Журнал обчислювальної та прикладної математики 2022, № 2 Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.6
MSC 35R11, 65M06

OPTIMAL STABILIZATION FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS

D. Ya. Khusainov, A. V. Shatyrko, Z. R. Hahurin
Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: d.y.khusainov@gmail.com, shatyrko.a@gmail.com, zhenyahahurin@gmail.com

ОПТИМАЛЬНА СТАБІЛІЗАЦІЯ В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯННЯХ

Д. Я. Хусаінов, А. В. Шатирко, Є. Р. Гагурін
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: d.y.khusainov@gmail.com, shatyrko.a@gmail.com, zhenyahahurin@gmail.com

Abstract. The paper considers the task of optimal stabilization for linear stationary differential equations. Usage of Lyapunov functions for optimal stabilization. We prove the theorem about optimal stabilization and determine the expression of optimal control for considered class of tasks.
Keywords: optimal stabilization, linear stationary differential equations, Lyapunov functions, optimal control.

Анотація. В роботі розглянуто задачу оптимальної стабілізації для лінійних стаціонарних диференціальних рівнянь. Використання функцій Ляпунова для оптимальної стабілізації. Доведено теорему про оптимальну стабілізацію й визначено вигляд оптимального керування для розглянутого класу задач.
Ключові слова: оптимальна стабілізація, лінійні стаціонарні диференціальні рівняння, функції Ляпунова, оптимальне керування.

Вступ

Як відомо, при розв'язанні задач оптимізації динамічних систем використовують два підходи. Перший полягає в знаходженні фіксованого керування(програмного керування), при якому система, що описується диференціальними рівняннями, досягає заданого значення та мінімізує інтегральний критерій якості за скінченний проміжок часу. Цей метод був запропонований Л. С. Понтрягіним та являвся перенесенням загальних методів оптимізації на динамічні системи [1, 2]. Другий метод являв собою, по суті, не оптимальне керування, а оптимальну стабілізацію. Він полягав в знаходженні функції керування у вигляді оберненого зв'язку, за якого нульовий розв'язок був асимптотично стійким та інтегральний критерій якості досягав мінімального значення на нескінченному проміжку часу. Він базувався на другому методі Ляпунова й був запропонований Н. Н. Красовським [3]. Подальший розвиток цього напряму проводився в роботі [4]. Аналогічні роботи були проведені для систем диференціальних рівнянь з запізненням в [5]. Розглянемо основні положення методу оптимальних функцій Ляпунова, що сформульовані в [3], застосовуючи їх до систем, що описуються звичайними диференціальними рівняннями.

1. Оптимальні функції Ляпунова для диференціальних систем без запізнення

Визначимо загальні положення про оптимальну стабілізацію в диференціальних системах. Апаратом для дослідження обрано другий метод Ляпунова [3]. Розглянемо задачу оптимальної стабілізації нульового положення рівноваги $x(t) \equiv 0$ системи, що описується звичайними диференціальними рівняннями

$$\dot{x} = f(t, x, u),\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \geq 0, \tag{1}$$

тобто побудову керування, що забезпечує найкращу якість перехідного процесу, який можна виразити у вигляді умови мінімізації інтеграла деякого критерія якості вздовж розв'язків системи (1)

$$I\left[t, x(t), u(x(t))\right] = \int\limits_0^\infty \omega(t, x(t), u(x(t)))\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Тут $\omega(t, x, u)$ невід'ємна функція, що визначена в області $x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \geq t_0$. Зокрема, для лінійних систем

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3}$$

функція "якості динаміки системи" може мати вигляд квадратичної форми

$$\omega(t, x, u) = x^T C x + u^T D u \tag{4}$$

з додатно визначеними матрицями C та D. У роботі [3] розглядалася така проблема. Нехай критерій якості неперервного процесу $x(t)$ обрано у вигляді інтегралу

$$I\left[t, x(t), u(x(t))\right] = \\ = \int\limits_{t_0}^\infty \omega(t, x(t), u(x(t)))\,\mathrm{d}t,\ x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(x(t)) \in \mathbb{R}^m,\ t \geq t_0. \tag{5}$$

Необхідно знайти керування $u_0(x)$, що забезпечує асимптотичну стійкість незбуреного руху $x(t) \equiv 0$ системи $\dot{x} = f(t, x, u)$ і, при цьому, для будь-яких інших керувань $u^*(x)$ виконувалась нерівність

$$\int\limits_{t_0}^\infty \omega(t, x_0(t), u_0(x_0(t)))\,\mathrm{d}t \leq \int\limits_{t_0}^\infty \omega(t, x(t), u^*(x(t)))\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Таким чином визначена задача була названа задачею оптимальної стабілізації. Функція $u_0(x)$ називалась оптимальним керуванням. Для її розв'язання вводилась фукнція

$$B\left[V,x,u,t\right] = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + grad_x^T V(x,t) f(t,x,u) + \omega(t,x,u). \tag{7}$$

Умови оптимальної стабілізації були сформульовані та доведені у вигляді теореми про оптимальну стабілізацію [3].

Теорема 1 (про оптимальну стабілізацію)**.** *Нехай для диференціального рівняння незбуреного руху (1) можна знайти додатно визначену функцію $V_0(x,t)$ та функцію $u_0(x,t)$, що задовльняють умови:*

1. *функція $\omega(t,x,u)$ є додатно визначеною;*
2. *виконується рівність $B\left[V_0(x,t),x,u(x_0,t),t\right] \equiv 0$;*
3. *якими б не були інші функції керування $u(x,t)$, виконується нерівність $B\left[V(x,t),x,u(x,t),t\right] \geq 0$.*

Тоді фукнція $u_0(x,t)$ є розв'язком задачі оптимальної стабілізації. При цьому виконується співвідношення

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega(t,x(t),u_0(x(t),t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= \min_u \{ \int_{t_0}^{\infty} \omega(t,x(t),u(x(t),t))\,\mathrm{d}t \} = V_0(x(t_0),t_0). \tag{8}$$

Доведення. Базуючись на таких припущеннях. Нехай $u_0(x,t)$ функція керування, а $V_0(x,t)$ додатно визначена функція, що задовольняє умови теореми. Із другої умови теореми про оптимальну стабілізацію випливає, що повна похідна функції $V_0(x,t)$, в силу системи (1), приймає вигляд

$$\frac{d}{\mathrm{d}t} V_0(x,t) = -\omega(t,x,u_0(x,t)) \tag{9}$$

та є від'ємно визначеною функцією. Тоді, як випливає із другої теореми Ляпунова, нульовий розв'язок системи буде асимптотично стійким. Таким чином, функція керування $u_0(x,t)$ є розв'язком задачі оптимальної стабілізації, тобто ,при цьому керуванні, інтегральний критерій якості досягає мінімального значення. За рахунок асимптотичної стійкості нульового положення рівноваги для довільного розв'язку $x(t)$ системи (1) буде виконуватись

$$\lim_{t\to\infty} V_0(x(t),t) = 0. \tag{10}$$

Інтегруючи рівність (9) вздовж розв'язків $x(t)$ та використовуючи граничне співвідношення (10), отримуємо

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x(t), u_0(x(t), t))\, \mathrm{d}t =$$
$$= -\lim_{t\to\infty} V_0(x(t), t) + V_0(x(t_0), t_0) = V_0(x(t_0), t_0). \quad (11)$$

Оскільки значення функції Ляпунова вздовж розв'язків системи зменшуються, то отримаємо, що мінімальне значення функціонала рівне числу $V_0(x(t_0), t_0)$. □

2. Оптимальна стабілізація в лінійних рівняннях

Розглянемо застосування даного підходу на прикладі лінійних стаціонарних диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bu(x(t)),\ a > 0,\ t \geq 0. \quad (12)$$

Необхідно знайти керування $u_0(x)$ при якому розв'язок рівняння буде асимптотично стійким та критерій якості

$$I\,[x(t), u(x(t))] = \int_{t_0}^{\infty} (cx(t) + du(x(t)))\, \mathrm{d}t,\ c > 0,\ d > 0 \quad (13)$$

досягає мінімального значення. Умова $a > 0$, тобто умова асимптотичної стійкості рівняння без керування, не є обмежуючою. В подальшому буде продемонстровано як розв'язується задача без цієї умови. Розв'язок задачі шукається методом функцій Ляпунова. Функція обирається у вигляді $V(x) = hx^2,\ h > 0$. Перевіряємо виконання умов (1–3) теореми про оптимальну стабілізацію:

1. Функція $\omega(x, u)$ має вигляд
$$\omega(x, u) = cx^2 + du^2. \quad (14)$$
За умови, що $c > 0, d > 0$ є додатно визначеною. Таким чином, функція $B\,[V(x), x, u(x)]$ приймає вигляд
$$B\,[V(x), x, u(x)] = 2hx(-ax + bu(x)) + cx^2 + du^2(x). \quad (15)$$
2. Визначимо параметри при яких виконується друга умова теореми
$$B\,[V_0(x), x, u_0(x)] = 2hx(-ax + bu_0(x)) + cx^2 + du_0^2(x) \equiv 0. \quad (16)$$
Подамо його у вигляді
$$-2ahx^2 + 2bhxu_0(x) = -cx^2 - du_0^2(x). \quad (17)$$
Прирівнюємо перші та другі доданки та отримуємо
$$-2ahx^2 = -cx^2, 2bhxu_0(x) = -du_0^2(x). \quad (18)$$
З першого рівняння випливає, що
$$h = \frac{c}{2a} > 0. \quad (19)$$

Скорочуємо друге рівняння на $u_0(x) \neq 0$ та отримуємо

$$2bhx = -du_0(x). \tag{20}$$

Звідси випливає, що

$$u_0(x) = -2\frac{bh}{d}x. \tag{21}$$

Підставляючи отримане значення (19) в (21) отримаємо таке твердження. Якщо керування обирати у вигляді

$$u_0(x) = -\frac{bc}{ad}x. \tag{22}$$

то сума повної похідної функції Ляпунова вздовж розв'язків рівняння та підінтегрального виразу буде тотожно дорівнювати нулю

$$B\left[V_0(x), x, u_0(x)\right] \equiv 0. \tag{23}$$

3. Визначимо обмеження, при виконанні яких буде виконуватись третя умова теореми. Покажемо, що при $u(x) = u_0(x)$ отримаємо

$$B\left[V_0(x), x, u_0(x)\right] = 2hx(-ax + bu(x)) + cx^2 + du^2(x) \equiv 0. \tag{24}$$

Покажемо це від супротивного. Нехай $u(x) \neq u_0(x)$, $u(x) = u_0(x) + \Delta u(x)$. Тоді

$$\begin{aligned} B\left[V(x), x, u_0(x) + \Delta u(x)\right] = \\ 2hx(-ax + b(u_0(x) + \Delta u(x))) + cx^2 + d(u_0(x) + \Delta u(x))^2 = \\ -2hax^2 + 2hbxu_0(x) + 2hbx\Delta u(x) + cx^2 + du_0^2(x) + \\ + 2du_0(x)\Delta u(x) + d(\Delta u(x))^2. \end{aligned} \tag{25}$$

Так як за умовою

$$B\left[V_0(x), x, u_0(x)\right] = 2hx(-ax + bu(x)) + cx^2 + du^2(x) \equiv 0, \tag{26}$$

то залишається

$$\begin{aligned} B\left[V_0(x), x, u_0(x) + \Delta u(x)\right] = \\ = 2hbx\Delta u(x) + 2du_0(x)\Delta u(x) + d(\Delta u(x))^2, \end{aligned} \tag{27}$$

або ж

$$\begin{aligned} B\left[V_0(x), x, u_0(x) + \Delta u(x)\right] = \\ = \left[2hbx + 2du_0(x)\right]\Delta u(x) + d(\Delta u(x))^2 > 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Таким чином, умови теореми про оптимальну стабілізацію будуть виконані та при керуванні (22), що отримане за допомогою функції Ляпунова $V_0(x) = \frac{cx^2}{2a}$, $a < 0$, $c > 0$ рівняння буде асимптотично стійким й інтегральний критерій якості буде досягати мінімального значення

$$I\left[x_0(t), u_0(x(t))\right] = \frac{c}{2a}x_0^2. \tag{29}$$

Зауваження. Розглядався випадок $a > 0$. Аналогічно розглянемо ситуацію, коли $a < 0$. Керування шукаємо у вигляді

$$u(x(t)) = \frac{1}{b}\Delta a x(t) + u_1(x(t)), \tag{30}$$

де константа Δa обирається таким чином, щоб $a + \Delta a < 0$ (таку константу можна обрати завжди). Тоді рівняння набуде вигляду

$$\dot{x}(t) = -ax(t)+b[\frac{1}{b}\Delta a x(t)+u(x(t))]+bu(x(t)) = (a+\Delta a)x(t)+bu(x(t)), \tag{31}$$

а критерій якості

$$I\,[x(t), u(x(t))] = \int_0^\infty \{cx^2(t) + d(\frac{1}{b}\Delta a x(t) + u_1(x(t)))^2\}\,\mathrm{d}t, \tag{32}$$

і остаточно

$$I\,[x(t), u(x(t))] = \int_0^\infty \{(\,+\frac{d}{b^2}(\Delta a)^2)x^2(t) + 2d\frac{\Delta a}{b}x(t)u_1(t) + du_1^2(t)\}\,\mathrm{d}t, \tag{33}$$

Таким чином, отримали "зсунуте рівняння (31)" із "зсунутим критерієм якості (33)". До того ж, якщо подати підінтегральну функцію критерія якості у вигляді квадратичної форми

$$(c + \frac{d}{b^2}(\Delta a)^2)x^2(t) + 2d\frac{\Delta a}{b}x(t)u_1(t) + du_1^2(t) =$$
$$= (x(t), u_1(t)) \begin{bmatrix} c + \frac{d}{b^2}(\Delta a)^2 & d\frac{\Delta a}{b} \\ d\frac{\Delta a}{b} & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u_1(x(t)) \end{pmatrix}, \tag{34}$$

то матриця $G = \begin{bmatrix} c + \frac{d}{b^2}(\Delta a)^2 & d\frac{\Delta a}{b} \\ d\frac{\Delta a}{b} & d \end{bmatrix}$ є додатно визначеною й задача зводиться до мінімізаії "зсунутого критерія якості", що являє собою інтеграл додатно визначеної квадратичної форми. Прирівнюючи повну похідну функції Ляпунова $V(x) = hx^2$ підінтегральному виразу "зсунутого критерія якості (33)" отримаємо

$$2hx(t)[(a + \Delta a)x(t) + bu_1(x(t))] =$$
$$= -(c + \frac{d}{b^2}(\Delta a)^2)x^2(t) + 2d\frac{\Delta a}{b}x(t)u_1(t) + du_1^2(t). \tag{35}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $x^2(t)$ отримуємо

$$2h(a + \Delta a) = -c - \frac{d}{b^2}(\Delta a)^2. \tag{36}$$

Покладемо $h = -\frac{1}{2(a+\Delta a)}[c + \frac{d}{b^2}(\Delta a)^2] > 0$, тоді залишиться

$$-[2d\frac{\Delta a}{b}x(t) + du_1(x(t))]u_1(x(t)) = 2hbx(t)u_1(x(t)). \tag{37}$$

Скорочуючи на $u_1(x(t)) \neq 0$ отримаємо

$$-2d\frac{\Delta a}{b}x(t) - du_1(x(t)) = 2hbx(t). \tag{38}$$

Звідси шукане керування набуде такого вигляду

$$u_1(x(t)) = -\frac{2}{d}[hb + d\frac{\Delta a}{b}]x(t). \tag{39}$$

Підставляючи в отримане рівняння для керування (39) $h = -\frac{1}{2(a+\Delta a)}[c + \frac{d}{b^2}(\Delta a)^2] > 0$ отримаємо

$$u_1(x(t)) = -\frac{2}{d}[-\frac{b}{2(a+\Delta a)}(c + \frac{d}{b^2}(\Delta a)^2) + d\frac{\Delta a}{b}]x(t). \tag{40}$$

Таким чином, при керуванні (40) "зсунуте рівняння (31)" буде асимптотично стійким і, відповідний, критерій якості (33) вздовж своїх розв'язків буде мінімальним. Повертаючись до початкових змінних отримаємо

$$u(x(t)) = \{\frac{\Delta a}{b} - \frac{2}{d}[-\frac{b}{2(a+\Delta a)}(c + \frac{d}{b^2}(\Delta a)^2) + d\frac{\Delta a}{b}]\}x(t). \tag{41}$$

Висновки

В статті, використовуючи апарат методу функцій Ляпунова, розглянута задача оптимальної стабілізації, що полягає в знаходженні такого керування, за якого нульовий розв'язок буде асимптотично стійким та інтегральний критерій якості буде досягати найменшого значення.

Розглянуто основні положення методу оптимальних функцій Ляпунова та застосовано їх до звичайних диференціальних рівнянь. Розглянуто й доведено умови оптимальної стабілізації. Виведено загальний вигляд функції оптимального керування для звичайних диференціальних рівнянь.

Література

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г.,Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392с.
2. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432с.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530с.
4. Онищенко С. М. Жесткая оптимальная стабилизация и наблюдение нелинейных систем в условиях неопределенности, Часть 1, Киев, Альфа Реклама, 2017. 352с.
5. Demchenko H., Diblik J., Khusainov D. Ya. Optimal stabilization for differential systems with delays-Malkin's approach. *Journal of the Franklin Institute.* 2019. Vol. 356. P. 4811–4841.
6. Крак Ю. В., Шатирко А. В. Теорія керування для інформатиків. Підручник, ВПЦ "Київський університет". 2015. 175 с.

Надійшла: 25.09.2022 / Прийнята: 29.09.2022