згідно введеним вище позначенням $M_-(\mathcal{K}) = \{a_1, a_2, a_3\}$ і $M_+(\mathcal{K}) = \{b_1, b_2, b_3\}$, де $a_1 = b_1$, $a_2 < b_2$, $a_3 < b_3$; позначимо через c_2 і c_3 "невраховані"елементи підмножини $\mathcal{K}$: $a_2 < c_2 < b_2$, $a_3 < c_3 < b_3$.

Зазначимо, що множина $K_{ij} = \{c_i\}^> \cap \{b_j\}^>$ є порожньою, якщо $i \neq j$ і при цьому $i, j \neq 1$, бо інакше згідно з наслідком 3.3 при $L = L_1 \coprod L_2 \coprod L_3$, $L_1 = \{a_i, c_i\}, L_2 = \{a_j, c_j, b_j\}$ і $L_3 = \{a_1\}$ деяка $T_1 \cong_{\min} S$ містить $\mathcal{N}_3$. Далі L_{i1} при $i = 2, 3$ співпадає з K_{i1}, інакше $\mathcal{K} \cup (L_{i1} \setminus K_{i1})$ містить $\mathcal{N}_3$. При цьому якщо $L_{i1} \neq \varnothing$, то $m = 1$, тому що у випадку, коли $L_{ij} \neq \varnothing$ ($j \neq 1$), підмножина $\mathcal{K} \cup L_{i1} \cup L_{ij}$ містить Q_{13}, а коли $L_{ji} \neq \varnothing$ ($j \neq 1$), підмножина $\mathcal{K} \cup L_{i1} \cup L_{ji}$ містить $\mathcal{K}_2$.

Отже, (з точністю до перестановки в індексах чисел 2 і 3) має місце один із таких випадків: **14.1)** $l_{21} \leq 2$; **14.2)** $l_{21} > 2$; **15.1)** $l_{23} \leq 2$; **15.2)** $l_{23} > 2$. І у випадках 14.1) і 15.1) ч. в. множина S міститься, з точністю до ізоморфізму, відповідно в S_{13}, S_{14} (див. лему 3.8), а у випадках 14.2) і 15.2) S містить відповідно $\mathcal{N}_4$ і $\mathcal{N}_5$. Отже, для $S \in \mathcal{F}$ її форма Тітса невід'ємна.

Покажемо, що у випадку $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_4$ існує $T \cong_{\min} S$, що містить $\mathcal{K}_2$ або $\mathcal{K}_3$, а відповідні випадки вже розглянуто. Згідно з введеними вище позначеннями $M_-(\mathcal{K}) = \{a_1, a_2, a_3\}$ і $M_+(\mathcal{K}) = \{b_1, b_2, b_3\}$, де $a_1 = b_1$, $a_2 < b_2$, $a_3 < b_3$; позначимо через c_3, d_3, e_3 "невраховані"елементи підмножини $\mathcal{K}$: $a_3 < c_3 < d_3 < e_3 < b_3$.

Підмножина L_{23} є порожньою, бо інакше якщо f позначає максимальний елемент L_{23}, то $S_P^{\uparrow}$ при $P = S \backslash f$ містить $\mathcal{N}_6$ (точніше, $\mathcal{K} \cup f$ має вигляд $\mathcal{N}_6$). Якщо $L_{32} \neq \varnothing$ і $g \in L_{32}$, то $g > c_3$, інакше підмножина $(\mathcal{K} \setminus a_3) \cup g$ має вигляд $\mathcal{N}_4$; тоді за наслідком 3.3 при $L = L_1 \coprod Ł_2 \coprod L_3$, $L_1 = \{a_3, c_3\}, L_2 = C_2$, $L_3 = a_1$ існує $T_1 \cong_{\min} S$, в якому $\mathcal{K} \cup g$ має вигляд $\mathcal{K}_2$. Якщо ж $L_{31} \neq \varnothing$ і $h \in L_{31}$, то $h > d_3$, інакше $(\mathcal{K} \backslash \{a_3, c_3\} \cup h$ має вигляд $\mathcal{N}_3$; тоді за наслідком 3.3 при $L = L_1 \coprod Ł_2 \coprod L_3$, $L_1 = C_1, L_2 = \{a_3, c_3, d_3\}$, $L_3 = C_2$ існує $T_1 \cong_{\min} S$, в якому $\mathcal{K} \cup h$ має вигляд $\mathcal{K}_3$. Нарешті, якщо $L_{21} \neq \varnothing$ і $t \in L_{21}$, то $\mathcal{K} \cup t$ має вигляд $\mathcal{N}_6$.

Залишилося розглянути випадок, коли $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_5$.

Позначимо через U підмножину $\mathcal{K}$, що складається з елементів a_1, b_1, a_2, b_2, причому вважаємо, що $a_1 < b_2$. "Неврахowані"елементи $\mathcal{K}$ позначимо через c_3 і d_3, вважаючи, що $c_3 < d_3$. Тоді $\mathcal{K} = U \coprod C_3$, де $C_3 = \{a_3 < c_3 < d_3 < b_3\}$; покладемо $C_1 = \{a_1, b_1\}$, $C_2 = \{a_2, b_2\}$.

Знадобиться одне твердження, яке конкретизує наслідок 3.3 і очевидним чином випливає з його доведення.

Наслідок 3.15. *Нехай $S, L = L_1 \coprod \ldots \coprod L_m$ і c — ті ж, що в умові наслідка 3.3, причому $m = 3$, $|L_1| = i$, $|L_2| = j$, $|L_3| = \max(i, j) - 1$ і при цьому $i \leq j$ і $i + j = 4$. Тоді існує $T_1 \cong_{\min} S$, що містить $\mathcal{K}_j$.*

Покажемо, що випадок $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_5$ зводиться до вже розглянутих випадків $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_2$ і $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_3$, а саме, що існує $T \cong_{\min} S$, що містить $\mathcal{K}_2$ або $\mathcal{K}_3$.

Припустимо, що це так, тобто, що кожна ч. в. множина T, min-еквівалентна S, не містить ні $\mathcal{K}_2$, ні $\mathcal{K}_3$, і покажемо, що в цьому випадку приходимо до суперечності.

Покажемо спочатку, що S розкладається (щодо прямої суми, яка визначена вище). Нехай це не так, тоді існує x такий, що $\{x\}^< \cap U \neq \varnothing$ і $\{x\}^< \cap C_3 \neq \varnothing$; означає $x > a_3$. Покладемо $R = \{x\}^< \cap U$. Очевидно, що $b_2 \notin R$ (інакше $\mathcal{K} \cup x$ містить Q_{31}). З тієї ж причини R не може одночасно утримувати елементи a_1 та a_2 (відповідно b_1 та a_2). Крім того, якщо $a_1 \in R$, то і $b_1 \in R$, інакше $\mathcal{K} \cup x$ містить Q_{13}. Таким чином, для R залишається всього дві можливості: a) $R = C_1$; b) $R = \{a_2\}$. Випадок a) неможливий, оскільки при $x \asymp c_3$ підмножина $\mathcal{K} \cup x$ містить $\mathcal{K}_3$, а при $x > c_3$ за наслідком 3.15 для $L_1 = C_1$, $L_2 = \{a_3, c_3\}$, $L_3 = \{a_2\}$ і $c = x$ існує $T_1 \cong_{\min} S$, що містить $\mathcal{K}_2$. Випадок b) також неможливий, тому що при $x \asymp b_3$ підмножина $M_+(\mathcal{K}) \cup x$ має вигляд $\mathcal{K}_1$, а при $x > b_3$ за наслідком 3.15 для $L_1 = a_2$, $L_2 = C_3 \setminus b_3$, $L_3 = C_1$ та $c = x$ існує $T_1 \cong_{\min} S$, що містить $\mathcal{K}_3$ (легко бачити, що з доведення наслідка 3.3 випливає, що існує навіть $T_1 \cong_{\min} S$, що містить $\mathcal{N}_4$).

Отже, S розкладемо на пряму суму двох власних підмножин; зрозуміло, що одне містить U, інше — C_3. Тому існує x такий, що або $\{x\}^< \cap U = \varnothing$, $\{x\}^< \cap C_3 \neq \varnothing$, або навпаки: $\{x\}^< \cap U \neq \varnothing$, $\{x\}^< \cap C_3 = \varnothing$. У першому випадку при $x \asymp b_3$ підмножина $M_+(\mathcal{K}) \cup x$ має вигляд $\mathcal{K}_1$, а при $x > b_3$ підмножина $\mathcal{K} \cup x$ має вигляд $\mathcal{N}_6$. Покажемо, що й другий випадок неможливий. Покладемо $V = T^{\asymp}(x) \cap U$. Легко бачити, що V є підмножиною U ширини $w \leq 1$ (інакше $\mathcal{K} \cup x$ містить $\mathcal{K}_1$); крім того, V — верхня підмножина, бо підмножина $U \setminus V = \{x\}^< \cap U$ нижня. І у випадку $w = 1$ підмножина $\mathcal{K} \cup x$ містить Q_{22}, якщо $V = \{b_2\}$, і $\mathcal{N}_4$, якщо $V = \{b_1\}$ або $V = C_2$. Якщо ж V порожня, то за лемою 3.1 (при $M = U$, $N = x$, $R = C_3$) існує $T_1 \cong_{\min} S$, в якому $\mathcal{K} \cup x$ має вигляд $\mathcal{N}_6$.

Отже, дійшли протиріччя і тому існує $T \cong_{\min} S$, що містить $\mathcal{K}_2$ або $\mathcal{K}_3$.

Теорему 3.14 доведено.

3.5. Теорема про NP-критичні множини

Теорема 3.16. *Для довільної фіксованої ч. в. множини S мають місце наступні твердження:*

1) *якщо форма Тітса будь-якої ч. в. множини, яка* min*-еквівалентна* S*, слабко невід'ємна, то форма Тітса самої* S *невід'ємна;*

2) *якщо форма Тітса* S *невід'ємна, то форма Тітса будь-якої ч. в. множини, яка* min*-еквівалентна* S*, також невід'ємна (і тим паче слабко невід'ємна).*

Теорема 3.17. *Ч. в. множина* S *є* NP*-критичною тоді і тільки тоді, коли вона* min*-еквівалентна деякій* WNP*-критичній ч. в. множині.*

В умовах теорем 3.16 та 3.17 min-еквівалентність можна замінити на max-еквівалентність або (min, max)-еквівалентність (через їх рівносильність), а також на min-, max- або (min, max)-ізоморфізм.

Зауважимо, що WNP-критичні ч. в. множини, яких всього 6, добре відомі. Теорема 3.17 дає ефективний метод вивчення NP-критичних множин.

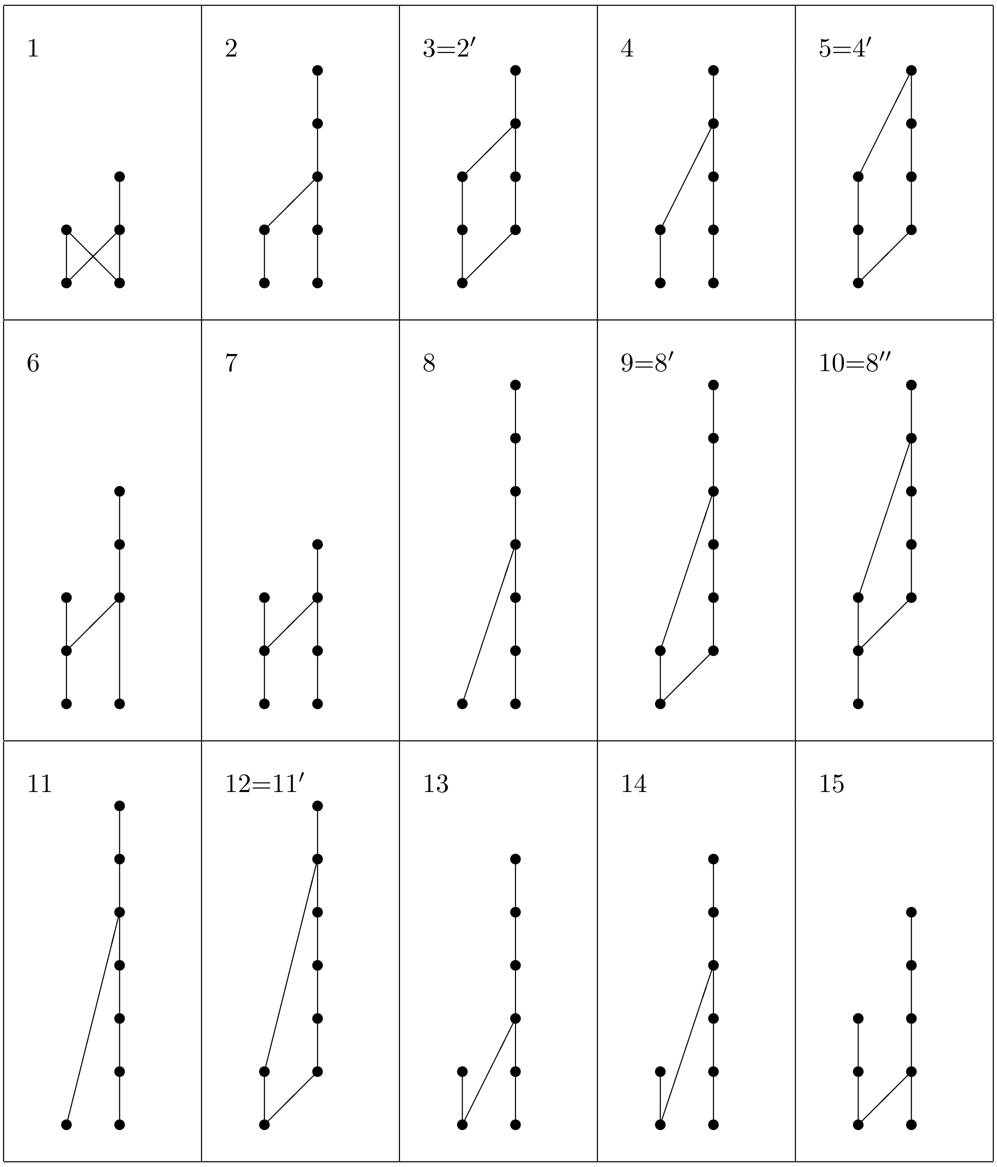
Розглянемо спочатку теорему 3.17. Якщо ч. в. множина S min-еквівалентна WNP-критичній множині $\mathcal{N}$, то за твердженнями 3.6 та 3.13 форма Тітса $q_S(z)$ не є невід'ємною. Легко бачити, що з твердження 3.5 (з врахуванням тверджень 3.6 і 3.13) випливає, що кожна власна підмножина $R \subset S$ має невід'ємну форму Тітса; справді, інакше $\mathcal{N}$ мало б власну підмножину $Q \cong_{\min} R$, форма Тітса якого не є невід'ємною, а це суперечило б тому факту, що множина $\mathcal{N}$ є NP-критичною. Таким чином, S є NP-критичною.

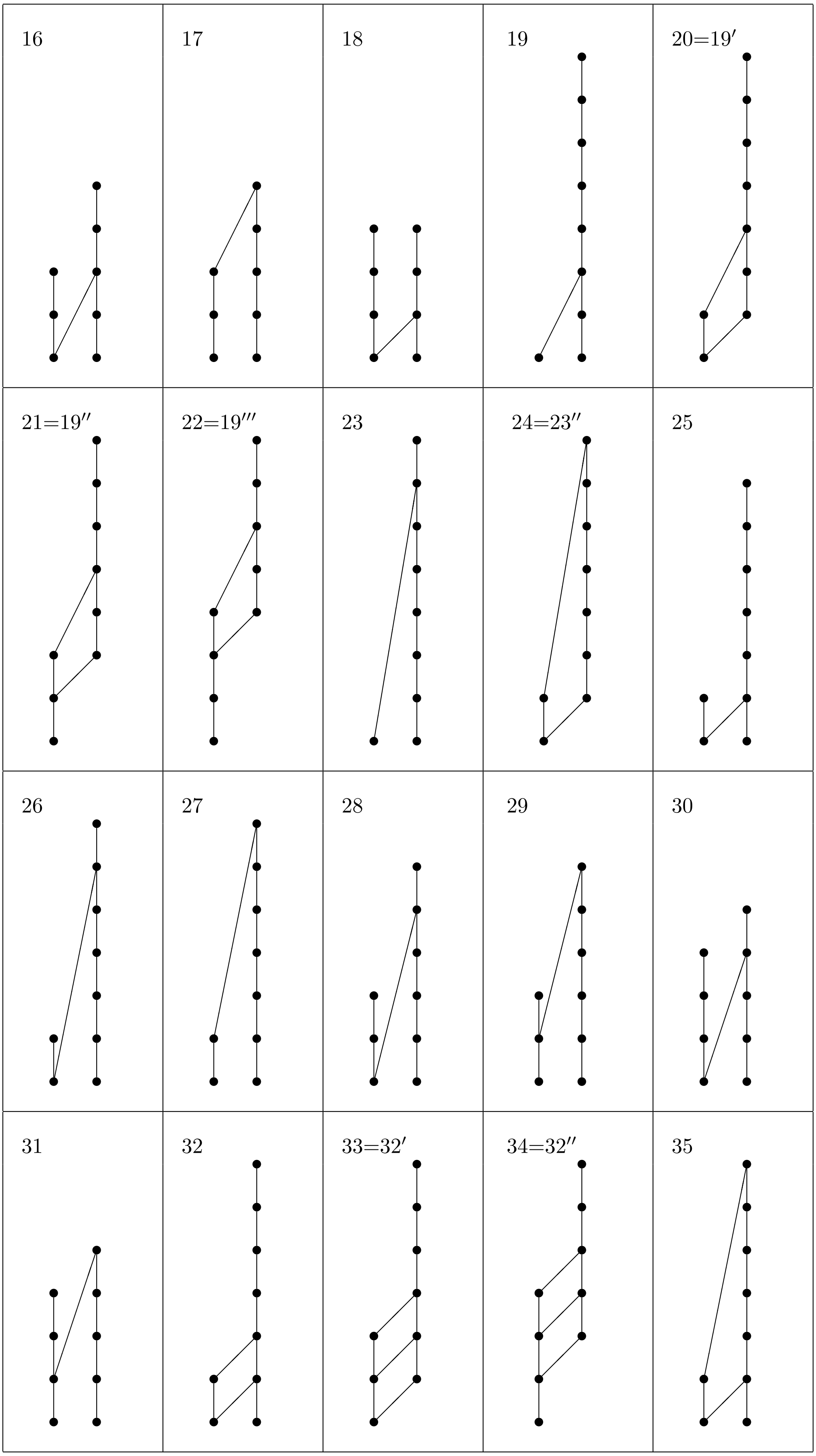
Навпаки, якщо S є NP-критичною, то за теоремою 3.14 вона min-еквівалентна деякій ч. в. множині S', яка містить WNP-критичну множину $N \cong \mathcal{N}_i$. Але тоді (знову за твердженнями 3.5 і 3.6) $S' = N$, а тому S min-еквівалентно N.

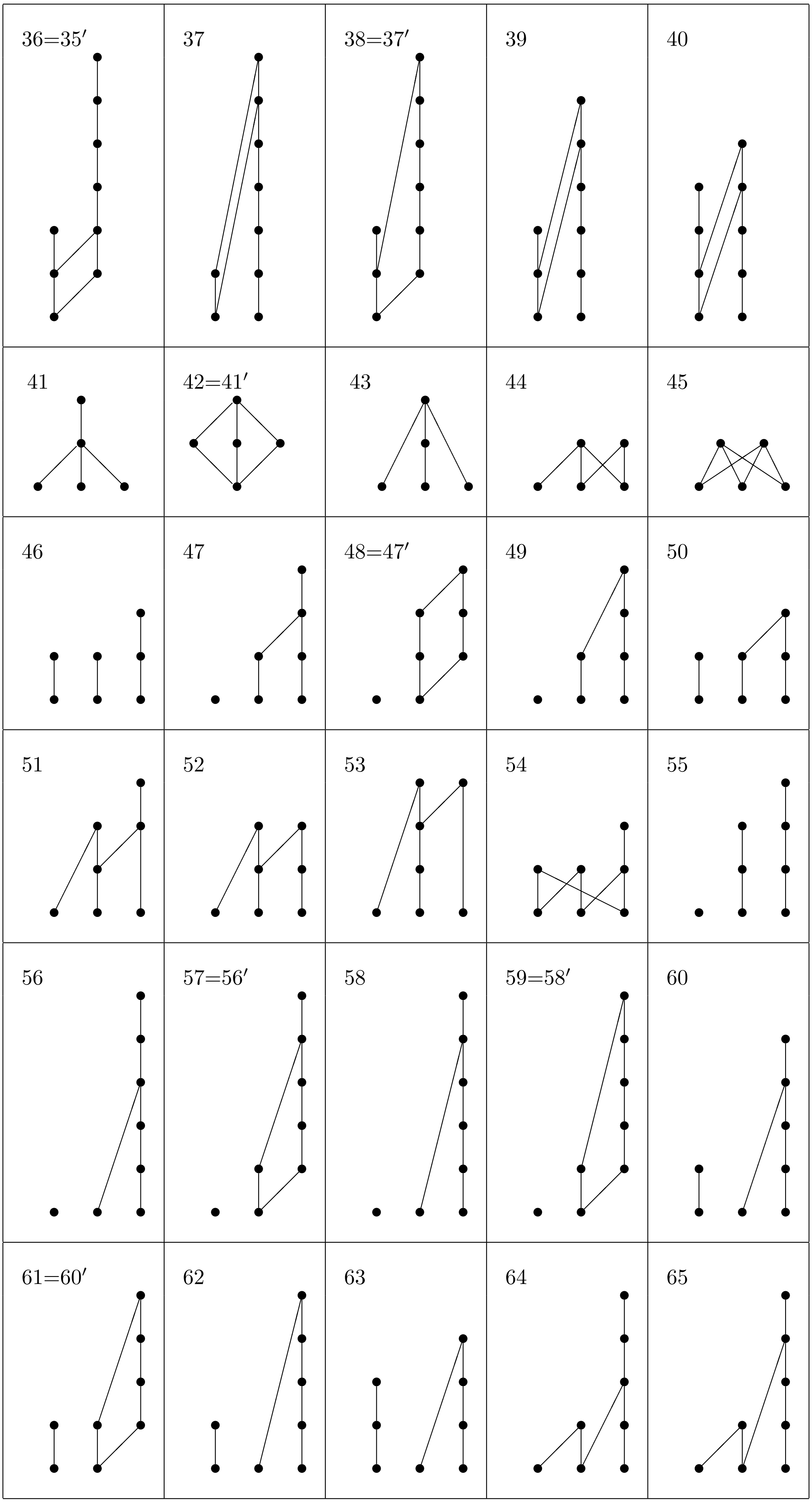
Переходимо до теореми 3.16. Твердження 2) безпосередньо випливає з твердження 3.6. Якщо ж S задовольняє умову твердження 1), то будь-яка ч. в. множина, яка min-еквівалентна S, не містить WNP-критичних підмножин (згідно з означенням останніх), а тому за теоремою 3.14 S має невід'ємну форму Тітса.

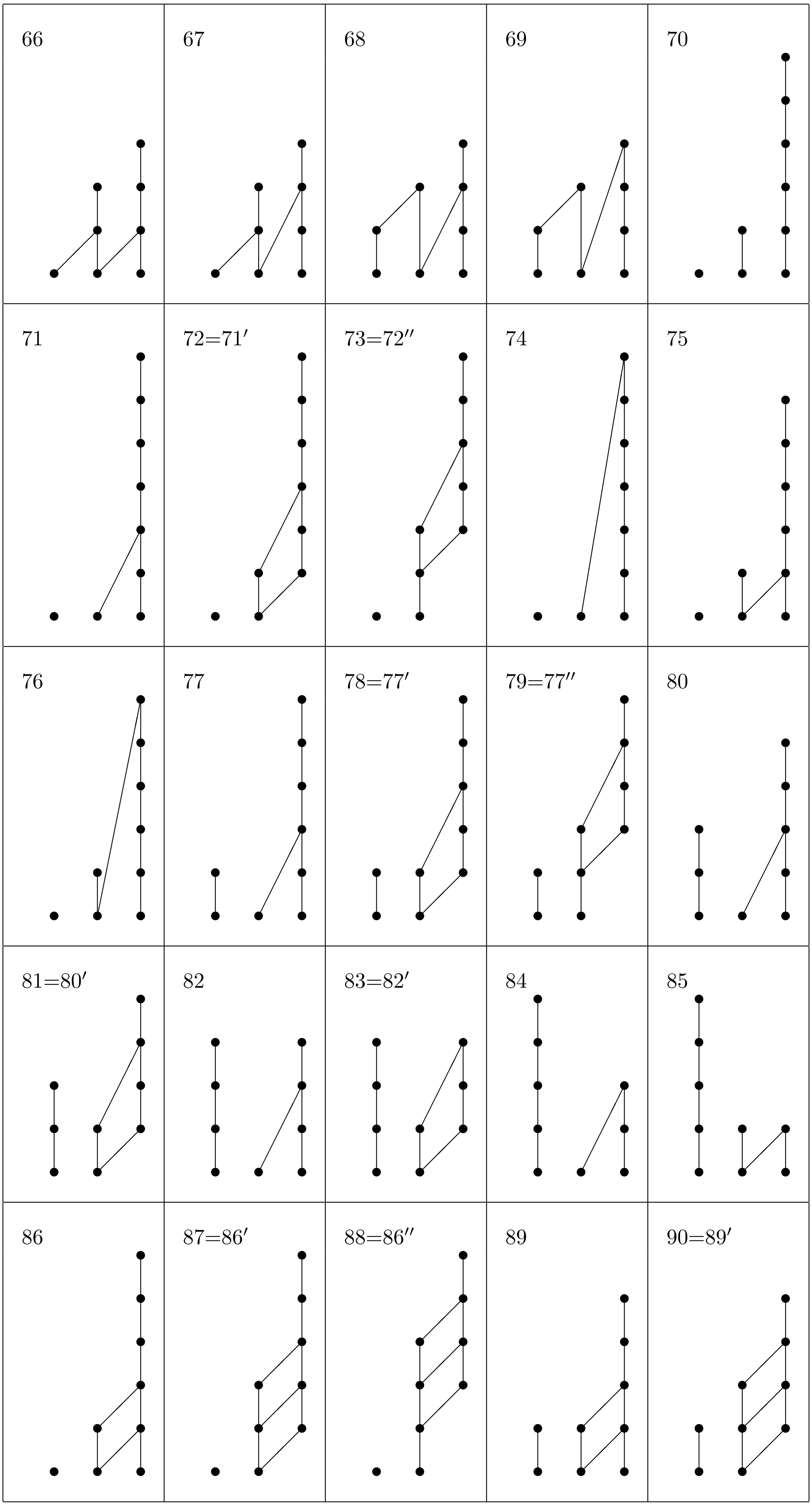
3.6. Опис NP-критичних частково впорядкованих множин

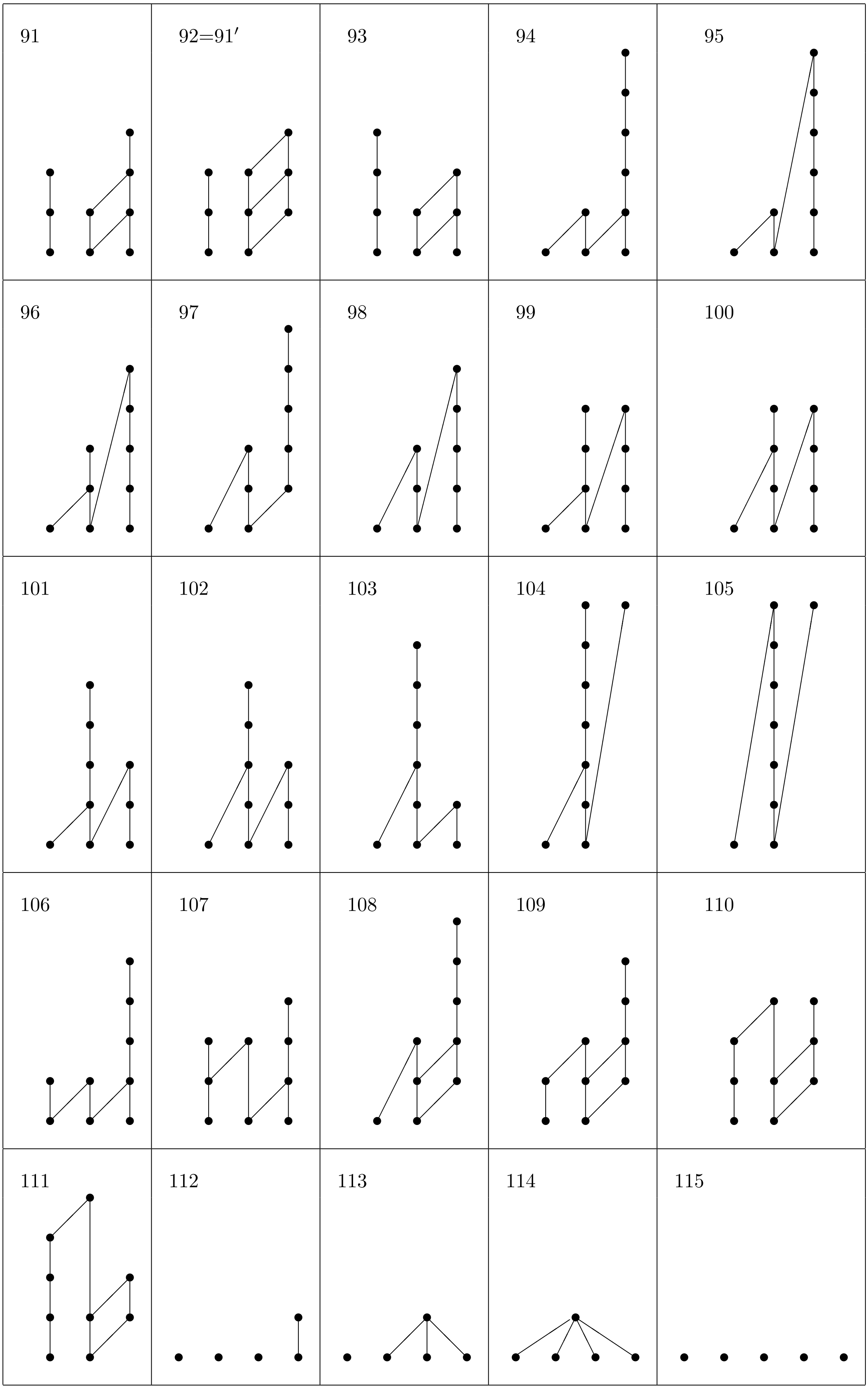
Теорема 3.18. *NP-критичні ч. в. множини вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму, ч. в. множинами* 1)–115)*, вказаними в таблиці.*




16
17
18
19
20=19′
21=19″
22=19‴
23
24=23″
25
26
27
28
29
30
31
32
33=32′
34=32″
35


36=35′
37
38=37′
39
40
41
42=41′
43
44
45
46
47
48=47′
49
50
51
52
53
54
55
56
57=56′
58
59=58′
60
61=60′
62
63
64
65


66
67
68
69
70
71
72=71′
73=72″
74
75
76
77
78=77′
79=77″
80
81=80′
82
83=82′
84
85
86
87=86′
88=86″
89
90=89′


91
92=91′
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115

Зробимо деякі зауваження до таблиці.

Вказану у цій таблиці ч. в. множину під номером i позначаємо через NP_i. Якщо множина NP_i має ширину 2 і в таблиці написано $i = j'$, це означає, що NP_i можна отримати з NP_j заміною єдиної її максимальної точки на єдину мінімальну точку. Те саме стосується і випадку $i = j'' = (j')'$ (потрібно порівнювати NP_i і $NP_{j'}$). Якщо множина NP_i має ширину 3 і в таблиці написано $i = j'$, то це означає, що сказане вище відноситься вже не до NP_i і NP_j, а до їхніх зв'язних компонентів (прямих доданків) ширини 2. Те ж саме стосується і випадку $i = j''$.

Довільні ч. в. множини S і T, які виходять одна з іншої за допомогою подібних операцій назвемо 0-*ізоморфними.* І якщо з таблиці викинути множини з номерами $i = j'$ і $i = j''$, то отримаємо опис NP-критичних множин з точністю до 0-ізоморфізму та дуальності.

Суперкритичні ч. в. множини Назарової представимо в такому вигляді:

$\mathcal{N}_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, де всі елементи попарно непорівняльні;

$\mathcal{N}_2 = \{1, 2, 3, 4, 5 \,|\, 4 \prec 5\}$;

$\mathcal{N}_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \,|\, 1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7\}$;

$\mathcal{N}_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \,|\, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$\mathcal{N}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$\mathcal{N}_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \,|\, 1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 7, 8 \prec 9, 6 \prec 9\}$.

Усі (з точністю до ізоморфізму чи додатково і антиізоморфізму) NP-критичні ч. в. множини можна отримати таким чином: взяти всі суперкритичні множини Назарової та для кожної з них описати всі min-еквівалентні їй ч. в. множини. Скористаємося алгоритмом 2.2.4.

Доведення. **Крок I.** Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі нижні підмножини в суперкритичних множинах Назарової $\mathcal{N}_1$–$\mathcal{N}_6$. Ними будуть:

для $\mathcal{N}_1$ — $X_{1,1} = \varnothing$, $X_{1,2} = \{1\}$, $X_{1,3} = \{1, 2\}$, $X_{1,4} = \{1, 2, 3\}$, $X_{1,5} =$

$\{1, 2, 3, 4\}$;

для $\mathcal{N}_2$ — $X_{2,1} = \varnothing$, $X_{2,2} = \{1\}$, $X_{2,3} = \{4\}$, $X_{2,4} = \{1, 2\}$, $X_{2,5} = \{1, 4\}$, $X_{2,6} = \{4, 5\}$, $X_{2,7} = \{1, 2, 3\}$, $X_{2,8} = \{1, 2, 4\}$, $X_{2,9} = \{1, 4, 5\}$, $X_{2,10} = \{1, 2, 3, 4\}$, $X_{2,11} = \{1, 2, 4, 5\}$;

для $\mathcal{N}_3$ — $X_{3,1} = \varnothing$, $X_{3,2} = \{1\}$, $X_{3,3} = \{5\}$, $X_{3,4} = \{1, 2\}$, $X_{3,5} = \{1, 3\}$, $X_{3,6} = \{1, 5\}$, $X_{3,7} = \{5, 6\}$, $X_{3,8} = \{1, 2, 3\}$, $X_{3,9} = \{1, 2, 5\}$, $X_{3,10} = \{1, 3, 5\}$, $X_{3,11} = \{1, 5, 6\}$, $X_{3,12} = \{5, 6, 7\}$, $X_{3,13} = \{1, 2, 3, 4\}$, $X_{3,14} = \{1, 2, 3, 5\}$, $X_{3,15} = \{1, 2, 5, 6\}$, $X_{3,16} = \{1, 3, 5, 6\}$, $X_{3,17} = \{1, 5, 6, 7\}$, $X_{3,18} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $X_{3,19} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $X_{3,20} = \{1, 2, 5, 6, 7\}$, $X_{3,21} = \{1, 3, 5, 6, 7\}$, $X_{3,22} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $X_{3,23} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$;

для $\mathcal{N}_4$ — $X_{4,1} = \varnothing$, $X_{4,2} = \{1\}$, $X_{4,3} = \{2\}$, $X_{4,4} = \{5\}$, $X_{4,5} = \{1, 2\}$, $X_{4,6} = \{1, 5\}$, $X_{4,7} = \{2, 3\}$, $X_{4,8} = \{2, 5\}$, $X_{4,9} = \{5, 6\}$, $X_{4,10} = \{1, 2, 3\}$, $X_{4,11} = \{1, 2, 5\}$, $X_{4,12} = \{1, 5, 6\}$, $X_{4,13} = \{2, 3, 4\}$, $X_{4,14} = \{2, 3, 5\}$, $X_{4,15} = \{2, 5, 6\}$, $X_{4,16} = \{5, 6, 7\}$, $X_{4,17} = \{1, 2, 3, 4\}$, $X_{4,18} = \{1, 2, 3, 5\}$, $X_{4,19} = \{1, 2, 5, 6\}$, $X_{4,20} = \{1, 5, 6, 7\}$, $X_{4,21} = \{2, 3, 4, 5\}$, $X_{4,22} = \{2, 3, 5, 6\}$, $X_{4,23} = \{2, 5, 6, 7\}$, $X_{4,24} = \{5, 6, 7, 8\}$, $X_{4,25} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $X_{4,26} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $X_{4,27} = \{1, 2, 5, 6, 7\}$, $X_{4,28} = \{1, 5, 6, 7, 8\}$, $X_{4,29} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $X_{4,30} = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $X_{4,31} = \{2, 5, 6, 7, 8\}$, $X_{4,32} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $X_{4,33} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$, $X_{4,34} = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$, $X_{4,35} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $X_{4,36} = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $X_{4,37} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $X_{4,38} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $X_{4,39} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

для $\mathcal{N}_5$ — $X_{5,1} = \varnothing$, $X_{5,2} = \{1\}$, $X_{5,3} = \{2\}$, $X_{5,4} = \{4\}$, $X_{5,5} = \{1, 2\}$, $X_{5,6} = \{1, 4\}$, $X_{5,7} = \{2, 3\}$, $X_{5,8} = \{2, 4\}$, $X_{5,9} = \{4, 5\}$, $X_{5,10} = \{1, 2, 3\}$, $X_{5,11} = \{1, 2, 4\}$, $X_{5,12} = \{1, 4, 5\}$, $X_{5,13} = \{2, 3, 4\}$, $X_{5,14} = \{2, 4, 5\}$, $X_{5,15} = \{4, 5, 6\}$, $X_{5,16} = \{1, 2, 3, 4\}$, $X_{5,17} = \{1, 2, 4, 5\}$, $X_{5,18} = \{1, 4, 5, 6\}$, $X_{5,19} = \{2, 3, 4, 5\}$, $X_{5,20} = \{2, 4, 5, 6\}$, $X_{5,21} = \{4, 5, 6, 7\}$, $X_{5,22} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $X_{5,23} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, $X_{5,24} = \{1, 4, 5, 6, 7\}$, $X_{5,25} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $X_{5,26} = \{2, 4, 5, 6, 7\}$, $X_{5,27} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $X_{5,28} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $X_{5,29} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$,

$X_{5,30} = \{1,4,5,6,7,8\}$, $X_{5,31} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $X_{5,32} = \{2,4,5,6,7,8\}$, $X_{5,33} = \{4,5,6,7,8,9\}$, $X_{5,34} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $X_{5,35} = \{1,2,4,5,6, 7, 8\}$, $X_{5,36} = \{1,4,5,6,7,8,9\}$, $X_{5,37} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$, $X_{5,38} = \{2,4,5,6,7,8,9\}$, $X_{5,39} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $X_{5,40} = \{1,2,4,5,6,7,8,9\}$, $X_{5,41} = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$;

для $\mathcal{N}_6$ — $X_{6,1} = \varnothing$, $X_{6,2} = \{1\}$, $X_{6,3} = \{6\}$, $X_{6,4} = \{8\}$, $X_{6,5} = \{1,2\}$, $X_{6,6} = \{1,6\}$, $X_{6,7} = \{1,8\}$, $X_{6,8} = \{6,7\}$, $X_{6,9} = \{6,8\}$, $X_{6,10} = \{1,2,3\}$, $X_{6,11} = \{1,2,6\}$, $X_{6,12} = \{1,2,8\}$, $X_{6,13} = \{1,6,7\}$, $X_{6,14} = \{1,6,8\}$, $X_{6,15} = \{6,7,8\}$, $X_{6,16} = \{6,8,9\}$, $X_{6,17} = \{1,2,3,4\}$, $X_{6,18} = \{1,2,3,6\}$, $X_{6,19} = \{1,2,3,8\}$, $X_{6,20} = \{1,2,6,7\}$, $X_{6,21} = \{1,2,6,8\}$, $X_{6,22} = \{1,6,7,8\}$, $X_{6,23} = \{1,6,8,9\}$, $X_{6,24} = \{6,7,8,9\}$, $X_{6,25} = \{1,2,3,4,5\}$, $X_{6,26} = \{1,2,3,4,6\}$, $X_{6,27} = \{1,2,3,4,8\}$, $X_{6,28} = \{1,2,3,6,7\}$, $X_{6,29} = \{1,2,3,6,8\}$, $X_{6,30} = \{1,2,6,7,8\}$, $X_{6,31} = \{1,2,6, 8, 9\}$, $X_{6,32} = \{1,6,7,8,9\}$, $X_{6,33} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $X_{6,34} = \{1,2,3,4,5,8\}$, $X_{6,35} = \{1,2,3,4, 6, 7\}$, $X_{6,36} = \{1,2,3,4,6,8\}$, $X_{6,37} = \{1,2,3,6,7,8\}$, $X_{6,38} = \{1,2,3,6,8,9\}$, $X_{6,39} = \{1,2,6,7, 8, 9\}$, $X_{6,40} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $X_{6,41} = \{1,2,3,4,5,6,8\}$, $X_{6,42} = \{1,2,3,4,6,7,8\}$, $X_{6,43} = \{1,2,3,4,6,8,9\}$, $X_{6,44} = \{1,2,3,6,7,8,9\}$, $X_{6,45} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $X_{6,46} = \{1,2,3,4,5, 6, 8, 9\}$, $X_{6,47} = \{1,2,3,4,6,7,8,9\}$.

Позначимо через $NP_{i,j}$ ч. в. множини $S^{\uparrow}_{X}$ при $S = \mathcal{N}_i$ і $X = X_{i,j}$. Тоді легко переконатись у тому, що

$\mathcal{N}_{1,1}$ ізоморфна NP_{115}, $\mathcal{N}_{1,2}$ ізоморфна NP_{114}, $\mathcal{N}_{1,3}$ ізоморфна NP_{45}, $\mathcal{N}_{1,4}$ ізоморфна NP^{op}_{45}, $\mathcal{N}_{1,5}$ ізоморфна NP^{op}_{114}; $\mathcal{N}_{2,1}$ ізоморфна NP_{112}, $\mathcal{N}_{2,2}$ ізоморфна NP_{43}, $\mathcal{N}_{2,3}$ ізоморфна NP_{113}, $\mathcal{N}_{2,4}$ ізоморфна NP^{op}_{1}, $\mathcal{N}_{2,5}$ ізоморфна NP_{44}, $\mathcal{N}_{2,6}$ ізоморфна NP_{41}, $\mathcal{N}_{2,7}$ ізоморфна NP^{op}_{41}, $\mathcal{N}_{2,8}$ ізоморфна NP^{op}_{44}, $\mathcal{N}_{2,9}$ ізоморфна NP_{1}, $\mathcal{N}_{2,10}$ ізоморфна NP^{op}_{113}, $\mathcal{N}_{2,11}$ ізоморфна NP^{op}_{43}; $\mathcal{N}_{3,1}$ ізоморфна NP_{46}, $\mathcal{N}_{3,2}$ ізоморфна NP_{49}, $\mathcal{N}_{3,3}$ ізоморфна NP_{50}, $\mathcal{N}_{3,4}$ ізоморфна NP_{4}, $\mathcal{N}_{3,5}$ ізоморфна NP_{53}, $\mathcal{N}_{3,6}$ ізоморфна NP_{52}, $\mathcal{N}_{3,7}$ ізоморфна NP_{47}, $\mathcal{N}_{3,8}$ ізоморфна NP^{op}_{6}, $\mathcal{N}_{3,9}$

ізоморфна NP_7, $\mathcal{N}_{3,10}$ ізоморфна NP_{54}^{op}, $\mathcal{N}_{3,11}$ ізоморфна NP_{51}, $\mathcal{N}_{3,12}$ ізоморфна NP_2, $\mathcal{N}_{3,13}$ ізоморфна NP_2^{op}, $\mathcal{N}_{3,14}$ ізоморфна NP_{51}^{op}, $\mathcal{N}_{3,15}$ ізоморфна NP_7^{op}, $\mathcal{N}_{3,16}$ ізоморфна NP_{54}, $\mathcal{N}_{3,17}$ ізоморфна NP_6, $\mathcal{N}_{3,18}$ ізоморфна NP_{47}^{op}, $\mathcal{N}_{3,19}$ ізоморфна NP_{52}^{op}, $\mathcal{N}_{3,20}$ ізоморфна NP_4^{op}, $\mathcal{N}_{3,21}$ ізоморфна NP_{53}^{op}, $\mathcal{N}_{3,22}$ ізоморфна NP_{50}^{op}, $\mathcal{N}_{3,23}$ ізоморфна NP_{49}^{op}; $\mathcal{N}_{4,1}$ ізоморфна NP_{55}, $\mathcal{N}_{4,2}$ ізоморфна NP_{17}, $\mathcal{N}_{4,3}$ ізоморфна NP_{62}, $\mathcal{N}_{4,4}$ ізоморфна NP_{63}, $\mathcal{N}_{4,5}$ ізоморфна NP_{15}^{op}, $\mathcal{N}_{4,6}$ ізоморфна NP_{18}^{op}, $\mathcal{N}_{4,7}$ ізоморфна NP_{58}, $\mathcal{N}_{4,8}$ ізоморфна NP_{69}, $\mathcal{N}_{4,9}$ ізоморфна NP_{60}, $\mathcal{N}_{4,10}$ ізоморфна NP_{13}^{op}, $\mathcal{N}_{4,11}$ ізоморфна NP_{66}^{op}, $\mathcal{N}_{4,12}$ ізоморфна NP_{16}^{op}, $\mathcal{N}_{4,13}$ ізоморфна NP_{11}, $\mathcal{N}_{4,14}$ ізоморфна NP_{65}, $\mathcal{N}_{4,15}$ ізоморфна NP_{68}, $\mathcal{N}_{4,16}$ ізоморфна NP_{56}, $\mathcal{N}_{4,17}$ ізоморфна NP_8^{op}, $\mathcal{N}_{4,18}$ ізоморфна NP_{64}^{op}, $\mathcal{N}_{4,19}$ ізоморфна NP_{67}^{op}, $\mathcal{N}_{4,20}$ ізоморфна NP_{14}^{op}, $\mathcal{N}_{4,21}$ ізоморфна NP_{14}, $\mathcal{N}_{4,22}$ ізоморфна NP_{67}, $\mathcal{N}_{4,23}$ ізоморфна NP_{64}, $\mathcal{N}_{4,24}$ ізоморфна NP_8, $\mathcal{N}_{4,25}$ ізоморфна NP_{56}^{op}, $\mathcal{N}_{4,26}$ ізоморфна NP_{68}^{op}, $\mathcal{N}_{4,27}$ ізоморфна NP_{65}^{op}, $\mathcal{N}_{4,28}$ ізоморфна NP_{11}^{op}, $\mathcal{N}_{4,29}$ ізоморфна NP_{16}, $\mathcal{N}_{4,30}$ ізоморфна NP_{66}, $\mathcal{N}_{4,31}$ ізоморфна NP_{13}, $\mathcal{N}_{4,32}$ ізоморфна NP_{60}^{op}, $\mathcal{N}_{4,33}$ ізоморфна NP_{69}^{op}, $\mathcal{N}_{4,34}$ ізоморфна NP_{58}^{op}, $\mathcal{N}_{4,35}$ ізоморфна NP_{18}, $\mathcal{N}_{4,36}$ ізоморфна NP_{15}, $\mathcal{N}_{4,37}$ ізоморфна NP_{63}^{op}, $\mathcal{N}_{4,38}$ ізоморфна NP_{62}^{op}, $\mathcal{N}_{4,39}$ ізоморфна NP_{17}^{op}; $\mathcal{N}_{5,1}$ ізоморфна NP_{70}, $\mathcal{N}_{5,2}$ ізоморфна NP_{27}, $\mathcal{N}_{5,3}$ ізоморфна NP_{74}, $\mathcal{N}_{5,4}$ ізоморфна NP_{84}^{op}, $\mathcal{N}_{5,5}$ ізоморфна NP_{25}^{op}, $\mathcal{N}_{5,6}$ ізоморфна NP_{29}, $\mathcal{N}_{5,7}$ ізоморфна NP_{23}, $\mathcal{N}_{5,8}$ ізоморфна NP_{95}, $\mathcal{N}_{5,9}$ ізоморфна NP_{82}, $\mathcal{N}_{5,10}$ ізоморфна NP_{19}^{op}, $\mathcal{N}_{5,11}$ ізоморфна NP_{94}, $\mathcal{N}_{5,12}$ ізоморфна NP_{31}, $\mathcal{N}_{5,13}$ ізоморфна NP_{26}, $\mathcal{N}_{5,14}$ ізоморфна NP_{96}, $\mathcal{N}_{5,15}$ ізоморфна NP_{80}, $\mathcal{N}_{5,16}$ ізоморфна NP_{71}^{op}, $\mathcal{N}_{5,17}$ ізоморфна NP_{101}^{op}, $\mathcal{N}_{5,18}$ ізоморфна NP_{30}^{op}, $\mathcal{N}_{5,19}$ ізоморфна NP_{23}, $\mathcal{N}_{5,20}$ ізоморфна NP_{99}, $\mathcal{N}_{5,21}$ ізоморфна NP_{77}, $\mathcal{N}_{5,22}$ ізоморфна NP_{77}^{op}, $\mathcal{N}_{5,23}$ ізоморфна NP_{99}^{op}, $\mathcal{N}_{5,24}$ ізоморфна NP_{28}^{op}, $\mathcal{N}_{5,25}$ ізоморфна NP_{30}, $\mathcal{N}_{5,26}$ ізоморфна NP_{101}, $\mathcal{N}_{5,27}$ ізоморфна NP_{71}, $\mathcal{N}_{5,28}$ ізоморфна NP_{80}^{op}, $\mathcal{N}_{5,29}$ ізоморфна NP_{96}^{op}, $\mathcal{N}_{5,30}$ ізоморфна NP_{26}^{op}, $\mathcal{N}_{5,31}$ ізоморфна NP_{31}^{op}, $\mathcal{N}_{5,32}$ ізоморфна NP_{94}^{op}, $\mathcal{N}_{5,33}$ ізоморфна NP_{19}, $\mathcal{N}_{5,34}$

ізоморфна NP_{82}^{op}, $\mathcal{N}_{5,35}$ ізоморфна NP_{95}^{op}, $\mathcal{N}_{5,36}$ ізоморфна NP_{23}^{op}, $\mathcal{N}_{5,37}$ ізоморфна NP_{29}^{op}, $\mathcal{N}_{5,38}$ ізоморфна NP_{25}, $\mathcal{N}_{5,39}$ ізоморфна NP_{84}^{op}, $\mathcal{N}_{5,40}$ ізоморфна NP_{74}^{op}, $\mathcal{N}_{5,41}$ ізоморфна NP_{27}^{op}; $\mathcal{N}_{6,1}$ ізоморфна NP_{85}, $\mathcal{N}_{6,2}$ ізоморфна NP_{93}, $\mathcal{N}_{6,3}$ ізоморфна NP_{76}, $\mathcal{N}_{6,4}$ ізоморфна NP_{97}^{op}, $\mathcal{N}_{6,5}$ ізоморфна NP_{91}, $\mathcal{N}_{6,6}$ ізоморфна NP_{98}, $\mathcal{N}_{6,7}$ ізоморфна NP_{111}, $\mathcal{N}_{6,8}$ ізоморфна NP_{37}, $\mathcal{N}_{6,9}$ ізоморфна NP_{75}^{op}, $\mathcal{N}_{6,10}$ ізоморфна NP_{89}, $\mathcal{N}_{6,11}$ ізоморфна NP_{100}, $\mathcal{N}_{6,12}$ ізоморфна NP_{110}, $\mathcal{N}_{6,13}$ ізоморфна NP_{39}, $\mathcal{N}_{6,14}$ ізоморфна NP_{106}^{op}, $\mathcal{N}_{6,15}$ ізоморфна NP_{104}^{op}, $\mathcal{N}_{6,16}$ ізоморфна NP_{36}^{op}, $\mathcal{N}_{6,17}$ ізоморфна NP_{86}, $\mathcal{N}_{6,18}$ ізоморфна NP_{102}, $\mathcal{N}_{6,19}$ ізоморфна NP_{109}, $\mathcal{N}_{6,20}$ ізоморфна NP_{40}, $\mathcal{N}_{6,21}$ ізоморфна NP_{107}^{op}, $\mathcal{N}_{6,22}$ ізоморфна NP_{103}^{op}, $\mathcal{N}_{6,23}$ ізоморфна NP_{108}^{op}, $\mathcal{N}_{6,24}$ ізоморфна NP_{32}^{op}, $\mathcal{N}_{6,25}$ ізоморфна NP_{32}, $\mathcal{N}_{6,26}$ ізоморфна NP_{103}, $\mathcal{N}_{6,27}$ ізоморфна NP_{108}, $\mathcal{N}_{6,28}$ ізоморфна NP_{40}^{op}, $\mathcal{N}_{6,29}$ ізоморфна NP_{107}, $\mathcal{N}_{6,30}$ ізоморфна NP_{102}^{op}, $\mathcal{N}_{6,31}$ ізоморфна NP_{109}, $\mathcal{N}_{6,32}$ ізоморфна NP_{86}^{op}, $\mathcal{N}_{6,33}$ ізоморфна NP_{104}, $\mathcal{N}_{6,34}$ ізоморфна NP_{36}, $\mathcal{N}_{6,35}$ ізоморфна NP_{39}^{op}, $\mathcal{N}_{6,36}$ ізоморфна NP_{106}, $\mathcal{N}_{6,37}$ ізоморфна NP_{100}^{op}, $\mathcal{N}_{6,38}$ ізоморфна NP_{110}^{op}, $\mathcal{N}_{6,39}$ ізоморфна NP_{89}^{op}, $\mathcal{N}_{6,40}$ ізоморфна NP_{37}^{op}, $\mathcal{N}_{6,41}$ ізоморфна NP_{75}, $\mathcal{N}_{6,42}$ ізоморфна NP_{98}^{op}, $\mathcal{N}_{6,43}$ ізоморфна NP_{111}^{op}, $\mathcal{N}_{6,44}$ ізоморфна NP_{91}^{op}, $\mathcal{N}_{6,45}$ ізоморфна NP_{76}^{op}, $\mathcal{N}_{6,46}$ ізоморфна NP_{97}, $\mathcal{N}_{6,47}$ ізоморфна NP_{93}^{op}.

Крок II. Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі пари (X, Y) нижніх власних підмножин в суперкритичних множинах Назарової $\mathcal{N}_2$– $\mathcal{N}_6$ такі, що $Y \subseteq X$ і $Y < S \setminus X$ (для $\mathcal{N}_1$ таких пар немає). Ними будуть:

для $\mathcal{N}_2$ — $Y_{2,1} = (X_{2,10}, \{4\})$;

для $\mathcal{N}_3$ — $Y_{3,1} = (X_{3,18}, \{5\})$, $Y_{3,2} = (X_{3,22}, \{5\})$, $Y_{3,3} = (X_{3,22}, \{5, 6\})$, $Y_{3,4} = (X_{3,23}, \{3\})$;

для $\mathcal{N}_4$ — $Y_{4,1} = (X_{4,25}, \{5\})$, $Y_{4,2} = (X_{4,32}, \{5\})$, $Y_{4,3} = (X_{4,32}, \{5, 6\})$, $Y_{4,4} = (X_{4,34}, \{2\})$, $Y_{4,5} = (X_{4,37}, \{5\})$, $Y_{4,6} = (X_{4,37}, \{5, 6\})$, $Y_{4,7} = (X_{4,37}, \{5, 6, 7\})$, $Y_{4,8} = (X_{4,38}, \{2\})$, $Y_{4,9} = (X_{4,38}, \{2, 3\})$;

для $\mathcal{N}_5$ — $Y_{5,1} = (X_{5,16}, \{4\})$, $Y_{5,2} = (X_{5,22}, \{4\})$, $Y_{5,3} = (X_{5,22}, \{4,5\})$, $Y_{5,4} = (X_{5,28}, \{4\})$, $Y_{5,5} = (X_{5,28}, \{4,5\})$, $Y_{5,6} = (X_{5,28}, \{4,5,6\})$, $Y_{5,7} = (X_{5,34}, \{4\})$, $Y_{5,8} = (X_{5,34}, \{4,5\})$, $Y_{5,9} = (X_{5,34}, \{4,5,6\})$, $Y_{5,10} = (X_{5,34}, \{4,5,6,7\})$, $Y_{5,11} = (X_{5,39}, \{4\})$, $Y_{5,12} = (X_{5,39}, \{4,5\})$, $Y_{5,13} = (X_{5,39}, \{4,5,6\})$, $Y_{5,14} = (X_{5,39}, \{4,5,6,7\})$, $Y_{5,14} = (X_{5,39}, \{4,5,6,7,8\})$, $Y_{5,16} = (X_{5,40}, \{2\})$;

для $\mathcal{N}_6$ — $Y_{6,1} = (X_{6,32}, \{1\})$, $Y_{6,2} = (X_{6,39}, \{1\})$, $Y_{6,3} = (X_{6,39}, \{1,2\})$, $Y_{6,4} = (X_{6,41}, \{6\})$, $Y_{6,5} = (X_{6,44}, \{1\})$, $Y_{6,6} = (X_{6,44}, \{1,2\})$, $Y_{6,7} = (X_{6,44}, \{1,2,3\})$, $Y_{6,8} = (X_{6,45}, \{6\})$, $Y_{6,9} = (X_{6,45}, \{8\})$, $Y_{6,10} = (X_{6,45}, \{6,8\})$, $Y_{6,11} = (X_{6,46}, \{6\})$, $Y_{6,12} = (X_{6,47}, \{1\})$, $Y_{6,13} = (X_{6,47}, \{1,2\})$, $Y_{6,14} = (X_{6,47}, \{1,2,3\})$, $Y_{6,15} = (X_{6,47}, \{1,2,3,4\})$.

Позначимо через $N'_{i,j}$ ч. в. множину $(S^{\uparrow}_{X})^{\uparrow}_{V}$ при $S = \mathcal{N}_i$ і $(X,V) = Y_{i,j}$. Тоді легко переконатися, що

$N'_{2,1}$ ізоморфна NP_{42}; $N'_{3,1}$ ізоморфна NP_3^{op}, $N'_{3,2}$ ізоморфна NP_{48}, $N'_{3,3}$ ізоморфна NP_3, $N'_{3,4}$ ізоморфна NP_5; $N'_{4,1}$ ізоморфна NP_9^{op}, $N'_{4,2}$ ізоморфна NP_{57}^{op}, $N'_{4,3}$ ізоморфна NP_{10}, $N'_{4,4}$ ізоморфна NP_{12}^{op}, $N'_{4,5}$ ізоморфна NP_{61}, $N'_{4,6}$ ізоморфна NP_{57}, $N'_{4,7}$ ізоморфна NP_9, $N'_{4,8}$ ізоморфна NP_{59}, $N'_{4,9}$ ізоморфна NP_{12}; $N'_{5,1}$ ізоморфна NP_{20}^{op}, $N'_{5,2}$ ізоморфна NP_{72}^{op}, $N'_{5,3}$ ізоморфна NP_{21}^{op}, $N'_{5,4}$ ізоморфна NP_{78}^{op}, $N'_{5,5}$ ізоморфна NP_{73}^{op}, $N'_{5,6}$ ізоморфна NP_{22}, $N'_{5,7}$ ізоморфна NP_{81}^{op}, $N'_{5,8}$ ізоморфна NP_{79}, $N'_{5,9}$ ізоморфна NP_{73}, $N'_{5,10}$ ізоморфна NP_{21}, $N'_{5,11}$ ізоморфна NP_{83}, $N'_{5,12}$ ізоморфна NP_{81}, $N'_{5,13}$ ізоморфна NP_{78}, $N'_{5,14}$ ізоморфна NP_{72}, $N'_{5,15}$ ізоморфна NP_{20}, $N'_{5,16}$ ізоморфна NP_{24}; $N'_{6,1}$ ізоморфна NP_{33}^{op}, $N'_{6,2}$ ізоморфна NP_{87}^{op}, $N'_{6,3}$ ізоморфна NP_{34}^{op}, $N'_{6,4}$ ізоморфна NP_{35}, $N'_{6,5}$ ізоморфна NP_{90}^{op}, $N'_{6,6}$ ізоморфна NP_{88}, $N'_{6,7}$ ізоморфна NP_{34}, $N'_{6,8}$ ізоморфна NP_{105}, $N'_{6,9}$ ізоморфна NP_{38}^{op}, $N'_{6,10}$ ізоморфна NP_{35}^{op}, $N'_{6,11}$ ізоморфна NP_{38}, $N'_{6,12}$ ізоморфна NP_{92}, $N'_{6,13}$ ізоморфна NP_{90}, $N'_{6,14}$ ізоморфна NP_{87}, $N'_{6,15}$ ізоморфна NP_{33}.

Крок III. Легко переконатися у тому, що у I і II кожна з ч. в. множин

N_i і N_i^{op}, де $i = 1, 2, \ldots, 115$, зустрічається по одному разу (при цьому якщо $N_i^{\mathrm{op}} \cong N_i$, то N_i зустрічається, а N_i^{op} — ні).

Теорема доведена. □

3.7. Модифікований опис NP-критичних частково впорядкованих множин

Модифікація полягає в тому, що NP-критичні ч.в. множини класифікуються не загальним списком, а по класах мінімаксних ізоморфізмів. Такий опис дозволяє сформулювати та довести новий тип властивостей, які можуть знадобитися при різних застосуваннях. Наприклад, із загального списку випливає наступне твердження.

Твердження 3.19. *Підмножина S_0 всіх вузлових елементів довільної NP-критичної ч.в. множини S є (неперетинним) об'єднанням $S_0 = S_0^- \cup S_0^+$ відповідно нижньої та верхньої підмножин множини S.*

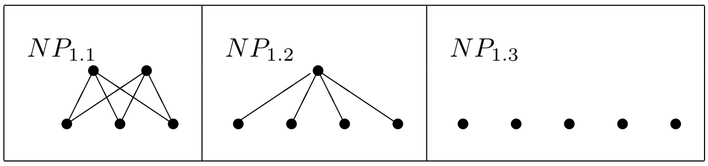
А ось наступне твердження, яке знадобиться нам в останньому розділі, вже не випливає із загального опису NP-критичних множин, але випливає із опису їхніх класів мінімаксних ізоморфізмів (який, нагадаємо, приводиться нижче в цьому розділі).

Твердження 3.20. *Нехай $\mathcal{N}$ — деяка множина Назарової і $m = m(\mathcal{N})$ — найбільший порядок підмножини вузлових елементів серед усіх множин X, мінімаксно ізоморфних множині $\mathcal{N}$. Тоді m дорівнює висоті множини $\mathcal{N}$. Така підмножина вузлових елементів, зокрема, завжди реалізується як верхня (нижня) підмножина деякої множини X.*

Переходимо до класифікації NP-критичних множин (з точністю до ізоморфізму і дуальності) по класам мінімаксних ізоморфізмів. Відповідні ч.в. множини вказуються і в теоретико-множинному, і в геометричному вигляді. Перше задання важливе для строгих доведень в різних застосуваннях (див., наприклад, останній розділ), а друге є, звичайно ж, більш наглядним. Число в круглих дужках після номеру множини вказує її номер в приведеному раніше загальному списку (див. теорему 3.18). Цей номер може бути з верхнім індексом "ор", що означає, що потрібно взяти дуальну множину; така ситуація виникає тому, що множини в загальному списку фіксуються з точністю до дуальності за деяким принципом, який не обов'язково забезпечує відсутність дуальних множин в різних модифікаціях.

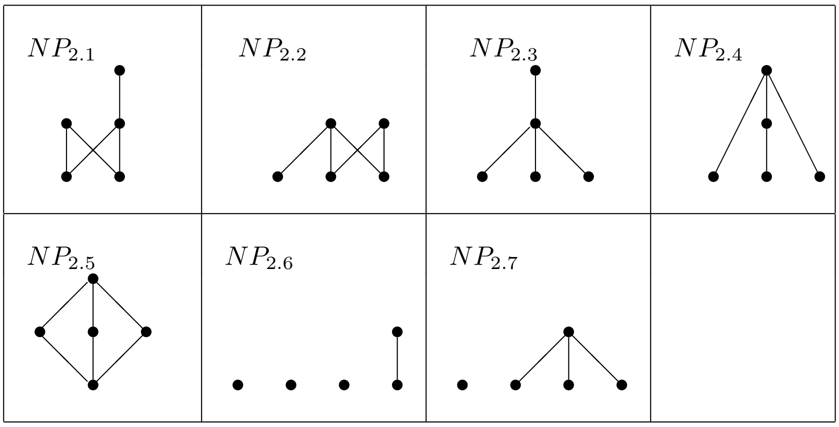
Теорема 3.21. *NP-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{N}_1$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 3 множинами:*

1) $NP_{1.1}(45) = \{1 \prec 3, 1 \prec 5, 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 3, 4 \prec 5\}$;
2) $NP_{1.2}(114) = \{1 \prec 5, 2 \prec 5, 3 \prec 5, 4 \prec 5\}$;
3) $NP_{1.3}(115) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



Теорема 3.22. *NP-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{N}_2$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 7 множинами:*

1) $NP_{2.1}(1) = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5, 1 \prec 4, 3 \prec 2\}$;
2) $NP_{2.2}(44) = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 3, 4 \prec 5\}$;
3) $NP_{2.3}(41) = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 3\}$;
4) $NP_{2.4}(43) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 4\}$;
5) $NP_{2.5}(42) = \{2 \prec 1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 5 \prec 4\}$;
6) $NP_{2.6}(112) = \{1, 2, 3, 4 \prec 5\}$;
7) $NP_{2.7}(113) = \{1, 2 \prec 4, 3 \prec 4, 5 \prec 4\}$.



Теорема 3.23. *NP-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{N}_3$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 15 множинами:*

1) $NP_{3.1}(7) = \{1 \prec 2 \prec 3, 2 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

2) $NP_{3.2}(2) = \{1 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

3) $NP_{3.3}(4) = \{1 \prec 2 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

4) $NP_{3.4}(6) = \{1 \prec 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

5) $NP_{3.5}(3) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 1 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

6) $NP_{3.6}(5) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 1 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

7) $NP_{3.7}(46) = \{1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7\}$;

8) $NP_{3.8}(50) = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7\}$;

9) $NP_{3.9}(52) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 3 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7\}$;

10) $NP_{3.10}(54) = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 2, 5 \prec 6 \prec 7\}$;

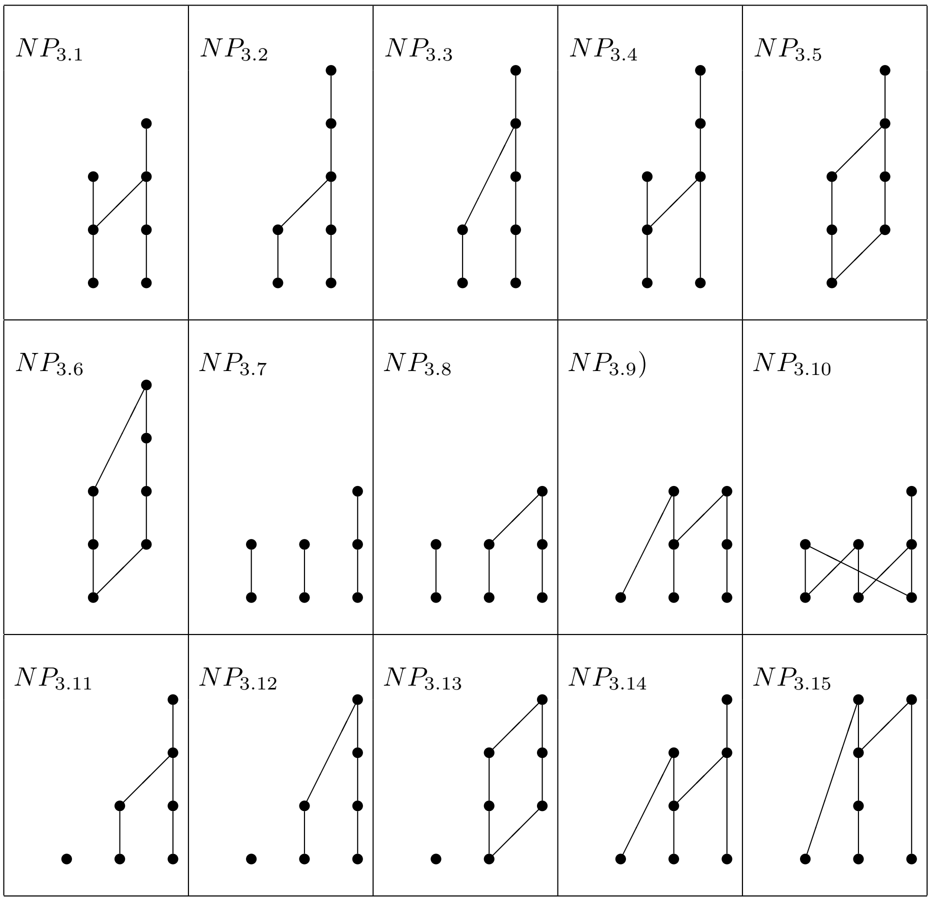
11) $NP_{3.11}(47) = \{1, 2 \prec 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

12) $NP_{3.12}(49) = \{1, 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

13) $NP_{3.13}(48) = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

14) $NP_{3.14}(51) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7\}$;

15) $NP_{3.15}(53) = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 4 \prec 7, 6 \prec 7\}$.



Теорема 3.24. *NP-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{N}_4$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 26 множинами:*

1) $NP_{4.1}(18) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 1 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

2) $NP_{4.2}(15) = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

3) $NP_{4.3}(16) = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

4) $NP_{4.4}(17) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

5) $NP_{4.5}(13) = \{1 \prec 2, 1 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

6) $NP_{4.6}(14) = \{1 \prec 2, 1 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

7) $NP_{4.7}(8) = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

8) $NP_{4.8}(11) = \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

9) $NP_{4.9}(9) = \{1 \prec 2 \prec 6, 1 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

10) $NP_{4.10}(12) = \{1 \prec 2 \prec 7, 1 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

11) $NP_{4.11}(10) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 2 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

12) $NP_{4.12}(55) = \{1, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

13) $NP_{4.13}(63) = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

14) $NP_{4.14}(66) = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

15) $NP_{4.15}(67) = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

16) $NP_{4.16}(68) = \{1 \prec 2 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

17) $NP_{4.17}(69) = \{1 \prec 2 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

18) $NP_{4.18}(60) = \{1 \prec 2, 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

19) $NP_{4.19}(62) = \{1 \prec 2, 3 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

20) $NP_{4.20}(61) = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 8, 3 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

21) $NP_{4.21}(64) = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

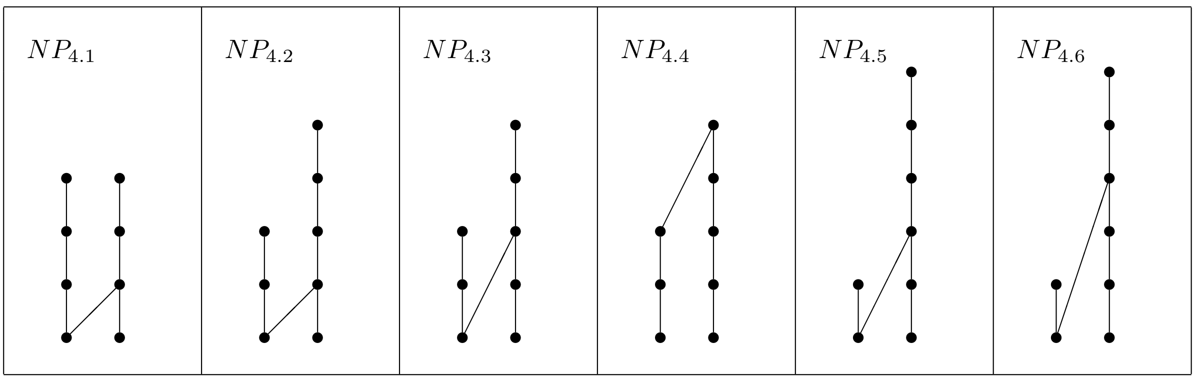
22) $NP_{4.22}(65) = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

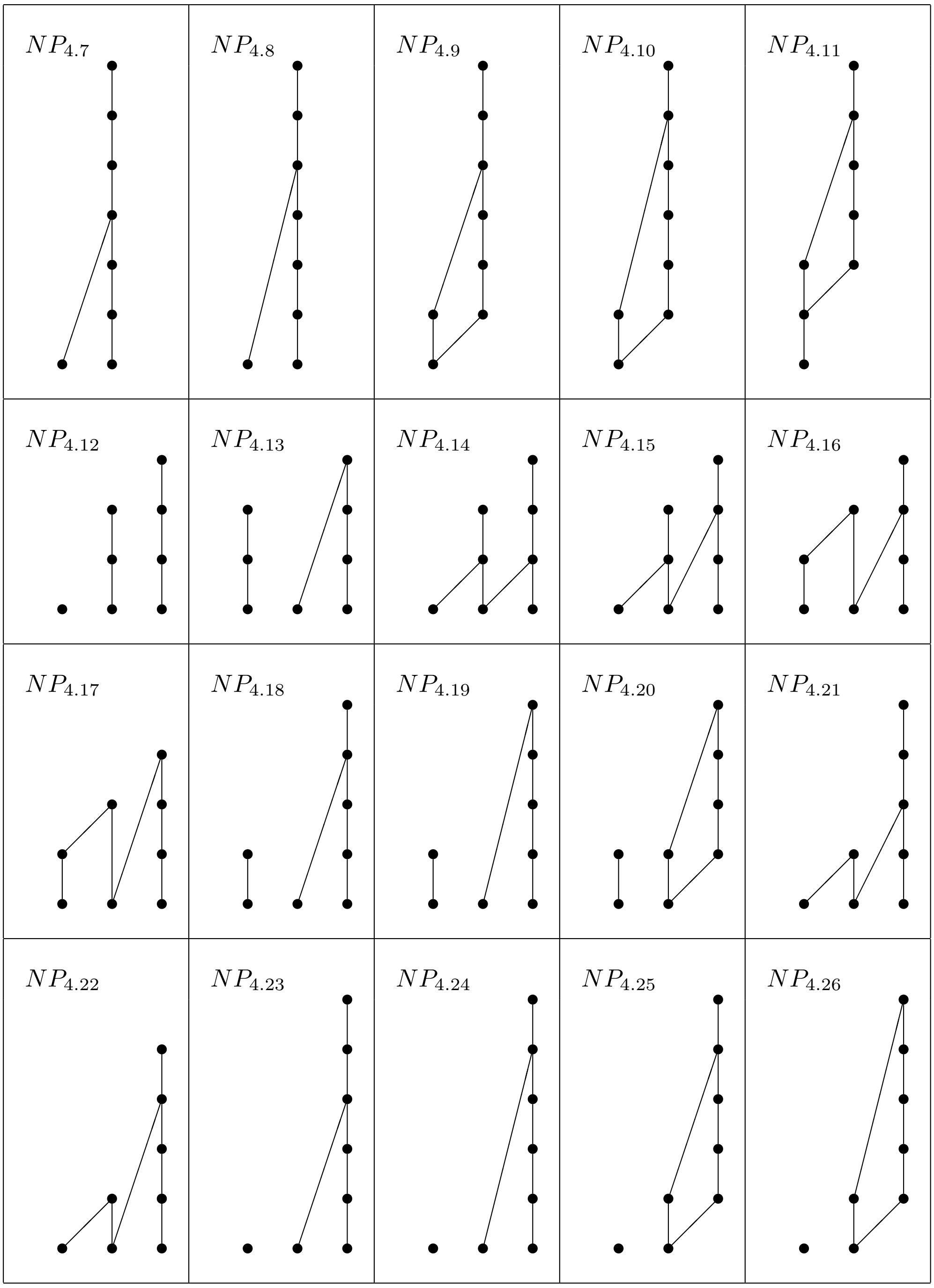
23) $NP_{4.23}(56) = \{1, 2 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

24) $NP_{4.24}(58) = \{1, 2 \prec 7, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

25) $NP_{4.25}(57) = \{1, 2 \prec 3 \prec 7, 2 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

26) $NP_{4.26}(59) = \{1, 2 \prec 3 \prec 8, 2 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$.





Теорема 3.25. *NP-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{N}_5$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 31 множинами:*

1) $NP_{5.1}(30) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 1 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

2) $NP_{5.2}(31) = \{1 \prec 2 \prec 3, 2 \prec 9, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

3) $NP_{5.3}(28) = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

4) $NP_{5.4}(29) = \{1 \prec 2 \prec 3, 2 \prec 9, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

5) $NP_{5.5}(25) = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

6) $NP_{5.6}(26) = \{1 \prec 2, 1 \prec 8, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

7) $NP_{5.7}(27) = \{1 \prec 2 \prec 8, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

8) $NP_{5.8}(19) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

9) $NP_{5.9}(23) = \{1 \prec 8, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

10) $NP_{5.10}(20) = \{1 \prec 2 \prec 5, 1 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

11) $NP_{5.11}(24) = \{1 \prec 2 \prec 9, 1 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

12) $NP_{5.12}(21) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 2 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

13) $NP_{5.13}(22) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 3 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

14) $NP_{5.14}(82) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

15) $NP_{5.15}(83) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 9, 5 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

16) $NP_{5.16}(99) = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 9, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

17) $NP_{5.17}(80) = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

18) $NP_{5.18}(84) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 9, 7 \prec 8 \prec 9\}$;

19) $NP_{5.19}(81) = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

20) $NP_{5.20}(96) = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 9, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

21) $NP_{5.21}(101) = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 2 \prec 9, 7 \prec 8 \prec 9\}$;

22) $NP_{5.22}(70) = \{1, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

23) $NP_{5.23}(77) = \{1 \prec 2, 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

24) $NP_{5.24}(78) = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

25) $NP_{5.25}(79) = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

26) $NP_{5.26}(94) = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

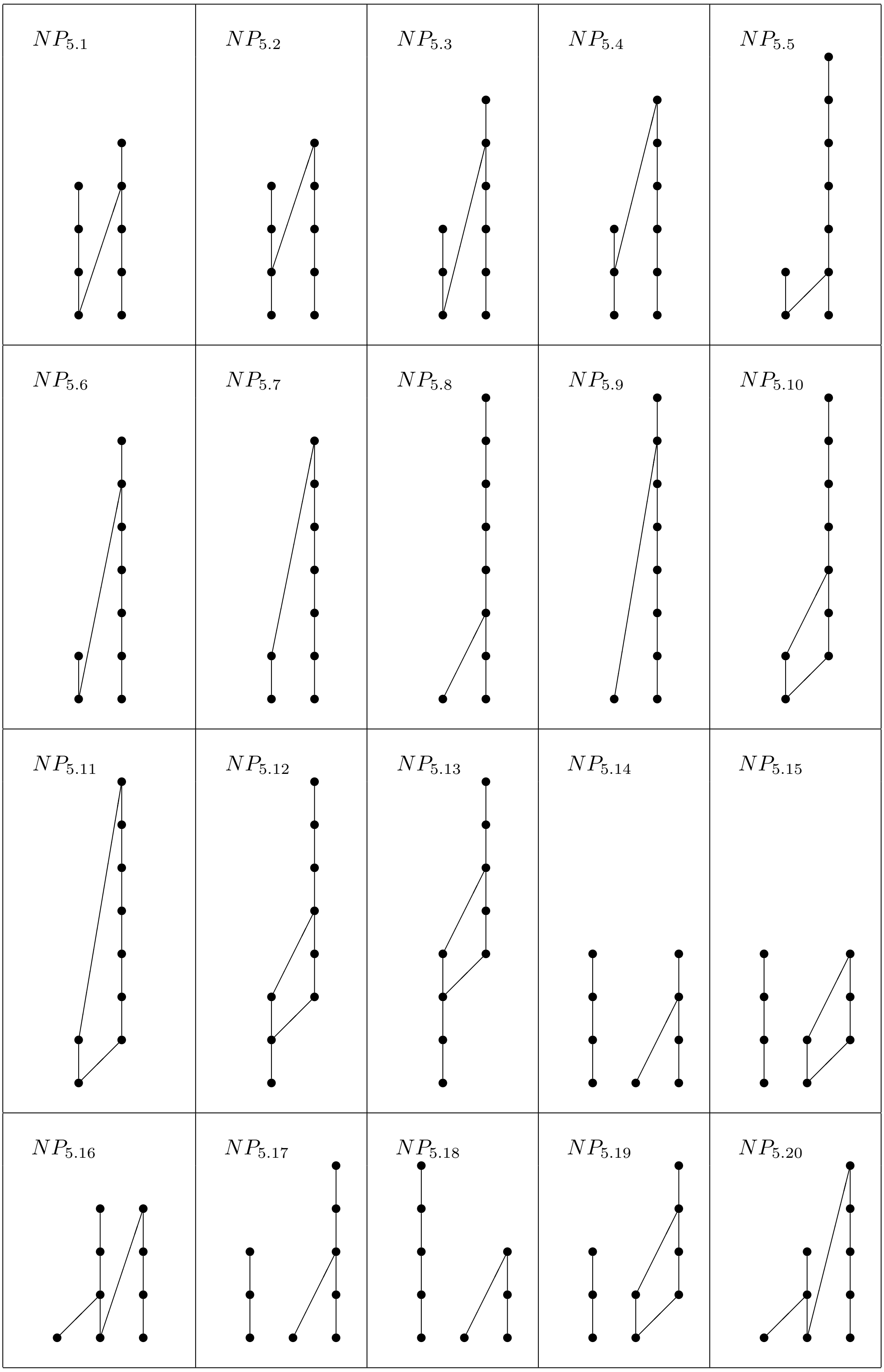
27) $NP_{5.27}(95) = \{1 \prec 3, 2 \prec 9, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

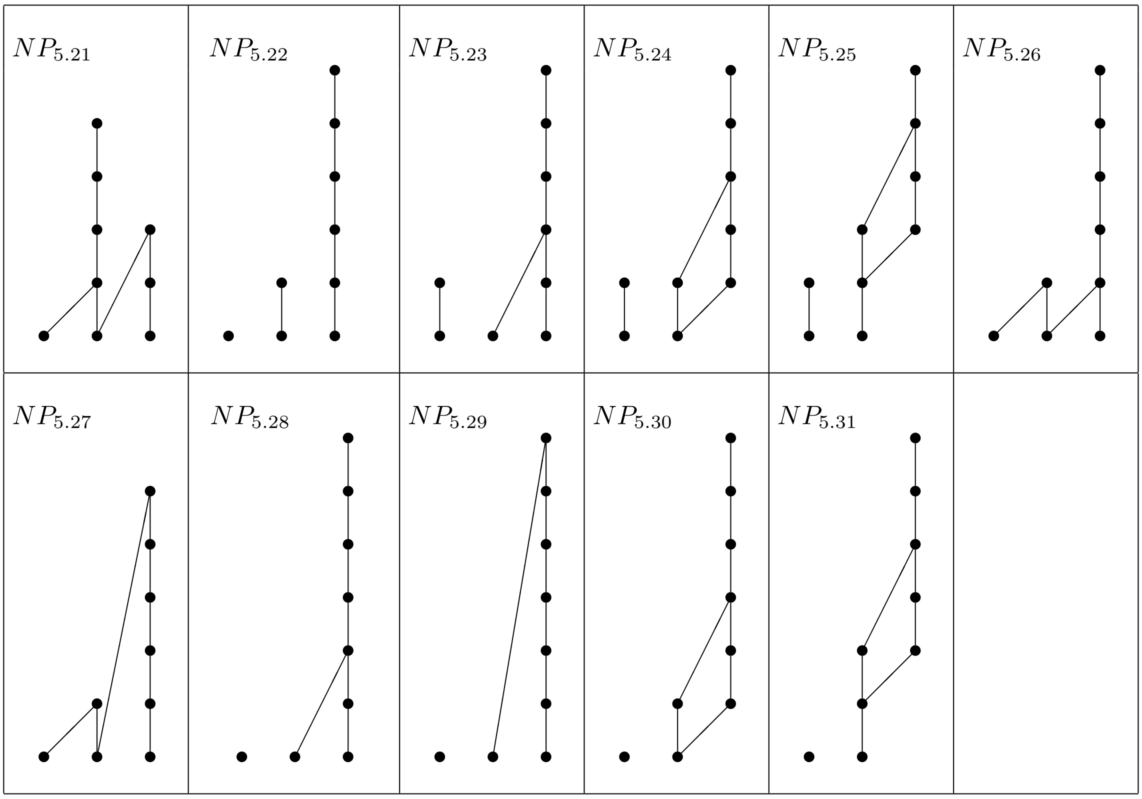
28) $NP_{5.28}(71) = \{1, 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

29) $NP_{5.29}(74) = \{1, 2 \prec 9, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

30) $NP_{5.30}(72) = \{1, 2 \prec 3 \prec 6, 2 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

31) $NP_{5.31}(73) = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 3 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$.


$NP_{5.1}$
$NP_{5.2}$
$NP_{5.3}$
$NP_{5.4}$
$NP_{5.5}$
$NP_{5.6}$
$NP_{5.7}$
$NP_{5.8}$
$NP_{5.9}$
$NP_{5.10}$
$NP_{5.11}$
$NP_{5.12}$
$NP_{5.13}$
$NP_{5.14}$
$NP_{5.15}$
$NP_{5.16}$
$NP_{5.17}$
$NP_{5.18}$
$NP_{5.19}$
$NP_{5.20}$



Теорема 3.26. *NP-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{N}_6$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 33 множинами:*

1) $NP_{6.1}(40) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 1 \prec 8, 2 \prec 9, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

2) $NP_{6.2}(39) = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 8, 2 \prec 9, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

3) $NP_{6.3}(32) = \{1 \prec 2 \prec 5, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

4) $NP_{6.4}(35) = \{1 \prec 2 \prec 9, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

5) $NP_{6.5}(37) = \{1 \prec 2 \prec 9, 1 \prec 8, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

6) $NP_{6.6}(38^{op}) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 9, 1 \prec 8, 7 \prec 8 \prec 9\}$;

7) $NP_{6.7}(36^{op}) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 9, 5 \prec 8, 7 \prec 8 \prec 9\}$;

8) $NP_{6.8}(33) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 2 \prec 5, 1 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

9) $NP_{6.9}(34) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 3 \prec 6, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

10) $NP_{6.10}(91) = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

11) $NP_{6.11}(93) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 9, 5 \prec 8, 7 \prec 8 \prec 9\}$;

12) $NP_{6.12}(100) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 9, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

13) $NP_{6.13}(107) = \{1 \prec 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 5, 4 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

14) $NP_{6.14}(92) = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 9, 5 \prec 8, 4 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

15) $NP_{6.15}(110) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6, 5 \prec 8, 4 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

16) $NP_{6.16}(85) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 7, 6 \prec 9, 8 \prec 9\}$;

17) $NP_{6.17}(89) = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 7, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

18) $NP_{6.18}(98) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 9, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

19) $NP_{6.19}(102) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 2 \prec 9, 7 \prec 8 \prec 9\}$;

20) $NP_{6.20}(106) = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 9\}$;

21) $NP_{6.21}(90) = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 7, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

22) $NP_{6.22}(109) = \{1 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 4 \prec 7, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

23) $NP_{6.23}(111) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7, 6 \prec 9, 5 \prec 8 \prec 9\}$;

24) $NP_{6.24}(75) = \{1, 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

25) $NP_{6.25}(76) = \{1, 2 \prec 3, 2 \prec 9, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

26) $NP_{6.26}(86) = \{1, 2 \prec 3 \prec 6, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

27) $NP_{6.27}(97) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

28) $NP_{6.28}(103) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 9, 8 \prec 9\}$;

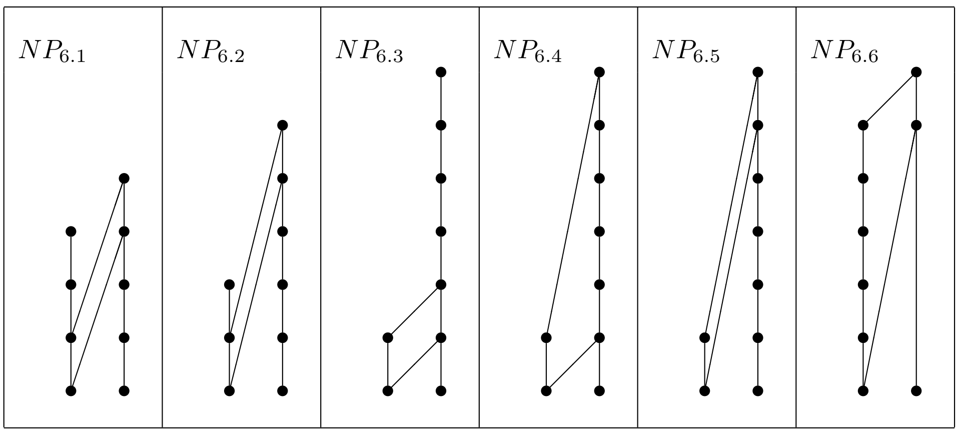
29) $NP_{6.29}(87) = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 3 \prec 6, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

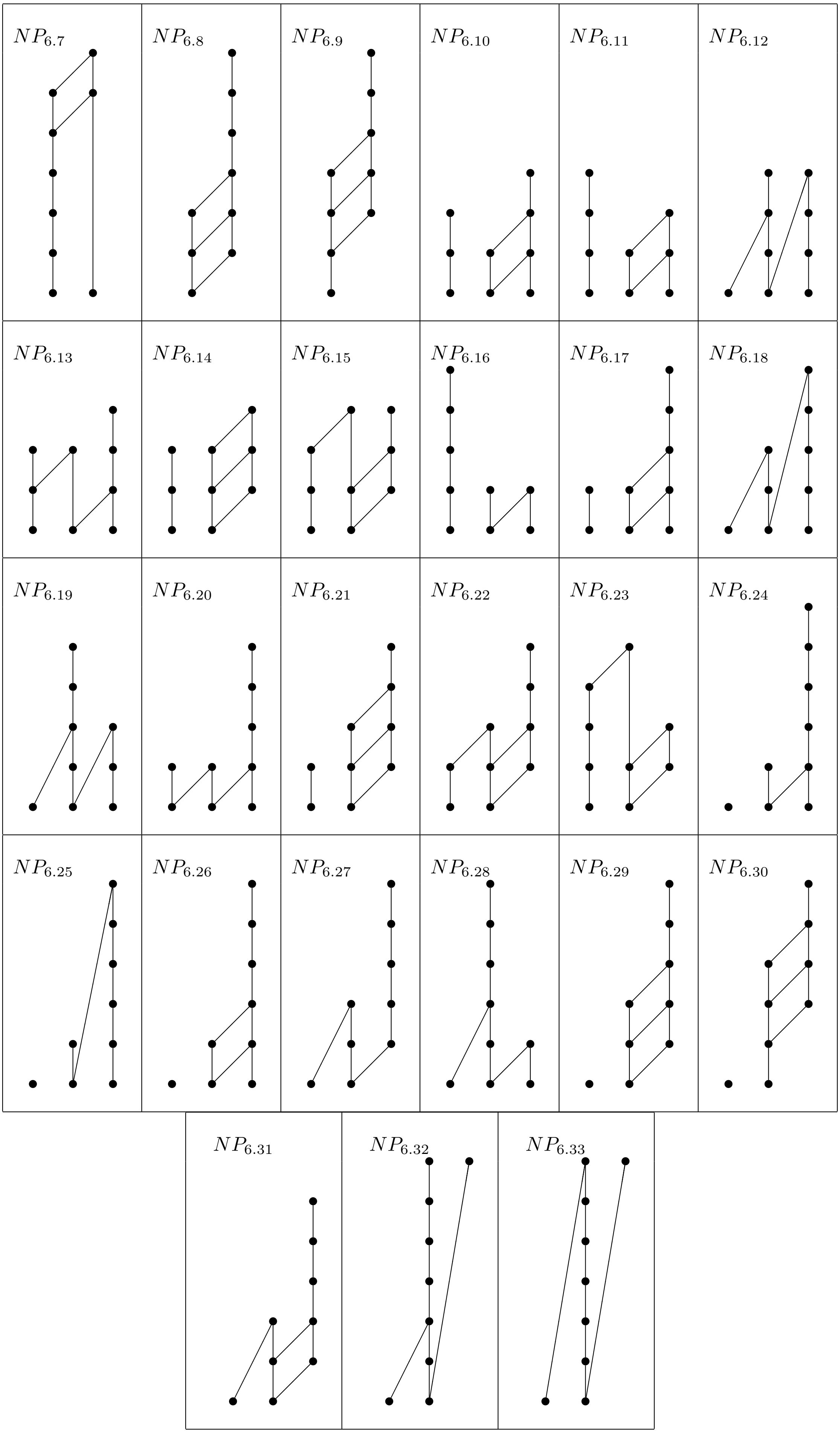
30) $NP_{6.30}(88) = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 7, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

31) $NP_{6.31}(108) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 3 \prec 6, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

32) $NP_{6.32}(104) = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 9\}$;

33) $NP_{6.33}(105) = \{1 \prec 8, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 9\}$.




$NP_{6.7}$
$NP_{6.8}$
$NP_{6.9}$
$NP_{6.10}$
$NP_{6.11}$
$NP_{6.12}$
$NP_{6.13}$
$NP_{6.14}$
$NP_{6.15}$
$NP_{6.16}$
$NP_{6.17}$
$NP_{6.18}$
$NP_{6.19}$
$NP_{6.20}$
$NP_{6.21}$
$NP_{6.22}$
$NP_{6.23}$
$NP_{6.24}$
$NP_{6.25}$
$NP_{6.26}$
$NP_{6.27}$
$NP_{6.28}$
$NP_{6.29}$
$NP_{6.30}$
$NP_{6.31}$
$NP_{6.32}$
$NP_{6.33}$

3.8. Висновки до розділу

У цьому розділі показано, що довільна NP-критична ч. в. множина мінімаксно еквівалентна суперкритичній множині Назарової. Більш точно суперкритичні множини (по одному із кожного класу ізоморфізму) утворюють канонічну мінімаксну систему твірних для множини всіх NP-критичних ч. в. множин, а саме мінімальну мінімаксну систему із шести суперкритичних твірних (номери вказано згідно модифікованої класифікації):

$NP_{1.3}(115) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

$NP_{2.6}(112) = \{1, 2, 3, 4 \prec 5\}$;

$NP_{3.7}(46) = \{1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7\}$;

$NP_{4.12}(55) = \{1, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$NP_{5.22}(70) = \{1, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$NP_{6.16}(85) = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 7, 6 \prec 8 \prec 9\}$.

Використовуючи це твердження, описано з точністю до ізоморфізму і дуальності всі NP-критичнні ч. в. множини (теорема 3.18).

У процесі доведення теореми 3.18 отримана модифікація опису NP-критичних множин. Вона полягає в тому, що NP-критичні ч.в. множини класифікуються не загальним списком, а по класах мінімаксних ізоморфізмів. Такий опис дозволяє сформулювати та довести новий тип властивостей, які можуть знадобитися при різних застосуваннях. За приклад можна взяти таке твердження, яке використовується в останньому розділі.

Твердження 3.20. *Нехай $\mathcal{N}$ — деяка множина Назарової і $m = m(\mathcal{N})$ — найбільший порядок підмножини вузлових елементів серед усіх множин X, мінімаксно ізоморфних множині $\mathcal{N}$. Тоді m дорівнює висоті множини $\mathcal{N}$. Така підмножина вузлових елементів, зокрема, завжди реалізується як верхня (нижня) підмножина деякої множини X.*

А із загального списку випливає наступне твердження, яке відображає якісні, а не кількісні, властивості.

Твердження 3.19. *Підмножина* S_0 *всіх вузлових елементів довільної* NP*-критичної ч.в. множини* S *є (неперетинним) об'єднанням* $S_0 = S_0^- \cup S_0^+$ *відповідно нижньої та верхньої підмножин множини* S.

Підкреслимо, що класифікація NP-критичних множин вказується як на теоретико-множинній мові, так і на геометричній мові (в термінах діаграм Хассе). Перше задання множин важливе для строгих доведень в різних застосуваннях (див., наприклад, останній розділ), а друге є, звичайно ж, більш наглядним.

Розділ 4

МАЙЖЕ ДОДАТНІ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ

У 2005 році в роботі [9] було описано всі мінімальні ч.в. множини з не додатною квадратичною формою Тітса (які називаються P-критичними). В цій же роботі було також описано всі множини з додатною формою Тітса (які називаються просто додатними): вони є аналогами діаграм Динкіна (див. вступ). Згідно сказаного в підрозділі 2.3 маємо неявну та явну класифікацію додатних множин. Нагадаємо (див. підрозділ 2.4), що для ч.в. множин зі слабко додатною квадратичною формою Тітса отримана лише неявна класифікація, а явну отримати не можна (через дуже малу кількість, всього 5, критичних множин відносно слабкої додатності).

У розділі 3 описано всі мінімальні невід'ємні ч.в. множини (тобто з невід'ємною квадратичною формою Тітса), вони названі *NP-критичними.* Тобто отримана неявна класифікація невід'ємних множин.

У цьому розділі мова йтиме про опис невід'ємних множин.

4.1. Головні ч.в. множини. Проблема Сімсона

Невід'ємні ч.в. множини, для яких ядро їхньої квадратичної форми Тітса $\operatorname{Ker} q_S(z) := \{t \in \mathbb{Z}^{1+|S|} \,|\, q_S(t) = 0\}$ — нескінченна циклічна підгрупа (відносно додавання) групи $\mathbb{Z}^{1+|S|}$, є аналогами розширених діаграм Динкіна (оскільки для таких діаграм виконується аналогічна властивість). Розглянемо цю ситуацію більш детально. У розділі 2 доведено таке твердження (див. наслідок 2.38).

Теорема 4.1. *Нехай S — P-критична множина. Тоді*

(1) *квадратична форма Тітса $q_S(z)$ є невід'ємною;*

(2) $\operatorname{Ker} q_S(z) := \{t \in \mathbb{Z}^{|S|+1} \mid q_S(t) = 0\}$ *нескінченна циклічна група, тобто* $\operatorname{Ker} q_S(z) = t'\mathbb{Z}$ *для деякого* $t' \neq 0$ *(еквівалентно симетрична матриця* $q_S(z)$ *має коранг* 1*).*

Звідси випливає, що P-критичні множини збігаються з мінімальними ч. в. множинами (відносно повного включення) множини $\mathcal{P}_{12}$ усіх ч.в. множин, що задовольняють умови (1) і (2). Ч. в. множини, що належать $\mathcal{P}_{12}$, називаються *головними* [138].

Із останньої теореми маємо такий наслідок.

Наслідок 4.2. *Для невід'ємної множини S такі умови еквівалентні:*

(a) *S є головною;*

(b) *S містить рівно одну P-критичну ч.в. множину, яка позначатиметься через $\underline{S}$.*

Основним результатом цього підрозділу є розв'язання відкритої проблеми, яка належить Д. Сімсону (проблема 1.6 [141]). Вона відноситься до зв'язку між квадратичними формами Тітса головних ч.в. множин і (неорієнтованих) графів.

За твердженням 9 [138], для будь-якої головної множини J існує розширена діаграма Динкіна $DJ \in \{\widetilde{\mathbb{A}}_s, s \geq 3, \widetilde{\mathbb{D}}_n, n \geq 4, \widetilde{\mathbb{E}}_6, \widetilde{\mathbb{E}}_7, \widetilde{\mathbb{E}}_8\}$, що однозначно визначається J, така що симетричні матриці квадратичних форм Тітса J і DJ (названі у [138] симетричними матрицями Грама) є $\mathbb{Z}$-конгруентними. DJ називається *типом Кокстера–Евкліда* ч.в. множини J $\mathbb{Z}$-еквівалентними квадратичній формі діаграми Динкіна DJ.

Проблема полягала в тому: чи існує головна ч.в. множина J, для якої тип Кокстера–Евкліда є розширеною діаграмою Динкіна $DJ \in \{\widetilde{\mathbb{A}}_s\}$?

Зауважимо, що із означень випливає, що для не головної ч.в. множини вказаної розширеної діаграми Динкіна не існує.

Наступна теорема, яка сформульована в термінах еквівалентності квадратичних форм, дає негативну відповідь.

Теорема 4.3. *Нехай S — головна ч. в. множина. Тоді її квадратична форма Тітса не може бути $\mathbb{Z}$-еквівалентна квадратичній формі Тітса розширеної схеми Динкіна, яка є циклом.*

Доведення цієї теореми є загальним (не містить конкретних обчислень) і базується на методах мінімаксної еквівалентності множин і стабільної еквівалентності квадратичних форм.

4.1.1. Стабільна еквівалентність квадратичних форм. Нехай $f(z) = f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — квадратична форма n змінних над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел із симетричною матрицею

$F = M(f) :=$

$$= \begin{pmatrix} f_{11} & \frac{f_{12}}{2} & \ldots & \frac{f_{1,n-1}}{2} & \frac{f_{1n}}{2} \\ \frac{f_{12}}{2} & f_{22} & \ldots & \frac{f_{2,n-1}}{2} & \frac{f_{2n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{f_{1,n-1}}{2} & \frac{f_{2,n-1}}{2} & \ldots & f_{n-1,n-1} & \frac{f_{n-1,n}}{2} \\ \frac{f_{1n}}{2} & \frac{f_{2n}}{2} & \ldots & \frac{f_{n-1,n}}{2} & f_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тоді квадратичну форму можна записати в наступній матричній формі:

$$f(z) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} f_{ii} z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j =$$

$$= (z_1, z_2, \ldots, z_n)\, M(f) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = zM(f)z^T,$$

де літера T означає транспонування матриці.

Якщо в квадратичній формі $f(z)$ виконати лінійне перетворення $z = yA$ з $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ невиродженою матрицею $n \times n$ A, тоді ми отримаємо квадратичну форму

$$\overline{f}(y) = (yA)F(A^T y^T) = y\left(AFA^T\right)y^T.$$

З цього, зокрема, випливає, що $M(\overline{f}) = AM(f)A^T$.

Квадратична форма $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$ називається *розкладною*, якщо існує власна підмножина $S \subset N := \{1, 2, \ldots, n\}$ така, що $f_{ij} = 0$ для $i \in S, j \in N \setminus S$ і для $i \in N \setminus S, j \in S$; інакше форма називається *нерозкладною*.

Нагадаємо деякі означення, наведені в [139].

Матриця $n \times n$ A називається *s-стабільною*, де $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$, якщо його s-й стовпець збігається з s-м стовпцем одиничної $n \times n$ матриці E. Лінійне несингулярне перетворення $z = yA$ (див. вище) називається *s-стабільним*, якщо така ж матриця A.

Дві квадратичні форми $f = f(z)$ і $g = g(y)$ називаються *s-стабільно еквівалентними*, якщо існує неособливе лінійне перетворення $z = yA$ s, яке s-стабільне і переводить $f(z)$ в $g(y)$. Якщо $f = f(z)$ і $g = g(y)$ є цілими квадратичними формами, тоді термін "s-стабільно $\mathbb{Z}$-еквівалентний" означає, що s-стабільна матриця A є цілочисельною та оборотною (як матриця над $\mathbb{Z}$).

Розглянемо тепер загальний випадок одиничних цілих додатних квадратичних форм:

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j,$$

де $n \geq 1$; з додатності випливає, що $f_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ для всіх i, j. Множину всіх таких квадратичних форм позначимо через $\mathcal{Z}_n^+$.

Теорема 4.4 ([139], теорема 3). *Для будь-якої нерозкладної квадратичної форми $f = f(z) \in \mathcal{Z}_n^+$ і $s \in \{1, \ldots, n\}$ існує s-стабільно $\mathbb{Z}$-еквівалентна квадратична форма, яка є квадратичною формою Тітса певної діаграми Динкіна.*

Зауважимо, що подібне твердження, але без додаткових обмежень на еквівалентність, давно відоме [126].

4.1.2. Доведення теореми 4.3. Нехай S — головна множина порядку $n \geq 1$.

Тоді існує ненульовий цілочисленний вектор $t = (t_i)_{i \in S \cup 0}$ такий, що $q_S(t) = 0$. Візьмемо $t_d \neq 0$ з $d \in S$ і розглянемо підмножину $S_0 := S \setminus d$, яка є додатною за визначенням головної множини. Покладемо $A := \{x \in S \,|\, x < d\}$ і $B := \{x \in S \,|\, x > d\}$. Тоді множина $S_d := S_{AB}^{\uparrow\downarrow}$ є множиною з "ізольованим" елементом d (в тому сенсі, що він непорівняльний з будь-яким іншим елементом).

За твердженням 2.3 множина S_d є невід'ємною (і навіть головною згідно твердженням 2.34), а множина $S_{d0} := S_d \setminus d$ додатною.. Тому достатньо довести теорему для множини S_d.

Будемо вважати, що елементи S пронумеровані числами $1, 2, \ldots, n$ таким чином, що $n = d$, а для відношення часткового порядку на S використаємо (щоб уникнути двозначності) символ $\prec$ замість $<$. Покладемо $M := M[q_{S_d}(z_0, z_1, \ldots, z_n)]$ (симетрична матриця квадратичної форми Тітса S_d) і $N := M[q_{S_{d0}}(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})]$ (симетрична матриця квадратичної форми Тітса S_{d0}); рядки та стовпці обох матриць нумеруються $0, 1, \ldots$ природним чином (у порядку зростання). Очевидно, $M = \left(\begin{array}{c|c} N & v^T \\ \hline v & 1 \end{array}\right)$, де $v = (-\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0)$.

За теоремою 4.4 для $S = S_{d0}$ і $s = 0$ існує 0-стабільна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

з A_{22} як матрицею $(n-1) \times (n-1)$ (тоді A_{12} є $1 \times n-1$ матрицею) така, що $ANA^T = M[q_D(z)]$ для деякої діаграми Динкіна D (вершини якої пронумеровані $0, 1, ln-1$). Тоді, для $\overline{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$, маємо (враховуючи, що $vA^T = v$): $\overline{A}M\overline{A}^T = \left(\begin{array}{c|c} M[q_D(z)] & v^T \\ \hline v & 1 \end{array}\right)$, тобто $\overline{A}M\overline{A}^T$ є симетричною матрицею квадратичної форми Тітса графа $\overline{D}$, яка отримана з діаграми Динкіна D додаванням однієї нової вершини n і одного нового ребра $(0, n)$. Очевидно, (зв'язний) граф $\overline{D}$ є деревом (бо така діаграма D).

Таким чином, квадратична форма Тітса $q_S(z)$ ч.в. множини і $q_{\overline{D}}(z)$ дерева $\overline{D}$ є $\mathbb{Z}$-еквівалентними. Оскільки $q_{\overline{D}}(z)$ є невід'ємною і не є додатною (бо такою є $q_S(z)$ з головною S), граф $\overline{D}$ є розширеною діаграмою Динкіна.

Теорема доведена.

4.2. Класифікація серійних головних ч.в. множин

За аналогією з означенням серійної додатної ч.в. множини головна ч.в. множина S називається *серійною*, якщо існує нескінченна строго зростаюча послідовність головних множин $S \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots$

Ми будемо використовувати означення із підрозділу 2.1 розділу 2.

4.2.1. Основні теореми. Ч. в. множина Q називається *напівланцюгом довжини* s, і 2-*довжини* k якщо вона має вигляд $Q_1 < Q_2 < \cdots < Q_s$, де кожне Q_i складається із одного або двох непорівняльних елементів і k — число двоелементних Q_i ($Q_i < Q_{i+1}$ означає, що $a < b$ для всіх $a \in Q_i$ та $b \in Q_{i+1}$).

Теорема 4.5. *Ч.в. множина S є серійною головною тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов* :

(I) *S — пряма сума ланцюга довжини $k \geq 0$ та напівланцюга довжини $s \geq 2$ і 2-довжини 2;*

(II) *S — пряма сума напівланцюга довжини $k \geq 1$ і 2-довжини 1 та напівланцюга довжини $s \geq 1$ і 2-довжини 1, де $k \leq s$;*

(III) *S — ліва мінімаксна сума ланцюга довжини $k \geq 1$ та напівланцюга довжини $s \geq 2$ і 2-довжини 1 з єдиним максимальним елементом;*

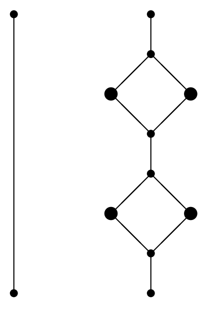
(IV) *S — ліва мінімаксна сума напівланцюга довжини $k \geq 2$ і 2-довжини 1 з єдиним мінімальним елементом і ланцюга довжини $s \geq 1$;*

(V) *S — двостороння мінімаксна сума ланцюга довжини $k \geq 2$ та ланцюга довжини $s \geq 3$, де $k \leq s$.*

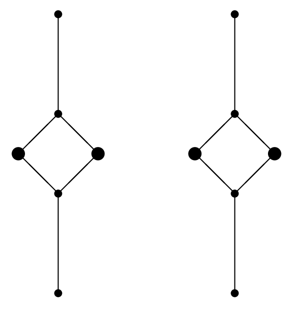
Крім того, усі ці множини попарно неізоморфні.

Мовою діаграм Хассе зазначені в теоремі множини мають такий вигляд:

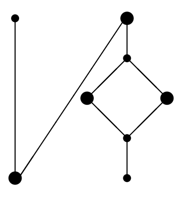
(I)



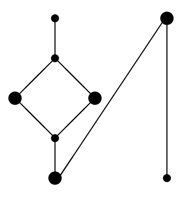
(II)



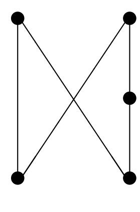
(III)



(IV)



(V)



Тут вертикальні лінії є ланцюгами, а похилі відрізки не містять проміжних точок. Великі точки, зазначені на малюнках (на відміну від малих і проміжних) повинні бути завжди присутніми.

Теорема 4.6. *Будь-яка головна множина порядку $n > 8$ є серійною.*

4.2.2. Доведення основних теорем. Нам знадобляться наступні наслідки із твердження 2.34.

Наслідок 4.7. *Нехай S і T — такі ж, як в твердженні 2.34 нехай $x \notin A$. Тоді $T \setminus x$ додатна, якщо додатна $S \setminus x$.*

Наслідок 4.8. *Ч.в. множина, мінімаксно-еквівалентна головній, також є головною.*

Спочатку доведемо, що всі ч.в. множини вигляду (I)–(V) є головними; їх серійність очевидна.

Легко побачити, що

(a) якщо S має вигляд (I) і L позначає ланцюг довжини $k \geq 0$, тоді $S_L^{\uparrow}$ також має вигляд (I) (з порожнім ланцюгом);

(b) якщо S має вигляд (II) і L позначає перший напівланцюг, тоді $S_L^{\uparrow}$ вигляд (I) (з порожнім ланцюгом);

(c) якщо S має вигляд (III) і p позначає мінімальий елемент ланцюга довжини $k \geq 1$, тоді $S_p^{\uparrow}$ має вигляд (I);

(d) якщо S має форму (IV) і p позначає мінімальний елемент напівланцюга довжини $k \geq 2$, тоді $S_p^{\uparrow}$ має вигляд (II);

(e) якщо S має вигляд (V) і p позначає мінімальний елемент першого ланцюга, тоді $S_p^{\uparrow}$ має вигляд (IV).

За наслідком 4.8 достатньо розглянути лише випадок ч.в. множин вигляду (I) при $k = 0$, тобто випадок напівланцюгів 2-довжини 2. Із формул (3) і (18) роботи [140] випливає, що квадратична форма Тітса $q_P(z)$ напівланцюга $P = \{P_1 < P_2 < \cdots < P_s\}$ 2-довжини 2 з двоелементними множинами $P_i = \{u_1, u_2\}$, $P_j = \{v_1, v_2\}$ $(i \neq j)$ і одноелементними множинами $P_k = \{p_k\}$ $(p \neq i, j)$ задовольняє наступну рівність:

$$2q_P(z) = z_0^2 + 2(z_0 - \textstyle\sum_{k\neq i,j} z_{p_k} - z_{u_1} - z_{u_2} - z_{v_1} - z_{v_2})^2 +$$
$$+ \textstyle\sum_{k\neq i,j} z_{p_k}^2 + (z_{u_1} - z_{u_2})^2 + (z_{v_1} - z_{v_2})^2.$$

Звідси маємо, що форма $q_P(z)$, а значить і множина P – головна.

Таким чином, достатність теореми 4.5 доведена.

Оскільки всі підмножини ч.в. множин вигляду (I)–(V) також мають такий же вигляд (і всі ч.в. множини S_i в означенні серійних головних множин є такими також), то для доведення необхідності теореми 4.5 і теореми 4.6 досить показати, що виконується наступне твердження.

Твердження 4.9. *Будь-яка головна ч.в. множина порядку $n > 8$ має один із виглядів* (I)–(V).

Доведемо спочатку наступну лему.

Лема 4.10. *Нехай $A = \{a\} \coprod B$ — головна множина порядку $n > 8$, де B додатна множина. Тоді $B = \{b\} \coprod C$, де C є майже ланцюгом (значить A має вигляд* (II) *при $k = 1$).*

Доведення. Із результатів попереднього розділу випливає, що ч.в. множини

$T_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \,|\, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$,

$T_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$.

$T_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \,|\, 2 \prec 9, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$,

$T_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \,|\, 2 \prec 3, 2 \prec 9, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$,

$T_5 = \{1, 2, 3, 4, 5 \,|\, 4 \prec 5\}$

не є невід'ємними (бо вони NP-критичні).

Оскільки множина B є додатною порядку $n' = n - 1 > 7$, вона має вигляд (1), або (2), або (3) (див. теореми 2.43 і 1.8).

У випадку (1) $\{a\} \coprod B$ додатна, якщо $k \leq 1$ (за (1) і (3) теореми 2.43), і не є невід'ємною, якщо $k > 1$ (оскільки вона містить підмножину, ізоморфну T_2, коли $k = 2$ і T_1, коли $k > 2$). Отже, A не може бути головною.

У випадку (2) $\{a\}\coprod B$ не є невід'ємною, оскільки вона містить підмножину, ізоморфну T_3, коли $k = 1$; T_4, коли $k = 2$; T_1, коли $k = 3, 4, 5$; T_4^{op}, коли $k = 6$; T_3^{op}, коли $k \geq 7$. Отже, A не може бути головною.

У випадку (3) $\{a\}\coprod B$ додатна, якщо $s = 0$ (за (3) Теорема 2.43), і не є невід'ємною, якщо $s > 1$ (оскільки вона містить підмножину, ізоморфну T_5). Отже, $s = 1$ і B має вигляд, вказаний у формулюванні нашої леми (тоді A є головною як ч.в. множина вигляду (V)). $\square$

Нехай тепер S — головна множина порядку $n > 8$ і нехай $t \neq 0$ таке, що $q_S(t) = 0$. Зафіксуємо $d \in S$ так, що $t_d \neq 0$. Тоді за означенням головної множини $S_0 = S \setminus d$ є додатною множиною. Покладемо $A := \{x \in S \,|\, x < d\}$ і $B := \{x \in S \,|\, x > d\}$. Тоді $S_d := S^{\uparrow\downarrow}_{AB} = \{d\}\coprod T$ для деякої підмножини T в S. Множина T додатна, а множина S_d — головна відповідно за наслідками 4.7 і 4.8. Оскільки $|T| > 7$, із теорем 2.43, 1.8 та леми 4.10 випливає, що T має форму (3) при $s = 1$.

Нехай $T = \{x_0\}\coprod C$ з майже ланцюгом C. Оскільки $S^{\uparrow\downarrow}_{AB} = \{d\}\coprod T$, маємо $S = (\{d\}\coprod T)^{\uparrow\downarrow}_{AB}$ або еквівалентно $S = \{d\}\coprod T^{\uparrow\downarrow}_{AB}$ (оскільки $d \notin A, B$), а множина всіх ч.в. множин вигляду (I)-(V) замкнута відносно дуальності, то за твердженням леми 2.20 (записаного як $S^{\downarrow}_{A} = [(S^{\mathrm{op}})^{\uparrow}_{A^{\mathrm{op}}}]^{\mathrm{op}}$), щоб завершити доведення, достатньо показати, що $\{d\}\coprod T^{\uparrow}_{A}$ має один із виглядів (I)-(V) для будь-якої нижньої підмножини T.

Покладемо $C := \{x_1 < x_2 < \cdots x_p < \{u, v\} < y_1 < y_2 < \cdots < y_q\}$ і випишемо усі типи нижніх підмножин $T = \{x_0\}\coprod C$:

$A_0 = \varnothing$; $A_1 = \{x_1, \ldots, x_i\}$, $1 \leq i \leq p$; $A_2 = \{x_1, \ldots, x_p, u\}$;

$A_3 = A_2 \cup v$; $A_4 = A_3 \cup \{y_1, \ldots, y_j\}$, $1 \leq j \leq q$; $A_5 = x_0$;

$A_6 = x_0 \cup A_1$; $A_7 = x_0 \cup A_2$; $A_8 = x_0 \cup A_3$; $A_9 = x_0 \cup A_4$.

За означенням $S^{\uparrow}_{A}$ маємо, що $\{d\}\coprod T^{\uparrow}_{A} = \{d\}\coprod(\{x_0\}\coprod C)^{\uparrow}_{A}$ має вигляд

(II) для $A = A_0, A_1$, вигляд (III) для $A = A_2$, вигляд (I) для $A = A_3, A_4$, вигляд (III) для $A = A_5, A_6$, вигляд (V) для $A = A_7$, вигляд (IV) для $A = A_8, A_9$.

Твердження 4.9 доведено.

4.3. Головні і майже додатні частково впорядковані множини

Назвемо невід'ємну множину S *майже додатною*, якщо $S \setminus x$ додатна для деякого $x \in S$. Очевидно, додатні та P-критичні ч.в. множини майже додатні. Будь-яка майже додатна множина, яка не є додатною, називається *строго майже додатною* ч.в. множиною.

Твердження 4.11. *Ч.в. множина S строго майже додатна тоді і тільки тоді, коли вона головна.*

Твердження випливає з наслідка 4.2 та основної ідеї доведення теореми 4.3.

Для повної класифікації майже додатних множин залишається класифікувати несерійні строго додатні ч.в. множини без P-критичних ч.в. множин. Назвемо такі ч.в. множини *суттєвими майже додатними.*

Суттєві майже додатні ч.в. множини будуть класифіковано в наступному підрозділі. Їх 247 з точністю до ізоморфізму та дуальності. Зауважимо, що із опису несерійних головних множин (див. підрозділ 4.2) і модифікованого опису P-критичних множин (див. підрозділ 2.5 розділу 2) випливає, що серед P-критичних ч.в. множин (які згідно їх означенню носять несерійний характер) можуть бути серійні в класі суттєвих майже додатних множин. Легко побачити, що такими є лише чотири P-критичні множини із класу мінімаксних ізоморфізмів, який містить єдину множину ширини 4. Отже, ми не включаємо ці 4 множини в суттєві майже додатні множини. І значить несерійні строго майже додатні ч.в. множини складаються із суттєвих майже додатних множин і P-критичних множин без вказаних чотирьох.

Підкреслимо, що заміна головних ч.в множин на строго майже додатні веде до більш простої комбінаторики, а саме комбінаторики самих множин. Комбінаторика ж квадратичних форм і їх матриць, яка визначається самим означенням головних множин, доступна лише для комп'ютерних програм і тому не випадково саме таким способом головні (несерійні) множини вивчалися вперше ([141], [142]). Ми традиційно використовуємо свій метод мінімаксної еквівалентності. (див. підрозділ 2.2 разом з підрозділом 2.3 розділу 2).

4.4. Мінімаксні системи твірних для суттєвих майже додатних множин

Нагадаємо, що для головної ч.в. множини S через $a \in \underline{S}$ позначається єдина P-критична ч.в. множина, що міститься в множині S (див. наслідок 4.2).

Наслідок 4.12. *Нехай a є елементом множини S і $a^{<} := \{x \in S \,|\, x < a\}$, $a^{>} := \{x \in S \,|\, x > a\}$. Тоді елемент a ізольований в множині $\overline{S} = S^{\uparrow\downarrow}_{a^{<}a^{>}}$, і $\overline{S} \setminus a$ додатна, якщо $a \in \underline{S}$.*

У [124, Section 5] Бондаренко В.М. ввів поняття мінімаксної системи твірних. Зокрема, було надано такі означення. Нехай $\mathcal{K}$ — замкнутий відносно скінченних множин ізоморфізм і дуальність і нехай $U = \{U_i\}$ – сукупність ч.в. множин. U є *мінімаксною системою* (відповідно, *d-системою*) *твірних* $\mathcal{K}$, якщо будь-яка $X \in \mathcal{K}$ є мінімаксно ізоморфна множині U_i (відповідно U_i або U_i^{op}) для деякого $i \in I$.

Теорема 4.13. *Наступні* 9 *множин з ізольованими елементами* 1 *утворюють мінімальну мінімаксну* d*-систему твірних для множини* $\mathcal{M}$ *усіх основних майже додатних множин:*

$M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6|2 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6\}$;

$M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7|2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 6\}$;

$M_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7|2 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7\}$;

$M_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7|2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 6 \prec 7, 4 \prec 7\}$;

$M_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8|2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 8\}$;

$M_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8|2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 7\}$;

$M_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8|2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 6, 3 \prec 8\}$;

$M_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8|2 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$M_9 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8|2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 4 \prec 7\}$.

Доведення. Використовуємо список усіх несерійних додатних множин (з точністю до ізоморфізму та дуальності) у формі, вказаній в підрозділі 2.7 розділу 2. За $[i, j]$ з $i = 5, 6, 7$, j від 1 до $10, 32, 66$ відповідно позначимо ч.в. множину $\{1\} \coprod NSPi.j$. Елементи цієї ч.в. множини (що розглядається у вигляді діаграм Хассе) нумеруються цілими числами $1, 2, \ldots, 1+|NSPi.j|$ таким чином, що $p \prec q$ означає, що елемент із номером q стоїть вище або праворуч від елемента з номером p. Також використовуємо класифікацію серійних додатних множин у формі теореми 2.43. Через $[i]_{k,s}$ з $i = 1, 2$, позначаємо множину $\{0\} \coprod (i)_{k,s}$, де $(i)_{k,s}$ — часткова множина в умові (i) теореми з параметрами k і s.

Множини M_i є прямими сумами одноелементної множини $\{1\}$ і додатних множин (несерійних для $i \neq 5$ і серійної для $i = 5$): $M_1 = [5, 8]$, $M_2 = [6, 1]$, $M_3 = [6, 22]$, $M_4 = [6, 27]$, $M_5 \cong [2]_{3,4}$, $M_6 = [7, 1]$, $M_7 = [7, 3]$, $M_8 = [7, 46]$, $M_9 = [7, 56]$.

Ці множини є невід'ємними за таблицями з розділу 3 всіх NP-критичних множин NP_i. Вони не є ні додатними, ні P-критичними, ні серійними строго майже додатними за таблицями підрозділів 2.5 і 2.7

розділу 2 всіх P-критичних множин, всіх (серійних і несерійних) додатних ч.в. множин та теоремою 4.5. Отже, $M_1, \ldots, M_9 \in \mathcal{M}$.

Згідно з наслідком 4.12, щоб довести теорему, достатньо перевірити, що будь-яка пряма сума множин $T = \{*\} \coprod S$ з додатною множиною S або не належить $\mathcal{M}$, або є мінімаксно ізоморфною M_i або мінімаксно ізоморфною M_j^{op} для деяких i, j. Очевидно, що T можна розглядати з точністю до дуальності.

Для випадків несерійних ч.в. множин маємо наступне:

(*A*1) Ч.в. множини $[5.1], [5.3] - [5.5], [6.2] - [6.4], [6.6] - [6.7], [6.10] - [6.12], [6.14]$ додатні, оскільки $[5.1] \cong NSP6.19$, $[5.3] \cong NSP6.26$, $[5.4] \cong NSP6.28$, $[5.5] \cong NSP6.32$, $[6.2] \cong NSP7.37$, $[6.3] \cong NSP7.42$, $[6.4] \cong NSP7.43$, $[6.6] \cong NSP7.52$, $[6.7] \cong NSP7.53$, $[6.10] \cong NSP7, 54$, $[6.11] \cong NSP7.60$, $[6.12] \cong NSP7.61$, $[6.14] \cong NSP7.66$.

(*A*2) Ч.в. множини $[5.2], [6.13], [6.15], [7.7], [7.10], [7.19], [7.21], [7.23]$, є P-критичними, оскільки $[5.2] \cong P_{32}$, $[6.13] \cong P_{36}$, $[6.15] \cong P_{37}$, $[7.7] \cong P_{47}$, $[7.10] \cong P_{67}$, $[7.19] \cong P_{68}$, $[7.21] \cong P_{43}$, $[7.23] \cong P_{44}$, $[7.25] \cong P_{45}$.

(*A*3) $[6.5] \cong NP_{49}, [7.22] \cong NP_{58}, [7.24] \cong NP_{59}$; $[7,2], [7,5], [7,9], [7.14], [7.16] \supset NP_{49}$; $[5,6] - [5,7], [5,9], [6,16] - [6,21], [6,23] - [6,26]$, $[6,28] - [6,29], [6,31] - [6,32], [7,26] - [7,45], [7,47] - [7,55], [7,57] - [7,58], [7,60] - [7,62]$, $[7,64] - [7,66] \supset NP_{112}$.

(*A*4) $[5.10]_3^{\uparrow} \cong [5.8] = M_1$; $[6.8]_{27}^{\uparrow\downarrow} \cong [6.1]^{op} = M_2^{op}$, $[6.9]_{76}^{\downarrow\downarrow} \cong [6.1] = M_2$; $[6.30]_3^{\uparrow} \cong [6.22] = M_3$; $[6.27] = M_4$; $[7.8]_{387}^{\downarrow\downarrow\downarrow} \cong M_5^{op}$, $[7.11]_{872}^{\downarrow\downarrow\uparrow} \cong M_5$, $[7.12]_{28}^{\uparrow\downarrow} \cong M_5^{op}$, $[7.15]_{876}^{\downarrow\downarrow\downarrow} \cong M_5^{op}$, $[7.18]_{87}^{\downarrow\downarrow} \cong M_5$; $[7.20]_{238}^{\uparrow\uparrow\downarrow} \cong M_5$, $[7.13]_{28}^{\uparrow\downarrow} \cong [7.1]^{op} = M_6^{op}$, $[7.17]_{87}^{\downarrow\downarrow} \cong [7.1] = M_6$; $[7.4]_{148}^{\downarrow\downarrow\downarrow} \cong [7.3] = M_7$, $[7.6]_{2874}^{\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow} \cong [7,3] = M_7$; $[7.63]_3^{\uparrow} \cong [7.46] = M_8$; $[7,59]_{348}^{\uparrow\uparrow\downarrow} \cong [7,56] = M_9$.

Для випадків серійних ч.в. множин маємо наступне:

(*B*1) $[1]_{0,s} \cong (1)_{1,s}$, $[1]_{2,2} \cong NSP5.6$, $[1]_{2,3} \cong NSP6.18$, $[1]_{2,4} \cong NSP7.41$, $[1]_{2,5} \cong PC_{43}$, $[1]_{2,s} \supset NPC_{70}$ для $s \geq 6$, $[1]_{3,3} \cong PC_{35}$, $[1]_{k,s} \supset NPC_{55}$ для $k \geq 3$, $s \geq 4$;

(*B*2) $[2]_{1,3} \cong NSP5.9$, $[2]_{1,4} \cong NSP6.29$, $[2]_{1,5} \cong NSP7.62$, $[2]_{1,6} \cong PC_{46}$, $[2]_{1,s} \supset NPC_{74}$ для $s \geq 7$, $[2]_{2,2} \cong NSP5.7$, $[2]_{2,3} \cong NSP6.20$, $[2]_{2,4} \cong NSP7.44$, $[2]_{2,5} \cong PC_{48}$, $[2]_{2,s} \supset NPC_{76}$ для $s \geq 6$, $[2]_{3,3} \cong NSP7.26$, $[2]_{3,4} \cong M_5$, $[2]_{k,s} \supset NPC_{55}$ для $k \geq 3$, $s \geq 5$;

(*B*3) $[3]_{k,0} \cong (3)_{k,1}$, $[3]_{k,1}$ є серійною строго майже додатною множиною, $[3]_{k,s} \supset NPC_{112}$ для $s \geq 2$.

Отже, доведено, що множини $M_1, \ldots, M_9$ утворюють мінімаксну d-систему твірних для множини $\mathcal{M}$.

Тепер доведемо, що ця d-система є мінімальною.

Лема 4.14. *Нехай S — ч.в. множина і для $b \in S$ $S_b^< := \{x \in S \,|\, x < b\}$, $b^< := \{x \in S \,|\, x < b\}$, $b^> := \{x \in S \,|\, x > b\}$, $S_b^\circ = S_{\{b^<\}\{b^>\}}^{\uparrow\downarrow}$. Нехай T — ч.в. множина, мінімаксно еквівалентна множині S. Тоді елемент b ізольований в T тоді і тільки тоді, коли $T = S_b^\circ$.*

Лема безпосередньо випливає з означень.

Лема 4.15. *Мінімаксні ч.в. множини, еквівалентні ч.в. множині $T_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ з непорівняльними елементами, вичерпано з точністю до ізоморфізму множинами T_1, $T_2 = \{1 \prec 2, 3, 4\}$, $T_3 = \{1, 2, 3 \prec 4\}$ і $T_4 = \{1, 2 \prec 3, 4\}$.*

Лему можна довести простими обчисленнями.

Розглянемо спочатку множини M_2, M_3, M_4 порядку 7.

(a1) Очевидно, $\underline{M_3} = T_1$. За лемою 4.15, для будь-якої мінімаксної X, еквівалентної M_3, $\underline{X}$ ізоморфна деякому T_i. Тоді M_2 не може бути мінімаксно ізоморфною M_3, інакше M_2 міститиме дві різні P-критичні підмножини — $\underline{M_2} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 6 \prec 7\}$ та $K \cong T_i$ для деяких $i = 1, 2, 3, 4$ (що неможливо згідно наслідка 4.2). Аналогічно, $M_2 \ncong_{min,max} M_3^{op}$, $M_2 \ncong_{min,max} M_4$ і $M_2 \ncong_{min,max} M_4^{op}$.

(a2) Припустимо, що множина T мінімаксно еквівалентна множині $S := M_3$ і ізоморфна множині M_4. Тоді за лемою 4.14 $T = S_i^\circ$ для деяких

$1 \le i \le 7$. Ч.в. множина M_4 має ширину 4 і її діаграма Хассе має цикл. Оскільки S_i° має ширину менше 4 для $i = 4, 6, 7$ і її діаграма Хассе є деревом для $i = 1, 2, 3$, прийшли до протиріччя. Отже, $M_3 \ncong_{min,max} M_4$. Аналогічно, $M_3 \ncong_{min,max} M_4^{op}$.

Розглянемо тепер множини $M_5, \dots, M_9$ порядку 8.

($b1$) Подібно до ($a1$) можна довести, що $X \ncong_{min,max} Y$ для $X = M_5, M_6, M_7$ і $Y = M_8, M_9, M_8^{op}, M_9^{op}$. Також аналогічно, коли $X = M_5$, $Y = M_6, M_7, M_6^{op}, M_7^{op}$, якщо лему 4.15 замінити фактом, що ч.в. множина $\{1, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 5 \prec 6\} \cong \underline{M_6} \cong \underline{M_7}$ не є мінімаксно ізоморфною ч.в. множиною $\{1, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 5 \prec 7\} = \underline{M_5}$.

($b2$) Подібно до ($a2$) доводиться, що $M_8 \ncong_{min,max} M_9, M_9^{op}$.

(c) Випишемо з точністю до ізоморфізму всі множини з ізольованими елементами, мінімаксно еквівалентні множини $S := M_6$ (див. Лему 4.14):

$S_1^\circ = M_6$,

$S_2^\circ \cong \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 3 \prec 8\}$;

$S_3^\circ \cong \{1, 2 \prec 3 \prec 8, 2 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}^{op}$;

$S_4^\circ \cong \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 3 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$S_5^\circ \cong \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 5\}^{op}$;

$S_6^\circ \cong \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$S_7^\circ \cong \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 5 \prec 8, 3 \prec 7 \prec 8\}^{op}$;

$S_8^\circ \cong \{1, 2 \prec 3 \prec 8, 2 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$.

Легко перевірити, що жодна з цих груп не є ізоморфною жодній M_7 або M_7^{op}.

Умови ($a1$)–(c) доводять мінімальність нашої d-системи. □

4.5. Опис суттєвих майже додатних ч. в. множин

Вище вже говорилося, а тут скажемо детальніше, що деякі класи головних множин порядку $n = 5, 6, 7$ (які в нашій термінології означають несерійні) описані за допомогою комп'ютерних програм в статті [141] і препринті [142] відповідно для $n = 5, 6$ і для $n = 7$).

З теореми 4.13 випливає, що всі суттєві майже додатні ч.в. множини можна розділити на 9 класів. Представниками кожного класу будуть множини M_i, де $i = 1, 2, ..., 9$. Розглянемо кожний клас окремо.

4.5.1. Опис майже додатних ч. в. множин класу 1. Представником першого класу є множина $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 | 2 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6\}$.

Теорема 4.16. *Майже додатні ч.в. множини мінімаксно ізоморфні множині M_1 вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 12 множинами:*

1) $MD_{1.1} = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6, 5 \prec 3\}$;

2) $MD_{1.2} = \{1 \prec 2, 1 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 2 \prec 6, 3 \prec 2\}$;

3) $MD_{1.3} = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4, 5 \prec 6, 5 \prec 4\}$;

4) $MD_{1.4} = \{1, 2 \prec 3, 2 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6, 4 \prec 3\}$;

5) $MD_{1.5} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 3, 5 \prec 6\}$;

6) $MD_{1.6} = \{1 \prec 3 \prec 6, 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6\}$;

7) $MD_{1.7} = \{1 \prec 3, 4 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6, 5 \prec 3\}$;

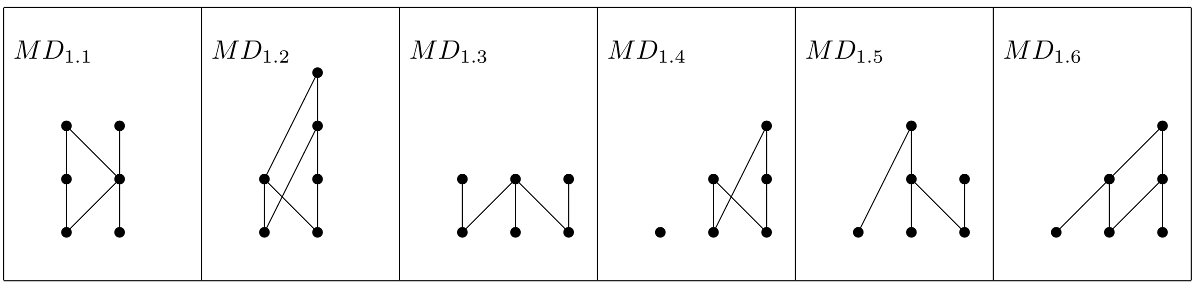
8) $MD_{1.8} = \{1 \prec 2, 1 \prec 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6, 4 \prec 2\}$;

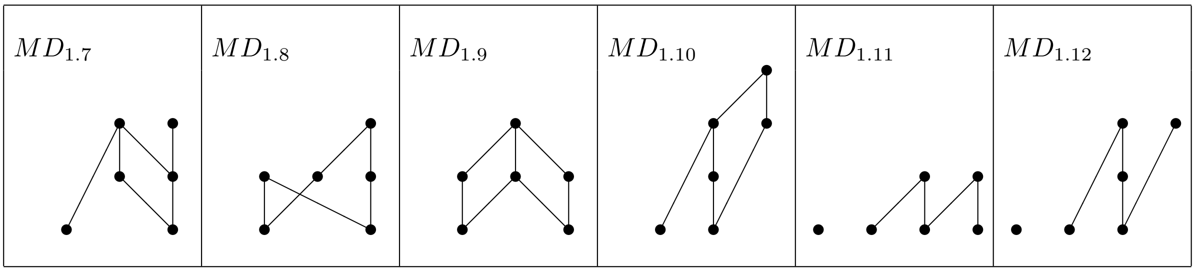
9) $MD_{1.9} = \{1 \prec 2 \prec 4, 1 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 3, 5 \prec 6 \prec 4\}$;

10) $MD_{1.10} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 6, 2 \prec 5 \prec 6\}$;

11) $MD_{1.11} = \{1, 2 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6\}$;

12) $MD_{1.12} = \{1, 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 6\}$.





Доведення. **Крок I.** Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі нижні підмножини в множині M_1. Ними будуть:

$X_{1,0} = \varnothing$, $X_{1,1} = \{1\}$, $X_{1,2} = \{2\}$, $X_{1,3} = \{3\}$, $X_{1,4} = \{1,2\}$, $X_{1,5} = \{1,3\}$, $X_{1,6} = \{2,3\}$, $X_{1,7} = \{2,5\}$, $X_{1,8} = \{1,2,3\}$, $X_{1,9} = \{1,2,5\}$, $X_{1,10} = \{2,3,4\}$, $X_{1,11} = \{2,3,5\}$, $X_{1,12} = \{1,2,3,4\}$, $X_{1,13} = \{1,2,3,5\}$, $X_{1,14} = \{2,3,4,5\}$,$X_{1,15} = \{1,2,3,4,5\}$, $X_{1,16} = \{2,3,4,5,6\}$.

Позначимо через $K_{1,j}$ ч. в. множини $S^{\uparrow}_{X}$ при $S = M_1$ і $X = X_{1,j}$. Тоді легко переконатись у тому, що:

ч. в. множина $K_{1,0}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{1.11}$,

ч. в. множина $K_{1,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{1.6}$,

ч. в. множина $K_{1,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{1.5}$,

ч. в. множина $K_{1,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{1.3}$,

ч. в. множина $K_{1,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{1.1}$,

ч. в. множина $K_{1,5}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{1.8}$,

ч. в. множина $K_{1,6}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{1.4}$,

ч. в. множина $K_{1,7}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{1.8}$,

ч. в. множина $K_{1,8}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{1.5}$,

ч. в. множина $K_{1,9}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{1.6}$,

ч. в. множина $K_{1,10}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{1.2}$,

ч. в. множина $K_{1,11}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{1.3}$,

ч. в. множина $K_{1,12}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{1.10}$,

ч. в. множина $K_{1,13}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{1.11}$,

ч. в. множина $K_{1,14}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{1.7}$,

ч. в. множина $K_{1,15}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{1.12}$,

ч. в. множина $K_{1,16}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{1.9}^{op}$.

Крок II. Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі пари (X, V) нижніх власних підмножин в множині M_1 такі, що $V \subseteq X$ і $V < S \setminus X$. Ними будуть:

$Y_{1,1} = (X_{1,13}, \{3\})$, $Y_{1,2} = (X_{1,15}, \{3\})$, $Y_{1,3} = (X_{1,22}, \{5\})$, $Y_{1,4} = (X_{1,22}, \{3, 5\})$.

Позначимо через $K'_{1,j}$ ч. в. множину $(S_X^{\uparrow})_V^{\uparrow}$ при $S = M_1$ і $(X, V) = Y_{1,j}$. Тоді легко переконатися, що

ч. в. множина $K'_{1,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{1.9}$,

ч. в. множина $K'_{1,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{1.7}$,

ч. в. множина $K'_{1,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{1.10}$,

ч. в. множина $K'_{1,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{1.2}^{op}$.

Крок III. Легко переконатися у тому, що у I і II кожна з ч. в. множин MD_i і MD_i^{op}, де $i = 1.1 - 1.12$, зустрічається по одному разу (при цьому, якщо $MD_i^{\text{op}} \cong MD_i$, то MD_i зустрічається, а MD_i^{op} — ні).

Теорема доведена. $\square$

4.5.2. Опис майже додатних ч. в. множин класу 2. Представником другого класу є множина $M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 | 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 6\}$.

Теорема 4.17. *Майже додатні ч.в. множини мінімаксно ізоморфні множині M_2 вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 22 множинами:*

1) $MD_{2.1} = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 5, 2 \prec 6\}$;

2) $MD_{2.2} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 5\}$;

3) $MD_{2.3} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 6\}$;

4) $MD_{2.4} = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 5, 2 \prec 6\}$;

5) $MD_{2.5} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 5\}$;

6) $MD_{2.6} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 5\}$;

7) $MD_{2.7} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 1 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 6\}$;

8) $MD_{2.8} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 6\}$;

9) $MD_{2.9} = \{1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7, 3 \prec 7\}$;

10) $MD_{2.10} = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 7, 1 \prec 4, 3 \prec 7\}$;

11) $MD_{2.11} = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 5\}$;

12) $MD_{2.12} = \{2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 4, 2 \prec 6, 3 \prec 7\}$;

13) $MD_{2.13} = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 7, 5 \prec 2, 5 \prec 6 \prec 7\}$;

14) $MD_{2.14} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7, 3 \prec 6\}$;

15) $MD_{2.15} = \{1, 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 6\}$;

16) $MD_{2.16} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 6\}$;

17) $MD_{2.17} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 6 \prec 7\}$;

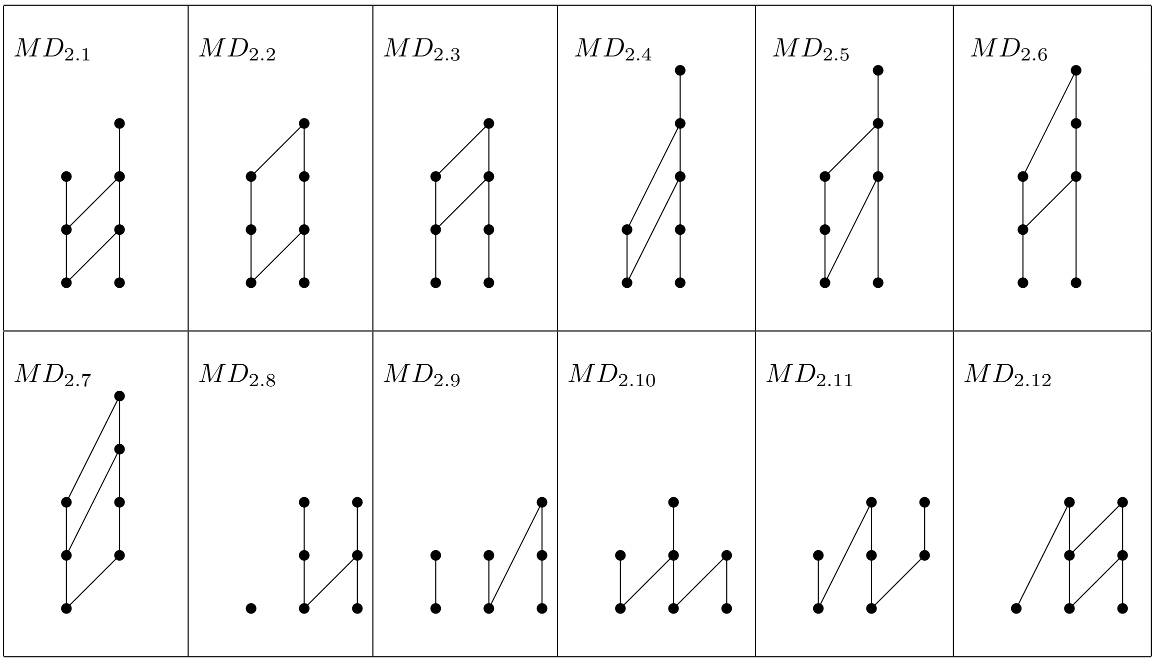
18) $MD_{2.18} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 6 \prec 7\}$;

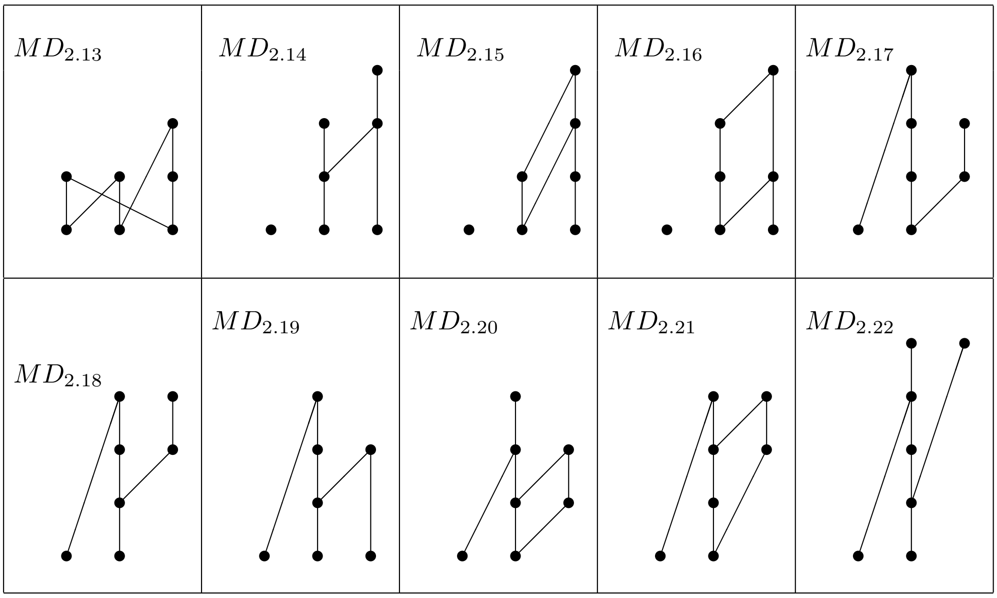
19) $MD_{2.19} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 7, 6 \prec 7\}$;

20) $MD_{2.20} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 6 \prec 7, 3 \prec 7\}$;

21) $MD_{2.21} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 6 \prec 7, 4 \prec 7\}$;

22) $MD_{2.22} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 3 \prec 7\}$.





Доведення. **Крок I.** Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі нижні підмножини в множині M_2. Ними будуть:

$X_{2,0} = \varnothing$, $X_{2,1} = \{1\}$, $X_{2,2} = \{2\}$, $X_{2,3} = \{5\}$, $X_{2,4} = \{1,2\}$, $X_{2,5} = \{1,5\}$, $X_{2,6} = \{2,3\}$, $X_{2,7} = \{2,5\}$, $X_{2,8} = \{1,2,3\}$, $X_{2,9} = \{1,2,5\}$, $X_{2,10} = \{2,3,4\}$, $X_{2,11} = \{2,3,5\}$, $X_{2,12} = \{2,5,6\}$, $X_{2,13} = \{1,2,3,4\}$, $X_{2,14} = \{1,2,3,5\}$, $X_{2,15} = \{1,2,5,6\}$, $X_{2,16} = \{2,3,4,5\}$, $X_{2,17} = \{2,3,5,6\}$, $X_{2,18} = \{2,5,6,7\}$, $X_{2,19} = \{1,2,3,4,5\}$, $X_{2,20} = \{1,2,3,5,6\}$, $X_{2,21} = \{1,2,5,6,7\}$, $X_{2,22} = \{2,3,4,5,6\}$, $X_{2,23} = \{2,3,5,6,7\}$, $X_{2,24} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $X_{2,25} = \{1,2,3,5,6,7\}$, $X_{2,26} = \{2,3,4,5,6,7\}$.

Позначимо через $K_{2,j}$ ч. в. множини $S_X^{\uparrow}$ при $S = M_2$ і $X = X_{2,j}$. Тоді легко переконатись у тому, що:

ч. в. множина $K_{2,0}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.8}$,

ч. в. множина $K_{2,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.2}$,

ч. в. множина $K_{2,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.9}^{op}$,

ч. в. множина $K_{2,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.17}$,

ч. в. множина $K_{2,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.17}^{op}$,

ч. в. множина $K_{2,5}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.2}^{op}$,

ч. в. множина $K_{2,6}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.16}$,

ч. в. множина $K_{2,7}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.9}$,

ч. в. множина $K_{2,8}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.21}$,

ч. в. множина $K_{2,9}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{2.8}$,

ч. в. множина $K_{2,10}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.5}$,

ч. в. множина $K_{2,11}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{2.11}$,

ч. в. множина $K_{2,12}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.15}$,

ч. в. множина $K_{2,13}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{2.6}$,

ч. в. множина $K_{2,14}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{2.10}$,

ч. в. множина $K_{2,15}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.19}$,

ч. в. множина $K_{2,16}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{2.18}$;

ч. в. множина $K_{2,17}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.12}$,

ч. в. множина $K_{2,18}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.4}$,

ч. в. множина $K_{2,19}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.14}$,

ч. в. множина $K_{2,20}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.13}$,

ч. в. множина $K_{2,21}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.22}$,

ч. в. множина $K_{2,22}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.20}$,

ч. в. множина $K_{2,23}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.1}$,

ч. в. множина $K_{2,24}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.10}$,

ч. в. множина $K_{2,25}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.19}$,

ч. в. множина $K_{2,26}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{2.3}$.

Крок II. Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі пари (X, V) нижніх власних підмножин в множині M_2 такі, що $V \subseteq X$ і $V < S \setminus X$. Ними будуть:

$Y_{2,1} = (X_{2,9}, \{2\})$, $Y_{2,2} = (X_{2,14}, \{2\})$, $Y_{2,3} = (X_{2,15}, \{2\})$, $Y_{2,4} = (X_{2,19}, \{2\})$, $Y_{2,5} = (X_{2,19}, \{5\})$, $Y_{2,6} = (X_{2,19}, \{2, 5\})$, $Y_{2,7} = (X_{2,20}, \{2\})$, $Y_{2,8} = (X_{2,21}, \{2\})$, $Y_{2,9} = (X_{2,24}, \{2\})$, $Y_{2,10} = (X_{2,24}, \{5\})$, $Y_{2,11} = (X_{2,24}, \{2, 5\})$, $Y_{2,12} = (X_{2,24}, \{2, 5, 6\})$, $Y_{2,13} = (X_{2,25}, \{2\})$, $Y_{2,14} = (X_{2,25}, \{2, 3\})$.

Позначимо через $K'_{2,j}$ ч. в. множину $(S^{\uparrow}_{X})^{\uparrow}_{V}$ при $S = M_2$ і $(X, V) = Y_{2,j}$. Тоді легко переконатися, що

ч. в. множина $K'_{2,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.3}$,

ч. в. множина $K'_{2,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{2.20}$,

ч. в. множина $K'_{2,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{2.1}$,

ч. в. множина $K'_{2,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.18}$,

ч. в. множина $K'_{2,5}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.6}$,

ч. в. множина $K'_{2,6}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{2.5}$,

ч. в. множина $K'_{2,7}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{2.12}$,

ч. в. множина $K'_{2,8}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{2.4}$,

ч. в. множина $K'_{2,9}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.11}$,

ч. в. множина $K'_{2,10}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{2.21}$,

ч. в. множина $K'_{2,11}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{2.16}$,

ч. в. множина $K'_{2,12}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.7}$,

ч. в. множина $K'_{2,13}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{2.15}$,

ч. в. множина $K'_{2,14}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{2.7}$.

Крок III. Легко переконатися у тому, що у I і II кожна з ч. в. множин MD_i і MD_i^{op}, де $i = 2.1 - 2.22$, зустрічається по одному разу (при цьому, якщо $MD_i^{\mathrm{op}} \cong MD_i$, то MD_i зустрічається, а MD_i^{op} — ні).

Теорема доведена. $\square$

4.5.3. Опис майже додатних ч. в. множин класу 3. Представником третього класу є множина $M_3 = \{1,2,3,4,5,6,7|2 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7\}$.

Теорема 4.18. *Майже додатні ч.в. множини мінімаксно ізоморфні множині M_3 вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 24 множинами:*

1) $MD_{3.1} = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 6 \prec 3\}$;

2) $MD_{3.2} = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 4 \prec 2 \prec 7\}$;

3) $MD_{3.3} = \{1 \prec 2, 1 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 6, 3 \prec 2\}$;

4) $MD_{3.4} = \{1 \prec 2 \prec 6, 1 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 3 \prec 2\}$;

5) $MD_{3.5} = \{3 \prec 1 \prec 2 \prec 7, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 4 \prec 2, 1 \prec 6\}$;

6) $MD_{3.6} = \{1 \prec 2, 3 \prec 4, 3 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7, 5 \prec 4\}$;

7) $MD_{3.7} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 3, 5 \prec 6 \prec 7\}$;

8) $MD_{3.8} = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7, 5 \prec 4\}$;

9) $MD_{3.9} = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 5 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7, 6 \prec 4\}$;

10) $MD_{3.10} = \{1 \prec 2 \prec 4, 1 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 3, 5 \prec 6 \prec 7, 6 \prec 4\}$;

11) $MD_{3.11} = \{1, 2 \prec 3, 2 \prec 7, 4 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

12) $MD_{3.12} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 7, 6 \prec 3\}$;

13) $MD_{3.13} = \{1, 2 \prec 3, 1 \prec 6, 4 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

14) $MD_{3.14} = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 5\}$;

15) $MD_{3.15} = \{1 \prec 3, 4 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 5 \prec 3\}$;

16) $MD_{3.16} = \{1 \prec 3, 5 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 6 \prec 3\}$;

17) $MD_{3.17} = \{1 \prec 2, 1 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 2, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

18) $MD_{3.18} = \{1 \prec 2, 1 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 3 \prec 7 \prec 6\}$;

19) $MD_{3.19} = \{1 \prec 2 \prec 4, 1 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 4, 6 \prec 3\}$;

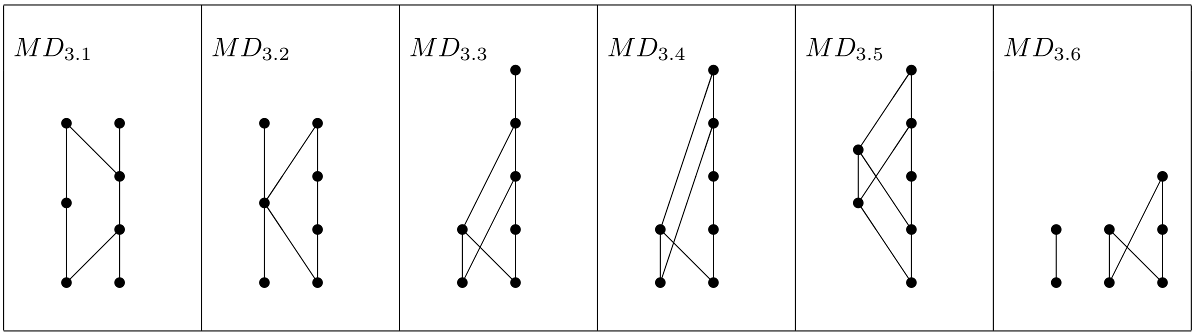
20) $MD_{3.20} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 2 \prec 7 \prec 6\}$;

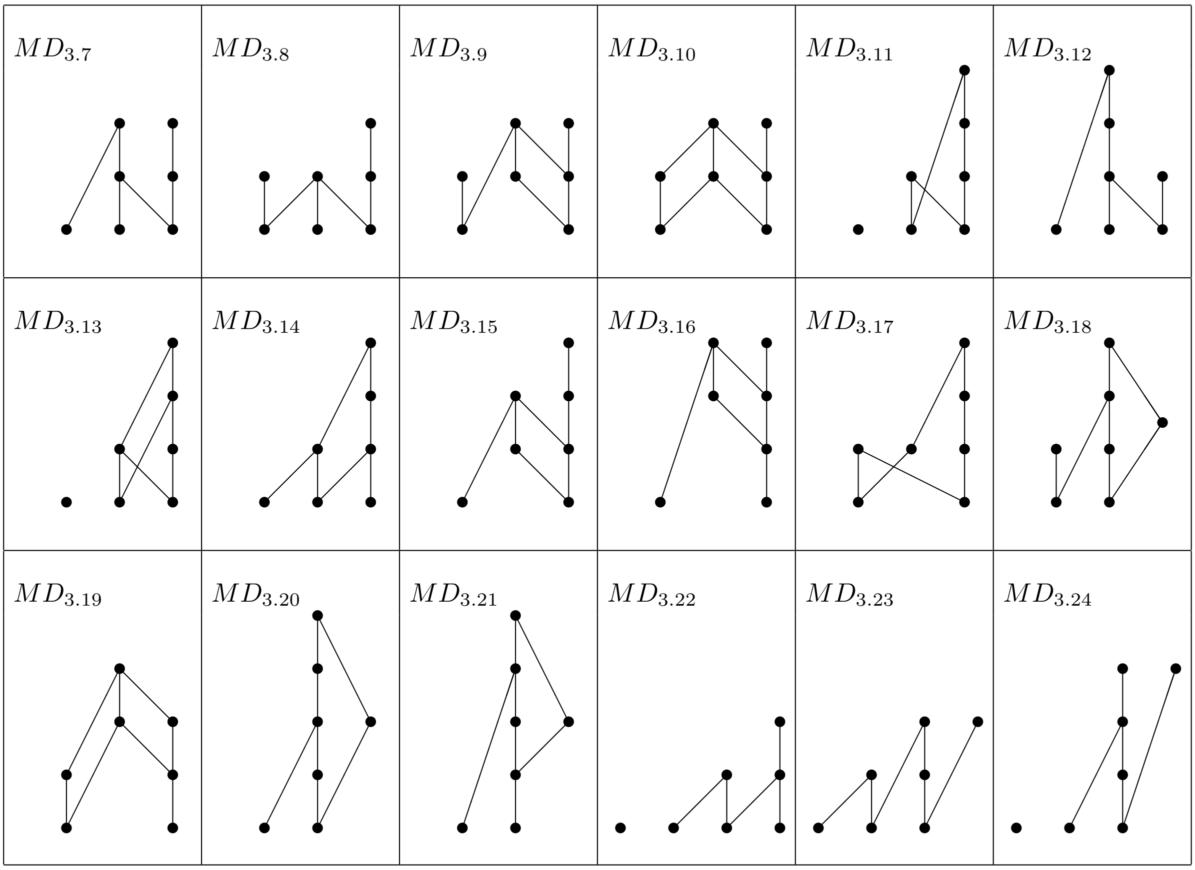
21) $MD_{3.21} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 3 \prec 7 \prec 6\}$;

22) $MD_{3.22} = \{1, 2 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7\}$;

23) $MD_{3.23} = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6, 4 \prec 7\}$;

24) $MD_{3.24} = \{1, 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 3 \prec 7\}$.





Доведення. **Крок I.** Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі нижні підмножини в множині M_3. Ними будуть:

$X_{3,0} = \varnothing$, $X_{3,1} = \{1\}$, $X_{3,2} = \{2\}$, $X_{3,3} = \{3\}$, $X_{3,4} = \{5\}$, $X_{3,5} = \{1,2\}$, $X_{3,6} = \{1,3\}$, $X_{3,7} = \{1,5\}$, $X_{3,8} = \{2,3\}$, $X_{3,9} = \{2,5\}$, $X_{3,10} = \{3,5\}$, $X_{3,11} = \{1,2,3\}$, $X_{3,12} = \{1,2,5\}$, $X_{3,13} = \{1,3,5\}$, $X_{3,14} = \{2,3,4\}$, $X_{3,15} = \{2,3,5\}$, $X_{3,16} = \{3,5,6\}$, $X_{3,17} = \{1,2,3,4\}$, $X_{3,18} = \{1,2,3,5\}$, $X_{3,19} = \{1,3,5,6\}$, $X_{3,20} = \{2,3,4,5\}$, $X_{3,21} = \{2,3,5,6\}$, $X_{3,22} = \{3,5,6,7\}$, $X_{3,23} = \{1,2,3,4,5\}$, $X_{3,24} = \{1,2,3,5,6\}$, $X_{3,25} = \{1,3,5,6,7\}$, $X_{3,26} = \{2,3,4,5,6\}$, $X_{3,27} = \{2,3,5,6,7\}$, $X_{3,28} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $X_{3,29} = \{1,2,3,5,6,7\}$, $X_{3,30} = \{2,3,4,5,6,7\}$.

Позначимо через $K_{3,j}$ ч. в. множини $S_X^{\uparrow}$ при $S = M_3$ і $X = X_{3,j}$. Тоді легко переконатись у тому, що:

ч. в. множина $K_{3,0}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.22}$,

ч. в. множина $K_{3,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.14}$,

ч. в. множина $K_{3,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.12}$,

ч. в. множина $K_{3,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.8}$,

ч. в. множина $K_{3,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.7}$,

ч. в. множина $K_{3,5}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.1}$,

ч. в. множина $K_{3,6}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.17}$,

ч. в. множина $K_{3,7}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.2}$,

ч. в. множина $K_{3,8}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.11}$,

ч. в. множина $K_{3,9}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.17}$,

ч. в. множина $K_{3,10}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.6}$,

ч. в. множина $K_{3,11}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.12}$,

ч. в. множина $K_{3,12}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.14}$,

ч. в. множина $K_{3,13}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.7}$,

ч. в. множина $K_{3,14}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.4}$,

ч. в. множина $K_{3,15}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.8}$,

ч. в. множина $K_{3,16}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.13}$,

ч. в. множина $K_{3,17}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.20}$,

ч. в. множина $K_{3,18}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.22}$,

ч. в. множина $K_{3,19}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.18}$,

ч. в. множина $K_{3,20}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.15}$,

ч. в. множина $K_{3,21}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.9}$,

ч. в. множина $K_{3,22}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.3}$,

ч. в. множина $K_{3,23}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.24}$,

ч. в. множина $K_{3,24}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.23}$,

ч. в. множина $K_{3,25}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.21}$,

ч. в. множина $K_{3,26}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.10}$,

ч. в. множина $K_{3,27}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.16}$,

ч. в. множина $K_{3,28}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.23}$,

ч. в. множина $K_{3,29}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.24}$,

ч. в. множина $K_{3,30}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.19}$.

Крок II. Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі пари (X, V) нижніх власних підмножин в множині M_3 такі, що $V \subseteq X$ і $V < S \setminus X$. Ними будуть:

$Y_{3,1} = (X_{3,18}, \{3\})$, $Y_{3,2} = (X_{3,23}, \{3\})$, $Y_{3,3} = (X_{3,23}, \{5\})$, $Y_{3,4} = (X_{3,23}, \{3, 5\})$, $Y_{3,5} = (X_{3,24}, \{3\})$, $Y_{3,6} = (X_{3,28}, \{3\})$, $Y_{3,7} = (X_{3,28}, \{5\})$, $Y_{3,8} = (X_{3,28}, \{3, 5\})$, $Y_{3,9} = (X_{3,28}, \{3, 5, 6\})$, $Y_{3,10} = (X_{3,29}, \{2\})$, $Y_{3,11} = (X_{3,29}, \{3\})$, $Y_{3,12} = (X_{3,29}, \{2, 3\})$.

Позначимо через $K'_{3,j}$ ч. в. множину $(S^{\uparrow}_{X})^{\uparrow}_{V}$ при $S = M_3$ і $(X, V) = Y_{3,j}$. Тоді легко переконатися, що

ч. в. множина $K'_{3,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.19}$,

ч. в. множина $K'_{3,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.16}$,

ч. в. множина $K'_{3,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.21}$,

ч. в. множина $K'_{3,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.3}$,

ч. в. множина $K'_{3,5}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.10}$,

ч. в. множина $K'_{3,6}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.9}$,

ч. в. множина $K'_{3,7}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.18}$,

ч. в. множина $K'_{3,8}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.13}$,

ч. в. множина $K'_{3,9}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.5}$,

ч. в. множина $K'_{3,10}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.20}$,

ч. в. множина $K'_{3,11}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{3.15}$,

ч. в. множина $K'_{3,12}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{3.4}$.

Крок III. Легко переконатися у тому, що у I і II кожна з ч. в. множин MD_i і MD_i^{op}, де $i = 3.1 - 3.24$, зустрічається по одному разу (при цьому, якщо $MD_i^{\mathrm{op}} \cong MD_i$, то MD_i зустрічається, а MD_i^{op} — ні).

Теорема доведена. □

4.5.4. Опис майже додатних ч. в. множин класу 4. Представником четвертого класу є множина $M_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 | 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 6 \prec 7, 4 \prec 7\}$.

Теорема 4.19. *Майже додатні ч.в. множини мінімаксно ізоморфні множині M_4 вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 15 множинами:*

1) $MD_{4.1} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 6, 4 \prec 3\}$;

2) $MD_{4.2} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 4 \prec 2 \prec 6\}$;

3) $MD_{4.3} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 6 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7\}$;

4) $MD_{4.4} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 7, 5 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7\}$;

5) $MD_{4.5} = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 5, 6 \prec 7\}$;

6) $MD_{4.6} = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 7, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7\}$;

7) $MD_{4.7} = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 4 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7, 5 \prec 3\}$;

8) $MD_{4.8} = \{1 \prec 2 \prec 5, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 6 \prec 7, 4 \prec 7\}$;

9) $MD_{4.9} = \{1 \prec 3, 5 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7, 6 \prec 4\}$;

10) $MD_{4.10} = \{1 \prec 4, 5 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7, 6 \prec 3\}$;

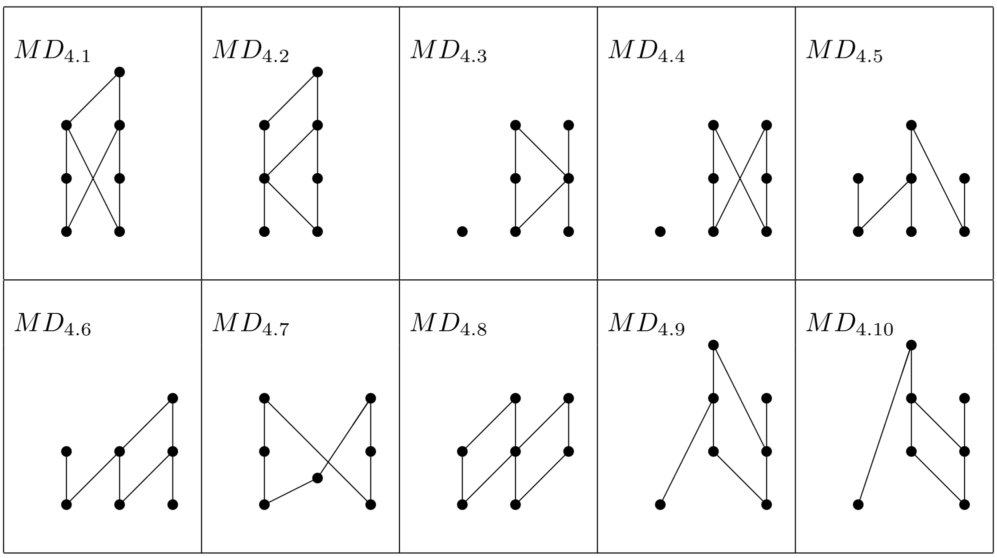
11) $MD_{4.11} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 2 \prec 56 \prec 7, 3 \prec 6\}$;

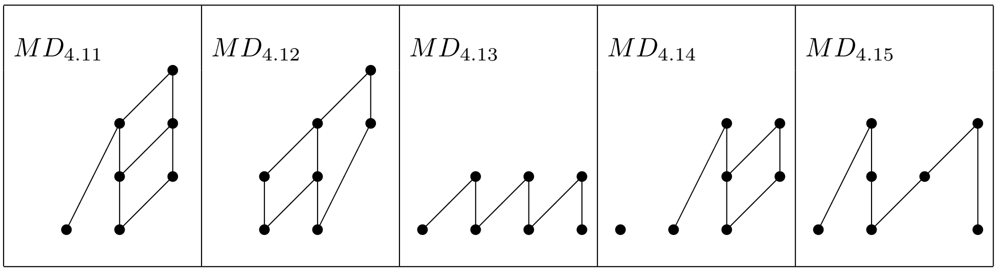
12) $MD_{4.12} = \{1 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 7, 1 \prec 4, 3 \prec 6 \prec 7\}$;

13) $MD_{4.13} = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 5, 4 \prec 7, 6 \prec 7\}$;

14) $MD_{4.14} = \{1, 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 6 \prec 7, 4 \prec 7\}$;

15) $MD_{4.15} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 5 \prec 7, 6 \prec 7\}$.





Доведення. **Крок I.** Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі нижні підмножини в множині M_4. Ними будуть:

$X_{4,0} = \varnothing$, $X_{4,1} = \{1\}$, $X_{4,2} = \{2\}$, $X_{4,3} = \{3\}$, $X_{4,4} = \{1,2\}$, $X_{4,5} = \{1,3\}$, $X_{4,6} = \{2,3\}$, $X_{4,7} = \{3,4\}$, $X_{4,8} = \{3,6\}$, $X_{4,9} = \{1,2,3\}$, $X_{4,10} = \{1,3,4\}$, $X_{4,11} = \{1,3,6\}$, $X_{4,12} = \{2,3,4\}$, $X_{4,13} = \{2,3,6\}$, $X_{4,14} = \{3,4,6\}$, $X_{4,15} = \{1,2,3,4\}$, $X_{4,16} = \{1,2,3,6\}$, $X_{4,17} = \{1,3,4,6\}$, $X_{4,18} = \{2,3,4,5\}$, $X_{4,19} = \{2,3,4,6\}$, $X_{4,20} = \{3,4,6,7\}$, $X_{4,21} = \{1,2,3,4,5\}$, $X_{4,22} = \{1,2,3,4,6\}$, $X_{4,23} = \{1,3,4,6,7\}$, $X_{4,24} = \{2,3,4,5,6\}$, $X_{4,25} = \{2,3,4,6,7\}$, $X_{4,26} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $X_{4,27} = \{1,2,3,4,6,7\}$, $X_{4,28} = \{2,3,4,5,6,7\}$.

Позначимо через $K_{4,j}$ ч. в. множини $S_X^{\uparrow}$ при $S = M_4$ і $X = X_{4,j}$. Тоді легко переконатись у тому, що:

ч. в. множина $K_{4,0}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.14}$,

ч. в. множина $K_{4,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.11}$,

ч. в. множина $K_{4,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.10}$,

ч. в. множина $K_{4,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.13}$,

ч. в. множина $K_{4,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.2}^{op}$,

ч. в. множина $K_{4,5}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.6}$,

ч. в. множина $K_{4,6}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.5}$,

ч. в. множина $K_{4,7}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.5}$,

ч. в. множина $K_{4,8}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.6}$,

ч. в. множина $K_{4,9}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.3}$,

ч. в. множина $K_{4,10}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.7}$,

ч. в. множина $K_{4,11}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.8}$,

ч. в. множина $K_{4,12}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.4}$,

ч. в. множина $K_{4,13}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.7}$,

ч. в. множина $K_{4,14}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.3}$,

ч. в. множина $K_{4,15}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.5}^{op}$,

ч. в. множина $K_{4,16}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.6}^{op}$,

ч. в. множина $K_{4,17}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.6}^{op}$,

ч. в. множина $K_{4,18}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.1}^{op}$,

ч. в. множина $K_{4,19}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.5}^{op}$,

ч. в. множина $K_{4,20}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.2}$,

ч. в. множина $K_{4,21}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.9}^{op}$,

ч. в. множина $K_{4,22}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.13}^{op}$,

ч. в. множина $K_{4,23}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.11}^{op}$,

ч. в. множина $K_{4,24}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.9}^{op}$,

ч. в. множина $K_{4,25}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.10}^{op}$,

ч. в. множина $K_{4,26}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.15}^{op}$,

ч. в. множина $K_{4,27}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.14}^{op}$,

ч. в. множина $K_{4,28}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.12}^{op}$.

Крок II. Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі пари (X, V) нижніх власних підмножин в множині M_4 такі, що $V \subseteq X$ і $V < S \setminus X$. Ними будуть:

$Y_{4,1} = (X_{4,9}, \{3\})$, $Y_{4,2} = (X_{4,15}, \{3\})$, $Y_{4,3} = (X_{4,16}, \{3\})$, $Y_{4,4} = (X_{4,21}, \{3\})$, $Y_{4,5} = (X_{4,22}, \{3\})$, $Y_{4,6} = (X_{4,22}, \{3.4\})$, $Y_{4,7} = (X_{4,26}, \{3\})$, $Y_{4,8} = (X_{4,26}, \{3, 4\})$, $Y_{4,9} = (X_{4,26}, \{3, 6\})$, $Y_{4,10} = (X_{4,26}, \{3, 4, 6\})$, $Y_{4,11} = (X_{4,27}, \{2\})$, $Y_{4,12} = (X_{4,27}, \{3\})$, $Y_{4,13} = (X_{4,27}, \{2, 3\})$, $Y_{4,14} = (X_{4,27}, \{3, 4\})$, $Y_{4,15} = (X_{4,27}, \{2, 3, 4\})$.

Позначимо через $K'_{4,j}$ ч. в. множину $(S_X^{\uparrow})_V^{\uparrow}$ при $S = M_4$ і $(X, V) = Y_{4,j}$. Тоді легко переконатися, що

ч. в. множина $K'_{4,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.2}$,

ч. в. множина $K'_{4,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.10}^{op}$,

ч. в. множина $K'_{4,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{4.11}$,

ч. в. множина $K'_{4,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{4.12}$.

ч. в. множина $K'_{4,5}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{4.14}$,

ч. в. множина $K'_{4,6}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.12}$,

ч. в. множина $K'_{4,7}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.14}$,

ч. в. множина $K'_{4,8}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.10}$.

ч. в. множина $K'_{4,9}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.11}$,

ч. в. множина $K'_{4,10}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{4.2}$,

ч. в. множина $K'_{4,11}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.12}$,

ч. в. множина $K'_{4,12}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.15}$,

ч. в. множина $K'_{4,13}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.9}$.

ч. в. множина $K'_{4,14}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{4.9}$,

ч. в. множина $K'_{4,15}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{4.1}$.

Крок III. Легко переконатися у тому, що у I і II кожна з ч. в. множин MD_i і MD_i^{op}, де $i = 4.1 - 4.15$, зустрічається принаймні по одному разу (при цьому, якщо $MD_i^{\mathrm{op}} \cong MD_i$, то MD_i зустрічається, а MD_i^{op} — ні).

Теорема доведена. □

4.5.5. Опис майже додатних ч. в. множин класу 5. Представником п'ятого класу є множина $M_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 | 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 8\}$.

Теорема 4.20. *Майже додатні ч.в. множини мінімаксно ізоморфні або множині M_5, або множині M_5^{op} вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 52 множинами:*

1) $MD_{5.1} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 6, 2 \prec 8\}$;

2) $MD_{5.2} = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 5, 2 \prec 8\}$;

3) $MD_{5.3} = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 6, 2 \prec 8\}$;

4) $MD_{5.4} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 7\}$;

5) $MD_{5.5} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 7\}$;

6) $MD_{5.6} = \{1 \prec 2 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 4\}$;

7) $MD_{5.7} = \{1 \prec 2 \prec 7, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 4\}$;

8) $MD_{5.8} = \{1 \prec 2 \prec 8, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 5\}$;

9) $MD_{5.9} = \{1 \prec 2 \prec 8, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 6\}$;

10) $MD_{5.10} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 5\}$;

11) $MD_{5.11} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 3 \prec 6\}$;

12) $MD_{5.12} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 7\}$;

13) $MD_{5.13} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8, 3 \prec 7\}$;

14) $MD_{5.14} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 1 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 5\}$;

15) $MD_{5.15} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 8, 1 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 5\}$;

16) $MD_{5.16} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 1 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 3 \prec 6\}$;

17) $MD_{5.17} = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5, 4 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

18) $MD_{5.18} = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 5, 4 \prec 5, 4 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

19) $MD_{5.19} = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6, 4 \prec 7 \prec 8, 5 \prec 8\}$;

20) $MD_{5.20} = \{1 \prec 2 \prec 3, 2 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6, 4 \prec 7 \prec 8, 5 \prec 8\}$;

21) $MD_{5.21} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

22) $MD_{5.22} = \{1 \prec 2, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

23) $MD_{5.23} = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 8, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

24) $MD_{5.24} = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

25) $MD_{5.25} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

26) $MD_{5.26} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

27) $MD_{5.27} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

28) $MD_{5.28} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

29) $MD_{5.29} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

30) $MD_{5.30} = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

31) $MD_{5.31} = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

32) $MD_{5.32} = \{1 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

33) $MD_{5.33} = \{1 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 4 \prec 8\}$;

34) $MD_{5.34} = \{1 \prec 2 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 4 \prec 7 \prec 8, 5 \prec 8\}$;

35) $MD_{5.35} = \{1 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 1 \prec 4, 7 \prec 8, 3 \prec 8\}$;

36) $MD_{5.36} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6, 4 \prec 8, 7 \prec 8\}$;

37) $MD_{5.37} = \{1, 2 \prec 3, 2 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

38) $MD_{5.38} = \{1, 2 \prec 3, 2 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

39) $MD_{5.39} = \{1, 2 \prec 3 \prec 7, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

40) $MD_{5.40} = \{1, 2 \prec 3 \prec 8, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

41) $MD_{5.41} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

42) $MD_{5.42} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

43) $MD_{5.43} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 2 \prec 7 \prec 8\}$;

44) $MD_{5.44} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 2 \prec 8, 7 \prec 8\}$;

45) $MD_{5.45} = \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 2 \prec 8, 7 \prec 8\}$;

46) $MD_{5.46} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 3 \prec 6\}$;

47) $MD_{5.47} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 3 \prec 7\}$;

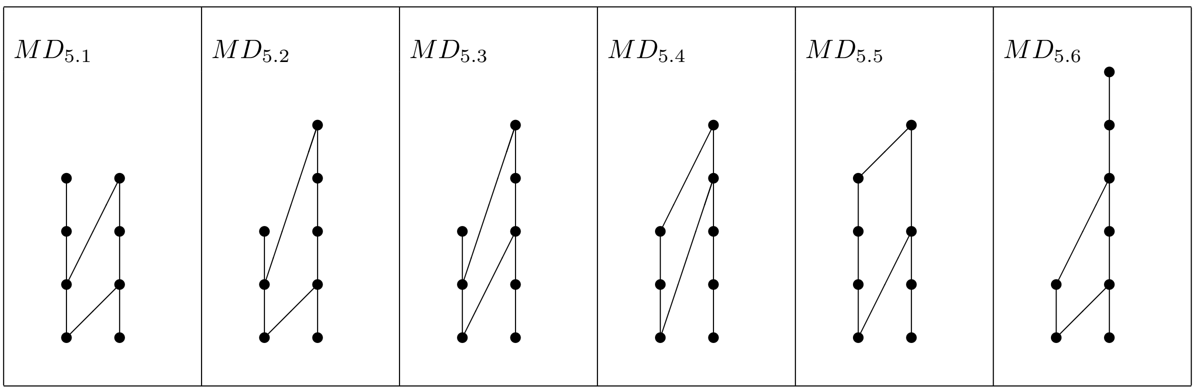
48) $MD_{5.48} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 3 \prec 8\}$;

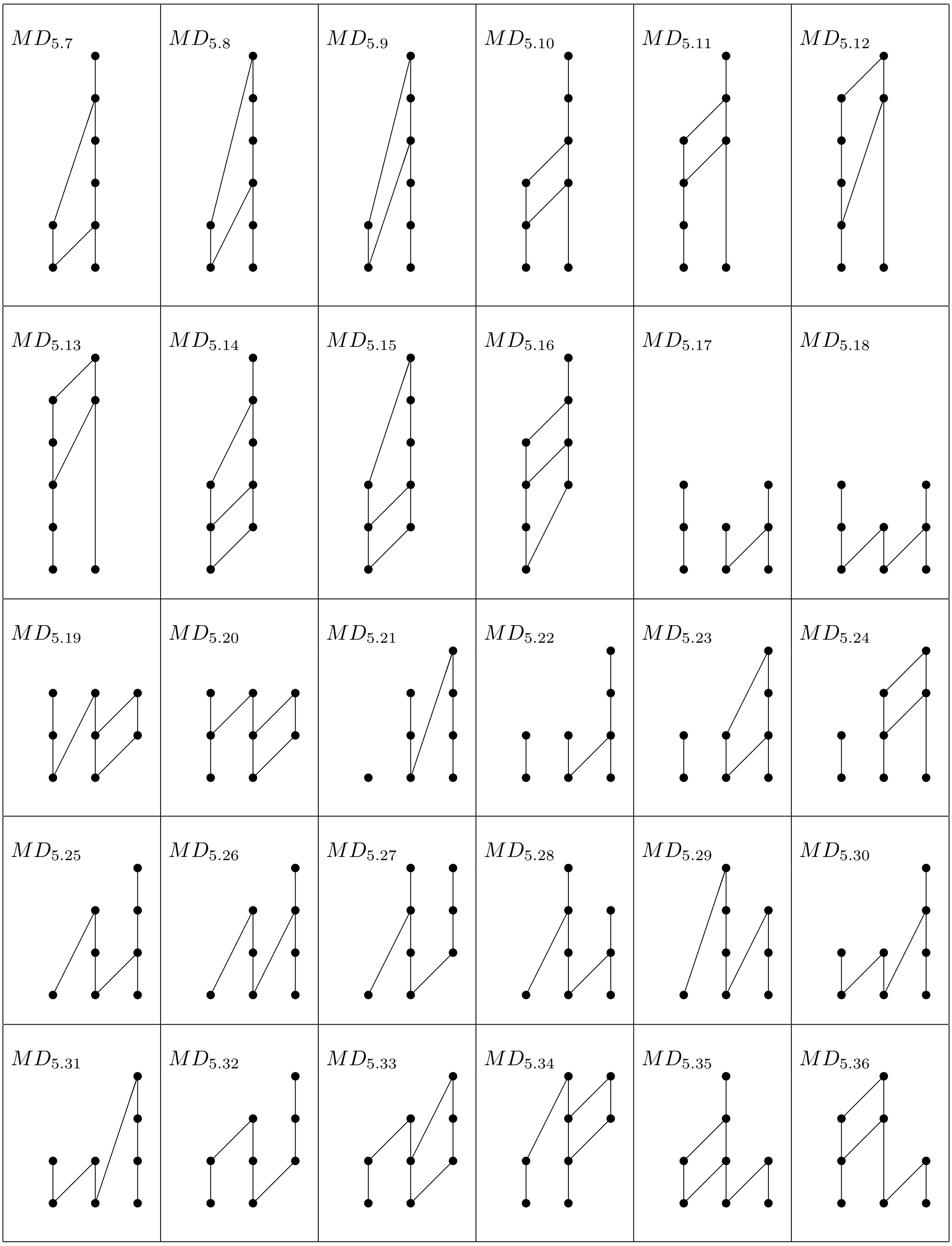
49) $MD_{5.49} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 4 \prec 7\}$;

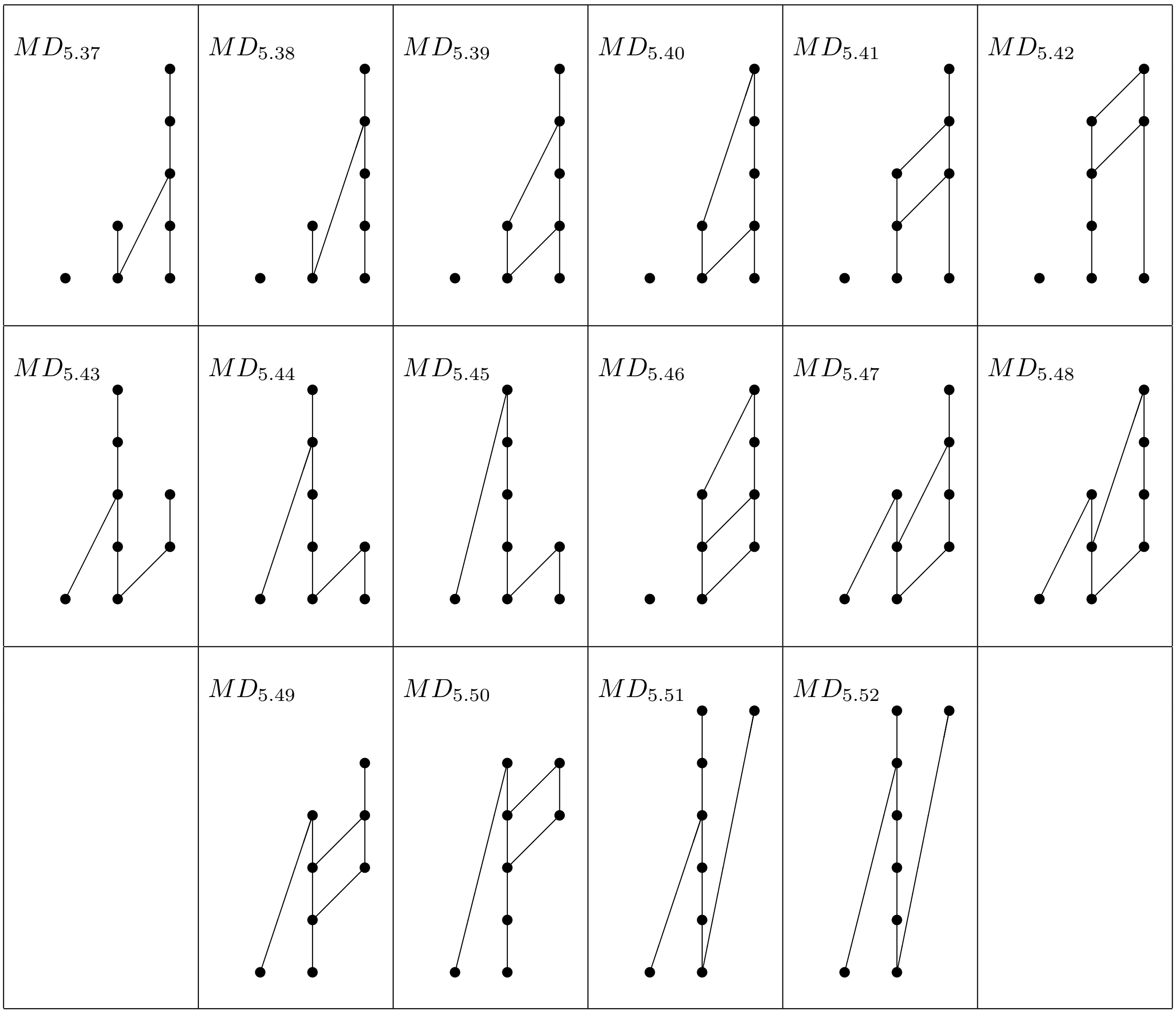
50) $MD_{5.50} = \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 4 \prec 7 \prec 8, 5 \prec 8\}$;

51) $MD_{5.51} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 8\}$;

52) $MD_{5.52} = \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 8\}$.




$MD_{5.7}$
$MD_{5.8}$
$MD_{5.9}$
$MD_{5.10}$
$MD_{5.11}$
$MD_{5.12}$
$MD_{5.13}$
$MD_{5.14}$
$MD_{5.15}$
$MD_{5.16}$
$MD_{5.17}$
$MD_{5.18}$
$MD_{5.19}$
$MD_{5.20}$
$MD_{5.21}$
$MD_{5.22}$
$MD_{5.23}$
$MD_{5.24}$
$MD_{5.25}$
$MD_{5.26}$
$MD_{5.27}$
$MD_{5.28}$
$MD_{5.29}$
$MD_{5.30}$
$MD_{5.31}$
$MD_{5.32}$
$MD_{5.33}$
$MD_{5.34}$
$MD_{5.35}$
$MD_{5.36}$



Доведення. **Крок I.** Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі нижні підмножини в множині M_5. Ними будуть:

$X_{5,0} = \varnothing$, $X_{5,1} = \{1\}$, $X_{5,2} = \{2\}$, $X_{5,3} = \{5\}$, $X_{5,4} = \{1,2\}$, $X_{5,5} = \{1,5\}$, $X_{5,6} = \{2,3\}$, $X_{5,7} = \{2,5\}$, $X_{5,8} = \{5,6\}$, $X_{5,9} = \{1,2,3\}$, $X_{5,10} = \{1,2,5\}$, $X_{5,11} = \{1,5,6\}$, $X_{5,12} = \{2,3,4\}$, $X_{5,13} = \{2,3,5\}$, $X_{5,14} = \{2,5,6\}$, $X_{5,15} = \{5,6,7\}$, $X_{5,16} = \{1,2,3,4\}$, $X_{5,17} = \{1,2,3,5\}$, $X_{5,18} = \{1,2,5,6\}$, $X_{5,19} = \{1,5,6,7\}$, $X_{5,20} = \{2,3,4,5\}$, $X_{5,21} = \{2,3,5,6\}$, $X_{5,22} = \{2,5,6,7\}$, $X_{5,23} = \{1,2,3,4,5\}$, $X_{5,24} = \{1,2,3,5,6\}$, $X_{5,25} = \{1,2,5,6,7\}$, $X_{5,26} = \{2,3,4,5,6\}$, $X_{5,27} = \{2,3,5,6,7\}$, $X_{5,28} = \{2,5,6,7,8\}$, $X_{5,29} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $X_{5,30} = \{1,2,3,5,6,7\}$, $X_{5,31} = \{1,2,5,6,7,8\}$, $X_{5,32} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $X_{5,33} = \{2,3,5,6,7,8\}$, $X_{5,34} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $X_{5,35} = \{1,2,3,5,6,7,8\}$, $X_{5,36} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$.

Позначимо через $K_{5,j}$ ч. в. множини $S_X^{\uparrow}$ при $S = M_5$ і $X = X_{5,j}$. Тоді легко переконатись у тому, що:

ч. в. множина $K_{5,0}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.21}$,

ч. в. множина $K_{5,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.4}$,

ч. в. множина $K_{5,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.22}^{op}$,

ч. в. множина $K_{5,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.29}$,

ч. в. множина $K_{5,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.43}^{op}$,

ч. в. множина $K_{5,5}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.1}^{op}$,

ч. в. множина $K_{5,6}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.42}$,

ч. в. множина $K_{5,7}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.18}^{op}$,

ч. в. множина $K_{5,8}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.44}$,

ч. в. множина $K_{5,9}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.50}$,

ч. в. множина $K_{5,10}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.28}^{op}$,

ч. в. множина $K_{5,11}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.3}^{op}$,

ч. в. множина $K_{5,12}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.11}$,

ч. в. множина $K_{5,13}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.36}$,

ч. в. множина $K_{5,14}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.30}$,

ч. в. множина $K_{5,15}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.51}$,

ч. в. множина $K_{5,16}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.10}^{op}$,

ч. в. множина $K_{5,17}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.35}^{op}$,

ч. в. множина $K_{5,18}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.26}^{op}$,

ч. в. множина $K_{5,19}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.9}^{op}$,

ч. в. множина $K_{5,20}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.49}^{op}$,

ч. в. множина $K_{5,21}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.20}^{op}$,

ч. в. множина $K_{5,22}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.37}$,

ч. в. множина $K_{5,23}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.41}^{op}$,

ч. в. множина $K_{5,24}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.19}$,

ч. в. множина $K_{5,25}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.38}$,

ч. в. множина $K_{5,26}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.34}^{op}$,

ч. в. множина $K_{5,27}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.25}$,

ч. в. множина $K_{5,28}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.8}$,

ч. в. множина $K_{5,29}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{5.24}$,

ч. в. множина $K_{5,30}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{5.31}$,

ч. в. множина $K_{5,31}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{5.52}$,

ч. в. множина $K_{5,32}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.27}$,

ч. в. множина $K_{5,33}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.2}$,

ч. в. множина $K_{5,34}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.17}$,

ч. в. множина $K_{5,35}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{5.45}$,

ч. в. множина $K_{5,36}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{5.5}$.

Крок II. Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі пари (X, V) нижніх власних підмножин в множині M_5 такі, що $V \subseteq X$ і $V < S \setminus X$. Ними будуть:

$Y_{5,1} = (X_{5,23}, \{5\})$, $Y_{5,2} = (X_{5,25}, \{2\})$, $Y_{5,3} = (X_{5,29}, \{5\})$, $Y_{5,4} = (X_{5,29}, \{5, 6\})$, $Y_{5,5} = (X_{5,30}, \{2\})$, $Y_{5,6} = (X_{5,31}, \{2\})$, $Y_{5,7} = (X_{5,34}, \{2\})$, $Y_{5,8} = (X_{5,34}, \{5\})$, $Y_{5,9} = (X_{5,34}, \{2, 5\})$, $Y_{5,10} = (X_{5,34}, \{5, 6\})$, $Y_{5,11} = (X_{5,34}, \{2, 5, 6\})$, $Y_{5,12} = (X_{5,34}, \{5, 6, 7\})$, $Y_{5,13} = (X_{5,34}, \{2, 5, 6, 7\})$, $Y_{5,14} = (X_{5,35}, \{2\})$, $Y_{5,15} = (X_{5,35}, \{2, 3\})$.

Позначимо через $K'_{5,j}$ ч. в. множину $(S^{\uparrow}_{X})^{\uparrow}_{V}$ при $S = M_5$ і $(X, V) = Y_{5,j}$. Тоді легко переконатися, що

ч. в. множина $K'_{5,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{5.16}$,

ч. в. множина $K'_{5,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.12}$,

ч. в. множина $K'_{5,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.46}$,

ч. в. множина $K'_{5,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.14}$,

ч. в. множина $K'_{5,5}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.48}$,

ч. в. множина $K'_{5,6}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{5.7}$,

ч. в. множина $K'_{5,7}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{5.32}$,

ч. в. множина $K'_{5,8}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.23}$,

ч. в. множина $K'_{5,9}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.33}$,

ч. в. множина $K'_{5,10}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.39}$,

ч. в. множина $K'_{5,11}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.47}$,

ч. в. множина $K'_{5,12}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{5.6}$,

ч. в. множина $K'_{5,13}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{5.13}$,

ч. в. множина $K'_{5,14}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{5.40}$,

ч. в. множина $K'_{5,15}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{5.15}$.

Крок III. Легко переконатися у тому, що у I і II кожна з ч. в. множин MD_i або MD_i^{op}, де $i = 5.1 - 5.52$, зустрічається по одному разу.

Теорема доведена. □

4.5.6. Опис майже додатних ч. в. множин класу 6. Представником шостого класу є множина $M_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 | 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 7\}$.

Теорема 4.21. *Майже додатні ч.в. множини мінімаксно ізоморфні множині M_6 вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 30 множинами:*

1) $MD_{6.1} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 1 \prec 6, 3 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

2) $MD_{6.2} = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 5, 2 \prec 7\}$;

3) $MD_{6.3} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 6\}$;

4) $MD_{6.4} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 2 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

5) $MD_{6.5} = \{1 \prec 2 \prec 7, 1 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

6) $MD_{6.6} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 5\}$;

7) $MD_{6.7} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 6\}$;

8) $MD_{6.8} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 8, 1 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 6\}$;

9) $MD_{6.9} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 1 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 3 \prec 6\}$;

10) $MD_{6.10} = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

11) $MD_{6.11} = \{1 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

12) $MD_{6.12} = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 5, 4 \prec 5, 4 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

13) $MD_{6.13} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

14) $MD_{6.14} = \{1 \prec 2, 3 \prec 4, 3 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

15) $MD_{6.15} = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5, 4 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

16) $MD_{6.16} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

17) $MD_{6.17} = \{1 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 3 \prec 7 \prec 8\}$;

18) $MD_{6.18} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 6, 3 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

19) $MD_{6.19} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 8, 2 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

20) $MD_{6.20} = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 5 \prec 2\}$;

21) $MD_{6.21} = \{1 \prec 2 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 1 \prec 4, 3 \prec 8, 7 \prec 8\}$;

22) $MD_{6.22} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6, 1 \prec 5, 4 \prec 8, 7 \prec 8\}$;

23) $MD_{6.23} = \{1, 2 \prec 3 \prec 8, 2 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

24) $MD_{6.24} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

25) $MD_{6.25} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 3 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

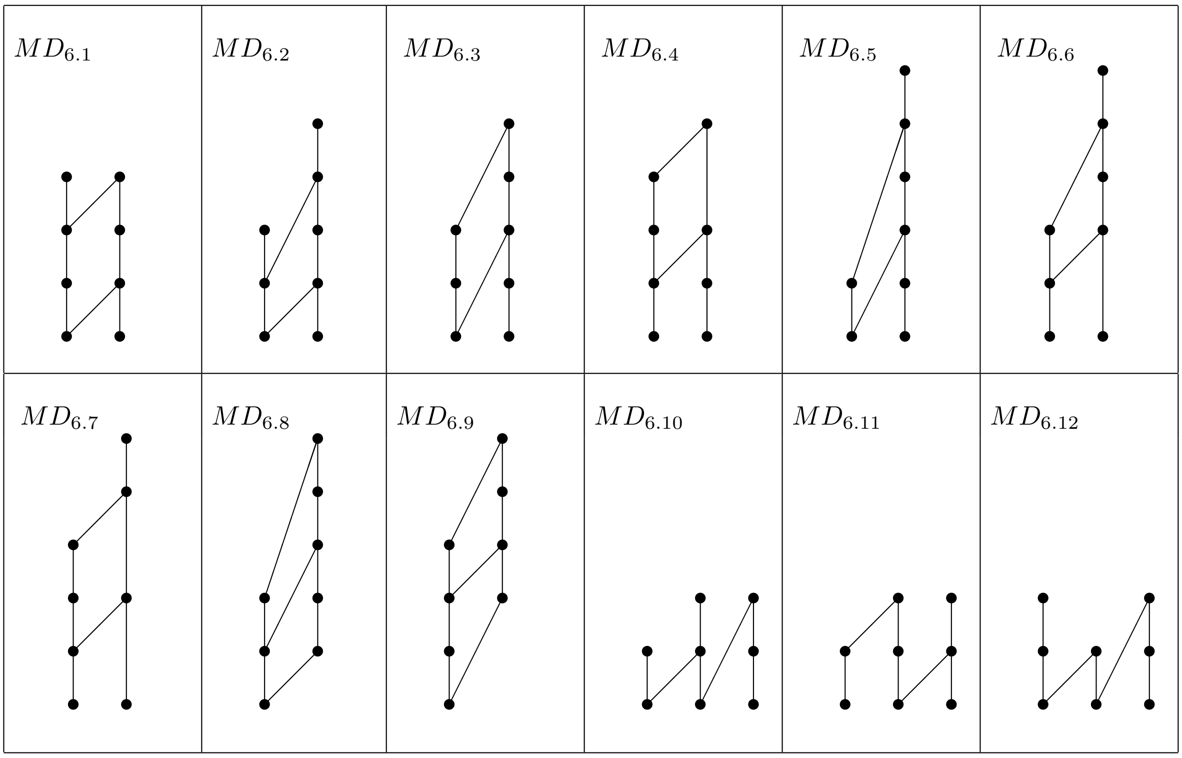
26) $MD_{6.26} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 2 \prec 7 \prec 8\}$;

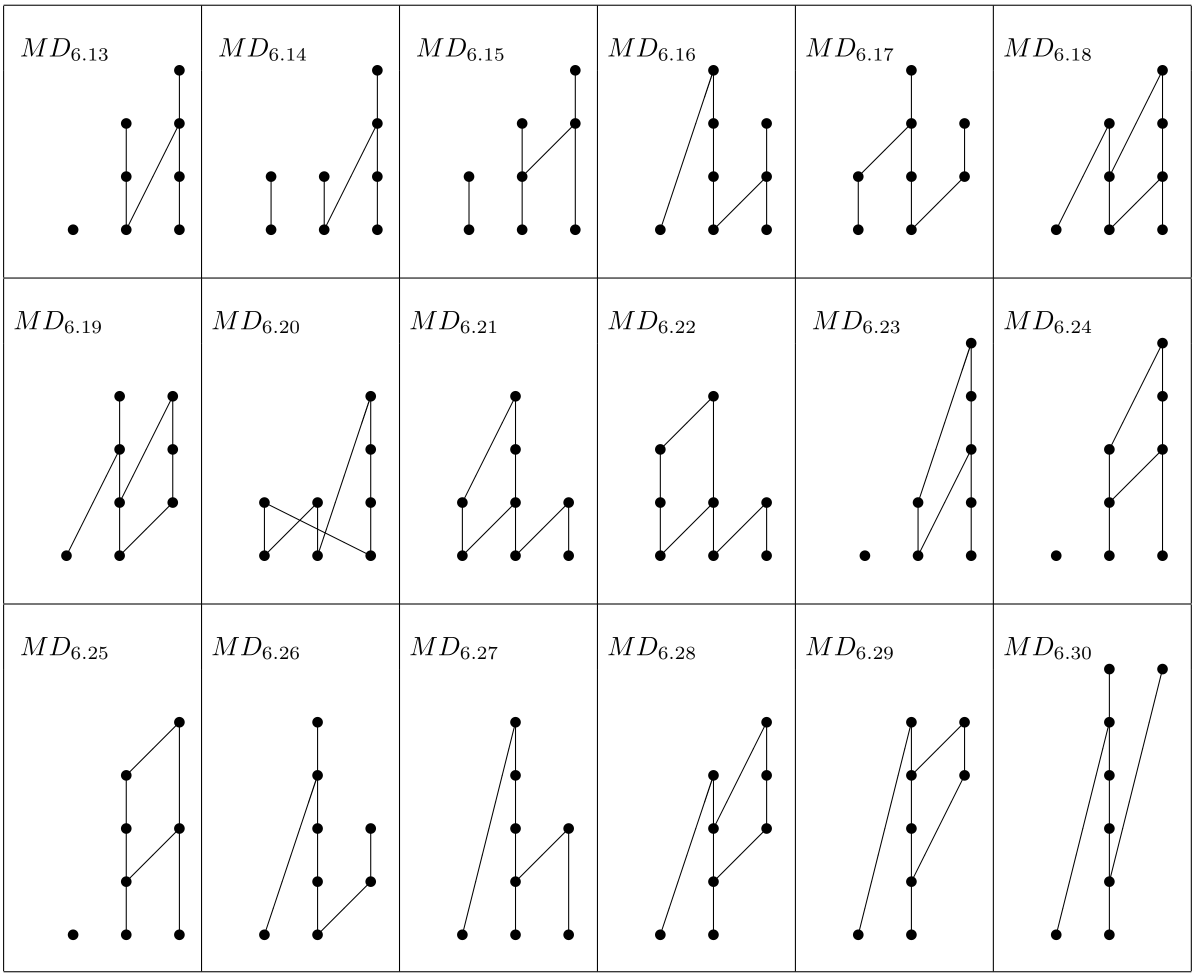
27) $MD_{6.27} = \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 3 \prec 8, 7 \prec 8\}$;

28) $MD_{6.28} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 4 \prec 8, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

29) $MD_{6.29} = \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 5 \prec 8, 3 \prec 7 \prec 8\}$;

30) $MD_{6.30} = \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 3 \prec 8\}$.





Доведення. **Крок I.** Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі нижні підмножини в множині M_6. Ними будуть:

$X_{6,0} = \varnothing$, $X_{6,1} = \{1\}$, $X_{6,2} = \{2\}$, $X_{6,3} = \{5\}$, $X_{6,4} = \{1,2\}$, $X_{6,5} = \{1,5\}$, $X_{6,6} = \{2,3\}$, $X_{6,7} = \{2,5\}$, $X_{6,8} = \{5,6\}$, $X_{6,9} = \{1,2,3\}$, $X_{6,10} = \{1,2,5\}$, $X_{6,11} = \{1,5,6\}$, $X_{6,12} = \{2,3,4\}$, $X_{6,13} = \{2,3,5\}$, $X_{6,14} = \{2,5,6\}$, $X_{6,15} = \{1,2,3,4\}$, $X_{6,16} = \{1,2,3,5\}$, $X_{6,17} = \{1,2,5,6\}$, $X_{6,18} = \{2,3,4,5\}$, $X_{6,19} = \{2,3,5,6\}$, $X_{6,20} = \{2,5,6,7\}$, $X_{6,21} = \{1,2,3,4,5\}$, $X_{6,22} = \{1,2,3,5,6\}$, $X_{6,23} = \{1,2,5,6,7\}$, $X_{6,24} = \{2,3,4,5,6\}$, $X_{6,25} = \{2,3,5,6,7\}$, $X_{6,26} = \{2,5,6,7,8\}$, $X_{6,27} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $X_{6,28} = \{1,2,3,5,6,7\}$, $X_{6,29} = \{1,2,5,6,7,8\}$, $X_{6,30} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $X_{6,31} = \{2,3,5,6,7,8\}$, $X_{6,32} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $X_{6,33} = \{1,2,3,5,6,7,8\}$, $X_{6,34} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$.

Позначимо через $K_{6,j}$ ч. в. множини $S^{\uparrow}_{X}$ при $S = M_6$ і $X = X_{6,j}$. Тоді легко переконатись у тому, що:

ч. в. множина $K_{6,0}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.13}$,

ч. в. множина $K_{6,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.3}$,

ч. в. множина $K_{6,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.14}$,

ч. в. множина $K_{6,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.16}$,

ч. в. множина $K_{6,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.26}$,

ч. в. множина $K_{6,5}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.1}$,

ч. в. множина $K_{6,6}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.25}$,

ч. в. множина $K_{6,7}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.12}$,

ч. в. множина $K_{6,8}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.26}$,

ч. в. множина $K_{6,9}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.29}$,

ч. в. множина $K_{6,10}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.16}$,

ч. в. множина $K_{6,11}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.3}$,

ч. в. множина $K_{6,12}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.7}$,

ч. в. множина $K_{6,13}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.22}$,

ч. в. множина $K_{6,14}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.14}$,

ч. в. множина $K_{6,15}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.6}$,

ч. в. множина $K_{6,16}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.21}$,

ч. в. множина $K_{6,17}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.13}$,

ч. в. множина $K_{6,18}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.28}$,

ч. в. множина $K_{6,19}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.11}$,

ч. в. множина $K_{6,20}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.23}$,

ч. в. множина $K_{6,21}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.24}$,

ч. в. множина $K_{6,22}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.10}$,

ч. в. множина $K_{6,23}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.27}$,

ч. в. множина $K_{6,24}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.17}$,

ч. в. множина $K_{6,25}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.18}$,

ч. в. множина $K_{6,26}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.5}$,

ч. в. множина $K_{6,27}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.15}$,

ч. в. множина $K_{6,28}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.20}$,

ч. в. множина $K_{6,29}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.30}$,

ч. в. множина $K_{6,30}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.19}$,

ч. в. множина $K_{6,31}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.2}$,

ч. в. множина $K_{6,32}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.10}$,

ч. в. множина $K_{6,33}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.27}$,

ч. в. множина $K_{6,34}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.4}$.

Крок II. Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі пари (X, V) нижніх власних підмножин в множині M_6 такі, що $V \subseteq X$ і $V < S \setminus X$. Ними будуть:

$Y_{6,1} = (X_{6,17}, \{2\})$, $Y_{6,2} = (X_{6,21}, \{5\})$, $Y_{6,3} = (X_{6,22}, \{2\})$, $Y_{6,4} = (X_{6,23}, \{2\})$, $Y_{6,5} = (X_{6,27}, \{2\})$, $Y_{6,6} = (X_{6,27}, \{5\})$, $Y_{6,7} = (X_{6,27}, \{2, 5\})$, $Y_{6,8} = (X_{6,27}, \{5, 6\})$, $Y_{6,9} = (X_{6,27}, \{2, 5, 6\})$, $Y_{6,10} = (X_{6,28}, \{2\})$, $Y_{6,11} = (X_{6,29}, \{2\})$, $Y_{6,12} = (X_{6,32}, \{2\})$, $Y_{6,13} = (X_{6,32}, \{5\})$, $Y_{6,14} = (X_{6,32}, \{2, 5\})$, $Y_{6,15} = (X_{6,32}, \{5, 6\})$, $Y_{6,16} = (X_{6,32}, \{2, 5, 6\})$, $Y_{6,17} = (X_{6,32}, \{2, 5, 6, 7\})$, $Y_{6,18} = (X_{6,33}, \{2\})$, $Y_{6,19} = (X_{6,33}, \{2, 3\})$.

Позначимо через $K'_{6,j}$ ч. в. множину $(S^{\uparrow}_{X})^{\uparrow}_{V}$ при $S = M_6$ і $(X, V) = Y_{6,j}$. Тоді легко переконатися, що

ч. в. множина $K'_{6,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.4}$,

ч. в. множина $K'_{6,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.9}$,

ч. в. множина $K'_{6,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.19}$,

ч. в. множина $K'_{6,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.2}$,

ч. в. множина $K'_{6,5}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.17}$,

ч. в. множина $K'_{6,6}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.24}$,

ч. в. множина $K'_{6,7}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.28}$,

ч. в. множина $K'_{6,8}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.6}$,

ч. в. множина $K'_{6,9}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.7}$,

ч. в. множина $K'_{6,10}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.18}$,

ч. в. множина $K'_{6,11}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.5}$,

ч. в. множина $K'_{6,12}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.11}$,

ч. в. множина $K'_{6,13}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.21}$,

ч. в. множина $K'_{6,14}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.22}$,

ч. в. множина $K'_{6,15}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.29}$,

ч. в. множина $K'_{6,16}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.25}$,

ч. в. множина $K'_{6,17}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{6.8}$,

ч. в. множина $K'_{6,18}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.23}$,

ч. в. множина $K'_{6,19}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{6.8}$.

Крок III. Легко переконатися у тому, що у I і II кожна з ч. в. множин MD_i і MD_i^{op}, де $i = 6.1 - 6.30$, зустрічається по одному разу (при цьому, якщо $MD_i^{\mathrm{op}} \cong MD_i$, то MD_i зустрічається, а MD_i^{op} — ні).

Теорема доведена. □

4.5.7. Опис майже додатних ч. в. множин класу 7. Представником сьомого класу є множина $M_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8|2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 6, 3 \prec 8\}$.

Теорема 4.22. *Майже додатні ч.в. множини мінімаксно ізоморфні множині M_7 вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 31 множинами:*

1) $MD_{7.1} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 1 \prec 6, 2 \prec 7, 3 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

2) $MD_{7.2} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 5, 2 \prec 6\}$;

3) $MD_{7.3} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 5, 2 \prec 6\}$;

4) $MD_{7.4} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 5, 2 \prec 7\}$;

5) $MD_{7.5} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 6, 2 \prec 7\}$;

6) $MD_{7.6} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 6, 2 \prec 7\}$;

7) $MD_{7.7} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 6, 3 \prec 7\}$;

8) $MD_{7.8} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 6, 3 \prec 7\}$;

9) $MD_{7.9} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 1 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 6, 3 \prec 7\}$;

10) $MD_{7.10} = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 7, 4 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

11) $MD_{7.11} = \{1 \prec 2, 1 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

12) $MD_{7.12} = \{1 \prec 2, 1 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

13) $MD_{7.13} = \{1 \prec 2, 1 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 7, 4 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

14) $MD_{7.14} = \{1 \prec 2, 1 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8, 6 \prec 2\}$;

15) $MD_{7.15} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 6, 3 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

16) $MD_{7.16} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 6, 3 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

17) $MD_{7.17} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 7, 3 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

18) $MD_{7.18} = \{1 \prec 2, 1 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 3 \prec 8, 7 \prec 8\}$;

19) $MD_{7.19} = \{1 \prec 2, 1 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 3 \prec 8, 7 \prec 8\}$;

20) $MD_{7.20} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 2 \prec 6, 3 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

21) $MD_{7.21} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 3 \prec 7\}$;

22) $MD_{7.22} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 3 \prec 8\}$;

23) $MD_{7.23} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8, 3 \prec 8\}$;

24) $MD_{7.24} = \{1 \prec 2 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 3 \prec 7 \prec 8, 4 \prec 8\}$;

25) $MD_{7.25} = \{1 \prec 2 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 1 \prec 5, 7 \prec 8, 3 \prec 8\}$;

26) $MD_{7.26} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 3 \prec 7, 4 \prec 8\}$;

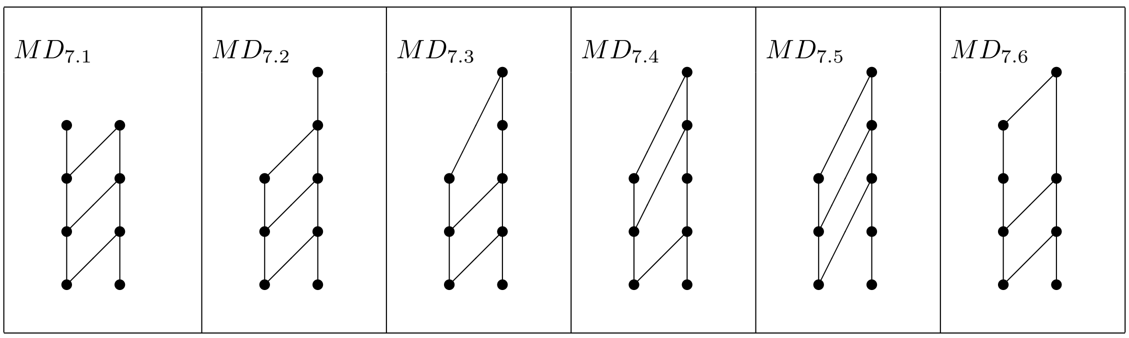
27) $MD_{7.27} = \{1 \prec 2 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 3 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 5, 4 \prec 8\}$;

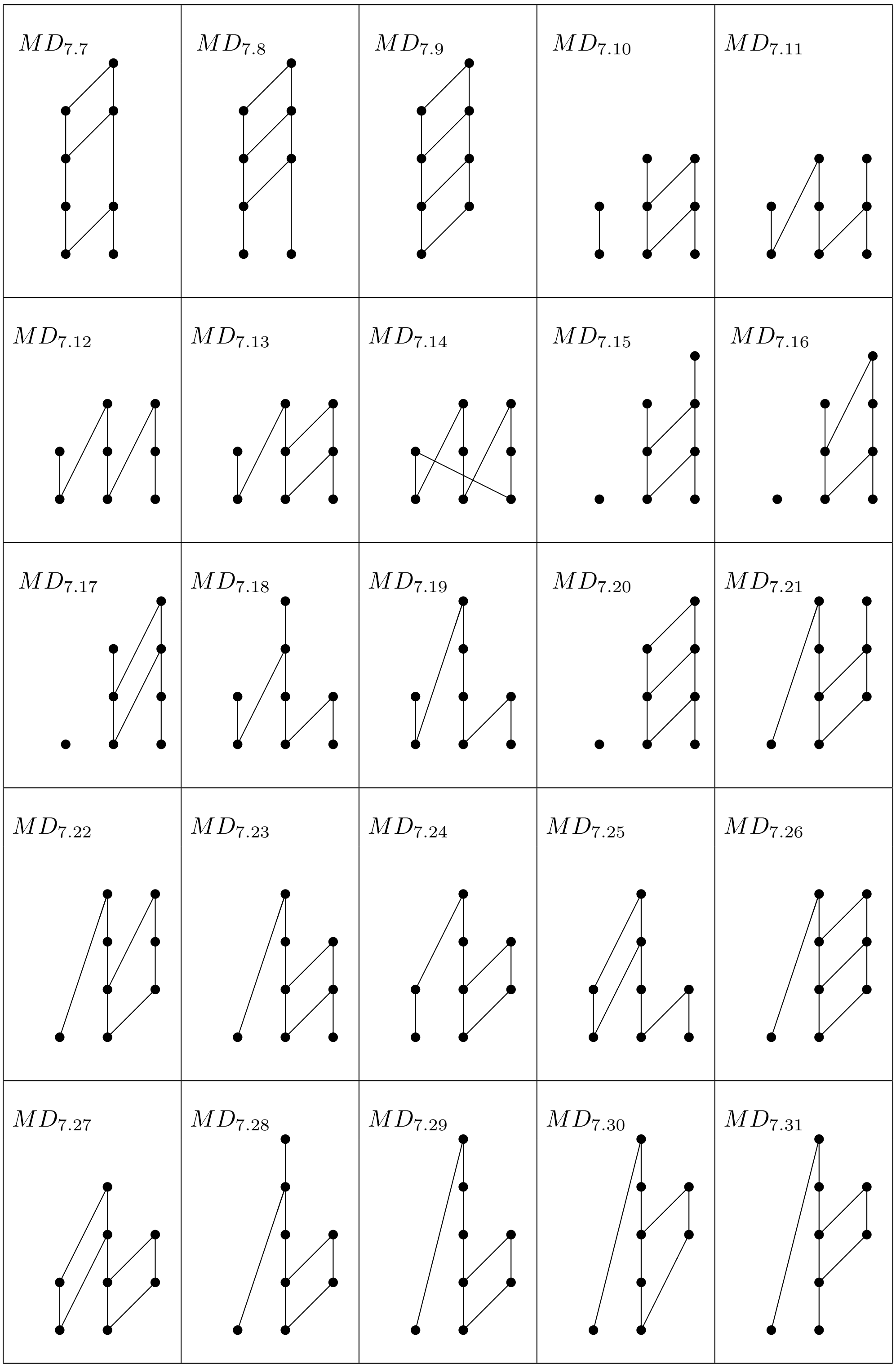
28) $MD_{7.28} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 3 \prec 8, 2 \prec 7 \prec 8\}$;

29) $MD_{7.29} = \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 3 \prec 8, 2 \prec 7 \prec 8\}$;

30) $MD_{7.30} = \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 4 \prec 8, 2 \prec 7 \prec 8\}$;

31) $MD_{7.31} = \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 4 \prec 8, 3 \prec 7 \prec 8\}$.





Доведення. **Крок I.** Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі нижні підмножини в множині M_7. Ними будуть:

$X_{7,0} = \varnothing$, $X_{7,1} = \{1\}$, $X_{7,2} = \{2\}$, $X_{7,3} = \{5\}$, $X_{7,4} = \{1,2\}$, $X_{7,5} = \{1,5\}$, $X_{7,6} = \{2,3\}$, $X_{7,7} = \{2,5\}$, $X_{7,8} = \{1,2,3\}$, $X_{7,9} = \{1,2,5\}$,

$X_{7,10} = \{2,3,4\}$, $X_{7,11} = \{2,3,5\}$, $X_{7,12} = \{2,5,6\}$, $X_{7,13} = \{1,2,3,4\}$, $X_{7,14} = \{1,2,3,5\}$, $X_{7,15} = \{1,2,5,6\}$, $X_{7,16} = \{2,3,4,5\}$, $X_{7,17} = \{2,3,5,6\}$, $X_{7,18} = \{2,5,6,7\}$, $X_{7,19} = \{1,2,3,4,5\}$, $X_{7,20} = \{1,2,3,5,6\}$, $X_{7,21} = \{1,2,5,6,7\}$, $X_{7,22} = \{2,3,4,5,6\}$, $X_{7,23} = \{2,3,5,6,7\}$, $X_{7,24} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $X_{7,25} = \{1,2,3,5,6,7\}$, $X_{7,26} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $X_{7,27} = \{2,3,5,6,7,8\}$, $X_{7,28} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $X_{7,29} = \{1,2,3,5,6,7,8\}$, $X_{7,30} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$.

Позначимо через $K_{7,j}$ ч. в. множини $S_X^{\uparrow}$ при $S = M_7$ і $X = X_{7,j}$. Тоді легко переконатись у тому, що:

ч. в. множина $K_{7,0}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.16}$,

ч. в. множина $K_{7,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.4}$,

ч. в. множина $K_{7,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.19}$,

ч. в. множина $K_{7,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.22}$,

ч. в. множина $K_{7,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.29}^{op}$,

ч. в. множина $K_{7,5}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.6}$,

ч. в. множина $K_{7,6}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.16}^{op}$,

ч. в. множина $K_{7,7}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.12}$,

ч. в. множина $K_{7,8}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.30}$,

ч. в. множина $K_{7,9}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.17}$,

ч. в. множина $K_{7,10}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.7}$,

ч. в. множина $K_{7,11}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.11}^{op}$,

ч. в. множина $K_{7,12}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.25}$,

ч. в. множина $K_{7,13}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.3}^{op}$,

ч. в. множина $K_{7,14}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.18}^{op}$,

ч. в. множина $K_{7,15}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.23}$,

ч. в. множина $K_{7,16}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.21}^{op}$,

ч. в. множина $K_{7,17}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.13}$,

ч. в. множина $K_{7,18}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.31}^{op}$,

ч. в. множина $K_{7,19}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.15}^{op}$,

ч. в. множина $K_{7,20}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.14}$,

ч. в. множина $K_{7,21}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.28}$,

ч. в. множина $K_{7,22}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.27}$,

ч. в. множина $K_{7,23}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.15}$,

ч. в. множина $K_{7,24}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{7.13}$,

ч. в. множина $K_{7,25}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.18}$,

ч. в. множина $K_{7,26}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.21}$,

ч. в. множина $K_{7,27}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.3}$,

ч. в. множина $K_{7,28}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.11}$,

ч. в. множина $K_{7,29}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{7.30}$,

ч. в. множина $K_{7,30}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{7.7}$.

Крок II. Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі пари (X, V) нижніх власних підмножин в множині M_7 такі, що $V \subseteq X$ і $V < S \setminus X$. Ними будуть:

$Y_{7,1} = (X_{7,9}, \{2\})$, $Y_{7,2} = (X_{7,18}, \{2\})$, $Y_{7,3} = (X_{7,19}, \{2\})$, $Y_{7,4} = (X_{7,19}, \{5\})$, $Y_{7,5} = (X_{7,19}, \{2, 5\})$, $Y_{7,6} = (X_{7,20}, \{2\})$, $Y_{7,7} = (X_{7,21}, \{2\})$, $Y_{7,8} = (X_{7,24}, \{2\})$, $Y_{7,9} = (X_{7,24}, \{5\})$, $Y_{7,10} = (X_{7,24}, \{2, 5\})$, $Y_{7,11} = (X_{7,24}, \{2, 5, 6\})$, $Y_{7,12} = (X_{7,25}, \{2\})$, $Y_{7,13} = (X_{7,25}, \{2, 3\})$, $Y_{7,14} = (X_{7,28}, \{2\})$, $Y_{7,15} = (X_{7,28}, \{5\})$, $Y_{7,16} = (X_{7,28}, \{2, 3\})$, $Y_{7,17} = (X_{7,28}, \{2, 5\})$, $Y_{7,18} = (X_{7,28}, \{2, 3, 5\})$, $Y_{7,19} = (X_{7,28}, \{2, 5, 6\})$, $Y_{7,20} = (X_{7,28}, \{2, 3, 5, 6\})$, $Y_{7,21} = (X_{7,28}, \{2, 5, 6, 7\})$, $Y_{7,22} = (X_{7,28}, \{2, 3, 5, 6, 7\})$, $Y_{7,23} = (X_{7,29}, \{2\})$, $Y_{7,24} = (X_{7,29}, \{2, 3\})$.

Позначимо через $K'_{7,j}$ ч. в. множину $(S^{\uparrow}_X)^{\uparrow}_V$ при $S = M_7$ і $(X, V) = Y_{7,j}$. Тоді легко переконатися, що

ч. в. множина $K'_{7,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.5}$,

ч. в. множина $K'_{7,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{7.28}$,

ч. в. множина $K'_{7,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.31}$,

ч. в. множина $K'_{7,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.8}$,

ч. в. множина $K'_{7,5}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{7.2}$,

ч. в. множина $K'_{7,6}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{7.23}$,

ч. в. множина $K'_{7,7}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{7.5}$,

ч. в. множина $K'_{7,8}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{7.25}$,

ч. в. множина $K'_{7,9}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{7.26}$,

ч. в. множина $K'_{7,10}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{7.20}$,

ч. в. множина $K'_{7,11}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.9}$,

ч. в. множина $K'_{7,12}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{7.17}$,

ч. в. множина $K'_{7,13}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{7.6}$,

ч. в. множина $K'_{7,14}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{7.12}$,

ч. в. множина $K'_{7,15}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{7.24}$,

ч. в. множина $K'_{7,16}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{7.22}$,

ч. в. множина $K'_{7,17}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.10}$,

ч. в. множина $K'_{7,18}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.24}$,

ч. в. множина $K'_{7,19}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.20}$,

ч. в. множина $K'_{7,20}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.26}$,

ч. в. множина $K'_{7,21}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.2}$,

ч. в. множина $K'_{7,22}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{7.8}$,

ч. в. множина $K'_{7,23}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{7.29}$,

ч. в. множина $K'_{7,24}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{7.4}$.

Крок III. Легко переконатися у тому, що у I і II кожна з ч. в. множин MD_i і MD_i^{op}, де $i = 7.1 - 7.31$, зустрічається по одному разу (при цьому, якщо $MD_i^{\text{op}} \cong MD_i$, то MD_i зустрічається, а MD_i^{op} — ні).

Теорема доведена. □

4.5.8. Опис майже додатних ч. в. множин класу 8. Представником восьмого класу є множина $M_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 | 2 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$.

Теорема 4.23. *Майже додатні ч.в. множини мінімаксно ізоморфні множині M_8 вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності,* *такими 30 множинами:*

1) $MD_{8.1} = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 5, 7 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

2) $MD_{8.2} = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 2 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

3) $MD_{8.3} = \{1 \prec 2 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 5, 3 \prec 2\}$;

4) $MD_{8.4} = \{1 \prec 2 \prec 8, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 7, 3 \prec 2\}$;

5) $MD_{8.5} = \{3 \prec 1 \prec 2 \prec 7, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 6, 4 \prec 2\}$;

6) $MD_{8.6} = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5, 4 \prec 8, 6 \prec 5, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

7) $MD_{8.7} = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8, 4 \prec 7\}$;

8) $MD_{8.8} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 3, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

9) $MD_{8.9} = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4, 5 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

10) $MD_{8.10} = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 8, 3 \prec 7, 5 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

11) $MD_{8.11} = \{1 \prec 2, 3 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 7, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

12) $MD_{8.12} = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 1 \prec 6, 4 \prec 8 \prec 7\}$;

13) $MD_{8.13} = \{1 \prec 2 \prec 4, 1 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 3, 6 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

14) $MD_{8.14} = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 5, 7 \prec 4, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 5\}$;

15) $MD_{8.15} = \{1, 2 \prec 3, 2 \prec 8, 4 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

16) $MD_{8.16} = \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 7 \prec 4, 7 \prec 8\}$;

17) $MD_{8.17} = \{1, 2 \prec 3 \prec 7, 2 \prec 6, 4 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

18) $MD_{8.18} = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6, 3 \prec 8, 2 \prec 5\}$;

19) $MD_{8.19} = \{1 \prec 3, 4 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 5 \prec 3\}$;

20) $MD_{8.20} = \{1 \prec 3, 6 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 7 \prec 3\}$;

21) $MD_{8.21} = \{1 \prec 2, 1 \prec 3 \prec 8, 4 \prec 2, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

22) $MD_{8.22} = \{1 \prec 2, 1 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 4 \prec 8 \prec 7\}$;

23) $MD_{8.23} = \{1, 4 \prec 2 \prec 3 \prec 8, 2 \prec 7, 5 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

24) $MD_{8.24} = \{1 \prec 2 \prec 4, 1 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 4, 7 \prec 3\}$;

25) $MD_{8.25} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 8 \prec 7\}$;

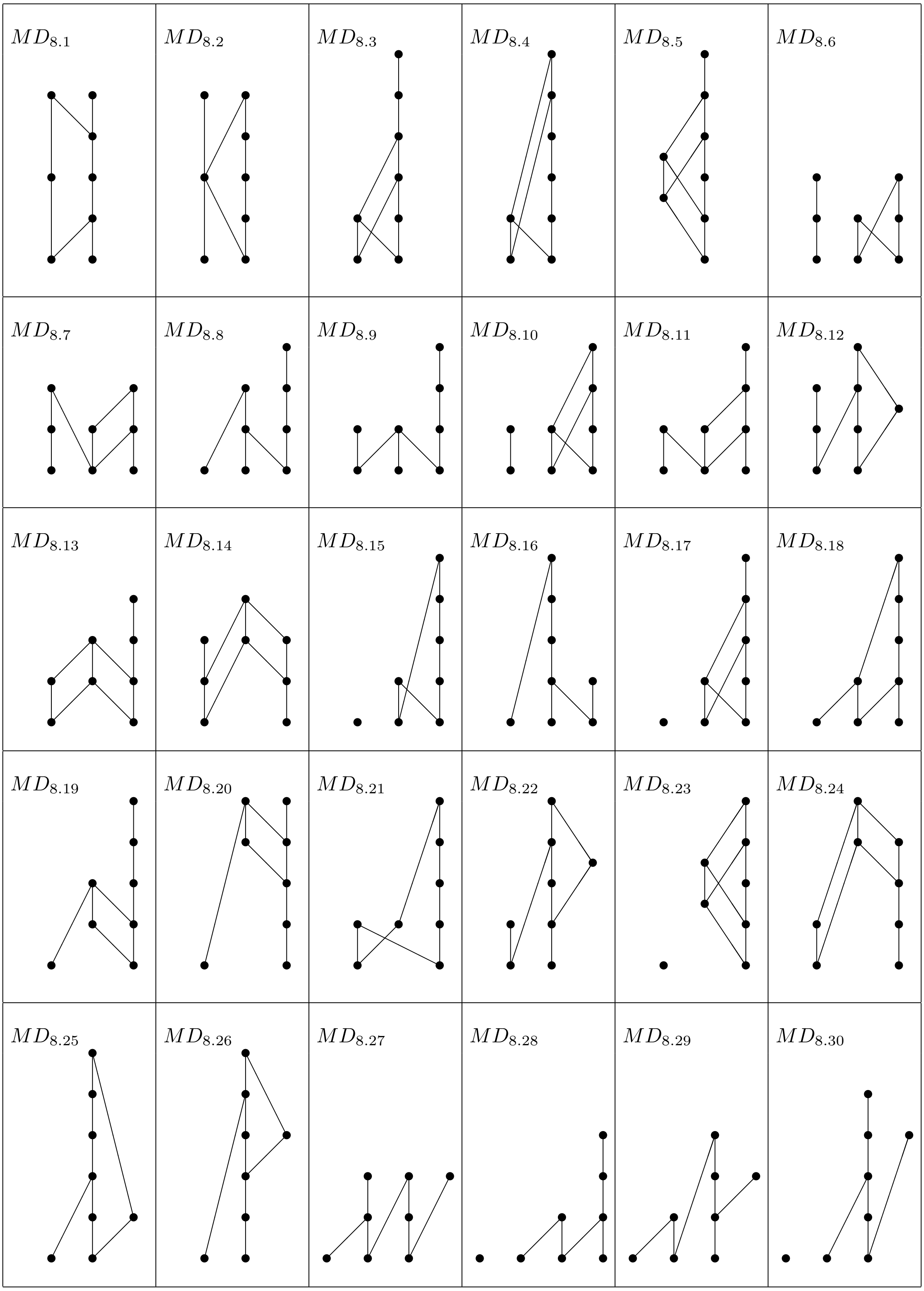
26) $MD_{8.26} = \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 4 \prec 8 \prec 7\}$;

27) $MD_{8.27} = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7, 5 \prec 8\}$;

28) $MD_{8.28} = \{1, 2 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

29) $MD_{8.29} = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 5 \prec 8\}$;

30) $MD_{8.30} = \{1, 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 3 \prec 8\}$.



Доведення. **Крок I.** Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі нижні підмножини в множині M_8. Ними будуть:

$X_{8,0} = \varnothing$, $X_{8,1} = \{1\}$, $X_{8,2} = \{2\}$, $X_{8,3} = \{3\}$, $X_{8,4} = \{5\}$, $X_{8,5} = \{1,2\}$, $X_{8,6} = \{1,3\}$, $X_{8,7} = \{1,5\}$, $X_{8,8} = \{2,3\}$, $X_{8,9} = \{2,5\}$, $X_{8,10} = \{3.5\}$, $X_{8,11} = \{1,2,3\}$, $X_{8,12} = \{1,2,5\}$, $X_{8,13} = \{1,3,5\}$, $X_{8,14} = \{2,3,4\}$, $X_{8,15} = \{2,3,5\}$, $X_{8,16} = \{3,5,6\}$, $X_{8,17} = \{1,2,3,4\}$, $X_{8,18} = \{1,2,3,5\}$, $X_{8,19} = \{1,3,5,6\}$, $X_{8,20} = \{2,3,4,5\}$, $X_{8,21} = \{2,3,5,6\}$, $X_{8,22} = \{3,5,6,7\}$, $X_{8,23} = \{1,2,3,4,5\}$, $X_{8,24} = \{1,2,3,5,6\}$, $X_{8,25} = \{1,3,5,6,7\}$, $X_{8,26} = \{2,3,4,5,6\}$, $X_{8,27} = \{2,3,5,6,7\}$, $X_{8,28} = \{3,5,6,7,8\}$, $X_{8,29} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $X_{8,30} = \{1,2,3,5,6,7\}$, $X_{8,31} = \{1,3,5,6,7,8\}$, $X_{8,32} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $X_{8,33} = \{2,3,5,6,7,8\}$, $X_{8,34} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $X_{8,35} = \{1,2,3,5,6,7,8\}$, $X_{8,36} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$.

Позначимо через $K_{8,j}$ ч. в. множини $S_X^{\uparrow}$ при $S = M_8$ і $X = X_{8,j}$. Тоді легко переконатись у тому, що:

ч. в. множина $K_{8,0}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.28}$,

ч. в. множина $K_{8,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.18}$,

ч. в. множина $K_{8,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.16}$,

ч. в. множина $K_{8,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.9}$,

ч. в. множина $K_{8,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.8}$,

ч. в. множина $K_{8,5}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.1}$,

ч. в. множина $K_{8,6}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.21}$,

ч. в. множина $K_{8,7}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.2}$,

ч. в. множина $K_{8,8}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.15}$,

ч. в. множина $K_{8,9}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.21}^{op}$,

ч. в. множина $K_{8,10}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.6}$,

ч. в. множина $K_{8,11}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.16}^{op}$,

ч. в. множина $K_{8,12}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.18}^{op}$,

ч. в. множина $K_{8,13}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.8}^{op}$,

ч. в. множина $K_{8,14}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.4}$,

ч. в. множина $K_{8,15}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{8.9}$,

ч. в. множина $K_{8,16}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.10}$,

ч. в. множина $K_{8,17}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{8.25}$,

ч. в. множина $K_{8,18}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{8.28}$,

ч. в. множина $K_{8,19}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{8.12}$,

ч. в. множина $K_{8,20}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{8.19}$,

ч. в. множина $K_{8,21}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.7}$,

ч. в. множина $K_{8,22}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.17}$,

ч. в. множина $K_{8,23}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{8.30}$,

ч. в. множина $K_{8,24}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{8.27}$,

ч. в. множина $K_{8,25}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{8.22}$,

ч. в. множина $K_{8,26}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{8.13}$,

ч. в. множина $K_{8,27}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.11}$,

ч. в. множина $K_{8,28}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.3}$,

ч. в. множина $K_{8,29}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.29}$,

ч. в. множина $K_{8,30}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{8.29}$,

ч. в. множина $K_{8,31}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{8.26}$,

ч. в. множина $K_{8,32}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{8.14}$,

ч. в. множина $K_{8,33}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{8.20}$,

ч. в. множина $K_{8,34}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.27}$,

ч. в. множина $K_{8,35}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.30}$,

ч. в. множина $K_{8,36}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{8.24}$.

Крок II. Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі пари (X, V) нижніх власних підмножин в множині M_8 такі, що $V \subseteq X$ і $V < S \setminus X$. Ними будуть:

$Y_{8,1} = (X_{8,18}, \{3\})$, $Y_{8,2} = (X_{8,23}, \{3\})$, $Y_{8,3} = (X_{8,23}, \{5\})$, $Y_{8,4} = (X_{8,23}, \{3, 5\})$, $Y_{8,5} = (X_{8,24}, \{3\})$, $Y_{8,6} = (X_{8,29}, \{3\})$, $Y_{8,7} = (X_{8,29}, \{5\})$, $Y_{8,8} = (X_{8,29}, \{3, 5\})$, $Y_{8,9} = (X_{8,29}, \{3, 5, 6\})$, $Y_{8,10} = (X_{8,30}, \{3\})$, $Y_{8,11} = (X_{8,34}, \{3\})$, $Y_{8,12} = (X_{8,34}, \{5\})$, $Y_{8,13} = (X_{8,34}, \{3, 5\})$, $Y_{8,14} =$

$(X_{8,34}, \{3,5,6\})$, $Y_{8,15} = (X_{8,34}, \{3,5,6,7\})$, $Y_{8,16} = (X_{8,35}, \{2\})$, $Y_{8,17} = (X_{8,35}, \{3\})$, $Y_{8,18} = (X_{8,35}, \{2,3\})$.

Позначимо через $K'_{8,j}$ ч. в. множину $(S_X^{\uparrow})_V^{\uparrow}$ при $S = M_8$ і $(X, V) = Y_{8,j}$. Тоді легко переконатися, що

ч. в. множина $K'_{8,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.24}$,

ч. в. множина $K'_{8,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.20}$,

ч. в. множина $K'_{8,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.26}$,

ч. в. множина $K'_{8,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.3}^{op}$,

ч. в. множина $K'_{8,5}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.14}$,

ч. в. множина $K'_{8,6}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.11}^{op}$,

ч. в. множина $K'_{8,7}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.22}$,

ч. в. множина $K'_{8,8}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.17}^{op}$,

ч. в. множина $K'_{8,9}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.5}^{op}$,

ч. в. множина $K'_{8,10}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.13}$,

ч. в. множина $K'_{8,11}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.7}^{op}$,

ч. в. множина $K'_{8,12}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.12}$,

ч. в. множина $K'_{8,13}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.10}^{op}$,

ч. в. множина $K'_{8,14}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.23}$,

ч. в. множина $K'_{8,15}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.5}$,

ч. в. множина $K'_{8,16}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.25}$,

ч. в. множина $K'_{8,17}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.19}$,

ч. в. множина $K'_{8,18}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{8.4}^{op}$.

Крок III. Легко переконатися у тому, що у I і II кожна з ч. в. множин MD_i і MD_i^{op}, де $i = 8.1 - 8.30$, зустрічається по одному разу (при цьому, якщо $MD_i^{\mathrm{op}} \cong MD_i$, то MD_i зустрічається, а MD_i^{op} — ні).

Теорема доведена. □

4.5.9. Опис майже додатних ч. в. множин класу 9. Представником дев'ятого класу є множина $M_9 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 | 2 \prec$

$5, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 4 \prec 7\}$.

Теорема 4.24. *Майже додатні ч.в. множини мінімаксно ізоморфні множині M_9 вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 31 множинами:*

1) $MD_{9.1} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 7, 4 \prec 3\}$;

2) $MD_{9.2} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 6, 4 \prec 2\}$;

3) $MD_{9.3} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 3 \prec 7, 5 \prec 2\}$;

4) $MD_{9.4} = \{4 \prec 1 \prec 2 \prec 3 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 5 \prec 2 \prec 7\}$;

5) $MD_{9.5} = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 7 \prec 5, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

6) $MD_{9.6} = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 5, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

7) $MD_{9.7} = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8, 4 \prec 7\}$;

8) $MD_{9.8} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 7 \prec 4\}$;

9) $MD_{9.9} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 8, 5 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

10) $MD_{9.10} = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 1 \prec 4, 7 \prec 6, 7 \prec 8\}$;

11) $MD_{9.11} = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 5 \prec 3 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

12) $MD_{9.12} = \{1 \prec 3, 5 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 6 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

13) $MD_{9.13} = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 8, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

14) $MD_{9.14} = \{1 \prec 2, 3 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

15) $MD_{9.15} = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 4 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 5 \prec 3\}$;

16) $MD_{9.16} = \{1 \prec 2, 1 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 4 \prec 7\}$;

17) $MD_{9.17} = \{1 \prec 2 \prec 5, 1 \prec 4 \prec 8, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

18) $MD_{9.18} = \{1 \prec 2 \prec 5, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 3 \prec 7 \prec 6, 7 \prec 8\}$;

19) $MD_{9.19} = \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 2 \prec 7 \prec 4, 7 \prec 8\}$;

20) $MD_{9.20} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 2 \prec 7 \prec 6, 7 \prec 8\}$;

21) $MD_{9.21} = \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 3 \prec 7 \prec 5, 7 \prec 8\}$;

22) $MD_{9.22} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 3 \prec 6\}$;

23) $MD_{9.23} = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 7, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

24) $MD_{9.24} = \{1 \prec 2 \prec 5, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 8, 2 \prec 7 \prec 8\}$;

25) $MD_{9.25} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 8, 2 \prec 5, 4 \prec 7 \prec 8\}$;

26) $MD_{9.26} = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 5, 4 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

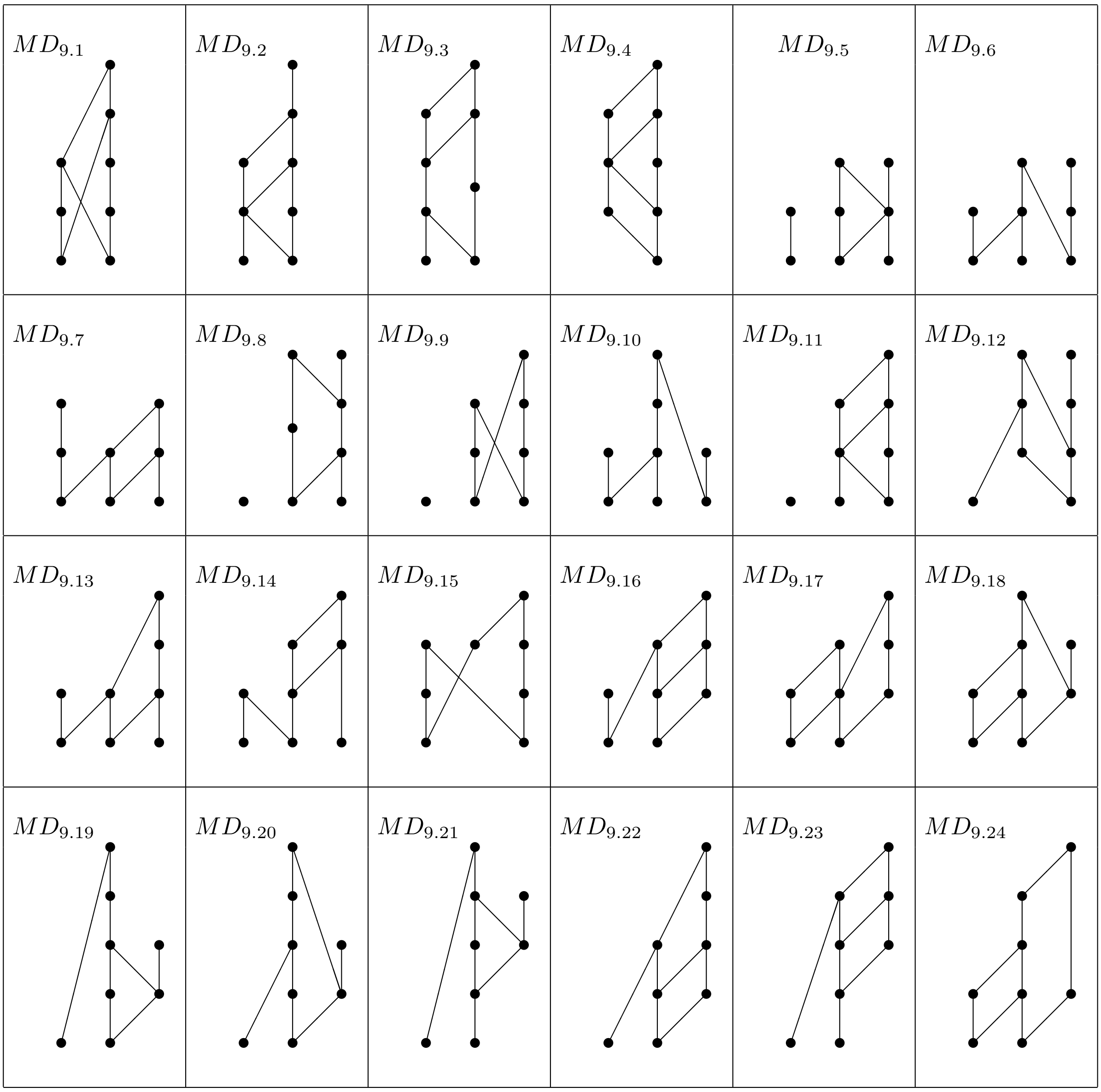
27) $MD_{9.27} = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6, 4 \prec 7 \prec 8, 5 \prec 8\}$;

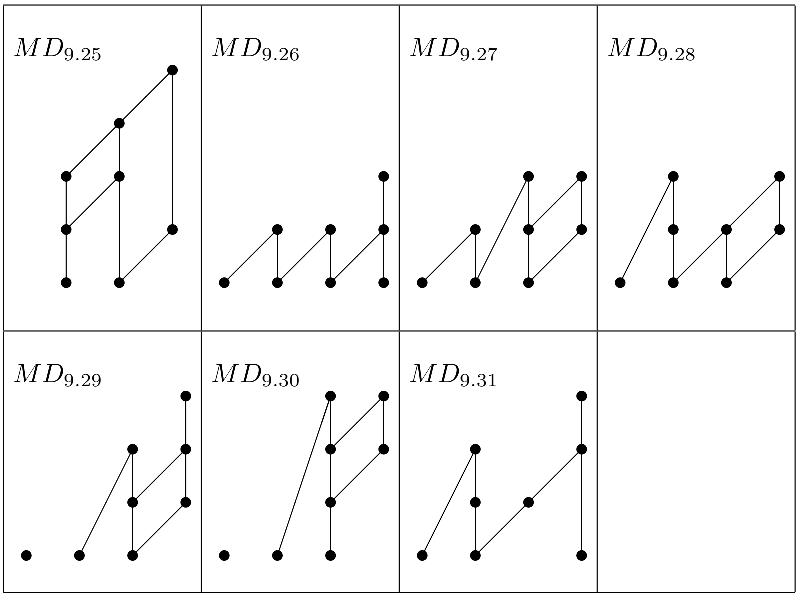
28) $MD_{9.28} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 8, 5 \prec 7 \prec 8\}$;

29) $MD_{9.29} = \{1, 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 4 \prec 7\}$;

30) $MD_{9.30} = \{1, 2 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 4 \prec 7 \prec 8, 5 \prec 8\}$;

31) $MD_{9.31} = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 5 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$.





Доведення. **Крок I.** Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі нижні підмножини в множині M_9. Ними будуть:

$X_{9,0} = \varnothing$, $X_{9,1} = \{1\}$, $X_{9,2} = \{2\}$, $X_{9,3} = \{3\}$, $X_{9,4} = \{1,2\}$, $X_{9,5} = \{1,3\}$, $X_{9,6} = \{2,3\}$, $X_{9,7} = \{3,4\}$, $X_{9,8} = \{3,6\}$, $X_{9,9} = \{1,2,3\}$, $X_{9,10} = \{1,3,4\}$, $X_{9,11} = \{1,3,6\}$, $X_{9,12} = \{2,3,4\}$, $X_{9,13} = \{2,3,6\}$, $X_{9,14} = \{3,4,6\}$, $X_{9,15} = \{1,2,3,4\}$, $X_{9,16} = \{1,2,3,6\}$, $X_{9,17} = \{1,3,4,6\}$, $X_{9,18} = \{2,3,4,5\}$, $X_{9,19} = \{2,3,4,6\}$, $X_{9,20} = \{3,4,6,7\}$, $X_{9,21} = \{1,2,3,4,5\}$, $X_{9,22} = \{1,2,3,4,6\}$, $X_{9,23} = \{1,3,4,6,7\}$, $X_{9,24} = \{2,3,4,5,6\}$, $X_{9,25} = \{2,3,4,6,7\}$, $X_{9,26} = \{3,4,6,7,8\}$, $X_{9,27} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $X_{9,28} = \{1,2,3,4,6,7\}$, $X_{9,29} = \{1,3,4,6,7,8\}$, $X_{9,30} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $X_{9,31} = \{2,3,4,6,7,8\}$, $X_{9,32} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $X_{9,33} = \{1,2,3,4,6,7,8\}$, $X_{9,34} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$.

Позначимо через $K_{9,j}$ ч. в. множини $S_X^{\uparrow}$ при $S = M_9$ і $X = X_{9,j}$. Тоді легко переконатись у тому, що:

ч. в. множина $K_{9,0}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.29}$,

ч. в. множина $K_{9,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.22}$,

ч. в. множина $K_{9,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.19}$,

ч. в. множина $K_{9,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.26}$,

ч. в. множина $K_{9,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.3}^{op}$,

ч. в. множина $K_{9,5}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.13}$,

ч. в. множина $K_{9,6}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.10}$,

ч. в. множина $K_{9,7}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.6}$,

ч. в. множина $K_{9,8}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.7}$,

ч. в. множина $K_{9,9}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.8}$,

ч. в. множина $K_{9,10}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.15}$,

ч. в. множина $K_{9,11}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.17}$,

ч. в. множина $K_{9,12}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.9}$,

ч. в. множина $K_{9,13}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.15}$,

ч. в. множина $K_{9,14}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.5}$,

ч. в. множина $K_{9,15}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.10}$,

ч. в. множина $K_{9,16}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.13}$,

ч. в. множина $K_{9,17}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.7}$,

ч. в. множина $K_{9,18}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.1}$,

ч. в. множина $K_{9,19}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.6}$,

ч. в. множина $K_{9,20}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.11}$,

ч. в. множина $K_{9,21}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.20}$,

ч. в. множина $K_{9,22}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.26}$,

ч. в. множина $K_{9,23}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.16}$,

ч. в. множина $K_{9,24}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.12}$,

ч. в. множина $K_{9,25}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.14}$,

ч. в. множина $K_{9,26}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.2}$,

ч. в. множина $K_{9,27}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.31}$,

ч. в. множина $K_{9,28}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.27}$,

ч. в. множина $K_{9,29}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.23}$,

ч. в. множина $K_{9,30}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.18}$,

ч. в. множина $K_{9,31}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.21}$,

ч. в. множина $K_{9,32}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.28}$,

ч. в. множина $K_{9,33}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.30}$,

ч. в. множина $K_{9,34}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.25}$.

Крок II. Опишемо (з точністю до сильного ізоморфізму) всі пари (X, V) нижніх власних підмножин в множині M_9 такі, що $V \subseteq X$ і $V < S \setminus X$. Ними будуть:

$Y_{9,1} = (X_{9,9}, \{3\})$, $Y_{9,2} = (X_{9,15}, \{3\})$, $Y_{9,3} = (X_{9,16}, \{3\})$, $Y_{9,4} = (X_{9,21}, \{3\})$, $Y_{9,5} = (X_{9,22}, \{3\})$, $Y_{9,6} = (X_{9,22}, \{3,4\})$, $Y_{9,7} = (X_{9,27}, \{3\})$, $Y_{9,8} = (X_{9,27}, \{3,4\})$, $Y_{9,9} = (X_{9,27}, \{3,6\})$, $Y_{9,10} = (X_{9,27}, \{3,4,6\})$, $Y_{9,11} = (X_{9,28}, \{3\})$, $Y_{9,12} = (X_{9,28}, \{3,4\})$, $Y_{9,13} = (X_{9,32}, \{3\})$, $Y_{9,14} = (X_{9,32}, \{3,4\})$, $Y_{9,15} = (X_{9,32}, \{3,6\})$, $Y_{9,16} = (X_{9,32}, \{3,4,6\})$, $Y_{9,17} = (X_{9,32}, \{3,4,6,7\})$, $Y_{9,18} = (X_{9,33}, \{2\})$, $Y_{9,19} = (X_{9,33}, \{3\})$, $Y_{9,20} = (X_{9,33}, \{2,3\})$, $Y_{9,21} = (X_{9,33}, \{3,4\})$, $Y_{9,22} = (X_{9,33}, \{2,3,4\})$.

Позначимо через $K'_{9,j}$ ч. в. множину $(S^{\uparrow}_{X})^{\uparrow}_{V}$ при $S = M_9$ і $(X, V) = Y_{9,j}$. Тоді легко переконатися, що

ч. в. множина $K'_{9,1}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.3}$,

ч. в. множина $K'_{9,2}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.19}$,

ч. в. множина $K'_{9,3}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.22}$,

ч. в. множина $K'_{9,4}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.21}$,

ч. в. множина $K'_{9,5}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.29}$,

ч. в. множина $K'_{9,6}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.25}$,

ч. в. множина $K'_{9,7}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.30}$,

ч. в. множина $K'_{9,8}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.21}$,

ч. в. множина $K'_{9,9}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.23}$,

ч. в. множина $K'_{9,10}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.2}$,

ч. в. множина $K'_{9,11}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.28}$,

ч. в. множина $K'_{9,12}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.18}$,

ч. в. множина $K'_{9,13}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.27}$,

ч. в. множина $K'_{9,14}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.14}$,

ч. в. множина $K'_{9,15}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.16}$,

ч. в. множина $K'_{9,16}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.11}$,

ч. в. множина $K'_{9,17}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.4}$,

ч. в. множина $K'_{9,18}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.21}$,

ч. в. множина $K'_{9,19}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.31}$,

ч. в. множина $K'_{9,20}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.20}$,

ч. в. множина $K'_{9,21}$ ізоморфна ч. в. множині $MD_{9.12}$,

ч. в. множина $K'_{9,22}$ ізоморфна ч. в. множині $MD^{op}_{9.1}$.

Крок III. Легко переконатися у тому, що у I і II кожна з ч. в. множин MD_i і MD_i^{op}, де $i = 9.1 - 9.31$, зустрічається по одному разу (при цьому, якщо $MD_i^{\mathrm{op}} \cong MD_i$, то MD_i зустрічається, а MD_i^{op} — ні).

Теорема доведена. $\square$

4.6. Властивості особливого класу $C(M_5)$

Отже, для будь-якої ч.в. множини M_i клас $C(M_i)$ усіх, з точністю до ізоморфізму та дуальності, множин мінімаксно еквівалентних M_i визначений. Таким чином, ми отримаємо повну класифікацію всіх строго майже додатних множин.

З класифікації випливає, що ч.в. множина M_5 є, з точністю до ізоморфізму та дуальності, єдиною ч.в. множиною з $\mathcal{M}$, мінімаксно еквівалентною ч.в. множині вигляду $a \coprod X$, де X серійна додатна (хоча ми маємо наслідок 4.12). Мабуть, цей факт і визначає відмінності між класом $C(M_5)$ та іншими класами в різних ситуаціях.

Позначимо $C_0(M_i)$ клас усіх множин, мінімаксно ізоморфних M_i. З тверджень 4.16–4.19, 4.21–4.24 випливає, що для $i \neq 5$ виконується рівність $C_0(M_i) = C(M_i)$ (тобто клас $C_0(M_i)$ є самодуальним у тому сенсі, що разом із ч.в. множиною X завжди містить дуальну ч.в. множину X^{op}). Для $i = 5$, ситуація інша: M_5 і M_5^{op} не є мінімаксно ізоморфними. Отже, система $M = \{M_1, \cdots, M_9\}$ (яка є d-системою $\mathcal{M}$ за теоремою 4.13) не є звичайною. Для отримання такої системи необхідно додатково взяти M_5^{op};

тоді $C_0(M_5) \cup C_0(M_5^{op}) = C(M_5)$.

Розглянемо два приклади щодо різних властивостей множин. Підкреслимо, що у випадку, коли розглядається класифікація (зокрема) з точністю до дуальності властивість має бути симетричною (замкнутою щодо дуальності).

Для ч.в. множини X назвемо клас $C(X)$ *нормальним*, якщо $C(X) = C_0(X)$, і *особливим*, якщо інакше. Елемент ч.в. множини називається *крайнім*, якщо він мінімальний або максимальний. Елемент ч.в. множини називається *вузловим*, якщо він порівняльний з усіма елементами, і *майже вузловим*, якщо він непорівняльний лише з одним елементом.

Теорема 4.25. *Будь-який нормальний клас $C(M_i)$ містить лише одну множину F_i ширини 2 з майже вузловим крайнім елементом і максимальними для цього класу вузловими елементами. Особливий клас містить дві такі ч.в. множини. Але у другому випадку є тільки одна ч. в. множина F_0 з єдиним вузловим і максимальним для цього класу майже вузловим елементом.*

Зауважимо, що "одна або дві множини"означає з точністю до дуальності. Дійсно, з таблиць випливає, що $F_1 \cong MD1.2$, $F_2 \cong MD2.5$, $F_3 \cong MD3.2$, $F_4 \cong MD4.2$, $F_6 \cong MD6.7$, $F_7 \cong MD7.2$, $F_8 \cong MD8.3$, $F_9 \cong MD9.2$, $F_{51} \cong MD5.6$, $F_{52} \cong MD5.10$, $F_0 \cong MD5.13$.

Нагадаємо, що $\tilde{A}_n$ (цикли) і $\tilde{D}_n$ є єдиними серійними розширеними діаграмами Динкіна.

Теорема 4.26. *Будь-який нормальний клас $C(M_i)$ містить лише одну ч.в. множину G_i, діаграма Хассе якої – цикл $\tilde{A}_n$. Для особливого класу таких ч.в. множин немає. Але в цьому випадку клас містить тільки одну ч.в. множину G_0 з діаграмою Хассе $\tilde{D}_n$.*

З таблиць випливає, що $G_1 \cong MD1.8$, $G_2 \cong MD2.13$, $G_3 \cong MD3.17$, $G_4 \cong MD4.7$, $G_6 \cong MD6.20$, $G_7 \cong MD7.14$, $G_8 \cong MD8.21$, $G_9 \cong$

$MD9.15$, $G_0 \cong MD5.28$.

Зрозуміло, що у випадках, коли мова не йде про канонічних представників класів, відмінностей може і не бути між двома типами класів. Як приклад наведемо таке легко перевірене твердження.

Теорема 4.27. *Будь-який клас $C(M_i)$ містить ч.в. множину із діаграмою Хассе, яка є несерійною діаграмою Динкіна.*

4.7. Висновки до розділу

У цьому розділі вивчається клас невід'ємних ч.в. множин, які названі нами майже додатними.

Невід'ємна множина S називається майже додатною, якщо $S \setminus x$ додатна для деякого $x \in S$. Очевидно, додатні та P-критичні ч.в. множини майже додатні. Будь-яка майже додатна множина, яка не є додатною, називається строго майже додатною, а якщо додатково не є і P-критичною, – то суттєвою майже додатною. Останні збігаються з головними, які за означенням Д. Сімсона складаються із невід'ємних ч.в. множин, квадратична форма Тітса яких має одновимірне цілочислове ядро. Еквівалентність цих двох понять є предметом обговорення в одному з підрозділів. Підкреслимо, що комбінаторика ч.в. множин набагато простіша, ніж комбінаторика квадратичних форм з їхніми ядрами (яка дозволяє використання, як правило, лише комп'ютерних програм).

У цьому розділі доведена гіпотеза Сімсона про неможливість цілочислової еквівалентності між квадратичними формами Тітса основних ч.в. множин та циклічними розширеними діаграмами Динкіна. Описано серійні та несерійні строго майже додатні ч.в. множини. Число несерійних без P-критичних (з точністю до ізоморфізму і дуальності) дорівнює 247. Останній результат завершує опис всіх майже додатних ч.в. множин як аналогів звичайних і розширених діаграм Динкіна.

Розділ 5

НАДСУПЕРКРИТИЧНІ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ

5.1. Основна ідея

За означенням P-критичні ч. в. множини – це найменші (відносно вкладення) недодатні ч. в. множини (які є невід'ємними), яким відповідають критичні множини Клейнера в тому сенсі, що будь-яка P-критична ч. в. множина мінімаксно ізоморфна одній (і лише одній) із множин Клейнера. В термінах мінімаксних систем твірних це означає, що критичні множини Клейнера (по одному із кожного класу ізоморфізму) утворюють мінімаксну систему твірних для множини всіх P-критичних ч. в. множин (до того ж, ця система твірних є мінімальною). Аналогічно, NP-критичні ч. в. множини — це найменші множини, що не є невід'ємними, і їм відповідають суперкритичні множини. Виникає запитання — а чи не можна продовжити цей ряд, враховуючи, що квадратичні форми, що не є невід'ємними, не мають природної градації?

У цьому розділі пропонується позитивне вирішення цієї проблеми. А саме, після критичних і суперкритичних множин розглядаються так звані 1-надсуперкритичні множини (які відрізняються від суперкритичних в такій мірі, як суперкритичні відрізняються від критичних); при цьому кожна суперкритична ч. в. множина є підмножиною деякої надсуперкритичної ч. в. множини (відмітимо, що і кожна критична множина належить деякій суперкритичній множині). Потім описуються всі ч. в. множини, які мінімаксно ізоморфні надсуперкритичним. Цей процес можна продовжити до нескінченності, якщо індуктивно ввести поняття s-надсуперкритичних множин для довільного натурального числа s. В цьому розділі детально розглядаємо випадок 1-надсуперкритичних ч. в. множин, які будемо називати просто надсуперкритичними.

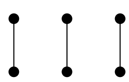
5.2. Означення надсуперкритичних ч. в. множин

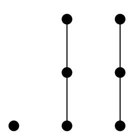
Нагадаємо деякі означення, які вже зустрічалися у попередніх розділах. Нехай P — фіксована ч. в. множина. Говоритимемо, що ч. в. множина X має вигляд P, якщо вона ізоморфна P, і що X містить P (як ч. в. підмножина), якщо в X існує підмножина, ізоморфна P.

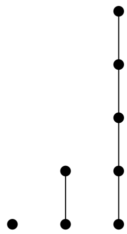
Прямою сумою $X \sqcup Y$ ч. в. множин X і Y називається ч. в. множина $X \cup Y$, де елементи обох ч. в. множин попарно непорівняльні. Через (s) позначаємо ланцюг довжини $1 < 2 < \dots s$. Пряма сума $(i_1) \sqcup (i_2) \sqcup \dots \sqcup (i_p)$ ланцюгів $(i_1), (i_2), \dots, (i_p)$ позначається $(i, i_2, \dots, i_p)$. Ч. в. множини такого виду називаються *примітивними*. Пряму суму ланцюга (i) і ч. в. множини X будемо позначати через (i, X).

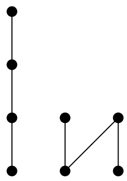
Як вже говорилося раніше, критичними ч. в. множинами називаються наступні ч. в. множини (та ізоморфні до них), які випишемо разом з їхніми діаграмами Хассе:

$$K_1 = (1, 1, 1, 1) = \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$$

$K_2 = (2, 2, 2) =$ 

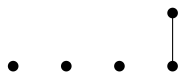
$K_3 = (1, 3, 3) =$ 

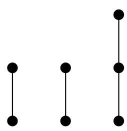
$K_4 = (1, 2, 5) =$ 

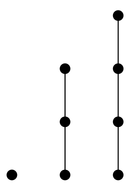
$K_5 = (4, \text{И}) =$ 

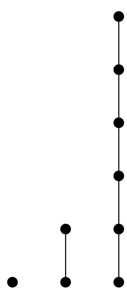
Суперкритичними називаються наступні їх одноелементні розширення:

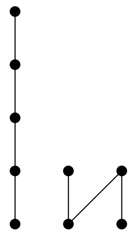
$N_1 = (1, 1, 1, 1, 1) =$

$N_2 = (1, 1, 1, 2) =$ 

$N_3 = (2, 2, 3) =$ 

$N_4 = (1, 3, 4) =$ 

$N_5 = (1, 2, 6) =$ 

$N_6 = (5, \text{И}) =$ 

Тут ч. в. множина з чотирьох елементів та з трьома відношеннями $x < y$, що задаються літерою И. Критичні та суперкритичні ч. в. множини будемо часто називати просто критичними і суперкритичними множинами. Зауважимо, що критичні (відповідно суперкритичні) множини самодуальні, попарно неізоморфні і жодне з них не є підмножиною іншого.

Твердження 5.1. *Візьмемо всі п'ять критичних множин і розглянемо всі їх одноточкові розширення, такі що або нова точка ізольована (тобто непорівняльна з усіма старими точками), або утворює новий ізольований ланцюг разом з точками якогось старого ізольованого ланцюга, а потім виберемо в цьому класі ч. в. множин всі мінімальні ч. в. множини щодо включення (по одному разу). Тоді отримаємо всі суперкритичні множини.*

Доведення. Випишемо (з точністю до ізоморфізму) всі розширення критичних множин, вказаних в умові твердження, таким чином, що якщо декілька максимальних підланцюгів мають однакову довжину, то вибираємо останній:

$N_1 = K_{10} = (1, 1, 1, 1, 1)$ (суперкритична множина) , якщо додати новий ізольований елемент;

$N_2 = K_{11} = (1, 1, 1, 2)$ (суперкритична множина), якщо додати новий елемент до 4-го ланцюга;

$K_{20} = (1, 2, 2, 2)$, якщо додати новий ізольований елемент;

$N_3 = K_{21} = (2, 2, 3)$ (суперкритична множина), якщо додати новий елемент до 3-го ланцюга;

$K_{30} = (1, 1, 3, 3)$, якщо додати новий ізольований елемент;

$K_{31} = (2, 3, 3)$, якщо додати новий елемент до 1-го ланцюга;

$N_4 = K_{32} = (1, 3, 4)$ (суперкритична множина), якщо додати новий елемент до 3-го ланцюга;

$K_{40} = (1, 1, 2, 5)$, якщо додати новий ізольований елемент;

$K_{41} = (2, 2, 5)$, якщо додати новий елемент до 1-го ланцюга;

$K_{42} = (1, 3, 5)$, якщо додати новий елемент до 2-го ланцюга;

$N_5 = K_{43} = (1, 2, 6)$ (суперкритична множина), якщо додати новий елемент до 3-го ланцюга;

$K_{50} = (1, 4, И)$, якщо додати новий ізольований елемент;

$N_6 = K_{51} = (5, И)$ (суперкритична множина), якщо додати новий елемент до єдиного ланцюга.

Із переліченого маємо, що кожна несуперкритична множина (із отриманого списку) строго містить в собі яку-небудь суперкритичну, а саме

$K_{20} = (1, 2, 2, 2)$ містить в собі N_2;

$K_{30} = (1, 1, 3, 3)$ містить в собі N_2;

$K_{31} = (2, 3, 3)$ містить в собі N_3;

$K_{40} = (1, 1, 2, 5)$ містить в собі N_2;

$K_{41} = (2, 2, 5)$ містить в собі N_3;

$K_{42} = (1, 3, 5)$ містить в собі N_4;

$K_{50} = (1, 4, И)$ містить в собі N_2.

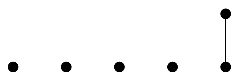
Твердження доведено. □

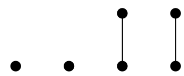
Проробимо знову процедуру, вказану в останньому твердженні із суперкритичними множинами і назвемо отримані в результаті ч. в. множини *надсуперкритичними*.

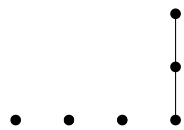
Саме таке означення надсуперкритичних ч. в. множин визначається основною ідеєю першого підрозділу і наступним твердженням.

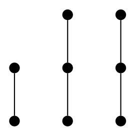
Твердження 5.2. *Надсуперкритичними є (з точністю до ізоморфізму) такі самодуальні ч. в. множини:*

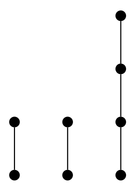
$OS_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1) =$

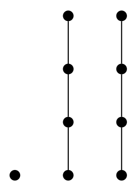
$OS_2 = (1, 1, 1, 1, 2) =$ 

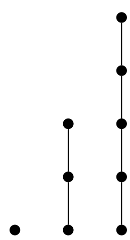
$OS_3 = (1, 1, 2, 2) =$ 

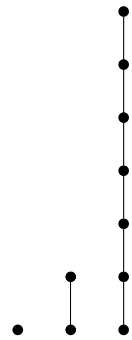
$OS_4 = (1, 1, 1, 3) =$ 

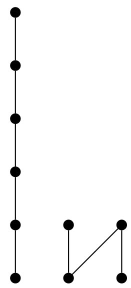
$OS_5 = (2, 3, 3) =$ 

$OS_6 = (2, 2, 4) =$ 

$OS_7 = (1, 4, 4) =$ 

$OS_8 = (1, 3, 5) =$ 

$OS_9 = (1, 2, 7) =$ 

$OS_{10} = (6, \textit{И}) =$ 

Доведення. Випишемо (з точністю до ізоморфізму) всі розширення суперкритичних множин, вказаних в умові твердження, таким чином, що якщо декілька максимальних підланцюгів мають однакову довжину, то вибираємо останній:

$OS_1 = N_{10} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ (надсуперкритична множина) , якщо додати новий ізольований елемент;

$OS_2 = N_{11} = (1, 1, 1, 1, 2)$ (надсуперкритична множина), якщо додати новий елемент до 5-го ланцюга;

$OS_2 = N_{20} = (1, 1, 1, 1, 2)$ (надсуперкритична множина), якщо додати новий ізольований елемент;

$OS_3 = N_{21} = (1, 1, 2, 2)$ (надсуперкритична множина), якщо додати новий елемент до 3-го ланцюга;

$OS_4 = N_{22} = (1, 1, 1, 3)$ (надсуперкритична множина), якщо додати новий елемент до 4-го ланцюга;

$N_{30} = (1, 2, 2, 3)$, якщо додати новий ізольований елемент;

$OS_5 = N_{31} = (2, 3, 3)$ (надсуперкритична множина), якщо додати новий елемент до 2-го ланцюга;

$OS_6 = N_{32} = (2,2,4)$ (надсуперкритична множина), якщо додати новий елемент до 3-го ланцюга;

$N_{40} = (1,1,3,4)$, якщо додати новий ізольований елемент;

$N_{41} = (2,3,4)$, якщо додати новий елемент до 1-го ланцюга;

$OS_7 = N_{42} = (1,4,4)$ (надсуперкритична множина), якщо додати новий елемент до 2-го ланцюга;

$OS_8 = N_{43} = (1,3,5)$ (надсуперкритична множина), якщо додати новий елемент до 3-го ланцюга;

$N_{50} = (1,1,2,6)$, якщо додати новий ізольований елемент;

$N_{51} = (2,2,6)$, якщо додати новий елемент до 1-го ланцюга;

$N_{52} = (1,3,6)$, якщо додати новий елемент до 2-го ланцюга;

$OS_9 = N_{53} = (1,2,7)$ (надсуперкритична множина), якщо додати новий елемент до 3-го ланцюга;

$N_{60} = (1,5,И)$, якщо додати новий ізольований елемент;

$OS_{10} = N_{61} = (6,И)$ (надсуперкритична множина), якщо додати новий елемент до єдиного ланцюга.

Із переліченого маємо, що кожна ненадсуперкритична множина (із отриманого списку) строго містить в собі яку-небудь надсуперкритичну, а саме

$N_{30} = (1,2,2,3)$ містить в собі OS_3;

$N_{40} = (1,1,3,4)$ містить в собі OS_3;

$N_{41} = (2,3,4)$ містить в собі OS_5;

$N_{50} = (1,1,2,6)$ містить в собі OS_3;

$N_{51} = (2,2,6)$ містить в собі OS_6;

$N_{52} = (1,3,6)$ містить в собі OS_8;

$N_{60} = (1,5,И)$ містить в собі OS_4.

Твердження доведено. $\square$

Наслідок 5.3. *Група автоморфізмів надсуперкритичної множини* OS_i *дорівнює:*

симетричній групі степеня 6 у випадку $i = 1$,

симетричній групі степеня 4 у випадку $i = 2$,

прямому добутку двох симетричних груп степеня 2 у випадку $i = 3$,

симетричній групі степеня 3 у випадку $i = 4$,

симетричній групі степеня 2 у випадках $i = 5, 6, 7$

і одиничній групі у випадках $i = 8, 9, 10$.

5.3. Основний результат

Згідно першого підрозділу клас ч. в. множин, який відповідає надсуперкритичним ч. в. множинам в такому ж сенсі, як клас P-критичних ч. в. множин відповідає критичним ч. в. множинам чи клас NP-критичних ч. в. множин відповідає суперкритичним ч. в. множинам, визначається всіма ч. в. множинами, що мінімаксно ізоморфні надсуперкрититчним множинам. Опишемо ч. в. множини цього класу (так же, як P-критичні і NP-критичні ч. в. множини) з точністю до ізоморфізму і дуальності. Вони задаються теоремами 5.4–5.8 або, більш конкретно, таблицями, вказаними в умовах цих теорем. Їх загальне число дорівнює 152. Із вказаних таблиць випливає, що зафіксовані в теоремах надсуперкритичні ч. в. множини (по одному із кожного класу ізоморфізму) не є мінімаксно ізоморфними.

Кажуть, що ч. в. множина S має MM-тип T, де T — деяка фіксована ч. в. множина, якщо S мінімаксно ізоморфна T.

5.3.1. Опис частково впорядкованих множин MM-типу OS_1 – OS_4. У цій частині розділу описуються (в термінах графів Хассе) з точністю до ізоморфізму та дуальності всі частково впорядковані множини, мінімаксно еквівалентні надсуперкритичним множинам найменшого порядку (тобто порядку 6).

З формальних міркувань зробимо таку перенумерацію:

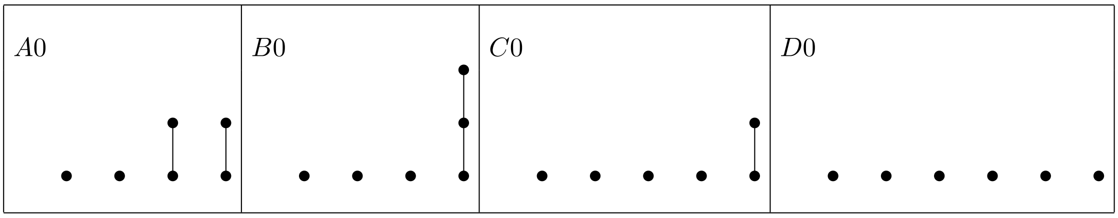
$A0 = OS_3 = \{1, 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6\}$;

$B0 = OS_4 = \{1, 2, 3, 4 \prec 5 \prec 6\}$;

$C0 = OS_2 = \{1, 2, 3, 4, 5 \prec 6\}$;

$D0 = OS_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Тоді маємо



Нагадаємо, що ч. в. множина T називається дуальною до ч. в. множини S (позначається S^{op}), якщо $T = S$ як звичайні множини, $x < y$ в T тоді і лише тоді, коли $x > y$ в S.

Теорема 5.4. *З точністю до ізоморфізму і дуальності повна множина частково впорядкованих множин, мінімаксно ізоморфних* $A0$,$B0$, $C0$, $D0$ *складається, разом з виписаними вище самими множинами* $A0$-$D0$, *із наступних частково впорядкованих множин* (Ai,Bj, Ck, Ds *позначають відповідно множини, мінімаксно ізоморфні множинам* $A0$,$B0$, $C0$, $D0$*):*

$A1 = \{1 \prec 2, 1 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 4 \prec 2\}$;

$A2 = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6, 4 \prec 2\}$;

$A3 = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 4\}$;

$A4 = \{2 \prec 1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 6 \prec 5\}$;

$A5 = \{1 \prec 2 \prec 4, 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 4\}$;

$A6 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6, 5 \prec 3\}$;

$A7 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 6, 5 \prec 6, 5 \prec 3\}$;

$A8 = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 2, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 4, 5 \prec 6\}$;

$A9 = \{1, 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 5\}$;

$A10 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 3, 4 \prec 5, 6 \prec 5\}$;

$B1 = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 3 \prec 2\}$;

$B2 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 3\}$;

$B3 = \{2 \prec 1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 6 \prec 4\}$;

$B4 = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 5\}$;

$B5 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6, 4 \prec 3\}$;

$B6 = \{1 \prec 2 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6, 5 \prec 4\}$;

$B7 = \{1, 2 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 4\}$;

$B8 = \{1, 3 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 6 \prec 5\}$;

$B9 = \{1 \prec 2, 3 \prec 5, 4 \prec 5, 6 \prec 5\}$;

$C1 = \{1 \prec 3, 1 \prec 5, 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6\}$;

$C2 = \{1 \prec 3, 1 \prec 6, 2 \prec 3, 2 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6, 5 \prec 6\}$;

$C3 = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 1 \prec 6, 3 \prec 2, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 4, 5 \prec 6\}$;

$C4 = \{1 \prec 5, 2 \prec 5, 3 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6\}$;

$C5 = \{1 \prec 2 \prec 6, 1 \prec 3 \prec 6, 1 \prec 4 \prec 6, 1 \prec 5 \prec 6\}$;

$C6 = \{1 \prec 6, 2 \prec 6, 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6\}$;

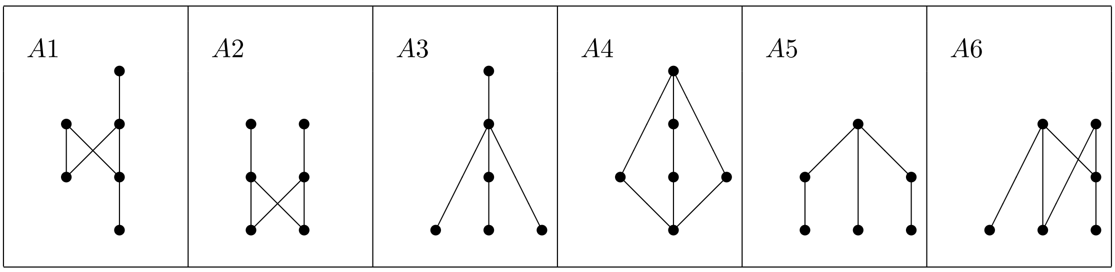
$C7 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 3, 4 \prec 5, 6 \prec 3, 6 \prec 5\}$;

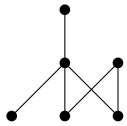
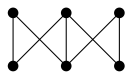
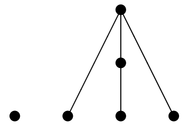
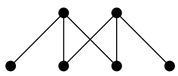
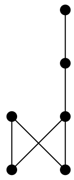
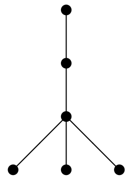
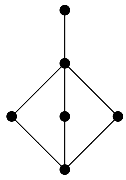
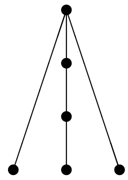
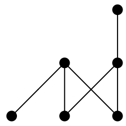
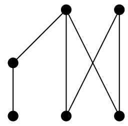
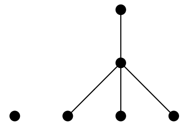
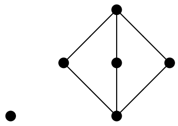
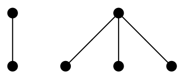
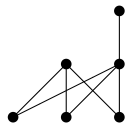
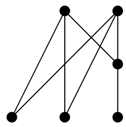
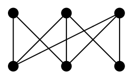
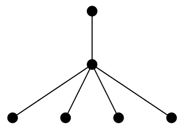
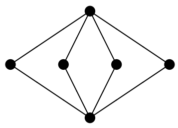
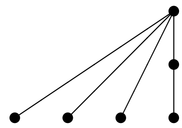
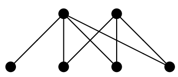
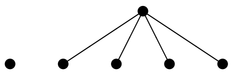
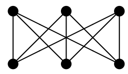
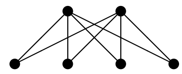
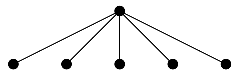
$C8 = \{1, 2 \prec 6, 3 \prec 6, 4 \prec 6, 5 \prec 6\}$;

$D1 = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 1 \prec 6, 3 \prec 2, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 2, 5 \prec 4, 5 \prec 6\}$;

$D2 = \{1 \prec 3, 1 \prec 5, 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 3, 4 \prec 5, 6 \prec 3, 6 \prec 5\}$;

$D3 = \{1 \prec 4, 2 \prec 4, 3 \prec 4, 5 \prec 4, 6 \prec 4\}$.



$A7$ 	$A8$ 	$A9$ 	$A10$ 
$B1$ 	$B2$ 	$B3$ 	$B4$ 
$B5$ 	$B6$ 	$B7$ 	$B8$ 
$B9$ 	$C1$ 	$C2$ 	$C3$ 
$C4$ 	$C5$ 	$C6$ 	$C7$ 
$C8$ 	$D1$ 	$D2$ 	$D3$ 

Доведення. Доведення теореми 5.4 розглянемо згідно алгоритму 2.2.4. побудови всіх частково впорядкованих множин, min-еквівалентних заданій множині.

Крок I. Описати (з точністю до сильного ізоморфізму) усі нижні підмножини. Ось вони:

для $A0$ — $X_0 = \varnothing$, $X_1 = \{1\}$, $X_2 = \{3\}$, $X_3 = \{1,2\}$, $X_4 = \{1,3\}$, $X_5 = \{3,4\}$, $X_6 = \{3,5\}$, $X_7 = \{1,2,3\}$, $X_8 = \{1,3,4\}$, $X_9 = \{1,3,5\}$,

$X_{10} = \{3,4,5\}$, $X_{11} = \{1,2,3,4\}$, $X_{12} = \{1,2,3,5\}$, $X_{13} = \{1,3,4,5\}$, $X_{14} = \{3,4,5,6\}$, $X_{15} = \{1,2,3,4,5\}$, $X_{16} = \{1,3,4,5,6\}$;

для $B0$ — $Y_0 = \varnothing$, $Y_1 = \{1\}$, $Y_2 = \{4\}$, $Y_3 = \{1,2\}$, $Y_4 = \{1,4\}$, $Y_5 = \{4,5\}$, $Y_6 = \{1,2,3\}$, $Y_7 = \{1,2,4\}$, $Y_8 = \{1,4,5\}$, $Y_9 = \{4,5,6\}$, $Y_{10} = \{1,2,3,4\}$, $Y_{11} = \{1,2,4,5\}$, $Y_{12} = \{1,4,5,6\}$, $Y_{13} = \{1,2,3,4,5\}$, $Y_{14} = \{1,2,4,5,6\}$;

для $C0$ — $Z_0 = \varnothing$, $Z_1 = \{1\}$, $Z_2 = \{5\}$, $Z_3 = \{1,2\}$, $Z_4 = \{1,5\}$, $Z_5 = \{5,6\}$, $Z_6 = \{1,2,3\}$, $Z_7 = \{1,2,5\}$, $Z_8 = \{1,5,6\}$, $Z_9 = \{1,2,3,4\}$, $Z_{10} = \{1,2,3,5\}$, $Z_{11} = \{1,2,5,6\}$, $Z_{12} = \{1,2,3,4,5\}$, $Z_{13} = \{1,2,3,5,6\}$;

для $D0$ — $T_0 = \varnothing$, $T_1 = \{1\}$, $T_2 = \{1,2\}$, $T_3 = \{1,2,3\}$, $T_4 = \{1,2,3,4\}$, $T_5 = \{1,2,3,4,5\}$.

Позначимо через $K_{i,j}$ множину $S_V^{\uparrow}$ для $i = 1$, $S = A_0$ і $V = X_j$, для $i = 2$, $S = B_0$ і $V = Y_j$, для $i = 3$, $S = C_0$ і $V = Z_j$, для $i = 4$, $S = D_0$ і $V = T_j$. Тоді легко перевірити, що

$K_{1,0}$ ізоморфна $A0$, $K_{1,1}$ ізоморфна $A5$, $K_{1,2}$ ізоморфна $A9$, $K_{1,3}$ ізоморфна $A2^{\text{ор}}$, $K_{1,4}$ ізоморфна $A6$, $K_{1,5}$ ізоморфна $A3$, $K_{1,6}$ ізоморфна $A10$, $K_{1,7}$ ізоморфна $A7^{\text{ор}}$, $K_{1,8}$ ізоморфна $A1$, $K_{1,9}$ ізоморфна $A8$, $K_{1,10}$ ізоморфна $A7$, $K_{1,11}$ ізоморфна $A10^{\text{ор}}$, $K_{1,12}$ ізоморфна $A3^{\text{ор}}$, $K_{1,13}$ ізоморфна $A6^{\text{ор}}$, $K_{1,14}$ ізоморфна $A2$, $K_{1,15}$ ізоморфна $A9^{\text{ор}}$, $K_{1,16}$ ізоморфна $A5^{\text{ор}}$; $K_{2,0}$ ізоморфна $B0$, $K_{2,1}$ ізоморфна $B4$, $K_{2,2}$ ізоморфна $B9$, $K_{2,3}$ ізоморфна $B1^{\text{ор}}$, $K_{2,4}$ ізоморфна $B6$, $K_{2,5}$ ізоморфна $B7$, $K_{2,6}$ ізоморфна $B2^{\text{ор}}$, $K_{2,7}$ ізоморфна $B5^{\text{ор}}$, $K_{2,8}$ ізоморфна $B5$, $K_{2,9}$ ізоморфна $B2$, $K_{2,10}$ ізоморфна $B7^{\text{ор}}$, $K_{2,11}$ ізоморфна $B6^{\text{ор}}$, $K_{2,12}$ ізоморфна $B1$, $K_{2,13}$ ізоморфна $B9^{\text{ор}}$, $K_{2,14}$ ізоморфна $B4^{\text{ор}}$; $K_{3,0}$ ізоморфна $C0$, $K_{3,1}$ ізоморфна $C6$, $K_{3,2}$ ізоморфна $C8$, $K_{3,3}$ ізоморфна $C2$, $K_{3,4}$ ізоморфна $C7$, $K_{3,5}$ ізоморфна $C4$, $K_{3,6}$ ізоморфна $C1^{\text{ор}}$, $K_{3,7}$ ізоморфна $C3$, $K_{3,8}$ ізоморфна $C1$, $K_{3,9}$ ізоморфна $C4^{\text{ор}}$, $K_{3,10}$ ізоморфна $C7^{\text{ор}}$, $K_{3,11}$ ізоморфна $C2^{\text{ор}}$, $K_{3,12}$ ізоморфна $C8^{\text{ор}}$, $K_{3,13}$ ізоморфна $C6^{\text{ор}}$; $K_{4,0}$ ізоморфна $D0$, $K_{4,1}$ ізоморфна $D3$, $K_{4,2}$ ізоморфна $D2$, $K_{4,3}$ ізоморфна $D1$, $K_{4,4}$ ізоморфна

$D2^{\text{op}}$, $K_{4,5}$ ізоморфна $D3^{\text{op}}$.

Крок II. Описати (з точністю до сильного ізоморфізму) усі пари нижніх підмножин (див. алгоритм 2.2.4.). Ось вони:

для $A0$ — $X_1' = (X_{15}, \{5\})$;

для $B0$ — $Y_1' = (Y_{10}, \{4\})$, $Y_2' = (Y_{13}, \{4\})$, $Y_3' = (Y_{13}, \{4, 5\})$;

для $C0$ — $Z_1' = (Z_{12}, \{5\})$;

для $D0$ таких пар немає.

Позначимо через $K'_{i,j}$ множину $(S_V^{\uparrow})_W^{\uparrow}$, для $i = 1$, $S = A_0$ і $(V, W) = X_j'$, для $i = 2$, $S = B_0$ і $(V, W) = Y_j'$, для $i = 3$ $S = C_0$ і $(V, W) = Z_j'$. Тоді легко перевірити, що

$K'_{1,1}$ ізоморфна $A4$, $K'_{2,1}$ ізоморфна $B3^{\text{op}}$, $K'_{2,2}$ ізоморфна $B8$, $K'_{2,3}$ ізоморфна $B3$, $K'_{3,1}$ ізоморфна $C5$.

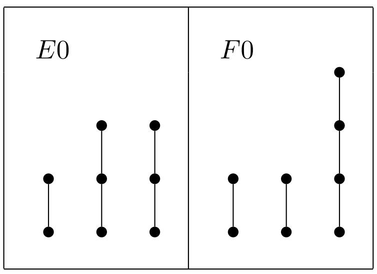
Крок III. Легко побачити, що в I і II кожна з множин Ai, Bl, Ck, Ds, вказаних в умові теореми, та дуальна до них (у недуальних випадках) трапляється лише один раз. А отже, теорема доведена. $\square$

5.3.2. Опис частково впорядкованих множин MM-типу OS_5 – OS_6. Розглядаємо випадок симетричних надсуперкритичних множин OS_i порядку 8, тобто з автоморфізмом порядку 2. Такими є множини $OS_5 = (2, 3, 3)$ і $OS_6 = (2, 2, 4)$.

З формальних міркувань зробимо таку перенумерацію:

$E0 = OS_5 = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$F0 = OS_6 = \{1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$.



Теорема 5.5. *З точністю до ізоморфізму та дуальності, повна множина ч.в. множин MM-типів $E0$, $F0$ відповідно складається з (разом з самими $E0$, $F0$) упорядкованих множин:*

$E1 = \{1 \prec 2 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$E2 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 1 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$E3 = \{1 \prec 2 \prec 3, 2 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$E4 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$E5 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 1 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$E6 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$E7 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$E8 = \{1, 2 \prec 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$E9 = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$E10 = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$E11 = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$E12 = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 3 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$E13 = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$E14 = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 4 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$E15 = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 4 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$E16 = \{1 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 4 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$E17 = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 6 \prec 2\}$;

$E18 = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8, 6 \prec 2\}$;

$F1 = \{1 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$F2 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 1 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$F3 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$F4 = \{1 \prec 2 \prec 7, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$F5 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 8, 1 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$F6 = \{1 \prec 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$F7 = \{1 \prec 2 \prec 3, 2 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;

$F8 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\};$

$F9 = \{1, 2 \prec 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\};$

$F10 = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\};$

$F11 = \{1, 2 \prec 3 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\};$

$F12 = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\};$

$F13 = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8\};$

$F14 = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8\};$

$F15 = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\};$

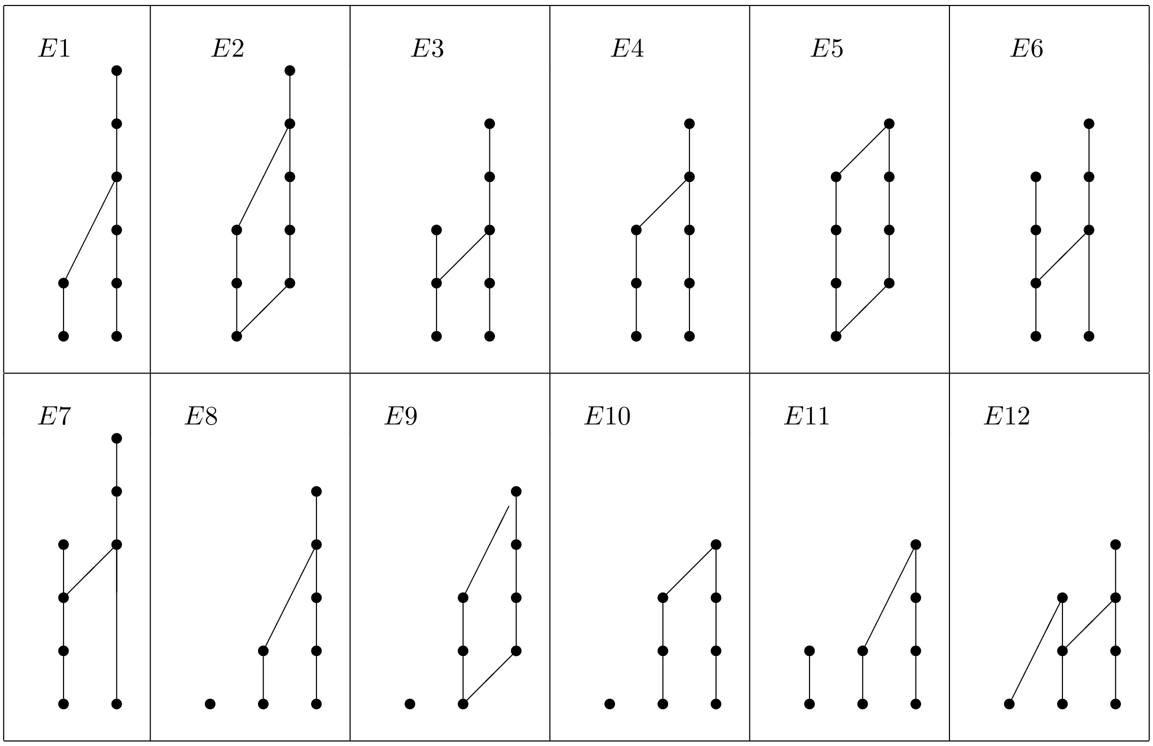
$F16 = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 3 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\};$

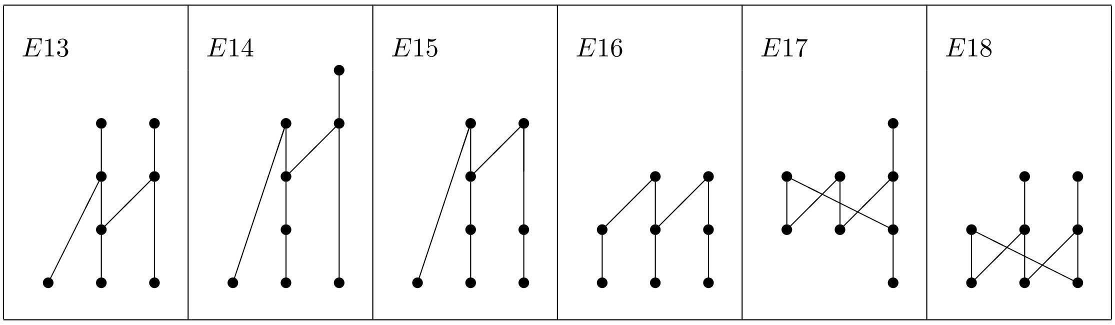
$F17 = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8\};$

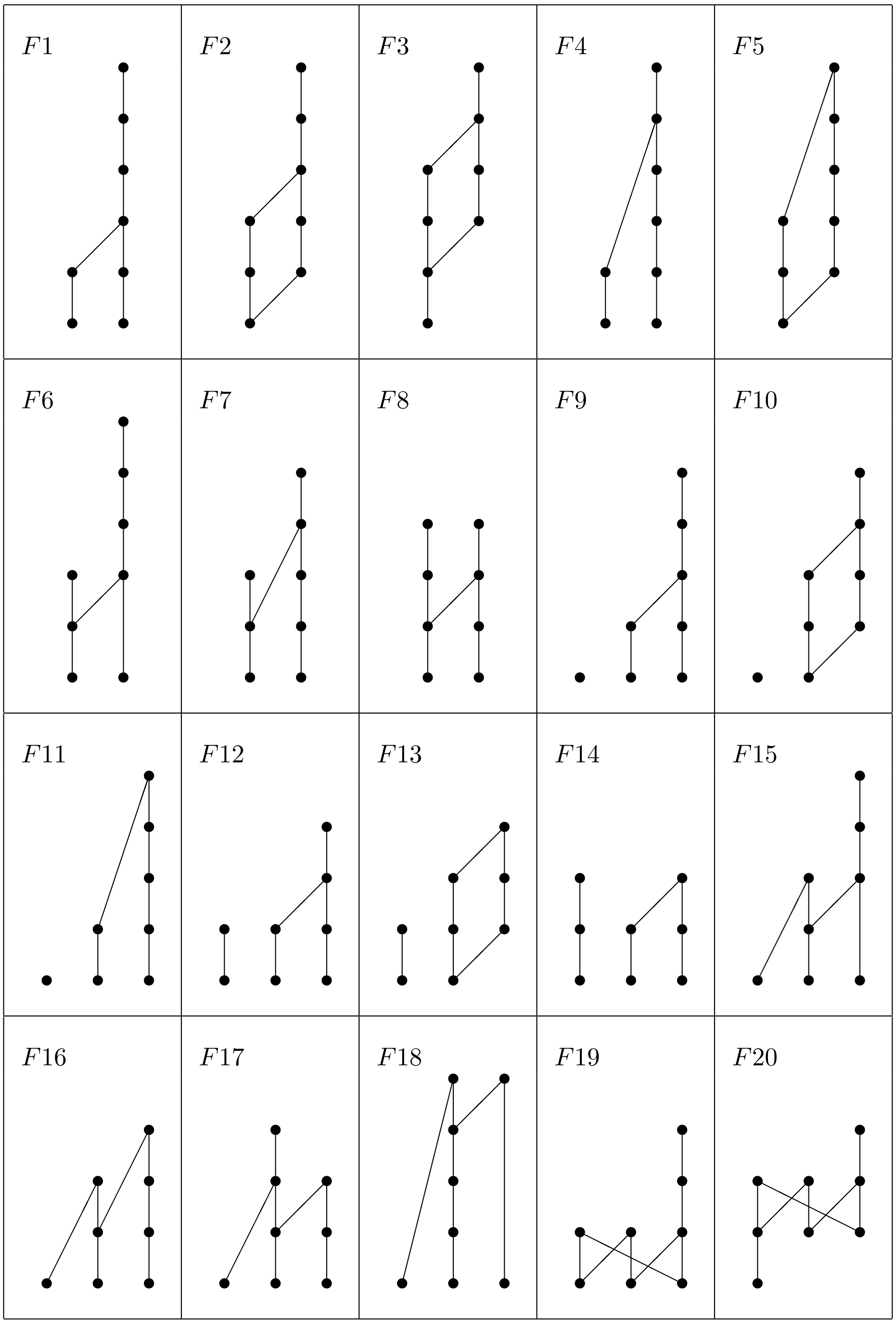
$F18 = \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 5 \prec 8, 7 \prec 8\};$

$F19 = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 5 \prec 2\};$

$F20 = \{1 \prec 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 5, 4 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8, 6 \prec 3\}.$




$E13$
$E14$
$E15$
$E16$
$E17$
$E18$


$F1$
$F2$
$F3$
$F4$
$F5$
$F6$
$F7$
$F8$
$F9$
$F10$
$F11$
$F12$
$F13$
$F14$
$F15$
$F16$
$F17$
$F18$
$F19$
$F20$

Доведення. Застосуємо алгоритм 2.2.4. до множин E_0 і F_0.

Крок I. Описати (з точністю до сильного ізоморфізму) усі нижні підмножини. Ось вони:

для $E0$ — $X_0 = \varnothing$, $X_1 = \{1\}$, $X_2 = \{3\}$, $X_3 = \{1,2\}$, $X_4 = \{1,3\}$, $X_5 = \{3,4\}$, $X_6 = \{3,6\}$, $X_7 = \{1,2,3\}$, $X_8 = \{1,3,4\}$, $X_9 = \{1,3,6\}$, $X_{10} = \{3,4,5\}$, $X_{11} = \{3,4,6\}$, $X_{12} = \{1,2,3,4\}$, $X_{13} = \{1,2,3,6\}$, $X_{14} = \{1,3,4,5\}$, $X_{15} = \{1,3,4,6\}$, $X_{16} = \{3,4,5,6\}$, $X_{17} = \{3,4,6,7\}$, $X_{18} = \{1,2,3,4,5\}$, $X_{19} = \{1,2,3,4,6\}$, $X_{20} = \{1,3,4,5,6\}$, $X_{21} = \{1,3,4,6,7\}$, $X_{22} = \{3,4,5,6,7\}$, $X_{23} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $X_{24} = \{1,2,3,4,6,7\}$, $X_{25} = \{1,3,4,5,6,7\}$, $X_{26} = \{3,4,5,6,7,8\}$, $X_{27} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $X_{28} = \{1,3,4,5,6,7,8\}$;

для $F0$ — $Y_0 = \varnothing$, $Y_1 = \{1\}$, $Y_2 = \{5\}$, $Y_3 = \{1,2\}$, $Y_4 = \{1,3\}$, $Y_5 = \{1,5\}$, $Y_6 = \{5,6\}$, $Y_7 = \{1,2,3\}$, $Y_8 = \{1,2,5\}$, $Y_9 = \{1,3,5\}$, $Y_{10} = \{1,5,6\}$, $Y_{11} = \{5,6,7\}$, $Y_{12} = \{1,2,3,4\}$, $Y_{13} = \{1,2,3,5\}$, $Y_{14} = \{1,2,5,6\}$, $Y_{15} = \{1,3,5,6\}$, $Y_{16} = \{1,5,6,7\}$, $Y_{17} = \{5,6,7,8\}$, $Y_{18} = \{1,2,3,4,5\}$, $Y_{19} = \{1,2,3,5,6\}$, $Y_{20} = \{1,2,5,6,7\}$, $Y_{21} = \{1,3,5,6,7\}$, $Y_{22} = \{1,5,6,7,8\}$, $Y_{23} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $Y_{24} = \{1,2,3,5,6,7\}$, $Y_{25} = \{1,2,5,6,7,8\}$, $Y_{26} = \{1,3,5,6,7,8\}$, $Y_{27} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $Y_{28} = \{1,2,3,5,6,7,8\}$.

Позначимо через $K_{i,j}$ $(i = 1,2)$ множину $S_V^{\uparrow}$ для $i = 1$, $S = E_0$, $V = X_j$ і $i = 2$, $S = F_0$, $V = Y_j$. Тоді легко перевірити, що

$K_{1,0}$ ізоморфна $E0$, $K_{1,1}$ ізоморфна $E10$, $K_{1,2}$ ізоморфна $E11$, $K_{1,3}$ ізоморфна $E4$, $K_{1,4}$ ізоморфна $E15$, $K_{1,5}$ ізоморфна $E8$, $K_{1,6}$ ізоморфна $E16$, $K_{1,7}$ ізоморфна $E6^{\text{op}}$, $K_{1,8}$ ізоморфна $E14$, $K_{1,9}$ ізоморфна $E18^{\text{op}}$, $K_{1,10}$ ізоморфна $E1$, $K_{1,11}$ ізоморфна $E12$, $K_{1,12}$ ізоморфна $E3^{\text{op}}$, $K_{1,13}$ ізоморфна $E13^{\text{op}}$, $K_{1,14}$ ізоморфна $E7$, $K_{1,15}$ ізоморфна $E17$, $K_{1,16}$ ізоморфна $E3$; $K_{1,17}$ ізоморфна $E13$, $K_{1,18}$ ізоморфна $E1^{\text{op}}$, $K_{1,19}$ ізоморфна $E12^{\text{op}}$, $K_{1,20}$ ізоморфна $E14^{\text{op}}$, $K_{1,21}$ ізоморфна $E18$, $K_{1,22}$ ізоморфна $E6$, $K_{1,23}$ ізоморфна $E8^{\text{op}}$, $K_{1,24}$ ізоморфна $E16^{\text{op}}$, $K_{1,25}$

ізоморфна $E15^{\text{op}}$, $K_{1,26}$ ізоморфна $E4^{\text{op}}$, $K_{1,27}$ ізоморфна $E11^{\text{op}}$, $K_{1,28}$ ізоморфна $E10^{\text{op}}$; $K_{2,0}$ ізоморфна $F0$, $K_{2,1}$ ізоморфна $F11$, $K_{2,2}$ ізоморфна $F14$, $K_{2,3}$ ізоморфна $F4$, $K_{2,4}$ ізоморфна $F18$, $K_{2,5}$ ізоморфна $F16$, $K_{2,6}$ ізоморфна $F12$, $K_{2,7}$ ізоморфна $F6^{\text{op}}$, $K_{2,8}$ ізоморфна $F7$, $K_{2,9}$ ізоморфна $F19^{\text{op}}$, $K_{2,10}$ ізоморфна $F17$, $K_{2,11}$ ізоморфна $F9$, $K_{2,12}$ ізоморфна $F1^{\text{op}}$, $K_{2,13}$ ізоморфна $F15^{\text{op}}$, $K_{2,14}$ ізоморфна $F8$, $K_{2,15}$ ізоморфна $F20$, $K_{2,16}$ ізоморфна $F15$; $K_{2,17}$ ізоморфна $F1$, $K_{2,18}$ ізоморфна $F9^{\text{op}}$, $K_{2,19}$ ізоморфна $F17^{\text{op}}$, $K_{2,20}$ ізоморфна $F7^{\text{op}}$, $K_{2,21}$ ізоморфна $F19$, $K_{2,22}$ ізоморфна $F6$, $K_{2,23}$ ізоморфна $F12^{\text{op}}$, $K_{2,24}$ ізоморфна $F16^{\text{op}}$, $K_{2,25}$ ізоморфна $F4^{\text{op}}$, $K_{2,26}$ ізоморфна $F18^{\text{op}}$, $K_{2,27}$ ізоморфна $F14^{\text{op}}$, $K_{2,28}$ ізоморфна $F11^{\text{op}}$.

Крок II. Описати (з точністю до сильного ізоморфізму) усі пари нижніх підмножин (див. алгоритм 2.2.4.). Ось вони:

для $E0$ — $X'_1 = (X_{23}, \{6\})$, $X'_2 = (X_{27}, \{6\})$, $X'_3 = (X_{27}, \{6, 7\})$, $X'_4 = (X_{28}, \{1\})$;

для $F0$ — $Y'_1 = (Y_{18}, \{5\})$, $Y'_2 = (Y_{23}, \{5\})$, $Y'_3 = (Y_{23}, \{5, 6\})$, $Y'_4 = (Y_{27}, \{5\})$, $Y'_5 = (Y_{27}, \{5, 6\})$, $Y'_6 = (Y_{27}, \{5, 6, 7\})$, $Y'_7 = (Y_{28}, \{3\})$.

Позначимо через $K'_{i,j}$ $(i = 1, 2)$ множину $(S^{\uparrow}_{V})^{\uparrow}_{W}$ для $i = 1$, $S = E_0$, $(V, W) = X'_j$ і $i = 2$, $S = F_0$, $(V, W) = Y'_j$. Тоді легко перевірити, що

$K'_{1,1}$ ізоморфна $E2^{\text{op}}$, $K'_{1,2}$ ізоморфна $E9$, $K'_{1,3}$ ізоморфна $E2$, $K'_{1,4}$ ізоморфна $E5$; $K'_{2,1}$ ізоморфна $F2^{\text{op}}$, $K'_{2,2}$ ізоморфна $F10^{\text{op}}$, $K'_{2,3}$ ізоморфна $F3$, $K'_{2,4}$ ізоморфна $F136$, $K'_{2,5}$ ізоморфна $F10$, $K'_{2,6}$ ізоморфна $F2$, $K'_{2,7}$ ізоморфна $F5$.

Крок III. Легко побачити, що в I і II кожна з множин Ei, Di, зазначених у двох таблицях (див. формулювання теореми), або дуальна до неї (у недуальному випадку) зустрічається лише один раз.

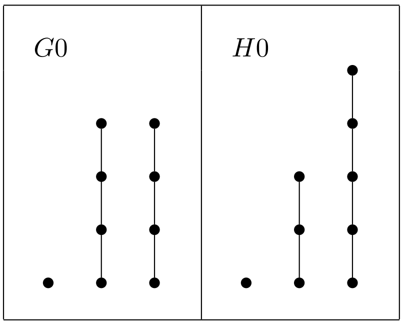
Таким чином, теорема доведена. $\square$

5.3.3. Опис частково впорядкованих множин MM-типу OS_7 – OS_8. Розглядаємо випадок примітивних надсуперкритичних множин OS_i порядку 9 з тривіальною групою автоморфізмів. Такими є множини $OS_7 = (1, 4, 4)$ і $OS_8 = (1, 3, 5)$.

З формальних міркувань зробимо таку перенумерацію:

$G0 = OS_7 = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$H0 = OS_8 = \{1, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$.



Теорема 5.6. *З точністю до ізоморфізму та дуальності, повна множина ч.в. множин MM-типів $G0$, $H0$ відповідно складається з (разом з самими $G0$, $H0$) упорядкованих множин:*

$G1 = \{1 \prec 6, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$G2 = \{1 \prec 2 \prec 7, 1 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$G3 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 8, 2 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$G4 = \{1 \prec 2, 1 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$G5 = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$G6 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 1 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$G7 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 9, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$G8 = \{1, 2 \prec 7, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$G9 = \{1, 2 \prec 3 \prec 8, 2 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$G10 = \{1 \prec 2, 3 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$G11 = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 9, 3 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$G12 = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 9, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$G13 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$G14 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$G15 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$G16 = \{1 \prec 2 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$G17 = \{1 \prec 2 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$G18 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 5, 4 \prec 5, 4 \prec 9, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H1 = \{1 \prec 5, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H2 = \{1 \prec 2 \prec 6, 1 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H3 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 7, 2 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H4 = \{1 \prec 7, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H5 = \{1 \prec 2 \prec 8, 1 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H6 = \{1 \prec 2, 1 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H7 = \{1 \prec 2, 1 \prec 7, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H8 = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H9 = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H10 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 9, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H11 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 1 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H12 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 3 \prec 9, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H13 = \{1, 2 \prec 6, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H14 = \{1, 2 \prec 3 \prec 7, 2 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H15 = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 8, 3 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H16 = \{1, 2 \prec 8, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H17 = \{1, 2 \prec 3 \prec 9, 2 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H18 = \{1 \prec 2, 3 \prec 7, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H19 = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 8, 3 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H20 = \{1 \prec 2, 3 \prec 9, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H21 = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H22 = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 9, 4 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H23 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 9, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H24 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\};$

$H25 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 8, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$H26 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

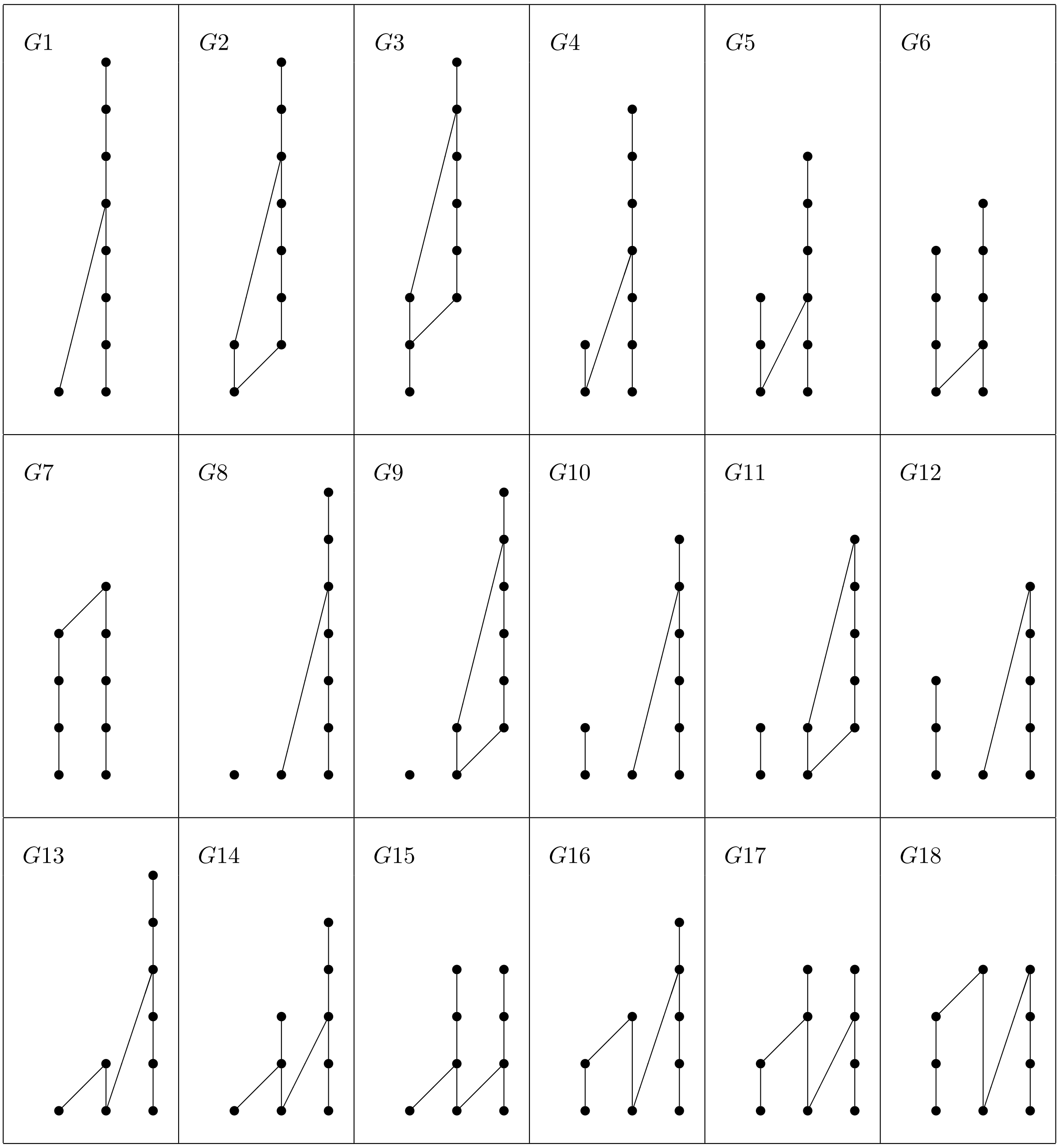
$H27 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 8, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

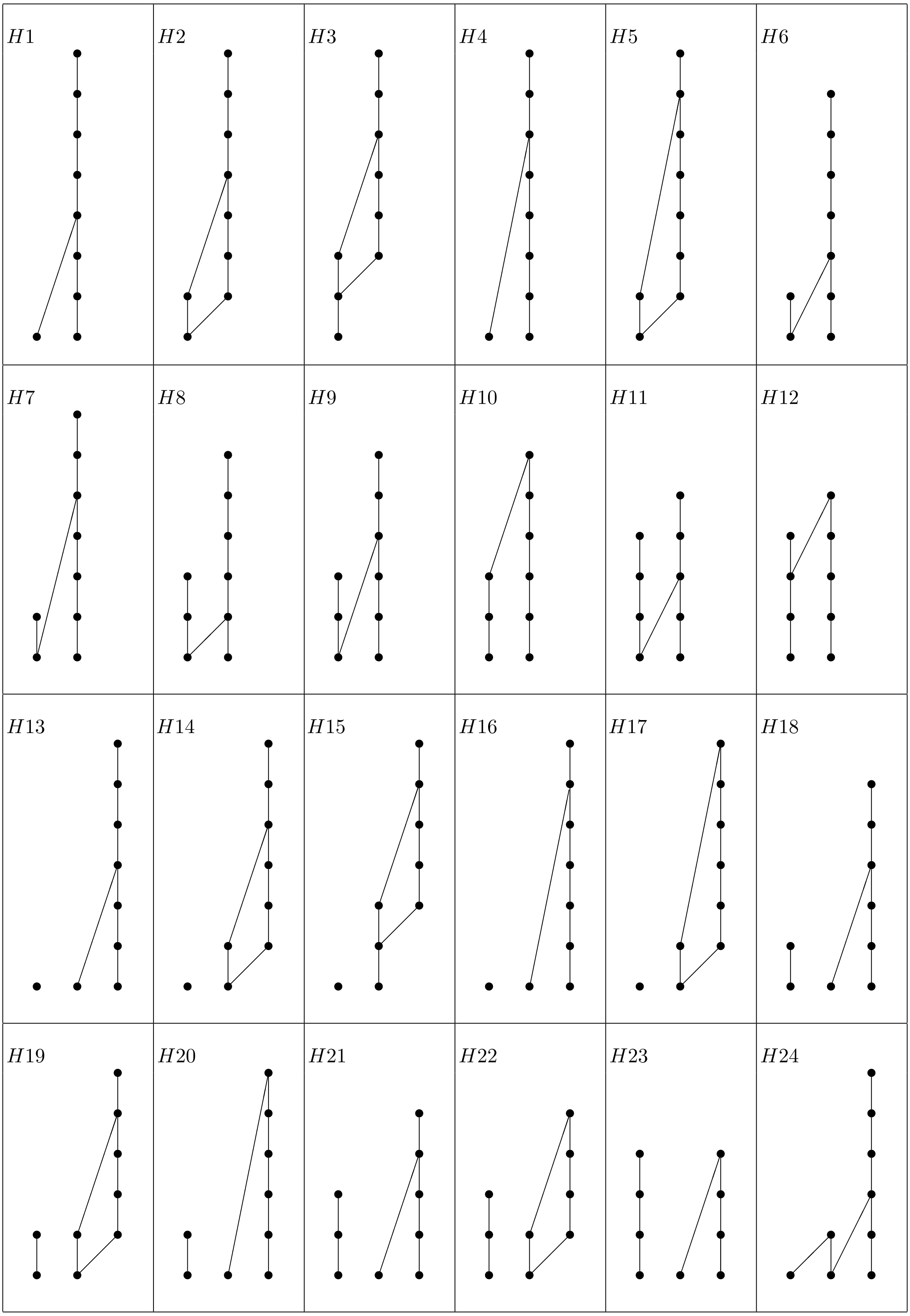
$H28 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

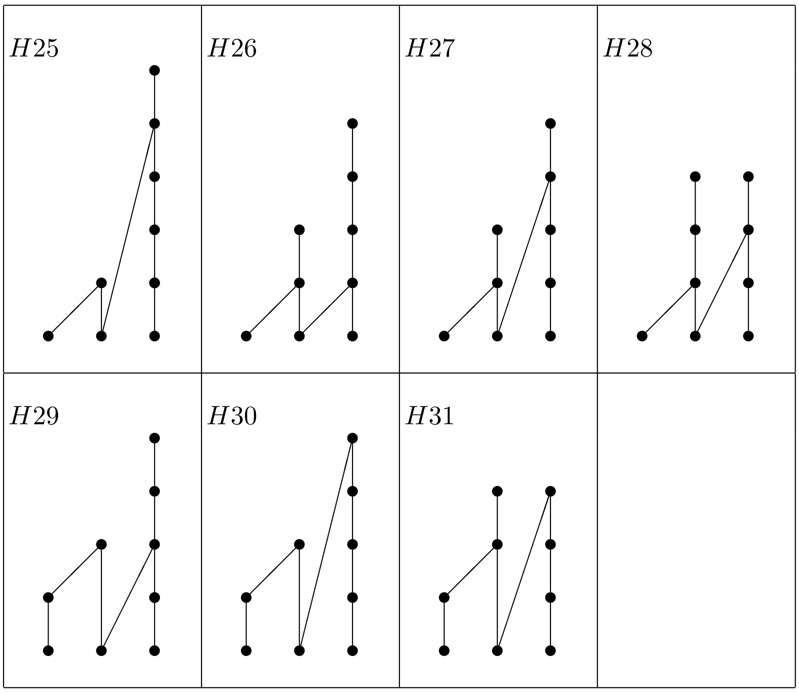
$H29 = \{1 \prec 2 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$H30 = \{1 \prec 2 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 9, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$;

$H31 = \{1 \prec 2 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5, 3 \prec 9, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$.




$H1$
$H2$
$H3$
$H4$
$H5$
$H6$
$H7$
$H8$
$H9$
$H10$
$H11$
$H12$
$H13$
$H14$
$H15$
$H16$
$H17$
$H18$
$H19$
$H20$
$H21$
$H22$
$H23$
$H24$



Доведення. Застосуємо алгоритм 2.2.4. до множин G_0 і H_0.

Крок I. Описати (з точністю до сильного ізоморфізму) усі нижні підмножини. Ось вони:

для $G0$ — $X_0 = \varnothing$, $X_1 = \{1\}$, $X_2 = \{2\}$, $X_3 = \{1,2\}$, $X_4 = \{2,3\}$, $X_5 = \{2,6\}$, $X_6 = \{1,2,3\}$, $X_7 = \{1,2,6\}$, $X_8 = \{2,3,4\}$, $X_9 = \{2,3,6\}$, $X_{10} = \{1,2,3,4\}$, $X_{11} = \{1,2,3,6\}$, $X_{12} = \{2,3,4,5\}$, $X_{13} = \{2,3,4,6\}$, $X_{14} = \{2,3,6,7\}$, $X_{15} = \{1,2,3,4,5\}$, $X_{16} = \{1,2,3,4,6\}$, $X_{17} = \{1,2,3,6,7\}$, $X_{18} = \{2,3,4,5,6\}$, $X_{19} = \{2,3,4,6,7\}$, $X_{20} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $X_{21} = \{1,2,3,4,6,7\}$, $X_{22} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $X_{23} = \{2,3,4,6,7,8\}$, $X_{24} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $X_{25} = \{1,2,3,4,6,7,8\}$, $X_{26} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$, $X_{27} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $X_{28} = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$;

для $H0$ — $Y_0 = \varnothing$, $Y_1 = \{1\}$, $Y_2 = \{2\}$, $Y_3 = \{5\}$, $Y_4 = \{1,2\}$, $Y_5 = \{1,5\}$, $Y_6 = \{2,3\}$, $Y_7 = \{2,5\}$, $Y_8 = \{5,6\}$, $Y_9 = \{1,2,3\}$, $Y_{10} = \{1,2,5\}$, $Y_{11} = \{1,5,6\}$, $Y_{12} = \{2,3,4\}$, $Y_{13} = \{2,3,5\}$, $Y_{14} = \{2,5,6\}$, $Y_{15} = \{5,6,7\}$, $Y_{16} = \{1,2,3,4\}$, $Y_{17} = \{1,2,3,5\}$, $Y_{18} = \{1,2,5,6\}$, $Y_{19} = \{1,5,6,7\}$, $Y_{20} = \{2,3,4,5\}$, $Y_{21} = \{2,3,5,6\}$, $Y_{22} = \{2,5,6,7\}$, $Y_{23} = \{5,6,7,8\}$, $Y_{24} = \{1,2,3,4,5\}$, $Y_{25} = \{1,2,3,5,6\}$,

$Y_{26} = \{1,2,5,6,7\}$, $Y_{27} = \{1,5,6,7,8\}$, $Y_{28} = \{2,3,4,5,6\}$, $Y_{29} = \{2,3,5,6,7\}$, $Y_{30} = \{2,5,6,7,8\}$, $Y_{31} = \{5,6,7,8,9\}$, $Y_{32} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $Y_{33} = \{1,2,3,5,6,7\}$, $Y_{34} = \{1,2,5,6,7,8\}$, $Y_{35} = \{1,5,6,7,8,9\}$, $Y_{36} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $Y_{37} = \{2,3,5,6,7,8\}$, $Y_{38} = \{2,5,6,7,8,9\}$, $Y_{39} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $Y_{40} = \{1,2,3,5,6,7,8\}$, $Y_{41} = \{1,2,5,6,7,8,9\}$, $Y_{42} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$, $Y_{43} = \{2,3,5,6,7,8,9\}$, $Y_{44} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $Y_{45} = \{1,2,3,5,6,7,8,9\}$, $Y_{46} = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Позначимо через $K_{i,j}$ $(i = 1,2)$ множину $S_V^{\uparrow}$ для $i = 1$, $S = G_0$, $V = X_j$ і $i = 2$, $S = H_0$, $V = Y_j$. Тоді легко перевірити, що

$K_{1,0}$ ізоморфна $G0$, $K_{1,1}$ ізоморфна $G7$, $K_{1,2}$ ізоморфна $G12$, $K_{1,3}$ ізоморфна $G6^{\mathrm{op}}$, $K_{1,4}$ ізоморфна $G10$, $K_{1,5}$ ізоморфна $G18$, $K_{1,6}$ ізоморфна $G5^{\mathrm{op}}$, $K_{1,7}$ ізоморфна $G15^{\mathrm{op}}$, $K_{1,8}$ ізоморфна $G8$, $K_{1,9}$ ізоморфна $G16$, $K_{1,10}$ ізоморфна $G4^{\mathrm{op}}$, $K_{1,11}$ ізоморфна $G14^{\mathrm{op}}$, $K_{1,12}$ ізоморфна $G1$, $K_{1,13}$ ізоморфна $G13$, $K_{1,14}$ ізоморфна $G17$, $K_{1,15}$ ізоморфна $G1^{\mathrm{op}}$, $K_{1,16}$ ізоморфна $G13^{\mathrm{op}}$, $K_{1,17}$ ізоморфна $G17^{\mathrm{op}}$, $K_{1,18}$ ізоморфна $G4$, $K_{1,19}$ ізоморфна $G14$, $K_{1,20}$ ізоморфна $G8^{\mathrm{op}}$, $K_{1,21}$ ізоморфна $G16^{\mathrm{op}}$, $K_{1,22}$ ізоморфна $G5$, $K_{1,23}$ ізоморфна $G15$, $K_{1,24}$ ізоморфна $G10^{\mathrm{op}}$, $K_{1,25}$ ізоморфна $G18^{\mathrm{op}}$, $K_{1,26}$ ізоморфна $G6$, $K_{1,27}$ ізоморфна $G12^{\mathrm{op}}$, $K_{1,28}$ ізоморфна $G7^{\mathrm{op}}$, $K_{2,0}$ ізоморфна $H0$, $K_{2,1}$ ізоморфна $H10$, $K_{2,2}$ ізоморфна $H20$, $K_{2,3}$ ізоморфна $H23$, $K_{2,4}$ ізоморфна $H8^{\mathrm{op}}$, $K_{2,5}$ ізоморфна $H12$, $K_{2,6}$ ізоморфна $H16$, $K_{2,7}$ ізоморфна $H30$, $K_{2,8}$ ізоморфна $H21$, $K_{2,9}$ ізоморфна $H6^{\mathrm{op}}$, $K_{2,10}$ ізоморфна $H26^{\mathrm{op}}$, $K_{2,11}$ ізоморфна $H11^{\mathrm{op}}$, $K_{2,12}$ ізоморфна $H4$, $K_{2,13}$ ізоморфна $H25$, $K_{2,14}$ ізоморфна $H31$, $K_{2,15}$ ізоморфна $H18$, $K_{2,16}$ ізоморфна $H1^{\mathrm{op}}$, $K_{2,17}$ ізоморфна $H24^{\mathrm{op}}$, $K_{2,18}$ ізоморфна $H28^{\mathrm{op}}$, $K_{2,19}$ ізоморфна $H9^{\mathrm{op}}$, $K_{2,20}$ ізоморфна $H7$, $K_{2,21}$ ізоморфна $H27$, $K_{2,22}$ ізоморфна $H29$, $K_{2,23}$ ізоморфна $H13$, $K_{2,24}$ ізоморфна $H13^{\mathrm{op}}$, $K_{2,25}$ ізоморфна $H29^{\mathrm{op}}$, $K_{2,26}$ ізоморфна $H27^{\mathrm{op}}$, $K_{2,27}$ ізоморфна $H7^{\mathrm{op}}$, $K_{2,28}$ ізоморфна $H9$, $K_{2,29}$ ізоморфна $H28$, $K_{2,30}$ ізоморфна $H24$, $K_{2,31}$ ізоморфна $H1$, $K_{2,32}$ ізоморфна $H18^{\mathrm{op}}$, $K_{2,33}$ ізоморфна $H31^{\mathrm{op}}$, $K_{2,34}$

ізоморфна $H25^{\text{op}}$, $K_{2,35}$ ізоморфна $H4^{\text{op}}$, $K_{2,36}$ ізоморфна $H11$, $K_{2,37}$ ізоморфна $H26$, $K_{2,38}$ ізоморфна $H6$, $K_{2,39}$ ізоморфна $H21^{\text{op}}$, $K_{2,40}$ ізоморфна $H30^{\text{op}}$, $K_{2,41}$ ізоморфна $H16^{\text{op}}$, $K_{2,42}$ ізоморфна $H12^{\text{op}}$, $K_{2,43}$ ізоморфна $H8$, $K_{2,44}$ ізоморфна $H23^{\text{op}}$, $K_{2,45}$ ізоморфна $H20^{\text{op}}$, $K_{2,46}$ ізоморфна $H10^{\text{op}}$.

Крок II. Описати (з точністю до сильного ізоморфізму) усі пари нижніх підмножин (див. алгоритм2.2.4.). Ось вони:

для $G0$ — $X'_1 = (X_{20}, \{6\})$, $X'_2 = (X_{24}, \{6\})$, $X'_3 = (X_{24}, \{6, 7\})$, $X'_4 = (X_{27}, \{6\})$, $X'_5 = (X_{27}, \{6, 7\})$, $X'_6 = (X_{27}, \{6, 7, 8\})$;

для $H0$ — $Y'_1 = (Y_{24}, \{5\})$, $Y'_2 = (Y_{32}, \{5\})$, $Y'_3 = (Y_{32}, \{5, 6\})$, $Y'_4 = (Y_{39}, \{5\})$, $Y'_5 = (Y_{39}, \{5, 6\})$, $Y'_6 = (Y_{39}, \{5, 6, 7\})$, $Y'_7 = (Y_{41}, \{2\})$, $Y'_8 = (Y_{44}, \{5\})$, $Y'_9 = (Y_{44}, \{5, 6\})$, $Y'_{10} = (Y_{44}, \{5, 6, 7\})$, $Y'_{11} = (Y_{44}, \{5, 6, 7, 8\})$, $Y'_{12} = (Y_{45}, \{2\})$, $Y'_{13} = (Y_{45}, \{2, 3\})$.

Позначимо через $K'_{i,j}$ $(i = 1, 2)$ множину $(S_V^{\uparrow})_W^{\uparrow}$ для $i = 1$, $S = G_0$, $(V, W) = X'_j$ і $i = 2$, $S = H_0$, $(V, W) = Y'_j$. Тоді легко перевірити, що $K'_{1,1}$ ізоморфна $G2^{\text{op}}$, $K'_{1,2}$ ізоморфна $G9^{\text{op}}$, $K'_{1,3}$ ізоморфна $G3$, $K'_{1,4}$ ізоморфна $G11$, $K'_{1,5}$ ізоморфна $G9$, $K'_{1,6}$ ізоморфна $G2$, $K'_{2,1}$ ізоморфна $H2^{\text{op}}$, $K'_{2,2}$ ізоморфна $H14^{\text{op}}$, $K'_{2,3}$ ізоморфна $H3^{\text{op}}$, $K'_{2,4}$ ізоморфна $H19^{\text{op}}$, $K'_{2,5}$ ізоморфна $H15$, $K'_{2,6}$ ізоморфна $H3$, $K'_{2,7}$ ізоморфна $H5^{\text{op}}$, $K'_{2,8}$ ізоморфна $H22$, $K'_{2,9}$ ізоморфна $H19$, $K'_{2,10}$ ізоморфна $H14$, $K'_{2,11}$ ізоморфна $H2$, $K'_{2,12}$ ізоморфна $H17$, $K'_{2,13}$ ізоморфна $H5$.

Крок III. Легко побачити, що в I і II кожна з множин Gi, Hi, зазначених у двох таблицях (див. формулювання теореми), або дуальна до неї (у недуальному випадку) зустрічається лише один раз.

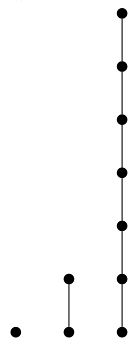
Таким чином, теорема доведена. □

5.3.4. Опис частково впорядкованих множин MM-типу OS_9. Розглядаємо випадок примітивних надсуперкритичних множин OS_i порядку 10 з тривіальною групою автоморфізмів. Такою є множина

$OS_9 = (1, 2, 7)$. З формальних міркувань зробимо таку перенумерацію:

$L0 = OS_9 = \{1, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$.

$L\!-\!0$



Теорема 5.7. *З точністю до ізоморфізму та дуальності, повна сукупність ч.в. множин MM-типу $L0$ відповідно складається з (разом з самою $L0$) упорядкованих множин:*

$L1 = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L2 = \{1 \prec 2 \prec 5, 1 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L3 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L4 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L5 = \{1 \prec 9, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L6 = \{1 \prec 2 \prec 10, 1 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L7 = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L8 = \{1 \prec 2, 1 \prec 9, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L9 = \{1 \prec 2 \prec 10, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L10 = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 9, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L11 = \{1 \prec 2 \prec 3, 2 \prec 10, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L12 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 1 \prec 9, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L13 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 10, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L14 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 1 \prec 9, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L15 = \{1, 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L16 = \{1, 2 \prec 3 \prec 6, 2 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L17 = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 3 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L18 = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L19 = \{1, 2 \prec 10, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L20 = \{1 \prec 2, 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L21 = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 7, 3 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L22 = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L23 = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L24 = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L25 = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 9, 5 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L26 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L27 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 9, 5 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L28 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 9, 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L29 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 7 \prec 10, 6 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L30 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 7 \prec 10, 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L31 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

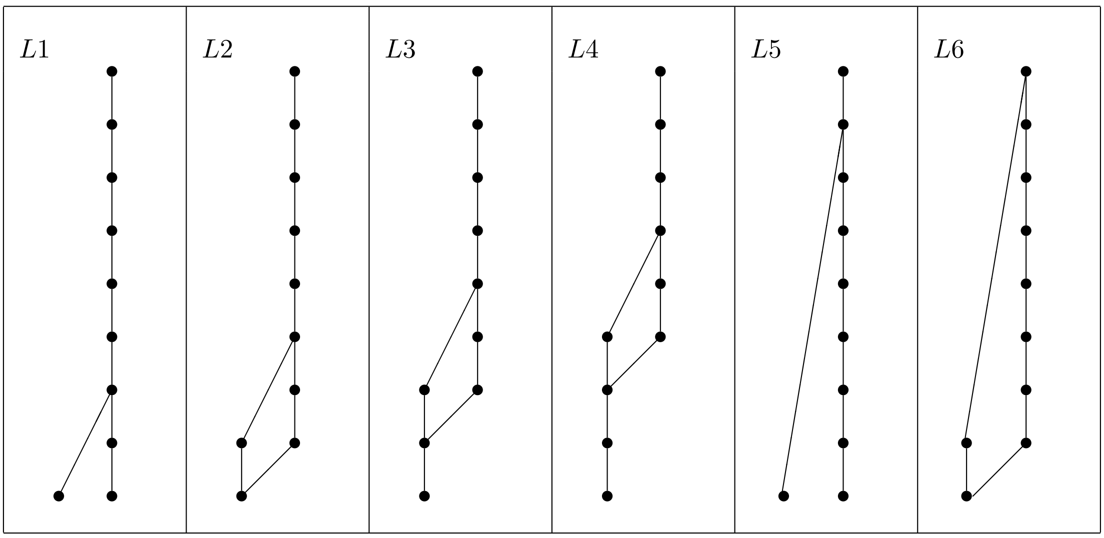
$L32 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3, 2 \prec 10, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

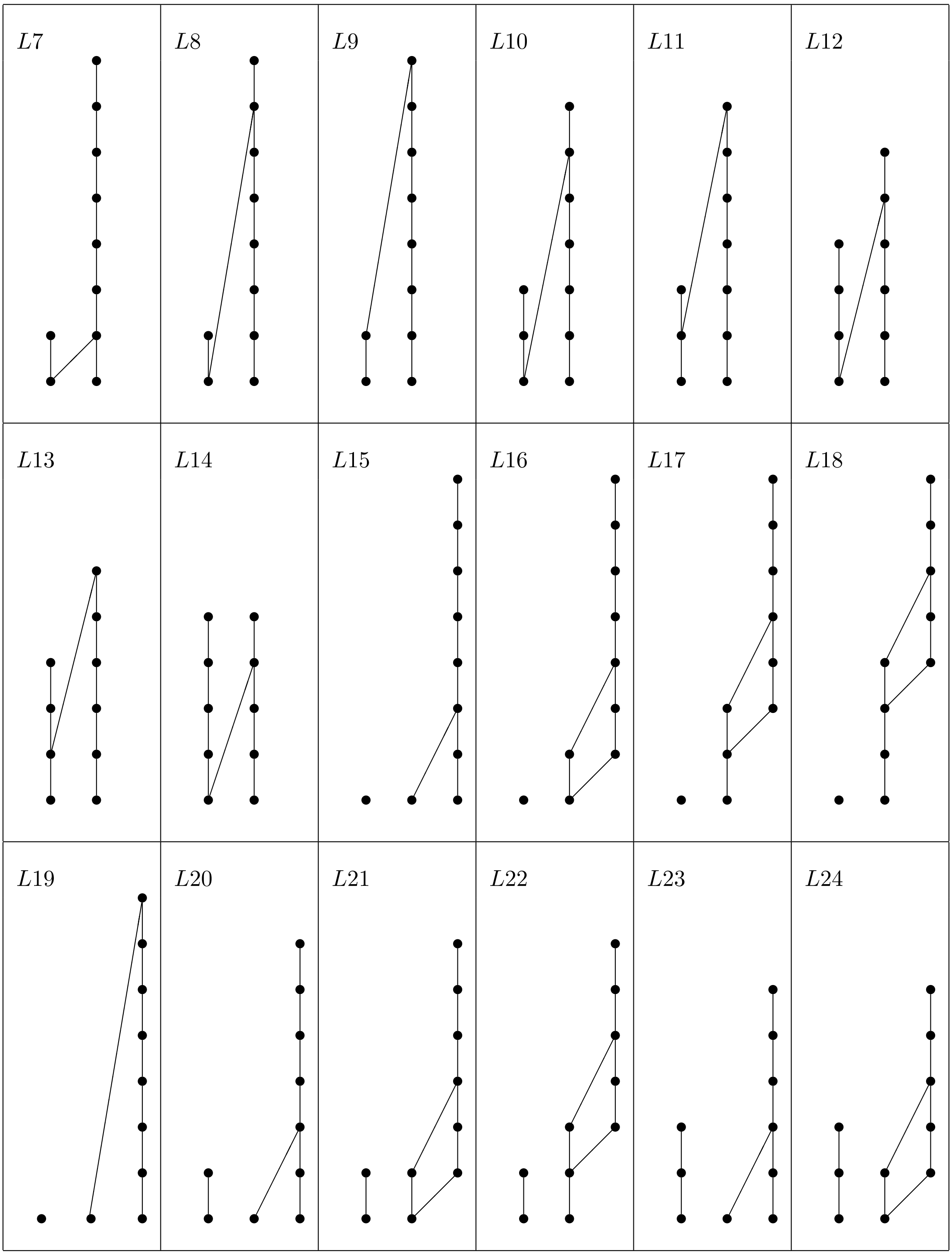
$L33 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 10, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L34 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 10, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

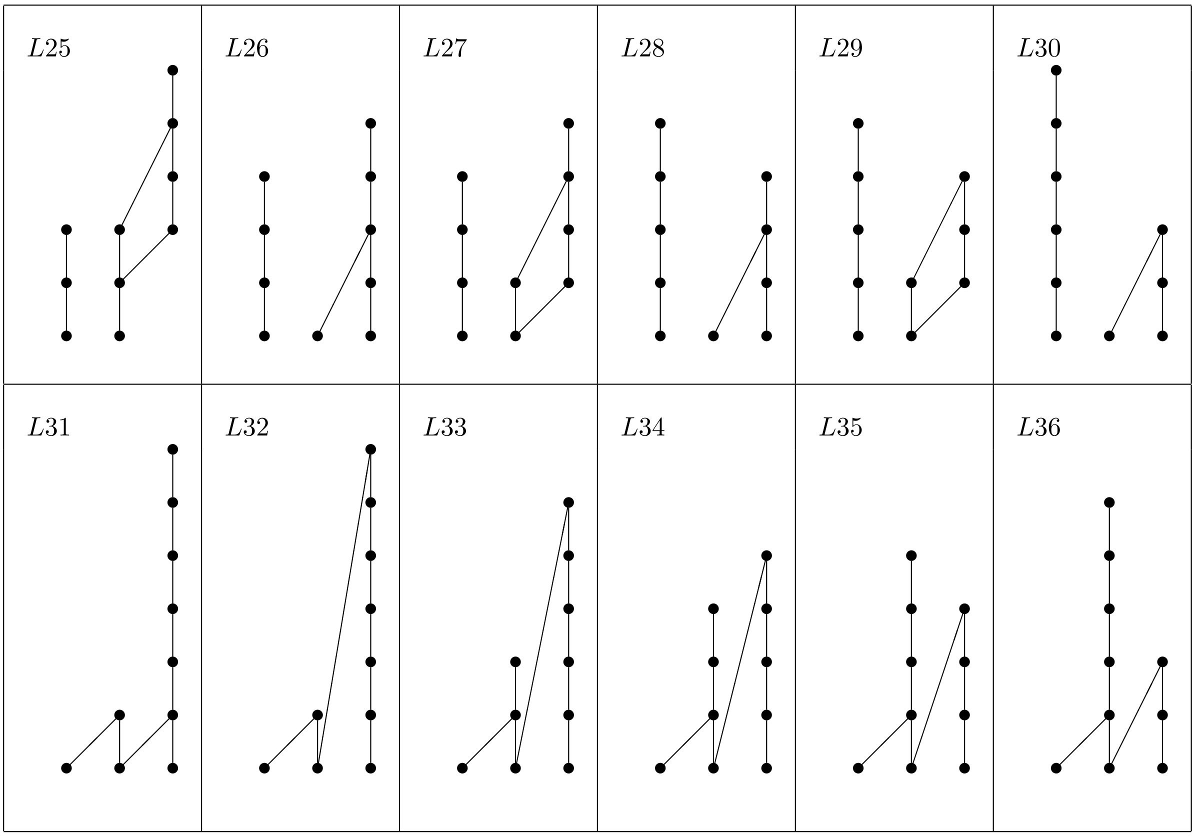
$L35 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 2 \prec 10, 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$L36 = \{1 \prec 3, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 10, 8 \prec 9 \prec 10\}$.





$L7$
$L8$
$L9$
$L10$
$L11$
$L12$
$L13$
$L14$
$L15$
$L16$
$L17$
$L18$
$L19$
$L20$
$L21$
$L22$
$L23$
$L24$



Доведення. Застосуємо алгоритм 2.2.4. до множини L_0.

Крок I. Описати (з точністю до сильного ізоморфізму) усі нижні підмножини. Ось вони:

$X_0 = \varnothing$, $X_1 = \{1\}$, $X_2 = \{2\}$, $X_3 = \{4\}$, $X_4 = \{1,2\}$, $X_5 = \{1,4\}$, $X_6 = \{2,3\}$, $X_7 = \{2,4\}$, $X_8 = \{4,5\}$, $X_9 = \{1,2,3\}$, $X_{10} = \{1,2,4\}$, $X_{11} = \{1,4,5\}$, $X_{12} = \{2,3,4\}$, $X_{13} = \{2,4,5\}$, $X_{14} = \{4,5,6\}$, $X_{15} = \{1,2,3,4\}$, $X_{16} = \{1,2,4,5\}$, $X_{17} = \{1,4,5,6\}$, $X_{18} = \{2,3,4,5\}$, $X_{19} = \{2,4,5,6\}$, $X_{20} = \{4,5,6,7\}$, $X_{21} = \{1,2,3,4,5\}$, $X_{22} = \{1,2,4,5,6\}$, $X_{23} = \{1,4,5,6,7\}$, $X_{24} = \{2,3,4,5,6\}$, $X_{25} = \{2,4,5,6,7\}$, $X_{26} = \{4,5,6,7,8\}$, $X_{27} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $X_{28} = \{1,2,4,5,6,7\}$, $X_{29} = \{1,4,5,6,7,8\}$, $X_{30} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $X_{31} = \{2,4,5,6,7,8\}$, $X_{32} = \{4,5,6,7,8,9\}$, $X_{33} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $X_{34} = \{1,2,4,5,6,7,8\}$, $X_{35} = \{1,4,5,6,7,8,9\}$, $X_{36} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$, $X_{37} = \{2,4,5,6,7,8,9\}$, $X_{38} = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $X_{39} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $X_{40} = \{1,2,4,5,6,7,8,9\}$, $X_{41} =$

$\{1,4,5,6,7,8,9,10\}$, $X_{42} = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $X_{43} = \{2,4,5,6,7,8,9,10\}$, $X_{44} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $X_{45} = \{1,2,4,5,6,7,8,9,10\}$, $X_{46} = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

Позначимо через K_i множину $L0^{\uparrow}_{X_i}$. Тоді легко перевірити, що

K_0 ізоморфна $L0$, K_1 ізоморфна $L9$, K_2 ізоморфна $L19$, K_3 ізоморфна $L30$, K_4 ізоморфна $L7^{\text{op}}$, K_5 ізоморфна $L11$, K_6 ізоморфна $L5$, K_7 ізоморфна $L32$, K_8 ізоморфна $L28$, K_9 ізоморфна $L1^{\text{op}}$, K_{10} ізоморфна $L31^{\text{op}}$, K_{11} ізоморфна $L13$, K_{12} ізоморфна $L8$, K_{13} ізоморфна $L33$, K_{14} ізоморфна $L26$, K_{15} ізоморфна $L15^{\text{op}}$, K_{16} ізоморфна $L36^{\text{op}}$, K_{17} ізоморфна $L14^{\text{op}}$, K_{18} ізоморфна $L10$, K_{19} ізоморфна $L34$, K_{20} ізоморфна $L23$, K_{21} ізоморфна $L20^{\text{op}}$, K_{22} ізоморфна $L35^{\text{op}}$, K_{23} ізоморфна $L12^{\text{op}}$, K_{24} ізоморфна $L12$, K_{25} ізоморфна $L35$, K_{26} ізоморфна $L20$, K_{27} ізоморфна $L23^{\text{op}}$, K_{28} ізоморфна $L34^{\text{op}}$, K_{29} ізоморфна $L10^{\text{op}}$, K_{30} ізоморфна $L14$, K_{31} ізоморфна $L36$, K_{32} ізоморфна $L15$, K_{33} ізоморфна $L26^{\text{op}}$, K_{34} ізоморфна $L33^{\text{op}}$, K_{35} ізоморфна $L8^{\text{op}}$, K_{36} ізоморфна $L13^{\text{op}}$, K_{37} ізоморфна $L31$, K_{38} ізоморфна $L1$, K_{39} ізоморфна $L28^{\text{op}}$, K_{40} ізоморфна $L32^{\text{op}}$, K_{41} ізоморфна $L5^{\text{op}}$, K_{42} ізоморфна $L11^{\text{op}}$, K_{43} ізоморфна $L7$, K_{44} ізоморфна $L30^{\text{op}}$, K_{45} ізоморфна $L19^{\text{op}}$, K_{46} ізоморфна $L9^{\text{op}}$.

Крок II. Описати (з точністю до сильного ізоморфізму) усі пари нижніх підмножин (див. алгоритм 2.2.4.). Ось вони:

$X'_1 = (X_{15}, \{4\})$, $X'_2 = (X_{21}, \{4\})$, $X'_3 = (X_{21}, \{4,5\})$, $X'_4 = (X_{27}, \{4\})$, $X'_5 = (X_{27}, \{4,5\})$, $X'_6 = (X_{27}, \{4,5,6\})$, $X'_7 = (X_{33}, \{4\})$, $X'_8 = (X_{33}, \{4,5\})$, $X'_9 = (X_{33}, \{4,5,6\})$, $X'_{10} = (X_{33}, \{4,5,6,7\})$, $X'_{11} = (X_{39}, \{4\})$, $X'_{12} = (X_{39}, \{4,5\})$, $X'_{13} = (X_{39}, \{4,5,6\})$, $X'_{14} = (X_{39}, \{4,5,6,7\})$, $X'_{15} = (X_{39}, \{4,5,6,7,8\})$, $X'_{16} = (X_{44}, \{4\})$, $X'_{17} = (X_{44}, \{4,5\})$, $X'_{18} = (X_{44}, \{4,5,6\})$, $X'_{19} = (X_{44}, \{4,5,6,7\})$, $X'_{20} = (X_{44}, \{4,5,6,7,8\})$, $X'_{21} = (X_{44}, \{4,5,6,7,8,9\})$, $X'_{22} = (X_{45}, \{2\})$.

Позначимо через K'_i множину $(L_0)^{\uparrow\uparrow}_{VW}$, де $(V, W) = X'_i$. Тоді легко перевірити, що

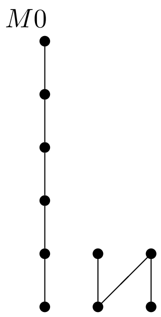
K'_1 ізоморфна $L2^{\text{op}}$, K'_2 ізоморфна $L16^{\text{op}}$, K'_3 ізоморфна $L3^{\text{op}}$, K'_4 ізоморфна $L21^{\text{op}}$, K'_5 ізоморфна $L17^{\text{op}}$, K'_6 ізоморфна $L4^{\text{op}}$, K'_7 ізоморфна $L24^{\text{op}}$, K'_8 ізоморфна $L22^{\text{op}}$, K'_9 ізоморфна $L18$, K'_{10} ізоморфна $L4$, K'_{11} ізоморфна $L27^{\text{op}}$, K'_{12} ізоморфна $L25$, K'_{13} ізоморфна $L22$, K'_{14} ізоморфна $L17$, K'_{15} ізоморфна $L3$, K'_{16} ізоморфна $L29$, K'_{17} ізоморфна $L27$, K'_{18} ізоморфна $L24$, K'_{19} ізоморфна $L21$, K'_{20} ізоморфна $L16$, K'_{21} ізоморфна $L2$, K'_{22} ізоморфна $L6$.

Крок III. Легко побачити, що в I і II кожна з множин Li, зазначених у таблиці (див. формулювання теореми), або дуальна до неї (у недуальному випадку) зустрічається лише один раз.

Таким чином, теорема доведена. □

5.3.5. Опис непримітивної частково впорядкованої множини OS_{10}. Розглядаємо єдиний випадок непримітивної надсуперкритичної множини $OS_{10} = (6, \text{И})$ порядку 10. З формальних міркувань зробимо таку перенумерацію:

$M0 = OS_{10} = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 7 \prec 8, 7 \prec 10, 9 \prec 10\}$.



Теорема 5.8. *З точністю до ізоморфізму та дуальності, повна сукупність ч.в. множин $M0$ складається з (разом з самою $M0$) упорядкованих множин:*

$M1 = \{1 \prec 2 \prec 5, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M2 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 1 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10, 2 \prec 5\}$;

$M3 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10, 3 \prec 6\}$;

$M4 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10, 4 \prec 7\}$;

$M5 = \{1 \prec 2 \prec 10, 1 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M6 = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10, 2 \prec 5\}$;

$M7 = \{1 \prec 2 \prec 10, 1 \prec 9, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M8 = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10, 2 \prec 10\}$;

$M9 = \{1 \prec 2 \prec 3, 1 \prec 9, 2 \prec 10, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M10 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 1 \prec 9, 2 \prec 10, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M11 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 1 \prec 9, 2 \prec 10, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M12 = \{1, 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M13 = \{1, 2 \prec 3, 2 \prec 10, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M14 = \{1, 2 \prec 3 \prec 6, 2 \prec 5, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M15 = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 3 \prec 6, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M16 = \{1, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 7, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M17 = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 7, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M18 = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 7, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M19 = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 9, 5 \prec 8, 4 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M20 = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 8, 4 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M21 = \{1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 9, 5 \prec 8, 4 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M22 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 9, 5 \prec 8, 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M23 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 10, 6 \prec 9, 5 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M24 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 7 \prec 10, 6 \prec 9, 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M25 = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M26 = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 10, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M27 = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 2 \prec 10, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M28 = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 2 \prec 10, 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M29 = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 10, 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M30 = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 2 \prec 10, 9 \prec 10\}$;

$M31 = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9, 2 \prec 10\}$;

$M32 = \{1 \prec 9, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9, 2 \prec 10\}$;

$M33 = \{1 \prec 2, 1 \prec 4, 3 \prec 4, 3 \prec 6, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M34 = \{1 \prec 2 \prec 3, 2 \prec 5, 4 \prec 5, 4 \prec 7, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M35 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 3 \prec 6, 4 \prec 6, 4 \prec 8, 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

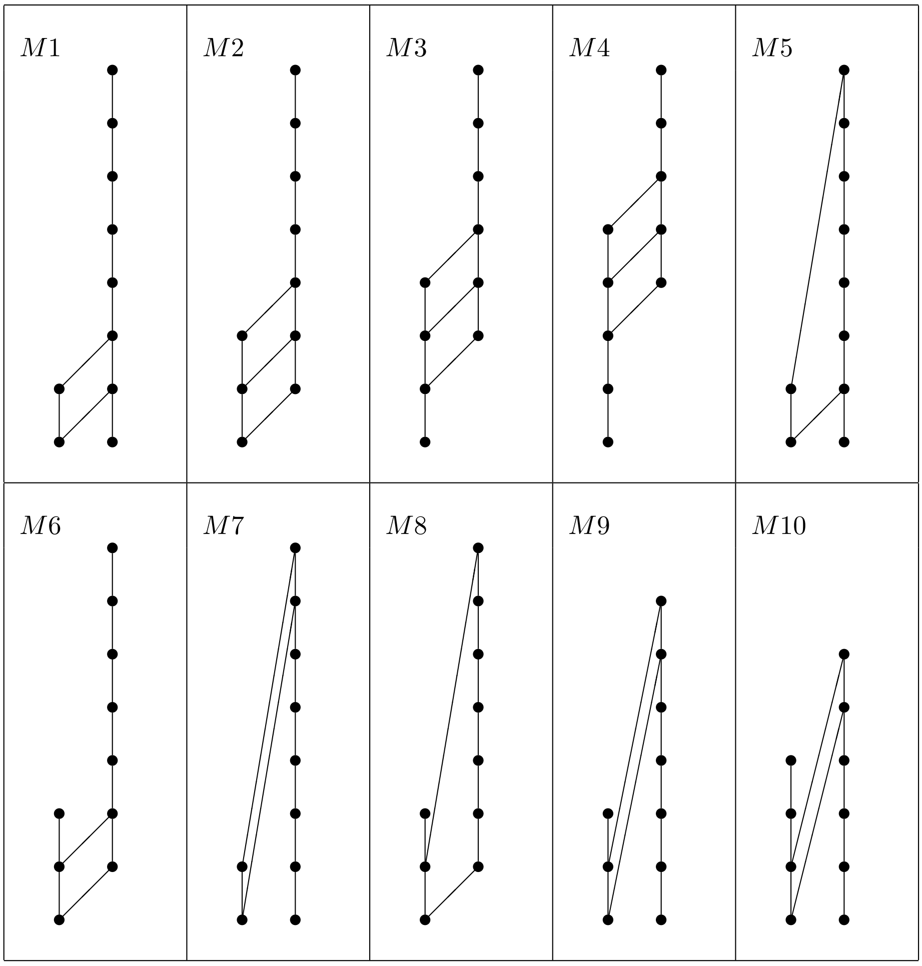
$M36 = \{1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4, 3 \prec 6, 2 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

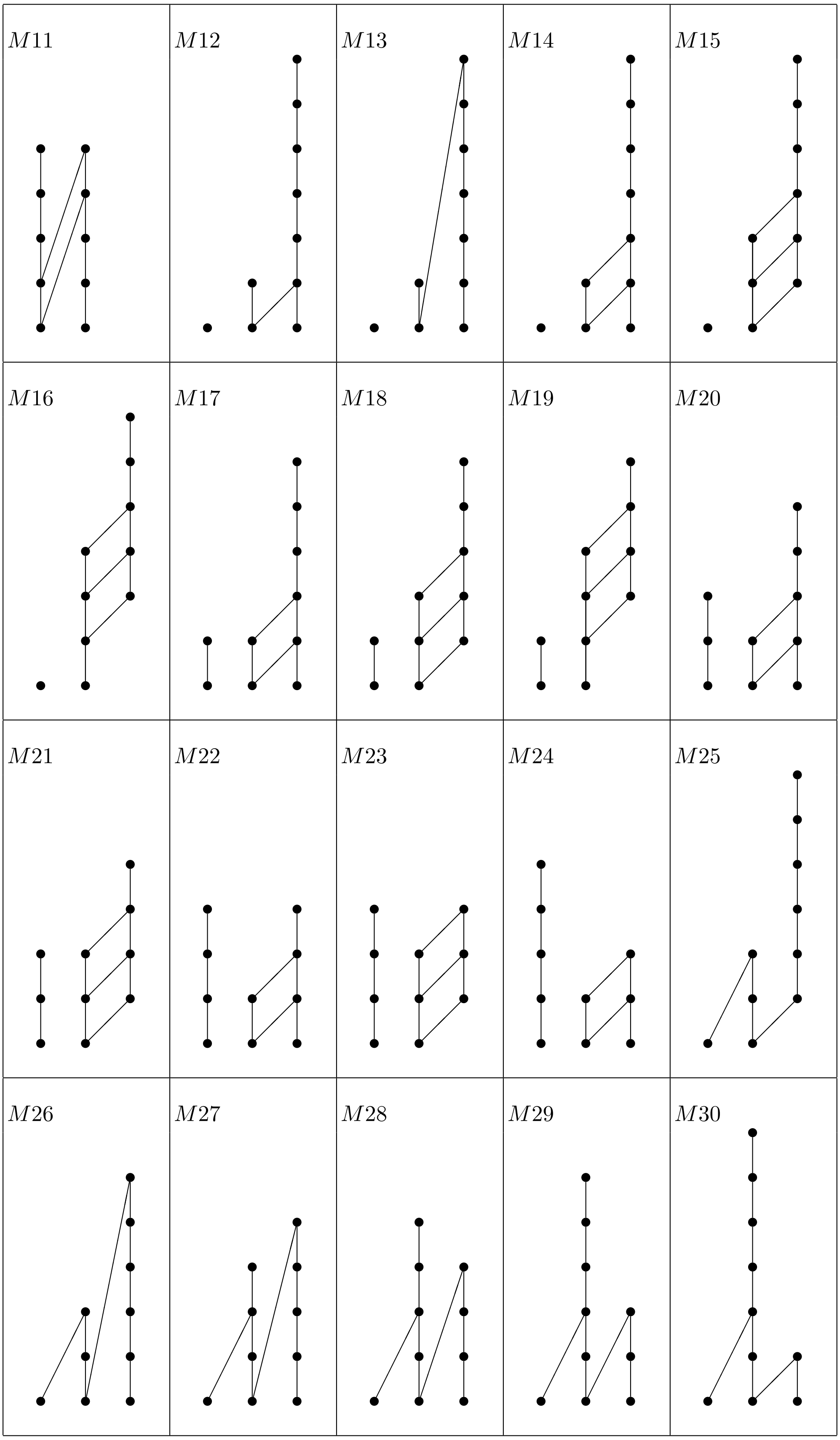
$M37 = \{1 \prec 2 \prec 5, 3 \prec 4 \prec 5, 4 \prec 7, 3 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

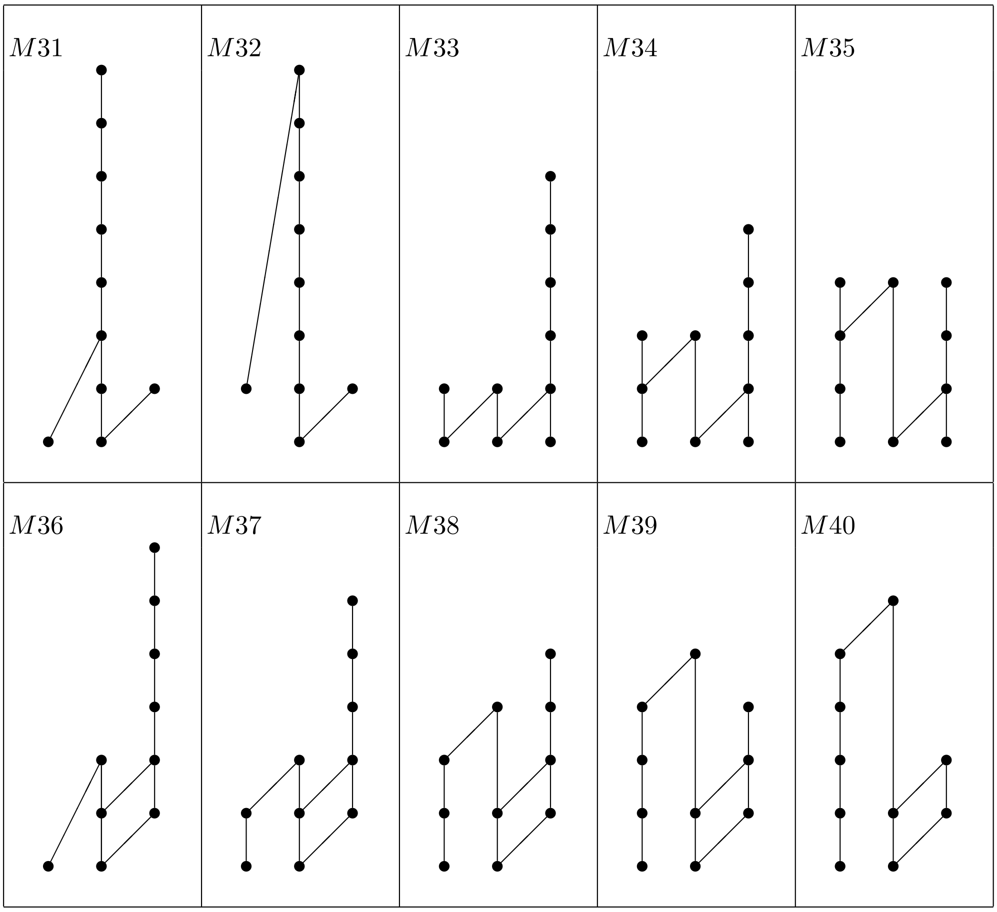
$M38 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 6, 4 \prec 5 \prec 6, 5 \prec 8, 4 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M39 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 7, 5 \prec 6 \prec 7, 6 \prec 9, 5 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$;

$M40 = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 8, 6 \prec 7 \prec 8, 7 \prec 10, 6 \prec 9 \prec 10\}$.




$M11$
$M12$
$M13$
$M14$
$M15$
$M16$
$M17$
$M18$
$M19$
$M20$
$M21$
$M22$
$M23$
$M24$
$M25$
$M26$
$M27$
$M28$
$M29$
$M30$



Доведення. Застосуємо алгоритм 2.2.4. до доведення теореми.

Крок I. Описати (з точністю до сильного ізоморфізму) усі нижні підмножини X множини $M0$. Це:

$X_0 = \varnothing$, $X_1 = \{1\}$, $X_2 = \{7\}$, $X_3 = \{9\}$, $X_4 = \{1,2\}$, $X_5 = \{1,7\}$, $X_6 = \{1,9\}$, $X_7 = \{7,8\}$, $X_8 = \{7,9\}$, $X_9 = \{1,2,3\}$, $X_{10} = \{1,2,7\}$, $X_{11} = \{1,2,9\}$, $X_{12} = \{1,7,8\}$, $X_{13} = \{1,7,9\}$, $X_{14} = \{7,8,9\}$, $X_{15} = \{7,9,10\}$, $X_{16} = \{1,2,3,4\}$, $X_{17} = \{1,2,3,7\}$, $X_{18} = \{1,2,3,9\}$, $X_{19} = \{1,2,7,8\}$, $X_{20} = \{1,2,7,9\}$, $X_{21} = \{1,7,8,9\}$, $X_{22} = \{1,7,9,10\}$, $X_{23} = \{7,8,9,10\}$, $X_{24} = \{1,2,3,4,5\}$, $X_{25} = \{1,2,3,4,7\}$, $X_{26} = \{1,2,3,4,9\}$, $X_{27} = \{1,2,3,7,8\}$, $X_{28} = \{1,2,3,7,9\}$. $X_{29} = \{1,2,7,8,9\}$, $X_{30} = \{1,2,7,9,10\}$, $X_{31} = \{1,7,8,9,10\}$, $X_{32} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $X_{33} = \{1,2,3,4,5,7\}$, $X_{34} = \{1,2,3,4,5,9\}$, $X_{35} = \{1,2,3,4,7,8\}$, $X_{36} = \{1,2,3,4,7,9\}$, $X_{37} = \{1,2,3,7,8,9\}$, $X_{38} =$

$\{1,2,3,7,9,10\}$, $X_{39} = \{1,2,7,8,9,10\}$, $X_{40} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $X_{41} = \{1,2,3,4,5,6,9\}$, $X_{42} = \{1,2,3,4,5,7,8\}$, $X_{43} = \{1,2,3,4,5,7,9\}$, $X_{44} = \{1,2,3,4,7,8,9\}$, $X_{45} = \{1,2,3,4,7,9,10\}$, $X_{46} = \{1,2,3,7,8,9,10\}$, $X_{47} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $X_{48} = \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$, $X_{49} = \{1,2,3,4,5,7,8,9\}$, $X_{50} = \{1,2,3,4,5,7,9,10\}$, $X_{51} = \{1,2,3,4,7,8,9,10\}$, $X_{52} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $X_{53} = \{1,2,3,4,5,6,7,9,10\}$, $X_{54} = \{1,2,3,4,5,7,8,9,10\}$.

Позначимо через K_i множину $M0^{\uparrow}_{X_i}$. Тоді легко перевірити, що

K_0 ізоморфна $M0$, K_1 ізоморфна $M24$, K_2 ізоморфна $M13$, K_3 ізоморфна $M25^{\mathrm{op}}$, K_4 ізоморфна $M22$, K_5 ізоморфна $M26$, K_6 ізоморфна $M40$, K_7 ізоморфна $M7$, K_8 ізоморфна $M12^{\mathrm{op}}$, K_9 ізоморфна $M20$, K_{10} ізоморфна $M27$, K_{11} ізоморфна $M39$, K_{12} ізоморфна $M9$, K_{13} ізоморфна $M33^{\mathrm{op}}$, K_{14} ізоморфна $M31^{\mathrm{op}}$, K_{15} ізоморфна $M9^{\mathrm{op}}$, K_{16} ізоморфна $M17$, K_{17} ізоморфна $M28$, K_{18} ізоморфна $M38$, K_{19} ізоморфна $M10$, K_{20} ізоморфна $M34^{\mathrm{op}}$, K_{21} ізоморфна $M30^{\mathrm{op}}$, K_{22} ізоморфна $M36^{\mathrm{op}}$, K_{23} ізоморфна $M1^{\mathrm{op}}$, K_{24} ізоморфна $M14$, K_{25} ізоморфна $M29$, K_{26} ізоморфна $M37$, K_{27} ізоморфна $M11$, K_{28} ізоморфна $M35$, K_{29} ізоморфна $M29^{\mathrm{op}}$, K_{30} ізоморфна $M37^{\mathrm{op}}$, K_{31} ізоморфна $M14^{\mathrm{op}}$, K_{32} ізоморфна $M1$, K_{33} ізоморфна $M30$, K_{34} ізоморфна $M36$, K_{35} ізоморфна $M10^{\mathrm{op}}$, K_{36} ізоморфна $M34$, K_{37} ізоморфна $M28^{\mathrm{op}}$, K_{38} ізоморфна $M38^{\mathrm{op}}$, K_{39} ізоморфна $M17^{\mathrm{op}}$, K_{40} ізоморфна $M31$, K_{41} ізоморфна $M6$, K_{42} ізоморфна $M9^{\mathrm{op}}$, K_{43} ізоморфна $M33$, K_{44} ізоморфна $M27^{\mathrm{op}}$, K_{45} ізоморфна $M39^{\mathrm{op}}$, K_{46} ізоморфна $M20^{\mathrm{op}}$, K_{47} ізоморфна $M7^{\mathrm{op}}$, K_{48} ізоморфна $M12$, K_{49} ізоморфна $M26^{\mathrm{op}}$, K_{50} ізоморфна $M40^{\mathrm{op}}$, K_{51} ізоморфна $M22^{\mathrm{op}}$, K_{52} ізоморфна $M13^{\mathrm{op}}$, K_{53} ізоморфна $M25$, K_{54} ізоморфна $M24^{\mathrm{op}}$.

Крок II. Описати (з точністю до сильного ізоморфізму) усі пари нижніх підмножин (див. алгоритм 2.2.4.). Ось вони:

для $M0$ — $X'_1 = (X_{31}, \{1\})$, $X'_2 = (X_{39}, \{1\})$, $X'_3 = (X_{39}, \{1,2\})$, $X'_4 = (X_{46}, \{1\})$, $X'_5 = (X_{46}, \{1,2\})$, $X'_6 = (X_{46}, \{1,2,3\})$, $X'_7 = (X_{48}, \{7\})$, $X'_8 = (X_{51}, \{1\})$, $X'_9 = (X_{51}, \{1,2\})$, $X'_{10} = (X_{51}, \{1,2,3\})$,

$X'_{11} = (X_{51}, \{1,2,3,4\})$, $X'_{12} = (X_{52}, \{7\})$, $X'_{13} = (X_{52}, \{9\})$, $X'_{14} = (X_{52}, \{7,9\})$, $X'_{15} = (X_{53}, \{7\})$, $X'_{16} = (X_{54}, \{1\})$, $X'_{17} = (X_{54}, \{1,2\})$, $X'_{18} = (X_{54}, \{1,2,3\})$, $X'_{19} = (X_{54}, \{1,2,3,4\})$, $X'_{20} = (X_{54}, \{1,2,3,4,5\})$.

Позначимо через K'_i множину $M0^{\uparrow\uparrow}_{VW}$, де $(V,W) = X'_i$. Тоді легко перевірити, що

K'_1 ізоморфна $M2^{\mathrm{op}}$, K'_2 ізоморфна $M15^{\mathrm{op}}$, K'_3 ізоморфна $M3^{\mathrm{op}}$, K'_4 ізоморфна $M18^{\mathrm{op}}$, K'_5 ізоморфна $M16^{\mathrm{op}}$, K'_6 ізоморфна $M4$, K'_7 ізоморфна $M5$, K'_8 ізоморфна $M21^{\mathrm{op}}$, K'_9 ізоморфна $M19$, K'_{10} ізоморфна $M16$, K'_{11} ізоморфна $M3$, K'_{12} ізоморфна $M32$, K'_{13} ізоморфна $M8^{\mathrm{op}}$, K'_{14} ізоморфна $M5^{\mathrm{op}}$, K'_{15} ізоморфна $M8$, K'_{16} ізоморфна $M23$, K'_{17} ізоморфна $M21$, K'_{18} ізоморфна $M18$, K'_{19} ізоморфна $M15$, K'_{20} ізоморфна $M2$.

Крок III. Легко побачити, що в I і II кожна з множин Mi, зазначених у таблиці (див. формулювання теореми), або дуальна до неї (у недуальному випадку) зустрічається лише один раз.

Таким чином, теорема доведена. □

5.4. Висновки до розділу

У цьому розділі вводиться поняття надсуперкритичних ч. в. множин. Якщо говорити коротко і більш формально, це здійснюється в декілька наступних кроків.

1. Для ч. в множини X позначимо через $\mathcal{X}^+$ множину всіх одноелементних розширень $X \cup a$ множини X таких, що елемент a разом із порівняльними з ним елементами утворює ланцюг.

2. Зафіксуємо суперкритичні ч. в. множини $\mathcal{N}_i$ (по одній із кожного класу ізоморфізму) і розглянемо в об'єднанні всіх множин $\mathcal{N}_i^+$ підмножину мінімальних (відносно включення) ч. в. множин. Елементи цієї підмножини називаємо надсуперкритичними ч.в. можинами. Мотивацією для такого означення є той факт (див. твердження 5.1), що

суперкритичні ч. в. множини можна отримати таким же самим способом із критичних.

3. Отже, пара, що складається із класу всіх ч. в. множин, мінімаксно ізоморфних надсуперкритичним, і самих надсуперкритичних ч. в. множин, є узагальненням пари, що складається із класу всіх ч. в. множин, мінімаксно ізоморфних суперкритичним (тобто із NP-критичних множин) і самих суперкритичних ч. в. множин, а також пари, що складається із класу всіх ч. в. множин, мінімаксно ізоморфних критичним (тобто із P-критичних множин), і самих критичних ч. в. множин. Мається на увазі, що в усіх випадках друга компонента пари є мінімаксною системою твірних першої компоненти пари.

Далі, у цьому розділі описано з точністю до ізоморфізму і дуальності всі ч. в. множини, мінімаксно ізоморфні надсуперкритичним. Їх число дорівнює 203.

Розділ 6

КОЕФІЦІЄНТИ ТРАНЗИТИВНОСТІ

6.1. Означення коефіцієнта транзитивності та його обчислення

Нехай S — (скінченна) ч.в. множина і $S^2_< := \{(x, y) \,|\, x, y \in S, x < y\}$. Якщо $(x, y) \in S^2_<$ і немає елемента $z \in S$, що задовольняє нерівність $x < z < y$, то елементи x і y називатимемо *сусідніми.* Покладемо $n_w = n_w(S) := |S^2_<|$ і позначимо через $n_e = n_e(S)$ кількість пар сусідніх елементів. Ми називаємо відношення $k_t = k_t(S)$ чисел $n_w - n_e$ і n_w *коефіцієнтом транзитивності* ч.в. множини S; у випадку $n_w = 0$ (тоді $n_e = 0$) вважається, що $k_t = 0$. Очевидно, що дуальні ч.в. множини мають однаковий коефіцієнт транзитивності.

Легко бачити, що коефіцієнт транзитивності ч.в. множини S дорівнює ймовірності того, що порівняльні елементи S не є сусідніми. Цей термін стає більш зрозумілим на мові направленої діаграми Хассе. А саме це ймовірність того, що серед всіх шляхів ненульової довжини фіксований шлях має довжину більшу одиниці.

Нагадаємо, що найбільша довжина серед усіх довжин лінійно впорядкованих підмножин множини S називається її *висотою*, а найбільша кількість попарно непорівняльних елементів S називається *шириною.* Елемент ч.в. множини називається *вузловим*, якщо він порівняльний з усіма іншими елементами. Підмножина X ч.в. множини T називається *щільною*, якщо немає елементів $x_1, x_2 \in X$ і $y \in T \setminus X$

таких, що $x_1 < y < x_2$, і *зв'язною*, якщо вона не є прямою сумою двох непорожніх підмножин. Зауважимо, що в цьому розділі пряма сума позначається символом $\sqcup$.

Ми представлятимемо ч.в. множину у вигляді прямої суми $\sqcup_i^k X_i$ ланцюгів X_i $(i = 2, \ldots, k)$ з додатковими відношеннями $y \prec z$ для y і z, що належать до різних ланцюгів (це можливо завдяки теоремі Ділуорса). За A_s, B_s, C_s позначимо відповідно ланцюги $a_1 \prec \ldots \prec a_s$, $b_1 \prec \ldots \prec b_s$, $c_1 \prec \ldots \prec c_s$.

Лема 6.1. *Нехай* $S = S_1 \sqcup S_2$. *Тоді*
(a) $n_e(S) = n_e(S_1) + n_e(S_2)$*;*
(b) $n_w(S) = n_w(S_1) + n_w(S_2)$.

Доведення очевидне.

Лема 6.2. *Нехай* $S = A_m$. *Тоді*
(a) $n_e(S) = m - 1$*;*
(b) $n_w(S) = \frac{(m-1)m}{2}$.

Лема доводиться простими комбінаторними обчисленнями.

Лема 6.3. *Нехай* $S = \{A_m \sqcup B_n, a_i \prec b_j\}$. *Тоді*
(a) $n_e(S) = m + n - 1$*;*
(b) $n_w(S) = \frac{(m-1)m+(n-1)n}{2} + i(n - j + 1)$.

Лема випливає з рівностей $n_e(S) = n_e(A_m) + n_e(B_n) + 1$, $n_w(S) = n_w(A_m) + n_w(B_n) + n_w^S(A_m, B_n)$, $n_w^S(A_m, B_n) = i(n - j + 1)$ і лем 6.1, 6.2 (з використанням простих комбінаторних обчислень).

Лема 6.4. *Нехай* $S = \{A_m \sqcup B_n, a_i \prec b_j, a_{i'} \prec b_{j'}\}$, *де* $i < i', j < j'$. *Тоді*
(a) $n_e(S) = m + n$*;*
(b) $n_w(S) = \frac{(m-1)m+(n-1)n}{2} + i'(n - j' + 1) + i(j' - j)$.

Лема випливає з рівностей $n_e(S) = n_e(A_m) + n_e(B_n) + 2$, $n_w(S) = n_w(S \setminus (a_{i'}, b_{j'})) + n_w^S([a_{i+1}, a_{i'}], [b_{j'}, b_n]) = n_w(S \setminus (a_{i'}, b_{j'})) + (i' - i)(n - j' + 1)$ та лем 6.2, 6.3.

Лема 6.5. *Нехай* $S = \{A_m \sqcup B_n \sqcup C_s, a_i \prec b_j, b_{j'} \prec c_k$, *де* $j > j'$. *Тоді*

(*a*) $n_e(S) = m + n + s - 1$;

(*b*) $n_w(S) = \frac{(m-1)m+(n-1)n+s(s-1)}{2} + i(n - j + 1) + j'(s - k + 1)$.

Лема випливає з рівностей $n_e(S) = n_e(A_m) + n_e(B_n) + n_e(C_s) + 2$, $n_w(S) = n_w(A_m \sqcup B_n, a_i < b_j) + n_w(B_n \sqcup C_s, b_{j'} < c_k) - n_w(B_n)$ та лем 6.2, 6.3.

Лема 6.6. *Нехай* $S = \{A_m \sqcup B_n, a_i < b_j, a_{i+1} < b_{j+1}, a_{i+2} < b_{j+2}$. *Тоді*

(*a*) $n_e(S) = m + n + 1$;

(*b*) $n_w(S) = \frac{(m-1)m+(n-1)n}{2} + (i + 2)n - i(j - 1) - (2j + 1)$.

Лема випливає з рівностей $n_e(S) = n_e(A_m) + n_e(B_n) + 3$, $n_w(S) = n_w(S \setminus (a_{i+2}, b_j) + n_w^S(\{a_{i+2}\}, [b_{j+2}, b_n]) = n_w(S \setminus (a_{i+2}, b_j) + n - j - 1$ і лем 6.2, 6.4.

Лема 6.7. *Нехай* $S = \{A_m \sqcup B_n \sqcup C_s, a_i < b_j, b_{j'} < c_k$, $b_{j'+1} < c_{k+1}$, *де* $j > j' + 1$. *Тоді*

(*a*) $n_e(S) = m + n + s$;

(*b*) $n_w(S) = \frac{(m-1)m+(n-1)n+s(s-1)}{2} + i(n - j + 1) + (j' + 1)(s - k) + j'$.

Лема випливає з рівностей $n_e(S) = n_e(A_m) + n_e(B_n) + n_e(C_s) + 3$, $n_w(S) = n_w(A_m \sqcup B_n, a_i < b_j) + n_w(B_n \sqcup C_s, b_{j'} < c_k, b_{j'+1} < c_{k+1}) - n_w(B_n)$ і лем 6.2–6.4.

В наступних підрозділах ці леми будуть використані для обчислення коефіцієнтів транзитивності для всіх (з точністю до ізоморфізму і дуальності) несерійних додатних множин, P-критичних і NP-критичних множин та надсуперкритичних множин. Щоб ці леми використовувалися більш явно і наглядно, ми кожен з випадків, отриманих в попередніх розділах класифікації (вказаних класів), переформулюємо на теоретико-множинній мові, тобто (як і в лемах) на мові прямих сум з додатковими відношеннями.

Коефіцієнти транзитивності k_t обчислюються з точністю до п'яти десяткових знаків (до речі вони додатні та менші за одиницю). Всі майбутні таблиці окремо і в сукупності для кожного класу множин задовольняють (як легко перевірити) такі умови:

a) якщо кількість знаків після коми менше ніж п'ять, то десятковий дріб скінченний, а якщо п'ять, то нескінченний;

b) якщо два десяткових дроби збігаються до п'яти знаків включно, то вони рівні.

Такі властивості десяткових дробів допомагають (на відміну від звичайних дробів) візуально побачити різні нерівності між коефіцієнтами транзитивності.

6.2. Коефіцієнти транзитивності несерійних додатних ч.в. множин

Додатні несерійні ч.в. множини класифіковані в [9] через їх діаграми Хассе (див. Розділ 1) та в теоремах 2.44-2.46 із Розділу 3 за їх порядком (який може дорівнювати лише 5, 6 або 7).

6.2.1. Коефіцієнти транзитивності додатних множин порядку 5. Обчислимо коефіцієнти транзитивності k_t несерійних додатних множин, які вказані в теоремі 2.44. В таблиці нижче множини впорядковані лексикографічно відповідно до їх ширини w, висоти h, коефіцієнтів транзитивності k_t і числа N. Горизонтальні лінії проводяться таким чином, щоб всередині кожного блоку w і h однакові.

Теорема 6.8. *Справедливо наступне для ч.в. множин $NSP5.1$ – $NSP5.10$:*

N	w	h	n_e	n_w	k_t	N	w	h	n_e	n_w	k_t
5.3	2	3	5	7	0,28571	5.6	3	2	2	2	0
5.1	2	3	4	6	0,33333	5.7	3	2	3	3	0
5.2	2	3	4	6	0,33333	5.8	3	2	4	4	0
5.5	2	4	5	8	0,375	5.10	3	3	4	5	0,2
5.4	2	4	4	8	0,5	5.9	3	3	3	4	0,25

Дані, зазначені в таблиці теореми 6.8 для ч.в. множин із теореми 2.44 перевіряються безпосередніми обчисленнями з використанням

лем 6.1, 6.2 для $N = 5.6$,

леми 6.3 для $N = 5.1, 5.2, 5.4$,

лем 6.1–6.3 для $N = 5.7, 5.9$,

леми 6.4 для $N = 5.3, 5.5$,

леми 6.5 для $N = 5.8, 5.10$.

6.2.2. Коефіцієнти транзитивності додатних множин порядку 6. Обчислимо коефіцієнти транзитивності k_t несерійних додатних множин, які вказані в теоремі 2.45.

Теорема 6.9. *Справедливо наступне для ч.в. множин $NSP6.1$ – $NSP6.32$:*

N	w	h	n_e	n_w	k_t	N	w	h	n_e	n_w	k_t
6.2	2	3	6	9	0,33333	6.5	2	4	5	9	0,44444
6.1	2	3	5	8	0,375	6.7	2	4	6	11	0,45455
6.8	2	4	6	10	0,4	6.10	2	4	6	11	0,45455
6.9	2	4	6	10	0,4	6.3	2	4	5	10	0,5
6.11	2	4	7	12	0,41667	6.6	2	4	6	12	0,5
6.4	2	4	5	9	0,44444	6.15	2	5	6	12	0,5

N	w	h	n_e	n_w	k_t	N	w	h	n_e	n_w	k_t
6.14	2	5	6	13	$0,53846$	6.27	3	3	6	8	$0,25$
6.13	2	5	5	12	$0,58333$	6.22	3	3	5	7	$0,28571$
6.12	2	5	5	13	$0,61538$	6.24	3	3	5	7	$0,28571$
6.16	3	2	4	4	0	6.26	3	3	5	7	$0,28571$
6.17	3	2	5	5	0	6.19	3	3	4	6	$0,33333$
6.23	3	3	5	6	$0,16667$	6.31	3	4	5	8	$0,375$
6.25	3	3	5	6	$0,16667$	6.32	3	4	5	8	$0,375$
6.20	3	3	4	5	$0,2$	6.29	3	4	4	7	$0,42857$
6.21	3	3	4	5	$0,2$	6.30	3	4	5	9	$0,44444$
6.18	3	3	3	4	$0,25$	6.28	3	4	4	8	$0,5$

Дані, зазначені в таблиці теореми 6.9 для ч.в. множин із теореми 2.45 перевіряються безпосередніми обчисленнями з використанням

лем 6.1, 6.2 для $N = 6.18$,

леми 6.3 для $N = 6.1, 6.3 - 6.5, 6.12, 6.13$,

лем 6.1–6.3 для $N = 6.16, 6.19 - 6.21, 6.28 - 6.29$,

леми 6.4 для $N = 6.2, 6.6 - 6.10, 6.14, 6.15$,

лем 6.1, 6.2, 6.4 для $N = 6.26, 6.32$,

леми 6.5 для $N = 6.17, 6.22 - 6.25, 6.30 - 6.31$,

леми 6.6 для $N = 6.11$,

леми 6.7 для $N = 6.27$.

6.2.3. Коефіцієнти транзитивності додатних множин порядку 7. Обчислимо коефіцієнти транзитивності k_t несерійних додатних множин найбільшого порядку, які вказані в теоремі 2.46.

Теорема 6.10. *Справедливо наступне для ч.в. множин* $NSP7.1$ *–* $NSP7.66$*:*

N	w	h	n_e	n_w	k_t
7.4	2	4	7	12	0,41667
7.1	2	4	6	11	0,45455
7.2	2	4	6	11	0,45455
7.3	2	4	7	13	0,46154
7.5	2	4	7	13	0,46154
7.6	2	4	8	15	0,46667
7.14	2	5	7	14	0,5
7.16	2	5	7	14	0,5
7.20	2	5	8	17	0,52941
7.13	2	5	7	15	0,53333
7.17	2	5	7	15	0,53333
7.8	2	5	6	13	0,53846
7.9	2	5	6	13	0,53846
7.19	2	5	8	18	0,55556
7.12	2	5	7	16	0,5625
7.18	2	5	7	16	0,5625
7.11	2	5	7	17	0,58824
7.15	2	5	7	17	0,58824
7.7	2	5	6	15	0,6
7.10	2	5	7	18	0,61111
7.24	2	6	7	17	0,58824
7.23	2	6	7	19	0,63158
7.25	2	6	7	19	0,63158
7.22	2	6	6	17	0,64706
7.21	2	6	6	19	0,68421

N	w	h	n_e	n_w	k_t
7.34	3	3	6	7	0,14286
7.35	3	3	6	7	0,14286
7.29	3	3	5	6	0,16667
7.40	3	3	7	9	0,22222
7.32	3	3	6	8	0,25
7.33	3	3	6	8	0,25
7.38	3	3	6	8	0,25
7.26	3	3	5	7	0,28571
7.27	3	3	5	7	0,28571
7.28	3	3	5	7	0,28571
7.39	3	3	7	10	0,3
7.30	3	3	6	9	0,33333
7.31	3	3	6	9	0,33333
7.36	3	3	6	9	0,33333
7.37	3	3	6	9	0,33333
7.47	3	4	6	9	0,33333
7.51	3	4	6	9	0,33333
7.55	3	4	6	9	0,33333
7.57	3	4	7	11	0,36364
7.58	3	4	7	11	0,36364
7.44	3	4	5	8	0,375
7.48	3	4	6	10	0,4
7.50	3	4	6	10	0,4
7.56	3	4	7	12	0,41667
7.60	3	4	7	12	0,41667

N	w	h	n_e	n_w	k_t	N	w	h	n_e	n_w	k_t
7.41	3	4	4	7	$0,42857$	7.42	3	4	5	10	$0,5$
7.43	3	4	5	9	$0,44444$	7.52	3	4	6	12	$0,5$
7.45	3	4	5	9	$0,44444$	7.65	3	5	6	12	$0,5$
7.46	3	4	6	11	$0,45455$	7.64	3	5	6	13	$0,53846$
7.49	3	4	6	11	$0,45455$	7.66	3	5	6	13	$0,53846$
7.53	3	4	6	11	$0,45455$	7.62	3	5	5	11	$0,54545$
7.54	3	4	6	11	$0,45455$	7.63	3	5	6	14	$0,57143$
7.59	3	4	7	13	$0,46154$	7.61	3	5	5	13	$0,61538$

Дані, зазначені в таблиці теореми 6.10 для ч.в. множин із теореми 2.46 перевіряються безпосередніми обчисленнями з використанням

лем 6.1, 6.2 для $N = 7.41$,

леми 6.3 для $N = 7.1 - 7.2, 7.7 - 7.9, 7.21 - 7.22$,

лем 6.1–6.3 для $N = 7.26 - 7.29, 7.42 - 7.45, 7.61 - 7.62$,

леми 6.4 для $N = 7.3 - 7.5, 7.10 - 7.18, 7.23 - 7.25$,

лем 6.1, 6.2, 6.4 для $N = 7.37 - 7.38, 7.52 - 7.55, 7.66$,

леми 6.5 для $N = 7.30 - 7.36, 7.46 - 7.51, 7.63 - 7.65$,

леми 6.6 для $N = 7.6, 7.19 - 7.20$,

лем 6.1, 6.2, 6.6 для $N = 7.60$,

леми 6.7 для $N = 7.39 - 7.40, 7.56 - 7.59$.

6.2.4. Загальні висновки. Враховуючи лексикографічне позначення в таблицях теорем 6.8-6.10, легко перевірити, що з них випливають наступні загальні наслідки.

Теорема 6.11. *Нехай S і T — несерійні додатні множини. Тоді*

(1) $k_t(T) > k_t(S)$, *якщо* $h(T) > h(S) + 1$;

(2) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{20}$, *якщо* $h(T) = h(S) + 1$.

Теорема 6.12. *Нехай S і T — несерійні додатні множини. Тоді*

(3) $k_t(T) \geq k_t(S)$, *якщо* $w(T) = w(S) = 3$ *і* $h(T) > h(S)$*;*

(4) $k_t(T) \geq k_t(S)$, *якщо* $w(T) = w(S) = 2$, $h(T) > h(S)$ *і діаграма Хассе множини* T *не є циклом.*

6.3. Коефіцієнти транзитивності P-критичних множин

P-критичні ч.в. множини класифіковані в [9] через їх діаграми Хассе (див. Розділ 1). В наступних теоремах ми використовуємо модифікацію такої класифікації, в якій множини розбиті на класи мінімаксних ізоморфізмів (див. розділ 2). До того ж (щоб для обчислення коефіцієнтів транзитивності користуватися приведеними вище лемами) ми, як і у випадку несерійних додатних множин, використовуємо теоретико-множинні задання ч. в. множин.

6.3.1. Коефіцієнти транзитивності P-критичних множин порядку 4. Серед множин Клейнера є лише одна множина $\mathcal{K}_1 = (1,1,1,1)$ порядку 4.

Твердження 6.13. *P-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{K}_1$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 3 множинами:*

1) $A_2 \sqcup B_2, a_1 < b_2, b_1 < a_2$;
2) $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_1, a_1 < b_2, c_1 < b_2$;
3) $A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup D_1$.

Наслідок 6.14. *Для P-критичних множин MM-типу $\mathcal{K}_1$ коефіцієнти транзитивності* $k_t = 0$.

Наслідок випливає з того, що $n_e = n_c$. Звідки $k_t = 0$.

6.3.2. Коефіцієнти транзитивності P-критичних множин порядку 6. Серед множин Клейнера є лише одна множина $\mathcal{K}_2 = (2, 2, 2)$ порядку 6.

Твердження 6.15. *P-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{K}_2$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 7 множинами:*

1) $A_2 \sqcup B_4, a_2 < b_3$;
2) $A_3 \sqcup B_3, a_2 < b_2$;
3) $A_3 \sqcup B_3, a_1 < b_1, a_3 < b_3$;
4) $A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2$;
5) $A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2, a_1 < b_2, b_1 < c_2, c_1 < a_2$.
6) $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_3, b_2 < c_3$;
7) $A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_2, a_1 < b_3, b_2 < c_2$;

Обчислимо коефіцієнти транзитивності k_t P -критичних множин. У наведеній нижче таблиці множини розташовані в порядку зростання їхніх висот (позначається h), а якщо висоти рівні, то в порядку зростання коефіцієнтів транзитивності.

Теорема 6.16. *Для P-критичних множин MM-типу $\mathcal{K}_2$ справедливо наступне:*

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
4	2	3	3	0	3	4	6	11	$0,45454$
5	2	6	6	0	2	4	5	10	$0,5$
7	3	5	7	$0,28571$	1	4	5	11	$0,54545$
6	3	4	6	$0,33333$					

Доведення теореми 6.16 проводиться прямими обчисленнями, використовуючи

леми 6.1, 6.2 для $N = 4$,

лему 6.3 для $N = 1, 2$,

леми 6.1–6.3 для $N = 6$,

лему 6.4 для $N = 3$,

лему 6.5 для $N = 7$.

Наслідок 6.17. *Коефіцієнт транзитивності $k_t(S)$ множини S є найбільшим серед усіх множин MM-типу $\mathcal{K}_2$ тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину з двома вузловими елементами.*

6.3.3. Коефіцієнти транзитивності P-критичних множин порядку 7. Серед множин Клейнера є лише одна множина $\mathcal{K}_3 = (1, 3, 3)$ порядку 7.

Твердження 6.18. *P-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{K}_3$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 12 множинами:*

1) $A_3 \sqcup B_4, a_1 < b_2$;

2) $A_3 \sqcup B_4, a_3 < b_4$;

3) $A_2 \sqcup B_5, a_1 < b_3$;

4) $A_1 \sqcup B_6, a_1 < b_4$;

5) $A_2 \sqcup B_5, a_1 < b_1, a_2 < b_4$;

6) $A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_3$;

7) $A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_3, a_1 < b_2, b_1 < c_2$;

8) $A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_3, a_2 < b_2, b_1 < c_3$.

9) $A_2 \sqcup B_1 \sqcup C_4, b_1 < c_4$;

10) $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_4, a_1 < b_2, b_1 < c_3$;

11) $A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_5, b_1 < c_4$;

12) $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_4, b_1 < c_1, b_2 < c_4$;

Обчислимо коефіцієнти транзитивності k_t P -критичних множин. У наведеній нижче таблиці множини розташовані в порядку зростання їхніх висот (позначається h), а якщо висоти рівні, то в порядку зростання коефіцієнтів транзитивності.

Теорема 6.19. *Для P-критичних множин MM-типу $\mathcal{K}_3$ справедливо наступне:*

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
8	3	6	8	0,25	2	4	6	12	0,5
6	3	4	6	0,33333	12	5	6	12	0,5
7	3	6	10	0,4	3	5	6	14	0,57143
9	4	5	8	0,375	11	5	5	12	0,58333
10	4	6	10	0,4	5	6	7	18	0,61111
1	4	6	12	0,5	4	6	6	18	0,66667

Доведення теореми 6.19 проводиться прямими обчисленнями, використовуючи

леми 6.1, 6.2 для $N = 6$,

лему 6.3 для $N = 1 - 4$,

леми 6.1–6.3 для $N = 9, 11$,

лему 6.4 для $N = 5$,

леми 6.1, 6.2, 6.4 для $N = 12$,

лему 6.5 для $N = 7 - 8, 10$.

Наслідок 6.20. *Коефіцієнт транзитивності $k_t(S)$ множини S є найбільшим серед усіх множин MM-типу $\mathcal{K}_3$ тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину з трьома вузловими елементами.*

6.3.4. Коефіцієнти транзитивності P-критичних множин порядку 8 примітивного MM-типу. Серед множин Клейнера є лише одна примітивна множина $\mathcal{K}_4 = (1, 2, 5)$ найбільшого порядку 8.

Твердження 6.21. *P-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{K}_4$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 25 множинами:*

1) $A_4 \sqcup B_4, a_1 < b_3$;

2) $A_3 \sqcup B_5, a_1 < b_4$;

3) $A_3 \sqcup B_5, a_2 < b_5$;

4) $A_2 \sqcup B_6, a_1 < b_2$;

5) $A_2 \sqcup B_6, a_1 < b_5$;

6) $A_2 \sqcup B_6, a_2 < b_6$;

7) $A_1 \sqcup B_7, a_1 < b_3$;

8) $A_1 \sqcup B_7, a_1 < b_6$;

9) $A_2 \sqcup B_6, a_1 < b_1, a_2 < b_3$;

10) $A_2 \sqcup B_6, a_1 < b_1, a_2 < b_6$;

11) $A_3 \sqcup B_5, a_2 < b_1, a_3 < b_3$;

12) $A_3 \sqcup B_1 \sqcup C_4, b_1 < c_3$;

13) $A_4 \sqcup B_1 \sqcup C_3, b_1 < c_3$;

14) $A_3 \sqcup B_2 \sqcup C_3, b_1 < c_1, b_2 < c_3$;

15) $A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_4, a_1 < b_2, b_1 < c_4$;

16) $A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_3, a_1 < b_2, b_1 < c_3$.

17) $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_5$;

18) $A_2 \sqcup B_1 \sqcup C_5, b_1 < c_3$;

19) $A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_4, b_1 < c_1, b_2 < c_3$;

20) $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_5, a_1 < b_2, b_1 < c_2$;

21) $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_5, a_1 < b_2, b_1 < c_5$;

22) $A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_6, b_1 < c_3$;

23) $A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_6, b_1 < c_6$;

24) $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_5, b_1 < c_1, b_2 < c_3$;

25) $A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_4, b_2 < c_1, b_3 < c_3$.

Обчислимо коефіцієнти транзитивності k_t P -критичних множин. У наведеній нижче таблиці множини розташовані в порядку зростання їхніх висот (позначається h), а якщо висоти рівні, то в порядку зростання коефіцієнтів транзитивності.

Теорема 6.22. *Для P-критичних множин MM-типу $\mathcal{K}_4$ справедливо наступне:*

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
14	4	7	11	$0,36364$	5	6	7	18	$0,61111$
13	4	6	10	$0,4$	6	6	7	18	$0,61111$
15	4	7	12	$0,41667$	23	6	6	16	$0,625$
12	4	6	11	$0,45454$	24	6	7	19	$0,63158$
16	4	7	13	$0,46154$	25	6	7	19	$0,63158$
1	4	7	14	$0,5$	4	6	7	21	$0,66667$
1	5	7	13	$0,46154$	22	6	6	19	$0,68421$
19	5	7	14	$0,5$	10	7	8	23	$0,65217$
2	5	7	15	$0,53333$	9	7	8	26	$0,69231$
3	5	7	15	$0,53333$	11	7	8	26	$0,69231$
17	5	5	11	$0,54545$	8	7	7	23	$0,69565$
20	5	7	16	$0,5625$	7	7	7	26	$0,73077$
18	5	6	14	$0,57143$					

Доведення теореми 6.22 проводиться прямими обчисленнями, використовуючи

леми 6.1, 6.2 для $N = 17$,

лему 6.3 для $N = 1 - 8$,

леми 6.1–6.3 для $N = 12 - 13, 18, 22 - 23$,

лему 6.4 для $N = 9 - 11$,

леми 6.1, 6.2, 6.4 для $N = 14, 19, 24 - 25$,

лему 6.5 для $N = 15 - 16, 20 - 21$.

Наслідок 6.23. *Коефіцієнт транзитивності $k_t(S)$ множини S є найбільшим серед усіх множин MM-типу $\mathcal{K}_4$ тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину з п'ятьма вузловими елементами.*

6.3.5. Коефіцієнти транзитивності P-критичних можин порядку 8 непримітивного MM-типу. Серед множин Клейнера є лише одна непримітивна множина $\mathcal{K}_5 = (N, 4)$ найбільшого порядку 8.

Твердження 6.24. *P-критичні ч.в. множини мінімаксно еквівалентні непримітивній множині $\mathcal{K}_5$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 28 множинами:*

1) $A_4 \sqcup B_4, a_1 < b_3, a_2 < b_4$;
2) $A_3 \sqcup B_5, a_1 < b_4, a_2 < b_5$;
3) $A_2 \sqcup B_6, a_1 < b_2, a_2 < b_3$;
4) $A_2 \sqcup B_6, a_1 < b_2, a_2 < b_6$;
5) $A_2 \sqcup B_6, a_1 < b_5, a_2 < b_6$;
6) $A_5 \sqcup B_3, a_1 < b_2, a_5 < b_3$;
7) $A_5 \sqcup B_3, a_4 < b_2, a_5 < b_3$;
8) $A_3 \sqcup B_5, a_1 < b_1, a_2 < b_2, a_3 < b_3$;
9) $A_4 \sqcup B_4, a_2 < b_1, a_3 < b_2, a_4 < b_3$;
10) $A_3 \sqcup B_2 \sqcup C_3, b_1 < c_2, b_2 < c_3$;
11) $A_3 \sqcup B_2 \sqcup C_3, a_2 < b_3, b_1 < c_2$;
12) $A_4 \sqcup B_2 \sqcup C_2, b_1 < c_2$;
13) $A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_4, b_1 < c_2, b_2 < c_3$;
14) $A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_4, a_1 < b_3, b_1 < c_4$;
15) $A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_3, a_1 < b_3, b_1 < c_3$;
16) $A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_4, a_1 < b_2, b_1 < c_2$;
17) $A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_3, b_1 < c_1, b_2 < c_2, b_3 < c_3$;
18) $A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_3, a_2 < b_3, b_1 < c_1, b_2 < c_2$;
19) $A_3 \sqcup B_3 \sqcup C_2, a_3 < b_3, b_1 < c_1, b_2 < c_2$;
20) $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_5, b_1 < c_2$;
21) $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_5, b_1 < c_5$;
22) $A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_5, b_1 < c_2, b_2 < c_3$;

23) $A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_4, a_1 < b_3, b_1 < c_1;$

24) $A_1 \sqcup B_5 \sqcup C_2, a_1 < b_3, b_1 < c_2;$

25) $A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_4, b_1 < c_1, b_2 < c_2, b_3 < c_3;$

26) $A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_4, a_1 < b_3, b_1 < c_1, b_2 < c_2;$

27) $A_1 \sqcup B_6 \sqcup C_1, a_1 < b_3, b_1 < c_1;$

28) $A_1 \sqcup B_6 \sqcup C_1, a_1 < b_6, b_1 < c_1.$

Обчислимо коефіцієнти транзитивності k_t P -критичних множин. У наведеній нижче таблиці множини розташовані в порядку зростання їхніх висот (позначається h), а якщо висоти рівні, то в порядку зростання коефіцієнтів транзитивності.

Теорема 6.25. *Для P-критичних множин, мінімаксно еквівалентних непримітивній множині $\mathcal{K}_5$, справедливо наступне:*

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
10	3	7	10	$0,3$	26	5	8	17	$0,52941$
11	3	7	11	$0,36364$	24	5	7	15	$0,53333$
12	4	6	9	$0,33333$	25	5	8	18	$0,55556$
14	4	7	11	$0,36364$	20	5	6	15	$0,6$
17	4	8	13	$0,38461$	22	5	7	18	$0,61111$
19	4	8	13	$0,38461$	5	6	8	19	$0,57895$
15	4	7	12	$0,41667$	6	6	8	19	$0,57895$
16	4	7	12	$0,41667$	28	6	7	17	$0,58824$
18	4	8	14	$0,42857$	4	6	8	22	$0,63636$
13	4	7	13	$0,46154$	7	6	8	22	$0,63636$
1	4	8	15	$0,46667$	8	6	9	25	$0,64$
28	5	8	16	$0,5$	9	6	9	25	$0,64$
48	5	6	12	$0,5$	27	6	7	20	$0,65$
58	5	7	14	$0,5$	3	6	8	25	$0,68$

Доведення теореми 6.25 проводиться прямими обчисленнями, використовуючи

леми 6.1–6.3 для $N = 12, 20 - 21$,

лему 6.4 для $N = 1 - 7$,

леми 6.1, 6.2, 6.4 для $N = 10, 13, 22$,

лему 6.5 для $N = 11, 14 - 16, 23 - 24, 27 - 28$,

лему 6.6 для $N = 8 - 9$,

лему 6.7 для $N = 18 - 19, 26$,

леми 6.1, 6.2, 6.6 для $N = 17, 25$.

Наслідок 6.26. *Коефіцієнт транзитивності $k_t(S)$ множини S є найбільшим серед усіх множин мінімаксно еквівалентних непримітивній множині $\mathcal{K}_5$ тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину з чотирма вузловими елементами.*

6.3.6. Загальні наслідки. Сформулюємо наслідки, що стосуються всіх P-критичних множин.

Із усіх попередніх наслідків і таблиць цього підрозділу та твердження 2.32 випливають наступні теореми.

Теорема 6.27. *Коефіцієнт транзитивності $k_t(S)$ множини S є найбільшим серед усіх множин, мінімаксно еквівалентних фіксованій множині Клейнера $\mathcal{K}$, тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину з $h(\mathcal{K})$ вузловими елементами. Більшого числа вузлових елементів бути не може.*

Теорема 6.28. *Коефіцієнт транзитивності $k_t(S)$ множини S є найбільшим серед усіх множин, мінімаксно еквівалентних множинам Клейнера, тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину з найбільш можливим числом вузлових елементів.*

Теорема 6.29. *Нехай S і T — P-критичні множини. Тоді*

(1) $k_t(T) > k_t(S)$, *якщо* $h(T) > h(S) + 1$;

(2) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{10}$, *якщо* $h(T) = h(S) + 1$.

6.4. Коефіцієнти транзитивності NP-критичних множин

Ми використовуємо класифікацію NP-критичних ч.в. множин, отриману в розділі 4.

Як і в попередніх випадках ми використовуємо теоретико-множинні задання ч.в. множин.

6.4.1. Коефіцієнти транзитивності NP-критичних множин порядку 5. Серед множин Назарової є дві множини $\mathcal{N}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$ та $\mathcal{N}_2 = (1, 1, 1, 2)$ порядку 5.

Твердження 6.30. *NP-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{N}_1$ та $\mathcal{N}_2$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 10 множинами:*

1) $NP_{1.1} = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_2, a_1 < b_2, a_1 < c_2, b_1 < c_2, c_1 < b_2$;

2) $NP_{1.2} = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup D_2, a_1 < d_2, b_1 < d_2, c_1 < d_2$;

3) $NP_{1.3} = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup D_1 \sqcup E_1$;

4) $NP_{2.1} = A_2 \sqcup B_3, a_1 < b_2, b_1 < a_2$;

5) $NP_{2.2} = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_2, a_1 < b_2, b_1 < c_2, c_1 < b_2$;

6) $NP_{2.3} = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_1, a_1 < b_2, c_1 < b_2$;

7) $NP_{2.4} = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_1, a_1 < b_3, c_1 < b_3$;

8) $NP_{2.5} = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_1, a_1 < b_3, b_1 < a_1, b_1 < c_1, c_1 < b_3$;

9) $NP_{2.6} = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup D_2$;

10) $NP_{2.7} = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_2 \sqcup D_1, b_1 < c_2, d_1 < c_2$.

Обчислимо коефіцієнти транзитивності k_t P -критичних множин. У наведеній нижче таблиці множини розташовані в порядку зростання їхніх висот (позначається h), а якщо висоти рівні, то в порядку зростання коефіцієнтів транзитивності.

Теорема 6.31. *Для NP-критичних множин MM-типу порядку 5 справедливо наступне:*

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
$NP_{1.3}$	1	0	0	0	$NP_{1.2}$	2	4	4	0
$NP_{2.2}$	2	5	5	0	$NP_{2.4}$	3	4	5	0,2
$NP_{1.1}$	2	6	6	0	$NP_{2.1}$	3	5	7	0,28571
$NP_{2.6}$	2	1	1	0	$NP_{2.5}$	3	5	7	0,28571
$NP_{2.7}$	2	3	3	0	$NP_{2.3}$	3	4	7	0,42857

Доведення проводиться прямими обчисленнями.

Наслідок 6.32. *Для NP-критичних множин MM-типу $\mathcal{N}_1$ коефіцієнти транзитивності $k_t = 0$.*

Наслідок 6.33. *Коефіцієнт $k_t(S)$ множини S є найбільшим серед усіх множин MM-типу $\mathcal{N}_2$ тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину з двома вузловими елементами.*

6.4.2. Коефіцієнти транзитивності NP-критичних множин порядку 7. Серед множин Назарової є лише одна множина $\mathcal{N}_3 = (2, 2, 3)$ порядку 7.

Твердження 6.34. *NP-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{N}_3$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 15 множинами:*

1) $NP_{3.1} = A_3 \sqcup B_4, a_2 < b_3;$
2) $NP_{3.2} = A_2 \sqcup B_5, a_2 < b_3;$
3) $NP_{3.3} = A_2 \sqcup B_5, a_2 < b_4;$
4) $NP_{3.4} = A_3 \sqcup B_4, a_2 < b_2;$

5) $NP_{3.5} = A_3 \sqcup B_4, a_1 < b_1, a_3 < b_3$;

6) $NP_{3.6} = A_3 \sqcup B_4, a_1 < b_1, a_3 < b_4$;

7) $NP_{3.7} = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_3$;

8) $NP_{3.8} = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_3, b_2 < c_3$;

9) $NP_{3.9} = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_3, a_1 < b_3, b_2 < c_3$;

10) $NP_{3.10} = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_3, a_1 < b_2, b_1 < c_2, c_1 < a_2$.

11) $NP_{3.11} = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_4, b_2 < c_3$;

12) $NP_{3.12} = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_4, b_2 < c_4$;

13) $NP_{3.13} = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_3, b_1 < c_1, b_3 < c_3$;

14) $NP_{3.14} = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_3, a_1 < b_3, b_2 < c_2$;

15) $NP_{3.15} = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_2, a_1 < b_4, b_3 < c_2$.

Обчислимо коефіцієнти транзитивності k_t NP -критичних множин MM-типу $\mathcal{N}_3$. У наведеній нижче таблиці множини розташовані в порядку зростання їх висот (позначається h), а якщо висоти рівні, то в порядку зростання коефіцієнтів транзитивності.

Теорема 6.35. *Для множин MM-типу $\mathcal{N}_3$ $NP_{3.1}$ – $NP_{3.15}$ справедливо наступне:*

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
$NP_{3.7}$	3	4	5	0,2	$NP_{3.1}$	4	6	13	0,53846
$NP_{3.10}$	3	7	9	0,22222	$NP_{3.11}$	4	5	11	0,54545
$NP_{3.8}$	3	5	7	0,28571	$NP_{3.6}$	5	7	15	0,53333
$NP_{3.9}$	3	6	9	0,33333	$NP_{3.5}$	5	7	17	0,58824
$NP_{3.12}$	4	5	9	0,44444	$NP_{3.3}$	5	6	15	0,6
$NP_{3.13}$	4	6	11	0,45455	$NP_{3.4}$	5	6	15	0,6
$NP_{3.14}$	4	6	11	0,45455	$NP_{3.2}$	5	6	17	0,64706
$NP_{3.15}$	4	6	11	0,45455					

Доведення теореми 6.35 випливає з

лем 6.1, 6.2 для $NP_{3.7}$,

леми 6.3 для $NP_{3.1} - NP_{3.4}$,

лем 6.1–6.3 для $NP_{3.8}, NP_{3.11}, NP_{3.12}$,

леми 6.4 для $NP_{3.5} - NP_{3.6}$,

лем 6.1, 6.2, 6.4 для $NP_{3.13}$,

леми 6.5 для $NP_{3.9}, NP_{3.14}, NP_{3.15}$,

і прямих обчислень для $NP_{3.10}$.

Наслідок 6.36. *Ч.в. множина MM-типу $\mathcal{N}_3$ має найбільший коефіцієнт транзитивності тоді і тільки тоді, коли вона містить щільну підмножину з трьома вузловими елементами.*

6.4.3. Коефіцієнти транзитивності NP-критичних множин порядку 8. Серед множин Назарової є лише одна множина $\mathcal{N}_4 = (1, 3, 4)$ порядку 8.

Твердження 6.37. *NP-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{N}_4$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 26 множинами:*

1) $NP_{4.1} = A_4 \sqcup B_4, a_1 < b_2$;

2) $NP_{4.2} = A_3 \sqcup B_5, a_1 < b_2$;

3) $NP_{4.3} = A_3 \sqcup B_5, a_1 < b_3$;

4) $NP_{4.4} = A_3 \sqcup B_5, a_3 < b_5$;

5) $NP_{4.5} = A_2 \sqcup B_6, a_1 < b_3$;

6) $NP_{4.6} = A_2 \sqcup B_6, a_1 < b_4$;

7) $NP_{4.7} = A_1 \sqcup B_7, a_1 < b_4$;

8) $NP_{4.8} = A_1 \sqcup B_7, a_1 < b_5$;

9) $NP_{4.9} = A_2 \sqcup B_6, a_1 < b_1, a_2 < b_4$;

10) $NP_{4.10} = A_2 \sqcup B_6, a_1 < b_1, a_2 < b_5$;

11) $NP_{4.11} = A_3 \sqcup B_5, a_2 < b_1, a_3 < b_4$;

12) $NP_{4.12} = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_4$;

13) $NP_{4.13} = A_3 \sqcup B_1 \sqcup C_4, b_1 < c_4$;

14) $NP_{4.14} = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_4, a_1 < b_2, b_1 < c_2;$

15) $NP_{4.15} = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_4, a_1 < b_2, b_1 < c_3;$

16) $NP_{4.16} = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_4, a_2 < b_2, b_1 < c_3;$

17) $NP_{4.17} = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_4, a_2 < b_2, b_1 < c_4;$

18) $NP_{4.18} = A_2 \sqcup B_1 \sqcup C_5, b_1 < c_4;$

19) $NP_{4.19} = A_2 \sqcup B_1 \sqcup C_5, b_1 < c_5;$

20) $NP_{4.20} = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_4, b_1 < c_1, b_2 < c_4;$

21) $NP_{4.21} = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_5, a_1 < b_2, b_1 < c_3;$

22) $NP_{4.22} = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_5, a_1 < b_2, b_1 < c_4;$

23) $NP_{4.23} = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_6, b_1 < c_4;$

24) $NP_{4.24} = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_6, b_1 < c_5;$

25) $NP_{4.25} = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_5, b_1 < c_1, b_2 < c_4;$

26) $NP_{4.26} = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_5, b_1 < c_1, b_2 < c_5.$

Теорема 6.38. *Для множин ММ-типу* $\mathcal{N}_4$ $NP_{4.1}$ – $NP_{4.26}$ *справедливо наступне:*

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
$NP_{4.17}$	4	7	11	0,36364	$NP_{4.18}$	5	6	13	0,53846
$NP_{4.13}$	4	6	10	0,4	$NP_{4.3}$	5	7	16	0,5625
$NP_{4.16}$	4	7	12	0,41667	$NP_{4.4}$	5	7	16	0,5625
$NP_{4.12}$	4	5	9	0,44444	$NP_{4.2}$	5	7	17	0,58824
$NP_{4.15}$	4	7	13	0,46154	$NP_{4.26}$	6	7	17	0,58824
$NP_{4.14}$	4	7	14	0,5	$NP_{4.25}$	6	7	18	0,61111
$NP_{4.1}$	4	7	15	0,53333	$NP_{4.6}$	6	7	19	0,63158
$NP_{4.20}$	5	7	13	0,46154	$NP_{4.24}$	6	6	17	0,64706
$NP_{4.19}$	5	6	12	0,5	$NP_{4.5}$	6	7	20	0,65
$NP_{4.22}$	5	7	14	0,5	$NP_{4.23}$	6	6	18	0,66667
$NP_{4.21}$	5	7	15	0,53333	$NP_{4.10}$	7	8	24	0,66667

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
$NP_{4.9}$	7	8	25	0,68	$NP_{4.8}$	7	7	24	0,70833
$NP_{4.11}$	7	8	25	0,68	$NP_{4.7}$	7	7	25	0,72

Доведення теореми 6.38 випливає з

лем 6.1, 6.2 для $NP_{4.12}$,

леми 6.3 для $NP_{4.1} - NP_{4.8}$,

лем 6.1–6.3 для $NP_{4.13}, NP_{4.18} - NP_{4.19}, NP_{4.23} - NP_{4.24}$,

леми 6.4 для $NP_{4.9} - NP_{4.11}$,

лем 6.1, 6.2, 6.4 для $NP_{4.20}, NP_{4.25}, NP_{4.26}$,

леми 6.5 для $NP_{4.14} - NP_{4.17}, NP_{4.21} - NP_{4.22}$.

Наслідок 6.39. *Ч.в. множина MM-типу $\mathcal{N}_4$ має найбільший коефіцієнт транзитивності тоді і тільки тоді, коли вона містить щільну підмножину з чотирма вузловими елементами.*

6.4.4. Коефіцієнти транзитивності NP-критичних множин порядку 9 примітивного MM-типу. Серед множин Назарової є лише одна примітивна множина $\mathcal{N}_5 = (1, 2, 6)$ найбільшого порядку 9.

Твердження 6.40. *NP-критичні ч.в. множини MM-типу $\mathcal{N}_5$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 31 множинами:*

1) $NP_{5.1} = A_4 \sqcup B_5, a_1 < b_4$;
2) $NP_{5.2} = A_4 \sqcup B_5, a_2 < b_5$;
3) $NP_{5.3} = A_3 \sqcup B_6, a_1 < b_5$;
4) $NP_{5.4} = A_3 \sqcup B_6, a_2 < b_6$;
5) $NP_{5.5} = A_2 \sqcup B_7, a_1 < b_2$;
6) $NP_{5.6} = A_2 \sqcup B_7, a_1 < b_6$;
7) $NP_{5.7} = A_2 \sqcup B_7, a_2 < b_7$;
8) $NP_{5.8} = A_1 \sqcup B_8, a_1 < b_3$;

9) $NP_{5.9} = A_1 \sqcup B_8, a_1 < b_7$;

10) $NP_{5.10} = A_2 \sqcup B_7, a_1 < b_1, a_2 < b_3$;

11) $NP_{5.11} = A_2 \sqcup B_7, a_1 < b_1, a_2 < b_7$;

12) $NP_{5.12} = A_3 \sqcup B_6, a_2 < b_1, a_3 < b_3$;

13) $NP_{5.13} = A_4 \sqcup B_5, a_3 < b_1, a_4 < b_3$;

14) $NP_{5.14} = A_4 \sqcup B_1 \sqcup C_4, b_1 < c_3$;

15) $NP_{5.15} = A_4 \sqcup B_2 \sqcup C_3, b_1 < c_1, b_2 < c_3$;

16) $NP_{5.16} = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_4, a_1 < b_2, b_1 < c_4$;

17) $NP_{5.17} = A_3 \sqcup B_1 \sqcup C_5, b_1 < c_3$;

18) $NP_{5.18} = A_5 \sqcup B_1 \sqcup C_3, b_1 < c_3$;

19) $NP_{5.19} = A_3 \sqcup B_2 \sqcup C_4, b_1 < c_1, b_2 < c_3$;

20) $NP_{5.20} = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_5, a_1 < b_2, b_1 < c_5$;

21) $NP_{5.21} = A_1 \sqcup B_5 \sqcup C_3, a_1 < b_2, b_1 < c_3$;

22) $NP_{5.22} = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_6$;

23) $NP_{5.23} = A_2 \sqcup B_1 \sqcup C_6, b_1 < c_3$;

24) $NP_{5.24} = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_5, b_1 < c_1, b_2 < c_3$;

25) $NP_{5.25} = A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_4, b_2 < c_1, b_2 < c_3$;

26) $NP_{5.26} = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_6, a_1 < b_2, b_1 < c_2$;

27) $NP_{5.27} = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_6, a_1 < b_2, b_1 < c_6$;

28) $NP_{5.28} = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_7, b_1 < c_3$;

29) $NP_{5.29} = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_7, b_1 < c_7$;

30) $NP_{5.30} = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_6, b_1 < c_1, b_2 < c_3$;

31) $NP_{5.31} = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_5, b_2 < c_1, b_2 < c_3$.

Теорема 6.41. *Наступне має місце для множин $NP_{5.1}$ – $NP_{5.31}$ ММ-типу $\mathcal{N}_5$:*

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
$NP_{5.15}$	4	8	14	0,42857	$NP_{5.26}$	6	8	22	0,63636
$NP_{5.14}$	4	7	14	0,5	$NP_{5.23}$	6	7	20	0,65
$NP_{5.16}$	4	8	16	0,5	$NP_{5.6}$	7	8	24	0,66667
$NP_{5.18}$	5	7	14	0,5	$NP_{5.7}$	7	8	24	0,66667
$NP_{5.19}$	5	8	16	0,5	$NP_{5.29}$	7	7	22	0,68182
$NP_{5.20}$	5	8	16	0,5	$NP_{5.30}$	7	8	26	0,69231
$NP_{5.1}$	5	8	18	0,55556	$NP_{5.31}$	7	8	26	0,69231
$NP_{5.2}$	5	8	18	0,55556	$NP_{5.5}$	7	8	28	0,71429
$NP_{5.21}$	5	8	18	0,55556	$NP_{5.28}$	7	7	26	0,73077
$NP_{5.17}$	5	7	16	0,5625	$NP_{5.11}$	8	9	30	0,7
$NP_{5.27}$	6	8	18	0,55556	$NP_{5.9}$	8	8	30	0,73333
$NP_{5.3}$	6	8	20	0,6	$NP_{5.10}$	8	9	34	0,73529
$NP_{5.4}$	6	8	20	0,6	$NP_{5.12}$	8	9	34	0,73529
$NP_{5.24}$	6	8	20	0,6	$NP_{5.13}$	8	9	34	0,73529
$NP_{5.25}$	6	8	20	0,6	$NP_{5.8}$	8	8	34	0,76471
$NP_{5.22}$	6	6	16	0,625					

Доведення теореми 6.41 випливає з
лем 6.1, 6.2 для $NP_{5.22}$,
леми 6.3 для $NP_{5.1} - NP_{5.9}$,
лем 6.1–6.3 для $NP_{5.14}, NP_{5.17} - NP_{5.18}, NP_{5.23}, NP_{5.28} - NP_{5.29}$,
леми 6.4 для $NP_{5.10} - NP_{5.13}$,
лем 6.1, 6.2, 6.4 для $NP_{5.15}, NP_{5.19}, NP_{5.24} - NP_{5.25}, NP_{5.30} - NP_{5.31}$,
леми 6.5 для $NP_{5.16}, NP_{5.20} - NP_{5.21}, NP_{5.26} - NP_{5.27}$.

Наслідок 6.42. *Коефіцієнт $k_t(S)$ множини S є найбільшим серед усіх множин MM-типу $\mathcal{N}_5$ тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину з шістьма вузловими елементами.*

6.4.5. Коефіцієнти транзитивності NP-критичних множин порядку 9 непримітивного MM-типу. Серед множин Назарової є лише одна непримітивна множина $\mathcal{N}_6 = (N, 5)$ найбільшого порядку 9.

Твердження 6.43. *NP-критичні ч.в. множини мінімаксно ізоморфні $\mathcal{N}_6$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності, такими 33 множинами:*

1) $NP_{6.1} = A_4 \sqcup B_5, a_1 < b_4, a_2 < b_5$;

2) $NP_{6.2} = A_3 \sqcup B_6, a_1 < b_5, a_2 < b_6$;

3) $NP_{6.3} = A_2 \sqcup B_7, a_1 < b_2, a_2 < b_3$;

4) $NP_{6.4} = A_2 \sqcup B_7, a_1 < b_2, a_2 < b_7$;

5) $NP_{6.5} = A_2 \sqcup B_7, a_1 < b_6, a_2 < b_7$;

6) $NP_{6.6} = A_6 \sqcup B_3, a_1 < b_2, a_6 < b_3$;

7) $NP_{6.7} = A_6 \sqcup B_3, a_5 < b_2, a_6 < b_3$;

8) $NP_{6.8} = A_3 \sqcup B_6, a_1 < b_1, a_2 < b_2, a_3 < b_3$;

9) $NP_{6.9} = A_4 \sqcup B_5, a_2 < b_1, a_3 < b_2, a_4 < b_3$;

10) $NP_{6.10} = A_3 \sqcup B_2 \sqcup C_4, b_1 < c_2, b_2 < c_3$;

11) $NP_{6.11} = A_4 \sqcup B_2 \sqcup C_3, b_1 < c_2, b_2 < c_3$;

12) $NP_{6.12} = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_4, a_1 < b_3, b_1 < c_4$;

13) $NP_{6.13} = A_3 \sqcup B_2 \sqcup C_4, a_2 < b_2, b_1 < c_2$;

14) $NP_{6.14} = A_3 \sqcup B_3 \sqcup C_3, b_1 < c_1, b_2 < c_2, b_3 < c_3$;

15) $NP_{6.15} = A_3 \sqcup B_3 \sqcup C_3, a_3 < b_3, b_1 < c_1, b_2 < c_2$;

16)$NP_{6.16} = A_5 \sqcup B_2 \sqcup C_2, a_1 < b_2$;

17) $NP_{6.17} = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_5, b_1 < c_2, b_2 < c_3$;

18) $NP_{6.18} = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_5, a_1 < b_3, b_1 < c_5$;

19) $NP_{6.19} = A_1 \sqcup B_5 \sqcup C_3, a_1 < b_3, b_1 < c_3$;

20) $NP_{6.20} = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_5, a_1 < b_2, b_1 < c_2$;

21) $NP_{6.21} = A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_4, b_1 < c_1, b_2 < c_2, b_3 < c_3$;

22) $NP_{6.22} = A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_4, a_2 < b_3, b_1 < c_1, b_2 < c_2$;

23) $NP_{6.23} = A_4 \sqcup B_3 \sqcup C_2, a_4 < b_3, b_1 < c_1, b_2 < c_2;$

24) $NP_{6.24} = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_6, b_1 < c_2;$

25) $NP_{6.25} = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_6, b_1 < c_6;$

26) $NP_{6.26} = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_6, b_1 < c_2, b_2 < c_3;$

27) $NP_{6.27} = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_5, a_1 < b_3, b_1 < c_1;$

28) $NP_{6.28} = A_1 \sqcup B_6 \sqcup C_2, a_1 < b_3, b_1 < c_2;$

29) $NP_{6.29} = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_5, b_1 < c_1, b_2 < c_2, b_3 < c_3;$

30) $NP_{6.30} = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_4, b_2 < c_1, b_3 < c_2, b_4 < c_3;$

31) $NP_{6.31} = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_5, a_1 < b_3, b_1 < c_1, b_2 < c_2;$

32) $NP_{6.32} = A_1 \sqcup B_7 \sqcup C_1, a_1 < b_3, b_1 < c_1;$

33) $NP_{6.33} = A_1 \sqcup B_7 \sqcup C_1, a_1 < b_7, b_1 < c_1.$

Теорема 6.44. *Для множин $NP_{6.1}$ – $NP_{6.33}$, мінімаксних ізоморфних до $\mathcal{N}_6$, справедливо наступне :*

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
$NP_{6.11}$	4	8	13	0,38462	$NP_{6.17}$	5	8	19	0,57895
$NP_{6.14}$	4	9	15	0,4	$NP_{6.2}$	6	9	21	0,57143
$NP_{6.10}$	4	8	15	0,46667	$NP_{6.27}$	6	8	19	0,57895
$NP_{6.12}$	4	8	15	0,46667	$NP_{6.25}$	6	7	17	0,58824
$NP_{6.13}$	4	8	15	0,46667	$NP_{6.31}$	6	9	23	0,60870
$NP_{6.15}$	4	9	17	0,47059	$NP_{6.28}$	6	8	21	0,61905
$NP_{6.20}$	5	8	14	0,42857	$NP_{6.29}$	6	9	25	0,64
$NP_{6.16}$	5	7	13	0,46154	$NP_{6.30}$	6	9	25	0,64
$NP_{6.18}$	5	8	15	0,46667	$NP_{6.24}$	6	7	21	0,66667
$NP_{6.23}$	5	9	17	0,47059	$NP_{6.26}$	6	8	25	0,68
$NP_{6.1}$	5	9	19	0,52632	$NP_{6.5}$	7	9	25	0,64
$NP_{6.21}$	5	9	19	0,52632	$NP_{6.6}$	7	9	25	0,64
$NP_{6.22}$	5	9	19	0,52632	$NP_{6.33}$	7	8	23	0,65217
$NP_{6.19}$	5	8	17	0,52941	$NP_{6.4}$	7	9	29	0,68966

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
$NP_{6.7}$	7	9	29	0,68966	$NP_{6.32}$	7	8	27	0,70370
$NP_{6.8}$	7	10	33	0,69697	$NP_{6.3}$	7	9	33	0,72727
$NP_{6.9}$	7	10	33	0,69697					

Доведення теореми 6.44 випливає з

лем 6.1–6.3 для $NP_{6.16}, NP_{6.24} - NP_{6.25}$;

леми 6.4 для $NP_{6.1} - NP_{6.7}$;

лем 6.1, 6.2, 6.4 для $NP_{6.10} - NP_{6.11}, NP_{6.17}, NP_{6.26}$;

леми 6.5 для $NP_{6.12} - NP_{6.13}, NP_{6.18} - NP_{6.20}, NP_{6.27} - NP_{6.28}, NP_{6.32} - NP_{6.33}$;

леми 6.6 для $NP_{6.8} - NP_{6.9}$;

лем 6.1, 6.6 для $NP_{6.14}, NP_{6.21}, NP_{6.29} - NP_{6.30}$;

леми 6.7 для $NP_{6.15}, NP_{6.22} - NP_{6.23}, NP_{6.31}$.

Наслідок 6.45. *Коефіцієнт $k_t(S)$ множини S є найбільшим серед усіх мінімаксно ізоморфних $\mathcal{N}_6$ тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину, яка складається з п'яти вузлових елементів.*

6.4.6. Загальні висновки. Сформулюємо наслідки, що стосуються всіх NP-критичних множин.

Із усіх попередніх наслідків і таблиць цього підрозділу та твердження 3.20 випливають наступні теореми.

Теорема 6.46. *Коефіцієнт транзитивності $k_t(S)$ множини S є найбільшим серед усіх множин, мінімаксно еквівалентних фіксованій множині Назарової $\mathcal{N}$, тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину з $h(\mathcal{N})$ вузловими елементами. Більшого числа вузлових елементів бути не може.*

Теорема 6.47. *Коефіцієнт транзитивності $k_t(S)$ множини S є найбільшим серед усіх множин, мінімаксно еквівалентних множинам*

Назарової, тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину з найбільш можливим числом вузлових елементів.

Теорема 6.48. *Нехай S і T — NP-критичні множини. Тоді*
(1) $k_t(T) > k_t(S)$, *якщо* $h(T) > h(S) + 2$;
(2) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{50}$, *якщо* $h(T) = h(S) + 2$;
(3) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{5}$, *якщо* $h(T) = h(S) + 1$.

6.5. Коефіцієнти транзитивності надсуперкритичних ч.в. множин

Надсуперкритичні ч.в. множини введені в розділі 5. В цьому ж розділі описано, з точністю до ізоморфізму і дуальності, всі множини, мінімаксно еквівалентні надсуперкритичним.

6.5.1. Коефіцієнти транзитивності множин порядку 6 MM-типу Ai, Bj, Ck, Ds. На мові прямих сум (з додатковими відношеннями) маємо:

$A0 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_2 \sqcup D_2$;

$B0 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup D_3$;

$C0 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup D_1 \sqcup E_2$;

$D0 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup D_1 \sqcup E_1 \sqcup F_1$.

Наступна теорема є переформулюванням теореми 5.4 на мові прямих сум.

Твердження 6.49. *З точністю до ізоморфізму і дуальності повна множина ч. в. множин, мінімаксно еквівалентних $A0$,$B0$, $C0$, $D0$, складається, разом із самими множинами $A0$-$D0$, з наступних ч. в. множин:*

1) $A1 = A_2 \sqcup B_4, a_1 < b_3, b_2 < a_2$;

2) $A2 = A_3 \sqcup B_3, a_1 < b_2, b_1 < a_2$;

3) $A3 = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_1, a_1 < b_3, c_1 < b_3$;

4) $A4 = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_1, a_1 < b_4, b_1 < a_1, b_1 < c_1, c_1 < b_4$;

5) $A5 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2, a_2 < b_2, c_2 < b_2$;

6) $A6 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_3, a_1 < b_2, b_1 < c_3, c_2 < b_2$;

7) $A7 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_2, a_1 < b_2, b_1 < c_2, c_1 < b_2$;

8) $A8 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2, a_1 < b_2, b_1 < a_2, b_1 < c_2, c_1 < b_2$;

9) $A9 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_3 \sqcup D_1, b_1 < c_3, d_1 < c_3$;

10) $A10 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_2 \sqcup D_1, a_1 < b_2, b_1 < c_2, c_1 < b_2, d_1 < c_2$;

11) $B1 = A_2 \sqcup B_4, a_1 < b_2, b_1 < a_2$;

12) $B2 = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_1, a_1 < b_2, c_1 < b_2$;

13) $B3 = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_1, a_1 < b_3, b_1 < a_1, b_1 < c_1, c_1 < b_3$;

14) $B4 = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_1, a_1 < b_4, c_1 < b_4$;

15) $B5 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_3, a_1 < b_2, b_1 < c_2, c_1 < b_2$;

16) $B6 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2, a_2 < b_2, b_1 < c_2, c_1 < b_2$;

17) $B7 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_3 \sqcup D_1, b_1 < c_2, d_1 < c_2$;

18) $B8 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_3 \sqcup D_1, b_1 < c_3, c_1 < b_1, c_1 < d_1, d_1 < c_3$;

19) $B9 = A_2 \sqcup B_1 \sqcup C_2 \sqcup D_1, b_1 < c_2, d_1 < c_2$;

20) $C1 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_3, a_1 < b_2, a_1 < c_2, b_1 < c_2, c_1 < b_2$;

21) $C2 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_3, a_1 < b_2, a_1 < c_3, b_1 < c_3, c_2 < b_2$;

22) $C3 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2, a_1 < b_2, a_1 < c_2, b_1 < a_2, b_1 < c_2, c_1 < b_2$;

23) $C4 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup D_3, a_1 < d_2, b_1 < d_2, c_1 < d_2$;

24) $C5 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup D_3, a_1 < d_3, b_1 < d_3, c_1 < d_3, d_1 < a_1, d_1 < b_1, d_1 < c_1$;

25) $C6 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup D_3, a_1 < d_3, b_1 < d_3, c_1 < d_3$;

26) $C7 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_2 \sqcup D_1, a_1 < b_2, b_1 < c_2, c_1 < b_2, d_1 < b_2, d_1 < c_2$;

27) $C8 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup D_1 \sqcup E_2, b_1 < e_2, c_1 < e_2, d_1 < e_2$;

28) $D1 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2, a_1 < b_2, a_1 < c_2, b_1 < a_2, b_1 < c_2, c_1 < a_2, c_1 < b_2$;

29) $D2 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_2 \sqcup D_1, a_1 < b_2, a_1 < c_2, b_1 < c_2, c_1 < b_2, d_1 < b_2, d_1 < c_2$;

30) $D3 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_2 \sqcup D_1 \sqcup E_1, a_1 < c_2, b_1 < c_2, d_1 < c_2, e_1 < c_2.$

Обчислимо коефіцієнти транзитивності k_t надсуперкритичних множин MM-типу $A0 - D0$. У наведеній нижче таблиці множини розташовані в порядку зростання їх висот (позначається h), а якщо висоти рівні, то в порядку зростання коефіцієнтів транзитивності.

Теорема 6.50. *Наступне має місце для ч.в. множин Ai, Bj, Ck, Ds:*

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
$D0$	1	0	0	0	$C2$	3	7	9	0,22222
$A0$	2	2	2	0	$A6$	3	6	8	0,25
$A8$	2	7	7	0	$B5$	3	6	8	0,25
$A10$	2	6	6	0	$A5$	3	5	7	0,28571
$B9$	2	4	4	0	$C1$	3	7	10	0,3
$C0$	2	1	1	0	$B0$	3	2	3	0,33333
$C3$	2	8	8	0	$A7$	3	6	9	0,33333
$C7$	2	7	7	0	$A2$	3	6	10	0,4
$C8$	2	4	4	0	$C4$	3	5	9	0,44444
$D1$	2	9	9	0	$B7$	3	4	7	0,42857
$D2$	2	8	8	0	$A4$	4	7	10	0,3
$D3$	2	5	5	0	$B4$	4	5	8	0,375
$C5$	3	8	9	0,11111	$B3$	4	7	12	0,41667
$B6$	3	6	7	0,14286	$A1$	4	6	11	0,45455
$B8$	3	6	7	0,14286	$B1$	4	6	11	0,45455
$C6$	3	5	6	0,16667	$A3$	4	5	10	0,5
$A9$	3	4	5	0,2	$B2$	4	5	12	0,58333

Доведення проводиться прямими обчисленнями.

Наслідок 6.51. *Коефіцієнт $k_t(S)$ множини S є найбільшим серед усіх множин MM-типу $A0$ (відповідно $B0$, $C0$ чи $D0$) тоді і тільки* *тоді, коли S містить щільну підмножину з двома (відповідно трьома, двома чи одним) вузловими елементами.*

6.5.2. Коефіцієнти транзитивності множин порядку 8 MM-типу Ei, Fj. Надсуперкритичними множинами 8 порядку є множини:

$E0 = A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_3$;

$F0 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_4$.

Наступна теорема є переформулюванням теореми 5.5 на мові прямих сум.

Твердження 6.52. *З точністю до ізоморфізму і дуальності повна множина ч. в. множин, мінімаксно еквівалетних $E0$,$F0$ складається, разом із самими множинами $E0$-$F0$, з наступних частково впорядкованих множин:*

1) $E1 = A_2 \sqcup B_6, a_2 < b_4$;

2) $E2 = A_3 \sqcup B_5, a_1 < b_1, a_3 < b_4$;

3) $E3 = A_3 \sqcup B_5, a_2 < b_3$;

4) $E4 = A_3 \sqcup B_5, a_3 < b_4$;

5) $E5 = A_4 \sqcup B_4, a_1 < b_1, a_4 < b_4$;

6) $E6 = A_4 \sqcup B_4, a_2 < b_2$;

7) $E7 = A_4 \sqcup B_4, a_3 < b_2$;

8) $E8 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_5, b_2 < c_4$;

9) $E9 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_4, b_1 < c_1, b_3 < c_4$;

10) $E10 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_4, b_3 < c_4$;

11) $E11 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_4, b_2 < c_4$;

12) $E12 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_4, a_1 < b_3, b_2 < c_3$;

13) $E13 = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_3, a_1 < b_3, b_2 < c_2$;

14) $E14 = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_3, a_1 < b_4, b_3 < c_2$;

15) $E15 = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_3, a_1 < b_4, b_3 < c_3$;

16) $E16 = A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_3, a_2 < b_3, b_2 < c_3$;

17) $E17 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_4, a_1 < b_2, b_1 < c_3, c_2 < a_2$;

18) $E18 = A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_3, a_1 < b_2, b_1 < c_2, c_1 < a_2$;

19) $F1 = A_2 \sqcup B_6, a_2 < b_3$;

20) $F2 = A_3 \sqcup B_5, a_1 < b_1, a_3 < b_3$;

21) $F3 = A_4 \sqcup B_4, a_2 < b_1, a_4 < b_3$;

22) $F4 = A_2 \sqcup B_6, a_2 < b_5$;

23) $F5 = A_3 \sqcup B_5, a_1 < b_1, a_3 < b_5$;

24) $F6 = A_3 \sqcup B_5, a_2 < b_2$;

25) $F7 = A_3 \sqcup B_5, a_2 < b_4$;

26) $F8 = A_4 \sqcup B_4, a_2 < b_3$;

27) $F9 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_5, b2 < c_3$;

28) $F10 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_4, b_1 < c_1, b_3 < c_3$;

29) $F11 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_5, b_2 < c_5$;

30) $F12 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_4, b2 < c_3$;

31) $F13 = A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_3, b_1 < c_1, b_3 < c_3$;

32) $F14 = A_3 \sqcup B_2 \sqcup C_3, b_2 < c_3$;

33) $F15 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_4, a_1 < b_3, b_2 < c_2$;

34) $F16 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_4, a_1 < b_3, b_2 < c_4$;

35) $F17 = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_3, a_1 < b_3, b_2 < c_3$;

36) $F18 = A_1 \sqcup B_5 \sqcup C_2, a_1 < b_5, b_4 < c_2$;

37) $F19 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_4, a_1 < b_2, b_1 < c_2, c_1 < a_2$;

38) $F20 = A_3 \sqcup B_2 \sqcup C_3, a_2 < b_2, b_1 < c_2, c_1 < a_3$.

Теорема 6.53. *Наступне має місце для множин* Ei, Fj*:*

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
$E0$	3	5	7	0,28471	$E16$	3	7	11	0,36364
$E18$	3	8	12	0,33333	$F0$	4	5	8	0,375
$F14$	3	6	9	0,33333	$E17$	4	8	13	0,38462
$F20$	3	8	12	0,33333	$F19$	4	8	13	0,38462

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
$E11$	4	6	10	0,4	$F7$	5	7	17	0,58824
$F13$	4	7	12	0,41667	$F10$	5	7	17	0,58824
$F16$	4	7	12	0,41667	$E8$	5	6	15	0,6
$E15$	4	7	13	0,46154	$E6$	5	7	18	0,61111
$F17$	4	7	13	0,46154	$E3$	5	7	19	0,63158
$E10$	4	6	12	0,5	$E4$	5	7	19	0,63158
$E12$	4	7	14	0,5	$F9$	5	6	17	0,64706
$F12$	4	6	12	0,5	$F5$	6	8	20	0,6
$E13$	4	7	15	0,53333	$E2$	6	8	22	0,63636
$F8$	4	7	16	0,5625	$F4$	6	7	20	0,65
$E9$	5	7	15	0,53333	$E7$	6	7	21	0,66667
$F11$	5	6	13	0,53846	$F2$	6	8	24	0,66667
$E14$	5	7	16	0,5625	$F3$	6	8	24	0,66667
$F15$	5	7	16	0,5625	$F6$	6	7	21	0,66667
$F18$	5	7	16	0,5625	$E1$	6	7	22	0,68182
$E5$	5	8	19	0,57895	$F1$	6	7	24	0,70833

Доведення теореми 6.53 випливає з

лем 6.1, 6.2 для $N = E0, F0$,

леми 6.3 для $N = E1, E3, E4, E6, E7, F1, F4, F6, F7, F8$,

лем 6.1–6.3 для $N = E8, E10, E11, F9, F11, F12, F14$,

леми 6.4 для $N = E2, E5, F2, F3, F5$,

лем 6.1, 6.2, 6.4 для $N = E9, F10, F13$,

леми 6.5 для $N = E12 - E16, F15 - F18$,

і прямих обчислень для $N = E17, E18, F19, F20$.

Легко перевірити, що з теореми 6.53 випливають такі наслідки.

Наслідок 6.54. *Коефіцієнт $k_t(S)$ є найбільший серед усіх ч.в. множин MM-типу $E0$ (відповідно $F0$) тоді і тільки тоді, коли S*

містить щільну підмножину з трьома (відповідно чотирма) вузловими елементами.

6.5.3. Коефіцієнти транзитивності множин порядку 9 MM-типу Gi, Hj. Надсуперкритичними множинами 9 порядку є множини:

$G0 = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_4$;

$H0 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_5$.

Наступна теорема є переформулюванням теореми 5.6 на мові прямих сум.

Твердження 6.55. *З точністю до ізоморфізму і дуальності повна множина ч. в. множин, мінімаксно еквівалентних $G0$,$H0$, складається, разом із самими множинами $G0$-$H0$, з наступних ч. в. множин:*

1) $G1 = A_1 \sqcup B_8, a_1 < b_5$;

2) $G2 = A_2 \sqcup B_7, a_1 < b_1, a_2 < b_5$;

3) $G3 = A_3 \sqcup B_6, a_2 < b_1, a_3 < b_5$;

4) $G4 = A_2 \sqcup B_7, a_1 < b_4$;

5) $G5 = A_3 \sqcup B_6, a_1 < b_3$;

6) $G6 = A_4 \sqcup B_5, a_1 < b_2$;

7) $G7 = A_4 \sqcup B_5, a_4 < b_5$;

8) $G8 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_7, b_1 < c_5$;

9) $G9 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_6, b_1 < c_1, b_2 < c_5$;

10) $G10 = A_2 \sqcup B_1 \sqcup C_6, b_1 < c_5$;

11) $G11 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_5, b_1 < c_1, b_2 < c_5$;

12) $G12 = A_3 \sqcup B_1 \sqcup C_5, b_1 < c_5$;

13) $G13 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_6, a_1 < b_1, b_1 < c_4$;

14) $G14 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_5, a_1 < b_1, b_1 < c_3$;

15) $G15 = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_4, a_1 < b_2, b_1 < c_2$;

16) $G16 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_5, a_2 < b_2, b_1 < c_4$;

17) $G17 = A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_4, a_2 < b_2, b_1 < c_3$;

18) $G18 = A_3 \sqcup B_2 \sqcup C_4, a_3 < b_2, b_1 < c_4$;

19) $H1 = A_1 \sqcup B_8, a_1 < b_4$;

20) $H2 = A_2 \sqcup B_7, a_1 < b_1, a_2 < b_4$;

21) $H3 = A_3 \sqcup B_6, a_2 < b_1, a_3 < b_4$;

22) $H4 = A_1 \sqcup B_8, a_1 < b_6$;

23) $H5 = A_2 \sqcup B_7, a_1 < b_1, a_2 < b_6$;

24) $H6 = A_2 \sqcup B_7, a_1 < b_3$;

25) $H7 = A_2 \sqcup B_7, a_1 < b_5$;

26) $H8 = A_3 \sqcup B_6, a_1 < b_2$;

27) $H9 = A_3 \sqcup B_6, a_1 < b_4$;

28) $H10 = A_3 \sqcup B_6, a_3 < b_6$;

29) $H11 = A_4 \sqcup B_5, a_1 < b_3$;

30) $H12 = A_4 \sqcup B_5, a_3 < b_5$;

31) $H13 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_7, b1 < c_4$;

32) $H14 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_6, b_1 < c_1, b_2 < c_4$;

33) $H15 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_5, b_2 < c_1, b_3 < c_4$;

34) $H16 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_7, b_1 < c_6$;

35) $H17 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_6, b_1 < c_1, b_2 < c_6$;

36) $H18 = A_2 \sqcup B_1 \sqcup C_6, b1 < c_4$;

37) $H19 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_5, b_1 < c_1, b_2 < c_4$;

38) $H20 = A_2 \sqcup B_1 \sqcup C_6, b_1 < c_6$;

39) $H21 = A_3 \sqcup B_1 \sqcup C_5, b1 < c_4$;

40) $H22 = A_3 \sqcup B_2 \sqcup C_4, b_1 < c_1, b_2 < c_4$;

41) $H23 = A_4 \sqcup B_1 \sqcup C_4, b_1 < c_4$;

42) $H24 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_6, a_1 < b_2, b_1 < c_3$;

43) $H25 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_6, a_1 < b_2, b_1 < c_5$;

44) $H26 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_5, a_1 < b_2, b_1 < c_2$;

45) $H27 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_5, a_1 < b_2, b_1 < c_4$;

46) $H28 = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_4, a_1 < b_2, b_1 < c_3$;

47) $H29 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_5, a_2 < b_2, b_1 < c_3$;

48) $H30 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_5, a_2 < b_2, b_1 < c_5$;

49) $H31 = A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_4, a_2 < b_2, b_1 < c_4$.

Теорема 6.56. *Наступне має місце для множин Gi, Hj:*

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
$G18$	4	8	14	0,42857	$G11$	6	8	18	0,55556
$H23$	4	7	13	0,46154	$H19$	6	8	19	0,57895
$H31$	4	8	15	0,46667	$H25$	6	8	19	0,57895
$G0$	4	6	12	0,5	$H20$	6	7	17	0,58823
$G17$	4	8	16	0,5	$G13$	6	8	20	0,6
$H28$	4	8	17	0,52941	$G10$	6	7	18	0,61111
$G15$	4	8	18	0,55556	$H9$	6	8	21	0,61905
$H22$	5	8	15	0,46667	$H10$	6	8	21	0,61905
$H30$	5	8	15	0,46667	$H24$	6	8	21	0,61905
$G12$	5	7	14	0,5	$H18$	6	7	19	0,63158
$G16$	5	8	16	0,5	$G5$	6	8	22	0,63636
$H27$	5	8	17	0,52941	$H8$	6	8	23	0,65217
$H29$	5	8	17	0,52941	$H17$	7	8	23	0,65217
$H21$	5	7	15	0,53333	$G9$	7	8	24	0,66667
$H0$	5	6	13	0,53846	$H7$	7	8	25	0,68
$G14$	5	8	18	0,55556	$H14$	7	8	25	0,68
$H11$	5	8	19	0,57895	$H15$	7	8	25	0,68
$H12$	5	8	19	0,57895	$G4$	7	8	26	0,69231
$H26$	5	8	19	0,57895	$H16$	7	7	23	0,69565
$G6$	5	8	20	0,6	$H6$	7	8	27	0,70370
$G7$	5	8	20	0,6	$G8$	7	7	24	0,70833

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
$H13$	7	7	25	0,72	$H3$	8	9	33	0,72727
$H5$	8	9	31	0,70968	$H4$	8	8	31	0,74194
$G2$	8	9	32	0,71875	$G1$	8	8	32	0,75
$G3$	8	9	32	0,71875	$H1$	8	8	33	0,75758
$H2$	8	9	33	0,72727					

Доведення теореми 6.56 випливає з

лем 6.1, 6.2 для $N = G0, H0$,

деми 6.3 для $N = G1, G4 - G7, G6, H1, H4, H6 - H12$,

лем 6.1–6.3 для $N = G8, G10, G12, H13, H16, H18, H20 - H23$,

леми 6.4 для $N = G2, G3, H2, H3, H5$,

лем 6.1, 6.2, 6.4 для $N = G9, G11, H14, H15, H17, H19$,

лем 6.5 для $N = G13 - G18, H24 - F31$.

Легко перевірити, що з теореми 6.56 випливає такий наслідок.

Наслідок 6.57. *Коефіцієнт $k_t(S)$ є найбільший серед усіх ч.в. множин MM-типу $G0$ (відповідно, $H0$) тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину з чотирма (відповідно п'ятьма) вузловими елементами.*

6.5.4. Коефіцієнти транзитивності множин порядку 10 MM-типу $L0$. Надсуперкритичною примітивною множиною порядку 10 є множина

$L0 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_7$.

Наступна теорема є переформулюванням теореми 5.7 на мові прямих сум.

Твердження 6.58. *З точністю до ізоморфізму і дуальності повна множина ч. в. множин, мінімаксно еквівалентних $L0$, складається, разом з самою множиною $L0$, із наступних ч. в. множин:*

1) $L1 = A_1 \sqcup B_9, a_1 < b_3;$

2) $L2 = A_2 \sqcup B_8, a_1 < b_1, a_2 < b_3;$

3) $L3 = A_3 \sqcup B_7, a_2 < b_1, a_3 < b_3;$

4) $L4 = A_4 \sqcup B_6, a_3 < b_1, a_4 < b_3;$

5) $L5 = A_1 \sqcup B_9, a_1 < b_8;$

6) $L6 = A_2 \sqcup B_8, a_1 < b_1, a_2 < b_8;$

7) $L7 = A_2 \sqcup B_8, a_1 < b_2;$

8) $L8 = A_2 \sqcup B_8, a_1 < b_7;$

9) $L9 = A_2 \sqcup B_8, a_2 < b_8;$

10) $L10 = A_3 \sqcup B_7, a_1 < b_6;$

11) $L11 = A_3 \sqcup B_7, a_2 < b_7;$

12) $L12 = A_4 \sqcup B_6, a_1 < b_5;$

13) $L13 = A_4 \sqcup B_6, a_2 < b_6;$

14) $L14 = A_5 \sqcup B_5, a_1 < b_4;$

15) $L15 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_8, b_1 < c_3;$

16) $L16 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_7, b_1 < c_1, b_2 < c_3;$

17) $L17 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_6, b_2 < c_1, b_3 < c_3;$

18) $L18 = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_5, b_3 < c_1, b_4 < c_3;$

19) $L19 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_8, b_1 < c_8;$

20) $L20 = A_2 \sqcup B_1 \sqcup C_7, b_1 < c_3;$

21) $L21 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_6, b_1 < c_1, b_2 < c_3;$

22) $L22 = A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_5, b_2 < c_1, b_3 < c_3;$

23) $L23 = A_3 \sqcup B_1 \sqcup C_6, b_1 < c_3;$

24) $L24 = A_3 \sqcup B_2 \sqcup C_5, b_1 < c_1, b_2 < c_3;$

25) $L25 = A_3 \sqcup B_3 \sqcup C_4, b_2 < c_1, b_3 < c_3;$

26) $L26 = A_4 \sqcup B_1 \sqcup C_5, b_1 < c_3;$

27) $L27 = A_4 \sqcup B_2 \sqcup C_4, b_1 < c_1, b_2 < c_3;$

28) $L28 = A_5 \sqcup B_1 \sqcup C_4, b_1 < c_3;$

29) $L29 = A_5 \sqcup B_2 \sqcup C_3, b_1 < c_1, b_2 < c_3;$

30) $L30 = A_6 \sqcup B_1 \sqcup C_3, b_1 < c_3$;

31) $L31 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_7, a_1 < b_2, b_1 < c_2$;

32) $L32 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_7, a_1 < b_2, b_1 < c_7$;

33) $L33 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_6, a_1 < b_2, b_1 < c_6$;

34) $L34 = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_5, a_1 < b_2, b_1 < c_5$;

35) $L35 = A_1 \sqcup B_5 \sqcup C_4, a_1 < b_2, b_1 < c_4$;

36) $L36 = A_1 \sqcup B_6 \sqcup C_3, a_1 < b_2, b_1 < c_3$.

Теорема 6.59. *Наступне має місце для множин Li:*

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
$L29$	5	9	18	0,5	$L22$	7	9	27	0,66667
$L27$	5	9	19	0,52632	$L0$	7	7	22	0,68182
$L34$	5	9	20	0,55	$L31$	7	9	29	0,68966
$L28$	5	8	18	0,55556	$L20$	7	8	27	0,70370
$L35$	5	9	21	0,57143	$L8$	8	9	31	0,70968
$L26$	5	8	19	0,57895	$L9$	8	9	31	0,70968
$L14$	5	9	22	0,59091	$L19$	8	8	29	0,72414
$L33$	6	9	21	0,57143	$L16$	8	9	34	0,73529
$L30$	6	8	19	0,57895	$L17$	8	9	34	0,73529
$L24$	6	9	22	0,59091	$L18$	8	9	34	0,73529
$L25$	6	9	22	0,59091	$L7$	8	9	36	0,75
$L12$	6	9	23	0,60870	$L15$	8	8	34	0,76471
$L13$	6	9	23	0,60870	$L3$	8	10	43	0,76744
$L36$	6	9	24	0,625	$L6$	9	10	38	0,73684
$L23$	6	8	22	0,63636	$L5$	9	9	38	0,76316
$L32$	7	9	24	0,625	$L2$	9	10	43	0,76744
$L10$	7	9	26	0,65385	$L4$	9	10	43	0,76744
$L11$	7	9	26	0,65385	$L1$	9	9	43	0,79070
$L21$	7	9	27	0,66667					

Доведення теореми 6.59 випливає з

лем 6.1, 6.2 для $N = L0$,

леми 6.3 для $N = L1, L5, L7 - L14$,

лем 6.1–6.3 для $N = L15, L19, L20, L23, L26, L28, L30$,

леми 6.4 для $N = L2 - L4, L6$,

лем 6.1, 6.2, 6.4 для $N = L16 - L18, L21, L22, L24, L25, L27, L29$,

леми 6.5 для $N = L31 - L36$.

Легко перевірити, що з теореми 6.59 випливають такі наслідки.

Наслідок 6.60. *Коефіцієнт $k_t(S)$ є найбільший серед усіх ч.в. множин MM-типу $L0$ тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину з сім'ю вузловими елементами.*

6.5.5. Коефіцієнти транзитивності множин порядку 10 MM-типу $M0$. Надсуперкритичною непримітивною множиною порядку 10 є множина

$M0 = A_6 \sqcup B_2 \sqcup C_2, b_1 < c_2$.

Наступна теорема є переформулюванням теореми 5.8 на мові прямих сум.

Твердження 6.61. *З точністю до ізоморфізму і дуальності повна множина ч. в. множин, мінімаксно еквівалентних $M0$, складається, разом з самою множиною $M0$, із наступних ч. в. множин:*

1) $M1 = A_2 \sqcup B_8, a_1 < b_2, a_2 < b_3$;

2) $M2 = A_3 \sqcup B_7, a_1 < b_1, a_2 < b_2, a_3 < b_3$;

3) $M3 = A_4 \sqcup B_6, a_2 < b_1, a_3 < b_2, a_4 < b_3$;

4) $M4 = A_5 \sqcup B_5, a_3 < b_1, a_4 < b_2, a_5 < b_3$;

5) $M5 = A_2 \sqcup B_8, a_1 < b_2, a_2 < b_8$;

6) $M6 = A_3 \sqcup B_7, a_1 < b_1, a_2 < b_2$;

7) $M7 = A_2 \sqcup B_8, a_1 < b_7, a_2 < b_8$;

8) $M8 = A_3 \sqcup B_7, a_1 < b_1, a_2 < b_7$;

9) $M9 = A_3 \sqcup B_7, a_1 < b_6, a_2 < b_7$;

10) $M10 = A_4 \sqcup B_6, a_1 < b_5, a_2 < b_6$;

11) $M11 = A_5 \sqcup B_5, a_1 < b_4, a_2 < b_5$;

12) $M12 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_7, b_1 < c_2$;

13) $M13 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_7, b_1 < c_7$;

14) $M14 = A_1 \sqcup B_2 \sqcup C_7, b_1 < c_2, b_2 < c_3$;

15) $M15 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_6, b_1 < c_1, b_2 < c_2, b_3 < c_3$;

16) $M16 = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_5, b_2 < c_1, b_3 < c_2, b_4 < c_3$;

17) $M17 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_6, b_1 < c_2, b_2 < c_3$;

18) $M18- = A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_5, b_1 < c_1, b_2 < c_2, b_3 < c_3$;

19) $M19 = A_2 \sqcup B_4 \sqcup C_4, b_2 < c_1, b_3 < c_2, b_4 < c_3$;

20) $M20 = A_3 \sqcup B_2 \sqcup C_5, b_1 < c_2, b_2 < c_3$;

21) $M21 = A_3 \sqcup B_3 \sqcup C_4, b_1 < c_1, b_2 < c_2, b_3 < c_3$;

22) $M22 = A_4 \sqcup B_2 \sqcup C_4, b_1 < c_2, b_2 < c_3$;

23) $M23 = A_4 \sqcup B_3 \sqcup C_3, b_1 < c_1, b_2 < c_2, b_3 < c_3$;

24) $M24 = A_5 \sqcup B_2 \sqcup C_3, b_1 < c_2, b_2 < c_3$;

25) $M25 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_6, a_1 < b_3, b_1 < c_1$;

26) $M26 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_6, a_1 < b_3, b_1 < c_6$;

27) $M27 = A_1 \sqcup B_4 \sqcup C_5, a_1 < b_3, b_1 < c_5$;

28) $M28 = A_1 \sqcup B_5 \sqcup C_4, a_1 < b_3, b_1 < c_4$;

29) $M29 = A_1 \sqcup B_6 \sqcup C_3, a_1 < b_3, b_1 < c_3$;

30) $M30 = A_1 \sqcup B_7 \sqcup C_2, a_1 < b_3, b_1 < c_2$;

31) $M31 = A_1 \sqcup B_8 \sqcup C_1, a_1 < b_3, b_1 < c_1$;

32) $M32 = A_1 \sqcup B_8 \sqcup C_1, a_1 < b_8, b_1 < c_1$;

33) $M33 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_6, a_1 < b_2, b_1 < c_2$;

34) $M34 = A_3 \sqcup B_2 \sqcup C_5, a_2 < b_2, b_1 < c_2$;

35) $M35 = A_4 \sqcup B_2 \sqcup C_4, a_3 < b_2, b_1 < c_2$;

36) $M36 = A_1 \sqcup B_3 \sqcup C_6, a_1 < b_3, b_1 < c_1, b_2 < c_2$;

37) $M37 = A_2 \sqcup B_3 \sqcup C_5, a_2 < b_3, b_1 < c_1, b_2 < c_2$;

38) $M38 = A_3 \sqcup B_3 \sqcup C_4, a_3 < b_3, b_1 < c_1, b_2 < c_2$;

39) $M39 = A_4 \sqcup B_3 \sqcup C_3, a_4 < b_3, b_1 < c_1, b_2 < c_2$;

40) $M40 = A_5 \sqcup B_3 \sqcup C_2, a_5 < b_3, b_1 < c_1, b_2 < c_2$.

Теорема 6.62. *Наступне має місце для ч.в. множин* M_i*:*

N	h	n_e	n_w	k_t	N	h	n_e	n_w	k_t
$M23$	4	10	18	0,44444	$M17$	6	9	26	0,65385
$M22$	4	9	18	0,5	$M9$	7	10	27	0,62963
$M35$	4	9	19	0,52632	$M25$	7	9	25	0,64
$M24$	5	9	17	0,47059	$M13$	7	8	23	0,65217
$M21$	5	10	21	0,52381	$M36$	7	10	30	0,66667
$M39$	5	10	21	0,52381	$M30$	7	9	28	0,67857
$M27$	5	9	19	0,52632	$M15$	7	10	33	0,69697
$M38$	5	10	22	0,54545	$M16$	7	10	33	0,69697
$M28$	5	9	20	0,55	$M12$	7	8	28	0,71429
$M34$	5	9	20	0,55	$M14$	7	9	33	0,72727
$M11$	5	10	23	0,56522	$M7$	8	10	32	0,6875
$M20$	5	9	21	0,57142	$M8$	8	10	32	0,6875
$M40$	6	10	22	0,54545	$M32$	8	9	30	0,7
$M26$	6	9	20	0,55	$M5$	8	10	37	0,72973
$M0$	6	8	18	0,55556	$M6$	8	10	37	0,72973
$M10$	6	10	24	0,58333	$M2$	8	11	42	0,73810
$M37$	6	10	25	0,6	$M3$	8	11	42	0,73810
$M29$	6	9	23	0,60870	$M4$	8	11	42	0,73810
$M33$	6	9	23	0,60870	$M31$	8	9	35	0,74286
$M18$	6	10	26	0,61538	$M1$	8	10	42	0,76190
$M19$	6	10	26	0,61538					

Доведення теореми 6.62 випливає з

лем 6.1–6.3 для $N = M0, M12, M13,$

леми 6.4 для $N = M1, M5 - M11$,

лем 6.1, 6.2, 6.4 для $N = M14, M17, M20, M22, M24$,

леми 6.5 для $N = M25 - M35$.

леми 6.6 для $N = M2 - M4$,

лем 6.1, 6.6 для $N = M15, M16, M18, M19, M21, M23$,

леми 6.7 для $N = M36 - M40$.

Наслідок 6.63. *Коефіцієнт $k_t(S)$ ч.в. множини S є найбільшим серед усіх множин MM-типу $M0$ тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину із шістьма вузловими елементами.*

6.5.6. Загальні висновки. Сформулюємо наслідки, що стосуються всіх надсуперкритичних множин.

Із усіх попередніх наслідків і таблиць цього підрозділу та тверджень, аналогічних твердженням 2.32, 3.20, випливають наступні теореми.

Теорема 6.64. *Коефіцієнт транзитивності $k_t(S)$ множини S є найбільшим серед усіх множин, мінімаксно еквівалентних фіксованій надсуперкритичній множині X, тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину з $h(X)$ вузловими елементами. Більшого числа вузлових елементів бути не може.*

Теорема 6.65. *Коефіцієнт транзитивності $k_t(S)$ множини S є найбільшим серед усіх множин, мінімаксно еквівалентних надсуперкритичним множинам, тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину з найбільш можливим числом вузлових елементів.*

Теорема 6.66. *Нехай S і T — множини мінімаксно еквівалентні надсуперкритичним множинам. Тоді*

(1) $k_t(T) > k_t(S)$, *якщо* $h(T) > h(S) + 2$;

(2) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{25}$, *якщо* $h(T) = h(S) + 2$;

(3) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{5}$, *якщо* $h(T) = h(S) + 1$.

6.6. Висновки до розділу

У цьому розділі описуються коефіцієнти транзитивності для несерійних додатних, P-критичних і NP-критичних ч.в. множин та ч.в. множин надсуперкритичного MM-типу.

Із отриманого опису випливають, зокрема, такі теореми про зв'язок між коефіцієнтами транзитивності $k_1(S)$ і $k_1(T)$ ч.в. множин S і T та їхніми параметрами (висотою h і шириною w) і умови, за яких коефіцієнти транзитивності приймають найбільші значення.

Теорема 6.11. *Нехай S і T — несерійні додатні множини. Тоді*

(1) $k_t(T) > k_t(S)$, *якщо* $h(T) > h(S) + 1$;

(2) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{20}$, *якщо* $h(T) = h(S) + 1$.

Теорема 6.12. *Нехай S і T — несерійні додатні множини. Тоді*

(3) $k_t(T) \geq k_t(S)$, *якщо* $w(T) = w(S) = 3$ *і* $h(T) > h(S)$;

(4) $k_t(T) \geq k_t(S)$, *якщо* $w(T) = w(S) = 2$, $h(T) > h(S)$ *і діаграма Хассе множини T не є циклом.*

Теорема 6.29. *Нехай S і T — P-критичні множини. Тоді*

(1) $k_t(T) > k_t(S)$, *якщо* $h(T) > h(S) + 1$;

(2) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{10}$, *якщо* $h(T) = h(S) + 1$.

Теорема 6.67. *Нехай S і T — множини мінімаксно еквівалентні суперкритичним (відповідно надсуперкритичним) множинам. Тоді*

(1) $k_t(T) > k_t(S)$, *якщо* $h(T) > h(S) + 2$,

(2) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{p}$, *якщо* $h(T) = h(S) + 2$,

(3) $k_t(T) > k_t(S) - \frac{1}{5}$, *якщо* $h(T) = h(S) + 1$,

де $p = 50$ *(відповідно* $p = 25$*). .*

Теорема 6.68. *Коефіцієнт транзитивності $k_t(S)$ множини S є найбільшим серед усіх множин, мінімаксно еквівалентних фіксованій* *множині Клейнера (відповідно Назарової чи надсуперкритичній) тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину з вузлових елементів, порядок якої дорівнює висоті фіксованої множини. Більшого числа вузлових елементів бути не може.*

Теорема 6.69. *Коефіцієнт транзитивності $k_t(S)$ множини S є найбільшим серед усіх множин, мінімаксно еквівалентних множинам Клейнера (відповідно Назарової чи надсуперкритичній) тоді і тільки тоді, коли S містить щільну підмножину з найбільш можливим числом вузлових елементів.*

ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації наступні:

• Описано максимальні додатні ч.в. множини (множини з додатною квадратичною формою Тітса). Доведено, що кожна несерійна додатна множина вкладається в деяку максимальну як нижня або верхня підмножина.

• Введено поняття (верхнього) вузлового розширення порядку m довільної ч.в. множини і вивчається зображувальний тип його графа Хассе як комутативного сагайдака у випадку несерійної додатної множини. Доведено, що скінченний зображувальний тип визначається лише відсутністю в якості верхніх підсагайдаків комутативного сагайдака направлених розширених діаграм Динкіна.

• Доведено, що клас всіх додатних ч. в. множин має мінімаксну систему твірних із квазі-ланцюгових ч.в. множин (тобто таких, для яких діаграми Хассе є ланцюгами). Множина всіх мінімальних недодатних множин (які називаються P-критичними) такої властивості не має.

• Доведено, що для неорієтованого графа Хассе довільної зв'язної несерійної додатної ч. в. множини існує додатний цикломатичний каркас (іншими словами, ациклічний підграф з тим же числом вершин, який є діаграмою Динкіна).

• Знайдено залежності між шириною, висотою та коефіцієнтом транзитивності для несерійних додатних і P-критичних ч. в. множин.

• Доведено, що суперкритичні ч.в. множини Назарової, по одній з кожного із шести класів ізоморфізму, утворюють мінімальну мінімаксну систему твірних для NP-критичних ч.в. множин. Як наслідок отримано повну класифікацію NP-критичних ч.в. множин (їх число, з точністю до ізоморфізму і дуальності, дорівнює 115).

• Описано серійні невід'ємні ч.в. множини з одновимірним цілочисловим ядром їхньої квадратичної форми Тітса (названих Д. Сімсоном головними).

• Доведена гіпотеза Сімсона про неможливість цілочислової еквівалентності між квадратичними формами Тітса головної ч. в. множини і циклічної розширеної діаграми Динкіна.

• Введено поняття майже додатної ч.в. множини як невід'ємної множини з максимальною додатною підмножиною. Доведено, що множина недодатних майже додатних ч.в. множин (названих суттєвими) збігається з множиною головних ч.в множин. Це дало можливість при дослідженні несерійних головних множин замінити складну комбінаторику квадратичних форм на комбінаторику самих ч.в. множин.

• Показано, що будь-який клас мінімаксного ізоморфізму суттєвої майже додатної ч.в. множини має в якості канонічного представника серійну розширену діаграму Динкіна: цикл, якщо клас замкнутий відносно дуальності, і другу – в іншому випадку.

• Описано (з точністю до ізоморфізму і дуальності) всі несерійні суттєві майже додатні ч.в. множини; їх 247, не рахуючи P-критичних. Цей результат завершує опис всіх майже додатних ч.в. множин як аналогів звичайних і розширених діаграм Динкіна.

• Введено поняття надсуперкритичних ч. в. множин як природне продовження ряду "критичні множини Клейнера – суперкритичні множини Назарової". Описані (з точністю до ізоморфізму і дуальності) ч.в. множини, їм мінімаксно еквівалентні, що утворюють клас, який є природним продовженням ряду "P-критичні множини – NP-критичні множини".

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Gabriel P., Unzerlegbare Darstellungen, *Manuscripts Math.*, **6** (1972), P. 71–103,309.

2. Назарова Л. А., Ройтер А. В., Представления частично упорядоченных множеств, *Зап. науч. сем. ЛОМИ*, **28** (1972), С. 5–31.

3. Дрозд Ю. А., О ручных и диких матричных задачах, *Матричные задачи, Киев: Ин-т математики АН УССР* (1977), С. 104–114.

4. Дрозд Ю. А., Ручные и дикие матричные задачи, *Представления и квадратичные формы, Киев: Ин-т математики АН УССР* (1979), С. 39-74.

5. Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А., Представленческий тип конечных групп, *Модули и представления: Записки науч. семинаров ЛОМИ*, **71** (1977), С. 24–41.

6. Дрозд Ю. А., Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств, *Функц. анализ и его прил*, **8** (1974), С. 34–42.

7. Клейнер М. М., Частично упорядоченные множества конечного типа, *Зап. науч. сем. ЛОМИ*, **28** 1972, С. 32–41.

8. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On posets of width two with positive Tits form, *Algebra Duscrete Math*, **2** (2005), P. 20–35.

9. Бондаренко В. М., Степочкина М. В., (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса, *Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, **2** (2005), N3, С. 18–58.

10. Bondarenko V. M., Stepochkina M. V., On serial posets with positive-definite quadratic Tits form, *Nonlinear Oscillations*, **9** (2006), N3, P. 312–316.

11. Клейнер М. М., Ройтер А. В., Представления дифференциальных градуированных категорий, *Матричные задачи, Киев: Ин-т математики АН УССР*, (1977), С. 5–70.

12. Brenner S. Quivers with commutativity conditions and some phenomenology of forms // *Proc. Int. Conf. Representations Algebras. – Ottawa: Carleton Univ.*, 1974. – Paper N5.

13. Ройтер А. В., Корни целых квадратичных форм, *Труды матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова*, **148** (1978), С. 201–210.

14. Овсиенко С. А., Ограниченность корней целых слабо положительных форм, *Представления и квадратичные формы, Киев: Ин-т математики АН УССР*, (1979), С. 106–123.

15. Завадский А. Г., Серии представлений и форма Титса, *Препр. АН УССР. Ин-т математики; 81.27*, (1981), 32 с.

16. Ringel C. M., Tame algebras and integral quadratic forms, *Lectures Noths in Math, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo: Springer-Verlag*, **1099** (1984), 376 p.

17. Bongartz K. Algebras and quadratic forms // *J. London Math. Soc.* – 1983. – Vol. 28, N3. – P. 461-469.

18. Marmaridis N., Strongly indefinite quadratic forms and wild algebras, *Banach Center Publ*, **26** (1990), Part 1, P. 341–351.

19. Simson D., A reduction functor, tameness and Tits form for a class of orders, *J. Algebra*, **174** (1995), N2, P. 430-452.

20. Dräxler P., Drozd Yu. A., Golovachtchuk N. S., Ovsienko S. A., Zeldich M. V., Towads the classification of sincere weakly positive unit forms, *Europ. J. Combinatorics*, **16** (1995), P. 1–16.

21. de la Peña J. A., The Tits forms of a tame algebra, *Representation theory of algebras and related topics, CMS Conf. Proc*, **19** (1996), P. 159–183.

22. Dräxler P., Golovachtchuk N., Ovsienko S, de la Peña J. A., Coordinates of maxinal roots of weakly non-negative unit forms, *Colloq. Math*, **78** (1998), N2, P. 163–193.

23. Barot M. A characterization of positive unit furms, *Boletin de la Socieded Matematica Mexicana*,**5**, (1999), P. 87–93.

24. Dräxler P., de la Peña J. A., Tree algebras with non-negative Tits form, *Comm. Algebra*, **8** (2000), P. 3993-4012.

25. Зельдіч М. В., Про характеристичні форми частково впорядкованих множин з простим зв'язним графом Хассе, *Вісник Київського університету. Серія: фізика і математика*, (2001), №4, С. 36–44.

26. Bondarenko V. M., On a conjecture on the Tits quadratic form, *Вісник Київського університету. Серія: фізика і математика*, (2005), №3, С. 20–23.

27. Назарова Л. А., Представления колчанов бесконечного типа, *Изв. АН СССР*, **37** (1973), N4, C. 752–791.

28. Donovan P., Freislich M. R., The representation theory of finite graphs and associated algebras, *Carleton Math. Lecture Notes, Carleton University, Ottawa*, **5** (1973), 83 p.

29. Bourbaki N., Elements de mathematique, Fasc, *XXXVII, Groupes et algebres de Lie, Chapitre III: Groupes de Lie, Actualites Sci. Indust., Hermann, Paris*, **1349**, (1972).

30. Завадский А. Г., Назарова Л. А., Частично упорядоченные множества ручного типа, *Матричные задачи, Киев: Ин-т математики АН УССР*, (1977), C. 122–143.

31. Назарова Л. А., Частично упорядоченные множества бесконечного типа, *Изв. АН СССР*, **39** (1975), N5. C. 963–991.

32. Бондаренко В. М., Стьопочкіна М. В., О частично упорядоченных множествах верхней ширины 3, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту*, **16** (2008), - C. 31-34.

33. Стьопочкіна М. В., Про зв'язок між верхньою та нижньою шириною скінченної частково впорядкованої множини, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту*, **17** (2008), C. 230-235.

34. Бондаренко В. М., Степочкина М. В., (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и неотрицательная форма Титса, *УМЖ*, **60** (2008), №9, C. 1157-1168. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0147-7

35. Бондаренко В. М., Степочкина М. В., Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно

неотрицательности квадратичной формы Титса, *УМЖ*, **61** (2009), №5, С. 611-624. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0245-6

36. Бондаренко В. В., Бондаренко В. М., Степочкина М. В., Червяков И. В., 1-надсуперкритические частично упорядоченные множества с тривиальной группой автоморфизмов и min-эквивалентность, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ*, **22** (2011), №2, С. 17-25.

37. Бондаренко В. М., Степочкина М. В., Червяков И. В., Об M-особых P-критических частично упорядоченных множествах мультицепного типа, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ*, **23** (2012), №2, С. 25-30.

38. Бондаренко В. В., Степочкина М. В., Непримитивное 1-надсуперкритическое частично упорядоченное множество и min-эквивалентность, *Науковий часопис НПУ ім. Драгоманова. Серія 1. фіз.-мат. науки*, **14** (2013), С. 55-61.

39. Стьопочкіна М. В., Черв'яков І. В., Кількість частково впорядкованих множин, (min, max)-еквівалентних множині (1, 2, 7), *Прикл. проблеми мех. і мат*, **13** (2015), С. 18-21.

40. Bondarenko V. M., Chervyakov I. V., Styopochkina M. V., On properties of the Hasse diagram of P-critical posets, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту*, **26** (2015), №1, С. 12-15.

41. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On properties of the Hasse diagram of nonserial posets with positive quadratic Tits form, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту*, **29** (2016), №2, С. 31-34.

42. Стьопочкіна М. В., Черв'яков І. В., Кількість частково впорядкованих множин, (min, max)-еквівалентних 1-надсуперкритичній частково

впорядкованій множині (1, 3, 5), *Прикл. проблеми мех. і мат*, **14** (2016), С. 12-15.

43. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On properties of posets of MM-type (1,3,5), *Науковий вісник Ужгородського університету*, **32** (2018), №1, С. 50-53.

44. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., The classification of serial posets with the non-negative quadratic Tits form being principal, *Algebra and Discrete Mathematics*, **27** (2019), N2, P. 202-211.

45. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Strengthening of a theorem on Coxeter-Euclidean type of principal partyally ordered sets, *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*, **4** (2018), P. 8-15.

46. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On properties of posets of MM-type (1; 2; 7), *Прикладні проблеми механіки і математики*, **17** (2019), С. 7-10. https://doi.org/10.15407/apmm2019.17.7-10

47. Bondarenko V. M., Stepochkina M. V., Stoika M. V., The coefficients of transitiveness of the posets of MM-type being the smallest sypercritical poset of width 3, *Прикладні проблеми механіки і математики*, **18** (2020), С. 11-13. https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.11-13

48. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On posets of sixth order having oversupercritical MM-type, *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Математика і інформатика*, **38** (2021), №1, С. 7-15. doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).7-15

49. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On transitivity coefficients for posets of MM-type to be oversupercritical non-primitive, *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Математика*

і інформатика, **39** (2021), №2, С. 22-29. doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).22-29

50. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On classifying the non-Tits P-critical posets, *Algebra and Discrete Mathematics*, **32** (2021), N2, P. 185-196. http://dx.doi.org/10.12958/adm1912

51. Bondarenko V. M., Stoika M. V., Styopochkina M. V., The coefficients of transitivity of the posets of MM-type being the highest sypercritical poset, *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Математика і інформатика*, **40** (2022), №1, С. 11-18. DOI 10.24144/2616-7700.2022.1(40).11-18

52. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On properties of posets of MM-type (1, 3, 4), *Прикладні проблеми механіки і математики*, **20** (2022), С. 15-18. https://doi.org/10.15407/apmm2022.20.15-18

53. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Classification of the posets of minmax types which are symmetric oversupercritical posets of the eighth order, *Математичні методи та фізико-механічні поля*, **66** (2023), №1-2, С. 5-15. https://doi.org/10.15407/mmpmf2023.66.1-2.5-15

54. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Combinatorial properties of non-serial posets with positive Tits quadratic form, *Algebra and Discrete Mathematics*, **36** (2023), N1, P. 1-13. DOI:10.12958/adm2151

55. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On the transitivity coefficients for minimal posets with nonpositive quadratic Tits form, *Journal of Mathematical Sciences*, **274** (2023), no.5, P. 583-593. DOI 10.1007/s10958-023-06624-6

56. Styopochkina M. V., The coefficients of transitivity of the posets minimax isomorphic to the sypercritical non-primitive poset, *Науковий вісник*

Ужгородського університету. Сер. Математика і інформатика, **43** (2023), №2, С. 62-66.

57. Styopochkina M. V., The coefficients of transitiveness of the posets minimax isomorphic to the non-primitive supercritical poset, *Прикладні проблеми механіки і математики*, **21** (2023), С. 17-20. doi.org/10.15407/apmm2023.21.17-20

58. Styopochkina M. V., On properties of the Hasse diagrams of NP-critical posets of order less than 8, *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*, **78** (2024), №1, P. 33-35. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2024/1.5

59. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Classification of the posets of MM-type being the symmetric oversupercritical poset of order 9, *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Математика і інформатика*, **44** (2024), №1, С. 7-14. doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).7-14

60. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On minimal minimax systems of generators for positive posets, *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Математика і інформатика*, **45** (2024), №2, С. 46-55. doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).46-55

61. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Existence of Dynkin scanning trees for non-serial posets with positive Tits quadratic form, *Algebra and Discrete Mathematics*, **38** (2024), N2, P. 158-165. DOI: http://dx.doi.org/10.12958/adm2368

62. Bondarenko V., Petravchuk A., Styopochkina M. Polynomial similarity of pairs of matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **(**708), no,3, P. 150-158. https://doi.org/10.1016/j.laa.2024.11.029

63. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Classification of the almost positive posets, *Algebra and Discrete Mathematics*, *Algebra and Discrete Mathematics*, **39** (2025), N1, P. 65-88. DOI: http://dx.doi.org/10.12958/adm2391

64. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. О неотрицательных формах Титса для конечных ч. у. множеств. *XII Міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука* : Тези доп., 15-17 трав. 2008р. Київ : ТОВ "Задруга", 2008. С. 513.

65. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. Classification of NP-critical posets. *VII Int. Algebraic Conf. in Sd*: тези доп., August 18-23, 2009. Kharkov, 2009. P. 31-32.

66. Степочкина М. В. Связь между неотрицательными и слабо неотрицательными формами Титса. *Укр. мат. конгрес*: тези доп., 27-29 серпня 2009р. Київ : КНУ, 2009. P. 104.

67. Рассадкина (Степочкина) М. В. Квадратичные формы Титса и сильная (min, max)-эквивалентность. *Int. Conf. of Humboldt-Kolleg Series in Kiev, Ukraine*: abstracts, November 19-22, 2009. Kiev, 2009. P. 38-39.

.

68. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. Critical posets and posets with nonnegative Tits form. *8th Int. Algebraic Conf. in Ukraine*: abstracts, July 5-12, 2011. Lugansk, 2011. P. 153.

69. Бондаренко В. В., Стьопочкіна М. В., Черв'яков І. В. Про надсуперкритичні частково впорядковані множини. *The International Mathematical Conference on occasion 70th anniversary of Professor Vladimir Kirichenko*: abstracts, June 13-19, 2012. Mykolaiv, 2012. P. 143.

70. Bondarenko V. M., Styopochkina M.V. On classifying the posets with non-negative quadratic Tits form. *Int. Algebraic Conf. Dedicated to 100th anniversary of L.A. Kaluzhnin*: abstracts, July 7-12, 2014. Kyiv, 2014. P. 20-21.

71. Styopochkina M. V. On the Hasse diagram of P-critical posets. *10th Int. Algebraic Conf. in Ukraine*: abstracts, August 20-27, 2015. Odessa, 2015. P. 111.

72. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. Minimax equivalence and self-duality of posets with positive quadratic Tits form. *Groups and Actions: Geometry and Dynamics*: abstracts, December 19-22, 2016. Kyiv, 2016. P. 16.

73. Styopochkina M.V. On coefficients of transitiveness of posets of special type. *11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko*: abstracts, July 3-7, 2017. Kyiv, 2017. P. 131.

74. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On coefficients of transitiveness of posets critical with respect to the positivity of the quadratic Tits form. *Сучасні проблеми механіки та математики*: збірник наукових праць у 3-х т. (за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра). Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. (Львів: 22-25 травня, 2018). 2018. Т. 3. С. 246-247.

75. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On the classification of the serial principal posets. *XII міжнародна алгебраїчна конференція в Україні*: тези доповідей (Вінниця: 02-06 липня, 2019). Вінниця, 2019. С. 19-20.

76. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On CoxeterEuclidean type of principal posets and generalizations to other posets. *International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of department of algebra*

and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv: abstracts, (Kyiv: July 14-17, 2020). Kyiv, 2020. P. 24.

77. Styopochkina M.V. On the coefficients of transitiveness of the posets minimax isomorphic to supercritical posets. *11-th International Skorobohatko Mathematical Conference*: abstracts, (Lviv, Ukraine, 26-30 October, 2020). Lviv, 2020. P. 112.

78. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On serial posets with respect to properties of the Tits quadratic form. *The 13th International algebraic conference in Ukraine*: abstracts (Kyiv: July 6-9, 2021). Kyiv, 2021. P. 23.

79. Bondarenko V.M. , Styopochkina M.V. On Tits P-critical posets. *International Algebraic Conference "At the End of the Year 2021"*: abstracts (Kyiv: December 27-28, 2021). Kyiv, 2021. P. 8.

80. Рассадкіна М.В. Коефіцієнти транзитивності ч. в. множини виду (N,5). *Всеукраїнська науково-методична конференція "Сучасні науково - методичні проблеми математики у вищій школі"*: тези доп., (Київ: 23-24 травня, 2022). Київ: НУХТ, 2022. С. 65-67.

81. Бондаренко В.М., Стойка М.В., Стьопочкіна М.В. Про комбінаторні властивості ч.в. множин 6-го порядку надсуперкритичного мінімаксного типу. *Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023"*: тези доп., (Львів: 23-25 травня, 2023). Львів, 2023. С. 417-418.

82. Bondarenko V.M. , Styopochkina M.V. On classification of almost positive posets. *International Scientific Conference "Algebraic and Geometric s of Analysis"devoted to 160 anniversary of Dvytro Grave*: abstracts (Odesa, Ukraine: May 29 - June 1, 2023). Odesa, 2023. P. 18-21.

83. Bondarenko V.M. , Styopochkina M.V. Classification of posets close to ones with positive Tits quadratic form. *14th Ukraine Algebra Conference*: abstracts, (Sumy, Ukraine: July 3-7, 2023). Sumy, 2023. P. 36.

84. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On transitivity coefficients for one class of positive posets. *Ukraine Algebraic Conference "At the End of the Year 2023"*: abstracts, (Kyiv: December 26-27, 2023). Kyiv, 2023. P. 14.

85. Бондаренко В.М., Стьопочкіна М.В. Мінімаксна еквівалентність і надсуперкритичні ч.в. множини. *Конференція молодих учених "Підстригачівські читання - 2024"*: тези доп., (Львів: 27-29 травня, 2024). Львів, 2024.

86. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On representation type of incident algebras of extensions of positive posets. *International Scientific Conference "Algebraic and Geometric Methods of Analysis"*: abstracts, (Odesa: May 27-30, 2024). Odesa, 2024. P. 12-13.

87. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On minimax systems of generators for positive posets. *Ukraine Mathematics Conference "At the End of the Year 2024"*: abstracts, (Kyiv: December 16-18, 2024). Kyiv, 2024. P. 18.

88. MacLane S., An algebra of additive relations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **47** (1961), P. 1043 – 1051.

89. Gabriel P., Roiter A. V., Representations of finite-dimensional algebras., *Encyclopaedia of Math. Sci. (Algebra VIll), Sper-Verlag, Berlin*, **73** (1992), 177 p.

90. Bondarenko V. M., Linear operators on S-graded vector spaces, *Linear algebra Appl*, **365** (2003), P. 45 – 90.

91. Завадский А. Г., Шкабара А. С., Коммутативные колчаны и матричные алгебры конечного типа, *Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 76.3, Киев*, (1976), 52 с.

92. Loupias M., Indecomposable representations of finite ordered sets, *Lectures Noths in Math*, **488** (1984), P. 201–209.

93. Овсиенко С. А., Представления колчанов с соотношениями, *Матричные задачи: Сб. науч. трудов, Ин-т математики АН УССР*, (1977), С. 88-103.

94. Кругляк С. А., Представления свободных инволютивных колчанов, *Представления м квадратичные формы: Сб. науч. трудов, Ин-т математики АН УССР*, (1979), С. 127-148.

95. Сергейчук В. В., Представления простых инволютивных колчанов, *Представления и квадратичные формы: Сб. науч. трудов, Ин-т математики АН УССР*, (1979), С. 149-151.

96. Mazzola G., The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five, *Manuscripta Math*, **27** (1979), N1, P. 81-101.

97. P. Gabriel, The universal cover of a representation-finite algebra, *Lecture Notes in Math*, **903** (1980), P. 68-105.

98. V.G. Kac, Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory, *Invent. Math*, **56** (1980), N1, P. 57-92.

99. Сергейчук В. В., Представления орсхем, *Линейная алгебра и теория представлений: Сб. науч. трудов, Ин-т математики АН УССР*, (1983), С. 110-134.

100. Martinez-Villa R., de la Pena J. A., The universal cover of a quiver with relations, *J. Pure Appl. Algebra*, **30** (1983), N3, P. 277-292.

101. Riedtmann Ch., Degenerations for representations of quivers with relations, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4)*, **19** (1986), N2, P. 275-301.

102. Dowbor P., Skowronski A., Galois covering of representation-infinite algebras, *Comment. Math. Helv*, **62** (1987), P. 311-337.

103. Hoshino M., Miyachi J., Tame two-point algebras, *Tsukuba J. Math.*, **12** (1988), P. 65-93.

104. Geiss Ch., Tame distributive two-point algebras, *CMS Conf. Proc.*, **14** (1993), P. 193-204.

105. Erdmann K., Martin S., Quiver and relations for the principal p-block of Σ_{2p}, *J. London Math. Soc. (2)*, **49** (1994), N3, P. 442-462.

106. Crawley-Boevey W., Subrepresentations of general representations of quivers, *Bull. London Math. Soc.*, **28** (1996), N4, P. 363-366.

107. Dräxler P., Geiss Ch., On the tameness of certain 2-point algebras, *CMS Conf. Proc.*, **18** (1996), P. 189-199.

108. Brustle Th., Han Y., Two-point algebras without loops, *Comm. Algebra*, **29** (2001), N10, P. 4683-4692.

109. Bondarenko V. M., On dispersing representations of quivers and their connection with representations of bundles of semichains, *Algebra Discrete Math.*, **1** (2002), №1, P. 19–31.

110. Belousov K. I., Nazarova L. A., Roiter A. V., Finite representable K-marked quivers, *Algebra Discrete Math.*, (2002), N1, P. 19-31.

111. Дяченко С. М., Ручні алгебри відносно односторонньої еквівалентності матриць, *Проблеми топології та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, **3** (2006), № 3, С. 115-131.

112. Дяченко С. М., Зв'язні алгебри скінченного типу відносно односторонньої еквівалентності радикальних матриць, *Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, **3** (2006), № 4, С. 170-174.

113. Бондаренко В. М., Зображення гельфандових графів, *КНУ ім. Тараса Шевченка*, (2005), 228 с.

114. Дрозд Ю. А., Матричные задачи и категории матриц, *Зап. науч. сем. ЛОМИ*, **28** (1972), С. 144–153.

115. Gabriel P., Representations indecomposables des ensembles ordonnes, *Seminaire P.Dubreil (26e annee: 1972/73), Algebre, Exp.* N13, 4pp. Secretariat Mathematique, Paris, (1973).

116. Клейнер М. М., О точных представлениях частично упорядоченных множеств конечного типа, *Зап. науч. сем. ЛОМИ*, **28** (1972), С. 42-59.

117. Бондаренко В. М., Завадский А. Г., Назарова Л. А., О представлениях ручных частично упорядоченных множеств, *Представления и квадратичные формы, Киев: Ин-т математики АН УССР*, (1979), С. 75–106.

118. Бондаренко В. М., Представления связок полуцепных множеств и их приложения, *Алгебра и анализ*, **3** (1991), N5, С. 38 – 67.

119. Bondarenko V. M., Zavadskij A. G., Posets with an equivalence relation of tame type and of finite growth, *Canad. Math. Soc. Conf. Proc.*, **11** (1991), P. 67 – 88.

120. Bondarenko V. M., Zavadskij A. G., Tame posets with equivalence relation, *Contem. Math.*, **131** (1992), N2, P. 237 – 251.

121. 'Dräxler P., Reiten I., Smal∅ S., Solberg O., Exact categories and vector space categories, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **351** (1999), N2, P.647–682.

122. Назарова Л. А.. Ройтер А. В. Конечнопредставимые диадические множества, *Укр. матем. журнал*, **52** (2000), №10, С. 1363–1396.

123. Bondarenko V. M., On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms, *Вісник Київського університету (серія: фізика і математика)*, (2005), N1, – С. 24–25.

124. Bondarenko V. M., Minimax equivalence method: initial ideas, first applications and new concepts, *Algebra and Discr. Math.*; **38**, No 1 (2024), P. 1–22.

125. Polak A., Simson D., Coxeter spectral classification of almost TP-critical one-peak posets using symbolic and numeric computations, *Linear Algebra Appl.*, **445** (2014), P. 223–255.

126. Овсиенко С. А., Целочисленные слабо положительные формы, *Шуровские матричные задачи и квадратичные формы, Киев, Ин-т математики АН УССР, препринт 78.25*, (1978), С. 3—17 .

127. Berge C., Theorie des graphes et ses applications, *Dunod*, (1958).

128. Wilson R. J., Introduction to Graph Theory, *Harlow*, (2010).

129. Понизовский И. С., О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы, *Зап. науч. сем. ЛОМИ*, **28** (1972), С. 154-163.

130. Yamagata K. On algebras whose trivial extensions are of finite representation type. Representations of algebras (Puebla, 1980), *Lecture Notes in Math.*, 903, Springer, Berlin-New York, 1981, P. 364-371.

131. Bautista R., Classification of certain algebras of finite representation type, *An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autonoma Mexico*, **22** (1982), P. 1-82.

132. Skowronski A., On triangular matrix rings of finite representation type, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, **31** (1983), no. 5-8, P. 227-233.

133. Bongartz K., A criterion for finite representation type, *Math. Ann.*, **269** (1984), no. 1. – P. 1-12.

134. Gabriel P., Nazarova L. A., Roiter A. V., Sergeichuk V. V., Vossieck D., Tame and wild subspace problems, *Ukr. Math. J.* **45** (1993), P. 335–372.

135. Ringel C., The representation type of the full transformation semigroup T_4, *Semigroup Forum*, № 3 (2000), P. 429-434.

136. Bondarenko, V. M., Tertychna O. M., On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication, *Algebra and Discrete Mathematics*, N4 (2008), P. 15-22.

137. Futorny V., Klymchuk T., Petravchuk A. P., Sergeichuk V. V., Wildness of the problems of classifying two-dimensional spaces of commuting linear operators and certain Lie algebras, *Linear Algebra Appl.*, **536** (2018), P. 201–209.

138. Simson D., Zając K., A framework for Coxeter spectral classification of finite posets and their mesh geometries of roots, *Intern. J. Math. Mathematical Sciences*, (2013), Article ID 743734, 22 pp.

139. Bondarenko V. V., Bondarenko V. M., Pereguda Yu. N., Local deformations of positive-definite quadratic forms, *Ukrainian Math. J.*, **64** (2012), №7, P. 892-907.

140. V. M. Bondarenko, V. Futorny, T. Klimchuk, V. V. Sergeichuk, K. Yusenko, *Systems of subspaces of a unitary space*, Linear Algebra Appl. **438**, No 5 (2013), pp. 2561–2573.

141. Gąsiorec M., Simson D., Zając K. Algorithmic computation of principal posets using Maple and Python, *Algebra and Discrete Mathematics*, **17** (2014), №1, P. 33-69.

142. Gąsiorek M., Simson D., Zając K., Tables of one-peak principal posets of Coxeter-Euclidean type $\tilde{E}_8$, http://mg.mat.umk.pl/pdf/ OnePeakPrincipalPosetsE8les.pdf.

ДОДАТОК

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати

1. Бондаренко В. М., Степочкина М. В., (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и неотрицательная форма Титса, *УМЖ*, **60** (2008), №9, С. 1157-1168. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0147-7

2. Бондаренко В. М., Степочкина М. В., Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса, *УМЖ*, **61** (2009), №5, С. 611-624. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0245-6

3. Бондаренко В. В., Бондаренко В. М., Степочкина М. В., Червяков И. В., 1-надсуперкритические частично упорядоченные множества с тривиальной группой автоморфизмов и min-эквивалентность, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ*, **22** (2011), №2, С. 17-25.

4. Бондаренко В. М., Степочкина М. В., Червяков И. В., Об M-особых P-критических частично упорядоченных множествах мультицепного типа, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ*, **23** (2012), №2, С. 25-30.

5. Бондаренко В. В., Степочкина М. В., Непримитивное 1-надсуперкритическое частично упорядоченное множество и min-эквивалентность, *Науковий часопис НПУ ім. Драгоманова. Серія 1. фіз.-мат. науки*, **14** (2013), С. 55-61.

6. Стьопочкіна М. В., Червʼяков І. В., Кількість частково впорядкованих множин, (min, max)-еквівалентних множині (1, 2, 7), *Прикл. проблеми мех. і мат*, **13** (2015), С. 18-21.

7. Bondarenko V. M., Chervyakov I. V., Styopochkina M. V., On properties of the Hasse diagram of P-critical posets, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту*, **26** (2015), №1, С. 12-15.

8. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On properties of the Hasse diagram of nonserial posets with positive quadratic Tits form, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту*, **29** (2016), №2, С. 31-34.

9. Стьопочкіна М. В., Червʼяков І. В., Кількість частково впорядкованих множин, (min, max)-еквівалентних 1-надсуперкритичній частково впорядкованій множині (1, 3, 5), *Прикл. проблеми мех. і мат*, **14** (2016), С. 12-15.

10. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On properties of posets of MM-type (1,3,5), *Науковий вісник Ужгородського університету*, **32** (2018), №1, С. 50-53.

11. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., The classification of serial posets with the non-negative quadratic Tits form being principal, *Algebra and Discrete Mathematics*, **27** (2019), N2, P. 202-211.

12. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Strengthening of a theorem on Coxeter-Euclidean type of principal partyally ordered sets, *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*, **4** (2018), P. 8-15.

13. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On properties of posets of MM-type (1; 2; 7), *Прикладні проблеми механіки і математики*, **17** (2019), С. 7-10. https://doi.org/10.15407/apmm2019.17.7-10

14. Bondarenko V. M., Stepochkina M. V., Stoika M. V., The coefficients of transitiveness of the posets of MM-type being the smallest sypercritical poset of width 3, *Прикладні проблеми механіки і математики*, **18** (2020), С. 11-13. https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.11-13

15. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On posets of sixth order having oversupercritical MM-type, *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Математика і інформатика*, **38** (2021), №1, С. 7-15. doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).7-15

16. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On transitivity coefficients for posets of MM-type to be oversupercritical non-primitive, *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Математика і інформатика*, **39** (2021), №2, С. 22-29. doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).22-29

17. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On classifying the non-Tits P-critical posets, *Algebra and Discrete Mathematics*, **32** (2021), N2, P. 185-196. http://dx.doi.org/10.12958/adm1912

18. Bondarenko V. M., Stoika M. V., Styopochkina M. V., The coefficients of transitivity of the posets of MM-type being the highest sypercritical poset, *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Математика і інформатика*, **40** (2022), №1, С. 11-18. DOI 10.24144/2616-7700.2022.1(40).11-18

19. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On properties of posets of MM-type (1, 3, 4), *Прикладні проблеми механіки і математики*, **20** (2022), С. 15-18. https://doi.org/10.15407/apmm2022.20.15-18

20. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Classification of the posets of minmax types which are symmetric oversupercritical posets of the eighth order, *Математичні методи та фізико-механічні поля*, **66** (2023), №1-2, С. 5-15. https://doi.org/10.15407/mmpmf2023.66.1-2.5-15

21. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Combinatorial properties of non-serial posets with positive Tits quadratic form, *Algebra and Discrete Mathematics*, **36** (2023), N1, P. 1-13. DOI:10.12958/adm2151

22. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On the transitivity coefficients for minimal posets with nonpositive quadratic Tits form, *Journal of Mathematical Sciences*, **274** (2023), no.5, P. 583-593. DOI 10.1007/s10958-

023-06624-6

23. Styopochkina M. V., The coefficients of transitivity of the posets minimax isomorphic to the sypercritical non-primitive poset, *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Математика і інформатика*, **43** (2023), №2, С. 62-66.

24. Styopochkina M. V., The coefficients of transitiveness of the posets minimax isomorphic to the non-primitive supercritical poset, *Прикладні проблеми механіки і математики*, **21** (2023), С. 17-20. doi.org/10.15407/apmm2023.21.17-20

25. Styopochkina M. V., On properties of the Hasse diagrams of NP-critical posets of order less than 8, *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*, **78** (2024), №1, P. 33-35. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2024/1.5

26. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Classification of the posets of MM-type being the symmetric oversupercritical poset of order 9, *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Математика і інформатика*, **44** (2024), №1, С. 7-14. doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).7-14

27. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., On minimal minimax systems of generators for positive posets, *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Математика і інформатика*, **45** (2024), №2, С. 46-55. doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).46-55

28. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Existence of Dynkin scanning trees for non-serial posets with positive Tits quadratic form, *Algebra and Discrete Mathematics*, **38** (2024), N2, P. 158-165. DOI: http://dx.doi.org/10.12958/adm2368

29. Bondarenko V., Petravchuk A., Styopochkina M. Polynomial similarity of pairs of matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **(**708), no,3, P. 150-158. https://doi.org/10.1016/j.laa.2024.11.029

30. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Classification of

the almost positive posets, *Algebra and Discrete Mathematics*, *Algebra and Discrete Mathematics*, **39** (2025), N1, P. 65-88. DOI: http://dx.doi.org/10.12958/adm2391

Публікації, які додатково відображають наукові результати дисертації

1. Бондаренко В. М., Стьопочкіна М. В., О частично упорядоченных множествах верхней ширины 3, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту*, **16** (2008), - С. 31-34.

2. Стьопочкіна М. В., Про зв'язок між верхньою та нижньою шириною скінченної частково впорядкованої множини, *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту*, **17** (2008), С. 230-235.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. О неотрицательных формах Титса для конечных ч. у. множеств. *XII Міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука* : Тези доп., 15-17 трав. 2008р. Київ : ТОВ "Задруга", 2008. С. 513.

2. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. Classification of NP-critical posets. *VII Int. Algebraic Conf. in Sd*: тези доп., August 18-23, 2009. Kharkov, 2009. P. 31-32.

3. Степочкина М. В. Связь между неотрицательными и слабо неотрицательными формами Титса. *Укр. мат. конгрес*: тези доп., 27-29 серпня 2009р. Київ : КНУ, 2009. P. 104.

4. Рассадкина (Степочкина) М. В. Квадратичные формы Титса и сильная (min, max)-эквивалентность. *Int. Conf. of Humboldt-Kolleg Series in Kiev, Ukraine*: abstracts, November 19-22, 2009. Kiev, 2009. P. 38-39.

5. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. Critical posets and posets with nonnegative Tits form. *8th Int. Algebraic Conf. in Ukraine*: abstracts, July 5-12, 2011. Lugansk, 2011. P. 153.

6. Бондаренко В. В., Стьопочкіна М. В., Черв'яков І. В. Про надсуперкритичні частково впорядковані множини. *The International Mathematical Conference on occasion 70th anniversary of Professor Vladimir Kirichenko*: abstracts, June 13-19, 2012. Mykolaiv, 2012. P. 143.

7. Bondarenko V. M., Styopochkina M.V. On classifying the posets with non-negative quadratic Tits form. *Int. Algebraic Conf. Dedicated to 100th anniversary of L.A. Kaluzhnin*: abstracts, July 7-12, 2014. Kyiv, 2014. P. 20-21.

8. Styopochkina M. V. On the Hasse diagram of P-critical posets. *10th Int. Algebraic Conf. in Ukraine*: abstracts, August 20-27, 2015. Odessa, 2015. P. 111.

9. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. Minimax equivalence and self-duality of posets with positive quadratic Tits form. *Groups and Actions: Geometry and Dynamics*: abstracts, December 19-22, 2016. Kyiv, 2016. P. 16.

10. Styopochkina M.V. On coefficients of transitiveness of posets of special type. *11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko*: abstracts, July 3-7, 2017. Kyiv, 2017. P. 131.

11. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On coefficients of transitiveness of posets critical with respect to the positivity of the quadratic Tits form. *Сучасні проблеми механіки та математики*: збірник наукових праць у 3-х т. (за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра). Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. (Львів: 22-25 травня, 2018). 2018. Т. 3. С. 246-247.

12. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On the classification of the serial principal posets. *XII міжнародна алгебраїчна конференція в Україні*: тези доповідей (Вінниця: 02-06 липня, 2019). Вінниця, 2019. С. 19-20.

13. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On CoxeterEuclidean type of principal posets and generalizations to other posets. *International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv*: abstracts, (Kyiv: July 14-17, 2020). Kyiv, 2020. P. 24.

14. Styopochkina M.V. On the coefficients of transitiveness of the posets minimax isomorphic to supercritical posets. *11-th International Skorobohatko Mathematical Conference*: abstracts, (Lviv, Ukraine, 26-30 October, 2020). Lviv, 2020. P. 112.

15. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On serial posets with respect to properties of the Tits quadratic form. *The 13th International algebraic conference in Ukraine*: abstracts (Kyiv: July 6-9, 2021). Kyiv, 2021. P. 23.

16. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On Tits P-critical posets. *International Algebraic Conference "At the End of the Year 2021"*: abstracts (Kyiv: December 27-28, 2021). Kyiv, 2021. P. 8.

17. Рассадкіна М.В. Коефіцієнти транзитивності ч. в. множини виду (N,5). *Всеукраїнська науково-методична конференція "Сучасні науково - методичні проблеми математики у вищій школі"*: тези доп., (Київ: 23-24 травня, 2022). Київ: НУХТ, 2022. С. 65-67.

18. Бондаренко В.М., Стойка М.В., Стьопочкіна М.В. Про комбінаторні

властивості ч.в. множин 6-го порядку надсуперкритичного мінімаксного типу. *Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023"*: тези доп., (Львів: 23-25 травня, 2023). Львів, 2023. С. 417-418.

19. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On classification of almost positive posets. *International Scientific Conference "Algebraic and Geometric s of Analysis"devoted to 160 anniversary of Dvytro Grave*: abstracts (Odesa, Ukraine: May 29 - June 1, 2023). Odesa, 2023. P. 18-21.

20. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. Classification of posets close to ones with positive Tits quadratic form. *14th Ukraine Algebra Conference*: abstracts, (Sumy, Ukraine: July 3-7, 2023). Sumy, 2023. P. 36.

21. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On transitivity coefficients for one class of positive posets. *Ukraine Algebraic Conference "At the End of the Year 2023"*: abstracts, (Kyiv: December 26-27, 2023). Kyiv, 2023. P. 14.

22. Бондаренко В.М., Стьопочкіна М.В. Мінімаксна еквівалентність і надсуперкритичні ч.в. множини. *Конференція молодих учених "Підстригачівські читання - 2024"*: тези доп., (Львів: 27-29 травня, 2024). Львів, 2024.

23. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On representation type of incident algebras of extensions of positive posets. *International Scientific Conference "Algebraic and Geometric Methods of Analysis"*: abstracts, (Odesa: May 27-30, 2024). Odesa, 2024. P. 12-13.

24. Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. On minimax systems of generators for positive posets. *Ukraine Mathematics Conference "At the End of the Year 2024"*: abstracts, (Kyiv: December 16-18, 2024). Kyiv, 2024. P. 18.