

Проблеми і гіпотези, рішення

УДК 517.958

DOI: <https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.11>

Віктор ГРІНЧЕНКО, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.,

ORCID: 0000-0003-3229-1810

e-mail: vgrinchenko@yahoo.com

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна

Володимир МАЦИПУРА, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.,

ORCID: 0000-0002-0136-6659

e-mail: mnivtt@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ПОГЛЯД НЕМАТЕМАТИКА НА ПОБУДОВУ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ
В НЕКАНОНІЧНИХ ОБЛАСТЯХ

Кава все виправить.

Іммануїл Кант¹

Анотація. На прикладах граничних задач для рівнянь Гельмгольца і Лапласа обговорюється метод, який дозволяє суттєво розширити клас задач математичної фізики, що допускають повний аналітичний опис полів в неканонічних областях. Основним поняттям, що визначає процедуру побудови аналітичних розв'язків, є поняття загального розв'язку граничної задачі. Розглянуто приклади, що розкривають сутність методу та ілюструють побудову таких розв'язків з використанням частинних розв'язків у різних системах координат. Показано, що теорема про єдиність розв'язку граничної задачі не виключає можливості різних аналітичних форм його представлення. Указано специфічні проблеми, що виникають у зв'язку з неоднозначністю форми загальних розв'язків і можливості різного формулювання функціональних рівнянь, які визначають граничні умови та умови спряження на межах часткових областей. Обговорюються процедури пошуку значень коефіцієнтів у загальних розв'язках.

Ключові слова: метод; часткові області; загальний розв'язок; неканонічні області.

1. Вступ

Стаття починається з жартівливого висловлювання Іммануїла Канта. Метою такого початку статті, присвяченої серйозним математичним проблемам, є намір авторів, так би мовити, привернути увагу читача і запросити його до спілкування. Такий епіграф вказує на можливість здійснити перше знайомство зі статтею під час вживання кави. Потім, при більш уважному знайомстві з її змістом, сподіваємось, читач має відчутти, як сутність статті стосується дуже важливих проблем, що виникають при розробці аналітичних методів математичного моделювання фізичних процесів.

Слід сказати, що ідея висловити погляд нематематика на серйозні математичні проблеми, стимулювалася набутиим нами досвідом при написанні статті, присвяченої 100-річчю з дня народження Мандельброта (Грінченко & Маципура, 2024), де якраз

¹ Іммануїл Кант (1724 – 1804) – німецький філософ.

мова йде про обговорення математичних проблем фізиком, саме в тому сенсі, що виклад не супроводжується доведенням теорем.

За своїм задумом, стаття має чисто методичний характер, рівень викладання матеріалу цілком доступний студентам старших курсів університетів. Питання, що розглядаються в статті, практично не обговорюються у традиційних курсах математичної фізики.

Розвиток обчислювальної техніки виявив великий вплив на формування нових методів у математичній фізиці. Про це свідчить поява обчислювальних розділів у різних галузях знань таких, наприклад, як “Обчислювальна гідромеханіка”, “Комп’ютерна біологія”, “Комп’ютерна фізика” та інші. Одним з цікавих результатів цього процесу розробки нових методів є розуміння того, що орієнтація тільки на збільшення продуктивності ЕОМ є невиправданою. При цьому задача наступного аналізу і узагальнення результатів виявляється надто складною. Виникаюча тут ситуація майже в афористичній формі виражена, наприклад, ще у 1994 році, в доповіді “Від гігабайт до розуміння” (Williams, 1994). І надалі, з наступним розвитком обчислювальної техніки, ситуація мало змінилася.

Зазначена обставина, мабуть, є основним стимулом до розвитку різного типу чисельно-аналітичних методів у математичній фізиці. Мова йде про попередню аналітичну роботу при дослідженні граничної задачі, яка дозволяє зменшити розмірність задачі, взяти до уваги деякі асимптотичні властивості шуканого розв’язку, створити основи для формування стійкого алгоритму обчислень. Ця тенденція характерна практично для всіх прикладних напрямків математичної фізики. Як правило, складність задач зумовлює суттєве використання обчислювальної техніки на етапі отримання кількісних оцінок характеристик поля, що досліджується.

Основна ідея, якою стимулювалися автори у своїй роботі, давно обговорювалася і в тій чи іншій формі використовувалася у різних галузях математичної фізики. Варто відмітити, що перший приклад використання цієї ідеї можна побачити в книзі Ламе при розгляді ним задачі про рівновагу паралелепіпеда (Lame, 1852). Метод, що пропонується не обмежується лише рівняннями Гельмгольца і Лапласа, на які указано в анотації. За своєю сутністю метод може бути застосований до будь якої лінійної задачі математичної фізики, де можна сконструювати достатньо повні набори частинних розв’язків рівнянь в частинних похідних. Для ілюстрації ідейної сутності методу обмежуємося лише простішими рівняннями.

До теперішнього часу накопичено досить великий набір розв’язків граничних задач для векторних і скалярних хвильових проблем у, так званих, канонічних областях (Morse & Feshbach, 1953), (Bowman, Senior & Uslenghi, 1969). До них належать області, межі яких утворені координатними поверхнями однієї з координатних систем, наприклад, сферичної, декартової, циліндричної, сфероїдальної (Morse & Feshbach, 1953). Суть запропонованої ідеї полягає у тому, щоб, використовуючи набори відомих частинних розв’язків рівнянь в різних координатних системах побудувати аналітичні вирази, що потенційно містять достатньо степенів вільності, щоб задовольнити граничні умови на всій поверхні неканонічної області. Передбачається, що ця поверхня утворена частинами координатних поверхонь різних координатних систем.

У межах викладеного в статті підходу якраз основна увага приділяється тому, щоб у таких складних областях побудувати якісно бездоганний аналітичний розв'язок розглянутої граничної задачі. Бездоганність розуміється в тому сенсі, що використані набори частинних розв'язків та апроксимаційні властивості використаних функцій апріорі забезпечують можливість виконати задані граничні умови. У реалізації такого процесу винятково важливу роль грає, сформульоване, з урахуванням аналізу розв'язків класичних задач, поняття загального розв'язку граничної задачі. Певне уявлення про можливості підходу можна скласти на основі численних прикладів, наведених у (Грінченко, Вовк & Маципура, 2007), (Grinchenko, Vovk & Matsypura, 2013), (Grinchenko, Vovk & Matsypura 2018).

2. Основна ідея побудови загального розв'язку граничної задачі

Як відомо, будь-яке диференціальне рівняння в частинних похідних має безліч частинних розв'язків. Найбільший інтерес становлять розв'язки, що задовольняють додаткові умови. Ці умови називаються крайовими умовами і полягають у визначенні поведінки розв'язку на певній граничній лінії (поверхні) або її безпосередньому околі (інакше, кажуть *граничні умови*). З цієї точки зору початкові умови являють собою крайові умови в часі. Крайові умови використовуються для вибору окремого розв'язку з нескінченної множини розв'язків. Практично будь-яка задача, що описує фізичний процес і сформульована в термінах диференціальних рівнянь у частинних похідних, включає крайові умови.

Справа в тому, що для випадку класичних задач крайові умови формулюються на певній координатній поверхні або на координатних поверхнях однієї системи координат. Коли говоримо про неканонічні області, то маємо на увазі, що гранична поверхня формується частинами різних координатних поверхонь.

Тому для широкого кола граничних задач математичної фізики досить змістовним є поняття загального розв'язку граничної задачі. Можливість конструктивного підходу тут визначається тим, що при формулюванні граничної задачі, крім основних рівнянь, задається і форма області. Якщо для відповідних рівнянь можлива побудова певних частинних розв'язків, то для низки канонічних областей можна утворити набори таких розв'язків, які задовольняють дві умови. По-перше, суперпозиція таких розв'язків з певними ваговими коефіцієнтами дозволяє в деякому сенсі точно виконати граничні умови задачі. По-друге, при зміні граничних умов для даної області в розв'язку задачі зміняться лише значення числових коефіцієнтів. Ці досить загальні формулювання стають зовсім прозорими, якщо їх доповнити конкретним прикладом.

Розглянемо найпростішу двовимірну граничну задачу для рівняння Лапласа у крузі. Треба знайти значення функції $\varphi(r, \theta)$, яка задовольняє рівняння Лапласа у крузі $r < r_0$ і набуває на границі наперед заданих значень

$$\varphi(r_0, \theta) = \Phi(\theta). \tag{1}$$

Для цього випадку можна вказати загальний розв'язок задачі у вигляді нескінченного ряду

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))r^n. \quad (2)$$

Довільні коефіцієнти A_n і B_n легко визначаються для заданої функції $\Phi(\theta)$, звісно, якщо відповідні інтеграли для коефіцієнтів Фур'є «беруться». Загальність розв'язку розуміється в тому сенсі, що структура та функціональний вигляд виразу (2) не змінюється при зміні значення функції $\Phi(\theta)$ на границі круга. Та обставина, що за певних умов деякі із коефіцієнтів в (2) можуть бути нулями, не ставить під сумнів висловлене твердження.

Спираючись на власний досвід, читач може навести досить багато прикладів, подібних за своєю сутністю, представлень для фізичних полів різної природи. При цьому мова, звичайно, йде про такі канонічні форми областей, як сфера, циліндр, шар, еліпсоїд та інші. Важливим моментом при обговоренні ідеї введення поняття загального розв'язку граничної задачі є та обставина, що така ідея є досить конструктивною. Якби мова йшла лише про такі розв'язки, як наведений для прикладу вище, то від такого поняття було б мало користі. Однак виявляється, що загальні розв'язки граничних задач можуть бути побудовані для досить широкого кола неканонічних областей в різних розділах математичної фізики.

Подальший виклад буде пов'язаний з ілюстрацією таких можливостей і специфічних проблем, що виникають при розв'язанні конкретних задач (мова йтиме про гармонічні хвильові, зокрема, звукові поля).

3. Основні положення методу часткових областей

“Сон – це клаптикова ковдра”. В цьому вислові І. М. Сеченов² образно порівнює сон з «клаптиковою ковдрою», пояснюючи думку про те, що сон фактично являє собою «незвичайне поєднання минулого». Ми не дарма навели ці думки. Річ у тім, що метод, про який йтиме мова, ґрунтується, по суті, на принципі «клаптикової ковдри», адже при його застосуванні вся складна (неканонічна) область існування хвильового поля поділяється на більш прості області. Прості у тому сенсі, що у кожній такій області є можливість записати хвильове поле у вигляді суми відомих частинних розв'язків рівняння Гельмгольца. Надалі окремі (часткові) області «зшивають» в єдину область існування звукового поля. Зрозуміло, що ця процедура вимагає виконання певних граничних умов на межах часткових областей. Таким чином, всю область існування звукового поля зображуємо у вигляді «клаптикової ковдри», але на відміну від сну, який досить часто, являє собою незвичайне поєднання різних подій, побудована таким чином структура хвильового поля є точним розв'язком задачі про поширення хвиль у складній області. Фактично, ми дуже коротко виклали ідею методу часткових областей.

² Сеченов Іван Михайлович (1829–1905) – російський фізіолог і психолог.

Суть методу часткових областей проілюструємо, досліджуючи досить просту задачу про поширення звуку в складеному нескінченному плоскому хвилеводі, який заповнено ідеальною рідиною з густиною ρ , зі швидкістю звуку c . Геометрія задачі подана на рис. 1. Поверхні хвилеводу є акустично жорсткими, а розміри його складових дорівнюють відповідно h_1 і h_2 .

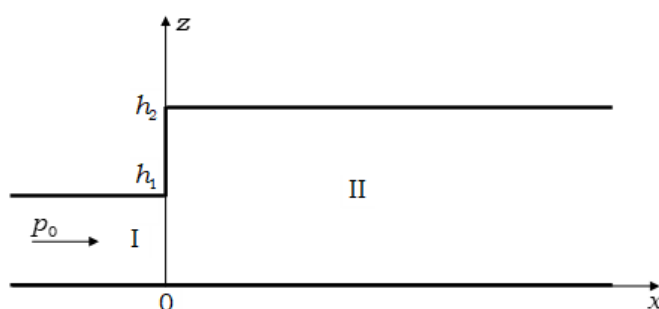


Рис. 1. Приклад складеного хвилеводу

Нехай ліворуч в хвилеводі поширюється гармонічна плоска хвиля тиску

$$p_0(x, t) = \exp[-i(\omega t - kx)], \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (3)$$

Суто геометрично всю область існування звукового поля природно розділити на дві області: I – $x \leq 0, 0 \leq z \leq h_1$, II – $x \geq 0, 0 \leq z \leq h_2$. Проте значно важливіше, що таке розбиття конструктивне з точки зору побудови розв'язку задачі в цілому.

Відомо (Грінченко, Вовк & Маципура, 2007), що довільне гармонічне поле в плоскому хвилеводі можна представити у вигляді суперпозиції нормальних хвиль з відповідно підібраними коефіцієнтами. Виділивши області I і II, ми уявили складений нескінченний хвилевід як композицію двох плоских напівнескінченних хвилеводів. Очевидно, що при падінні плоскої хвилі p_0 на межу поділу областей I і II утворюється відбита хвиля p_1 і проникна хвиля p_2 в область II. Тепер зрозуміло як записати поля p_1 і p_2 . Хвилю p_2 представимо як суперпозицію скінченної кількості однорідних і нескінченної кількості неоднорідних нормальних хвиль плоского хвилеводу з характерним розміром h_2 , тобто поле в області II матиме вигляд

$$p_2(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h_2}\right) \exp[-i(\omega t - \gamma_n x)], \quad (4)$$

де

$$\gamma_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{h_2}\right)^2}, & k > \frac{n\pi}{h_2}, \\ i \sqrt{\left(\frac{n\pi}{h_2}\right)^2 - k^2}, & k < \frac{n\pi}{h_2}. \end{cases} \quad (5)$$

Вираз (4) можна назвати загальним зображенням звукового поля в напівнескінченному хвилеводі II. У певному сенсі цей вираз є аналогом загального розв'язку (2) для круга. Слово “загальний” підкреслює той факт, що форма зображення поля (4) не зміниться за будь-яких граничних умов на поверхні $x = 0$. Аналогічна конструкція може бути побудована і для лівої частини хвилеводу. Падаюча хвиля (3) є заданою, а для відбитого поля очевидним загальним зображенням буде вираз

$$p_1(x, z, t) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \cos\left(\frac{l\pi z}{h_1}\right) \exp[-i(\omega t + \eta_l x)], \quad (6)$$

де

$$\eta_l = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \left(\frac{l\pi}{h_1}\right)^2}, & k > \frac{l\pi}{h_1}, \\ i \sqrt{\left(\frac{l\pi}{h_1}\right)^2 - k^2}, & k < \frac{l\pi}{h_1}. \end{cases} \quad (7)$$

Зробимо зауваження відносно вибору вигляду часового множника $\exp(-i\omega t)$ або $\exp(+i\omega t)$. При використанні $\exp(-i\omega t)$, як це зроблено в даній статті, біжучі хвилі в додатному напрямку осі x , матимуть вигляд $\exp(-i\omega t + i\eta x)$, а хвилі, що біжать у від'ємному напрямку осі x , матимуть вигляд $\exp(-i\omega t - i\eta x)$. Саме такі вирази визначатимуть потоки енергії в біжучих хвилях області II (для хвилі, яка пройшла крізь межу $x = 0$) і, відповідно, у відбитій хвилі в області I. Наведені міркування про напрям потоків енергії у біжучих хвилях визначають, так звану, умову на нескінченності.

Таким чином, ми побудували загальне звукове поле в усьому хвилеводі. У наведених виразах містяться дві послідовності довільних величин A_l і B_n . Завдяки їх вибору можна точно виконати умови спряження звукових полів на межі поділу областей I і II:

$$p_0 + p_1 = p_2, \quad x = 0, \quad z = [0, h_1], \quad (8)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial(p_0 + p_1)}{\partial x}, & x = 0, \quad z = [0, h_1] \\ 0, & x = 0, \quad z = [h_1, h_2]. \end{cases} \quad (9)$$

Обґрунтування такого твердження, очевидно впливає із загальних властивостей рядів Фур'є, адже сукупність функцій $\cos(n\pi z/h_2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ і $\cos(l\pi z/h_1)$, $l = 0, 1, 2, \dots$ утворюють повні і ортогональні системи функцій відповідно на відрізках $[0, h_2]$ і $[0, h_1]$.

Наведені міркування наочно розкривають зміст важливого для методу часткових областей поняття – загальний розв'язок граничної задачі. Отже, сукупність частинних розв'язків системи (або одного) диференціальних рівнянь в частинних похідних є загальним розв'язком граничної задачі для даної області, якщо одержаний розв'язок дає можливість задовольнити довільні граничні умови на її межах. Подальший пошук невідомих коефіцієнтів A_n і B_n пов'язаний зі стандартною процедурою переходу до

системи лінійних алгебраїчних рівнянь (мова про таку процедуру буде йти далі у статті).

4. Використання різних систем координат у методі часткових областей. Внутрішня задача для трикутної області

Міркування, які наведені в пункті 3, досить наочно пояснюють процедуру побудови загального розв'язку в методі часткових областей. Подальшим розвитком методу є використання одночасно різних систем координат при побудові загального розв'язку граничної задачі. Як приклад, який ілюструє таку можливість, розглянемо внутрішню задачу про визначення власних частот скінченної області, заповненої ідеальною рідиною. Нехай такою областю є прямокутний трикутник з жорсткими межами, розмір яких становить a , b і c , рис. 2. Прямокутний трикутник тут розглядається тільки для спрощення запису поля. У загальному випадку жодних обмежень на форму трикутника не накладається.

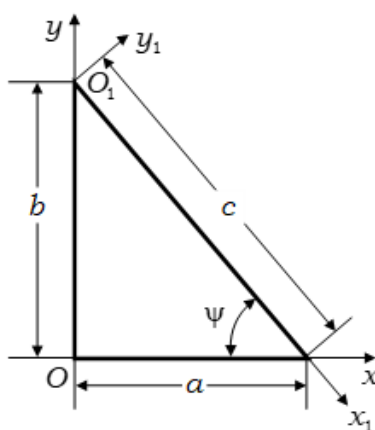


Рис. 2. Геометрія трикутної області

Як відомо (Грінченко, Вовк & Маципура, 2007), розв'язок типу (4) для плоского хвилеводу отримано за допомогою процедури відокремлення змінних. Проте ця процедура дійсно приводить до успіху, якщо межі області збігаються з частинами координатних поверхонь вибраної системи координат. На площині координатна лінія – це лінія, для якої одна з координат стала, а інша змінна.

Повертаючись до задачі про трикутну область (рис. 2), слід зазначити, що катети трикутника є частинами координатних ліній системи координат xOy , а гіпотенуза – ні. Тому введемо ще одну систему координат $x_1O_1y_1$, що повернута відносно системи xOy на кут ψ .

Наша мета побудувати загальний розв'язок граничної задачі, тобто визначити хвильове поле в такому вигляді, щоб мати можливість задовольнити граничні умови на кожній із сторін трикутника. Такої мети можна досягти, якщо зобразити поле тиску у вигляді трьох рядів Фур'є (часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо):

$$p = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(\alpha_m x) f_m^{(1)}(y) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\beta_n y) f_n^{(2)}(x) + \sum_{l=0}^{\infty} D_l \cos(\gamma_l x_1) f_l^{(3)}(y_1), \quad (10)$$

де

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}, \quad \gamma_l = \frac{l\pi}{c}.$$

Тут явно виділені ряди Фур'є по кожній зі сторін трикутника, наявність яких у представленні для функції p забезпечує загальність розв'язку граничної задачі. Що стосується функцій f то, згідно з геометрією області, для них можна використовувати такі вирази:

$$f_m^{(1)}(y) = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{k^2 - \alpha_m^2} y\right), & k > \alpha_m, \\ \exp\left(-\sqrt{\alpha_m^2 - k^2} y\right) & k < \alpha_m, \end{cases}$$

$$f_n^{(2)}(x) = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{k^2 - \beta_n^2} x\right), & k > \beta_n, \\ \exp\left(-\sqrt{\beta_n^2 - k^2} x\right) & k < \beta_n, \end{cases} \quad (11)$$

$$f_l^{(3)}(y_1) = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{k^2 - \gamma_l^2} y_1\right), & k > \gamma_l, \\ \exp\left(-\sqrt{\gamma_l^2 - k^2} y_1\right) & k < \gamma_l. \end{cases}$$

Підкреслимо, що важливо правильно вибрати знак у показнику експонент виразу (11): цей знак має визначати неоднорідні хвилі, в яких амплітуда зменшується від межі всередину трикутної області вздовж відповідної координати. Що стосується однорідних мод (для них, наприклад, має місце нерівність $k \geq \alpha_m$), то функції f можна представити і у вигляді *біжучих* у середину трикутної області хвиль, наприклад, $\exp(-i\omega t + i\sqrt{k^2 - \alpha_m^2} y)$. Оскільки область існування поля скінченна, то все ж таки доцільно вибрати запис у вигляді *стоячих* хвиль, як це зроблено у формулах (11), хоча це не принципово.

Наведена побудова розв'язку дозволяє звернути увагу ще на один аспект методу часткових областей. Сам характер міркувань, що приводить до зображення шуканого тиску звукового поля у вигляді (10), вказує на *неоднозначність форми розв'язку*. Наприклад, перший ряд Фур'є в (10) збереже властивості повноти, якщо в ньому систему функцій $\cos(\alpha_m y)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, замінити на $\sin(\alpha_m y)$, $m = 1, 2, \dots$ і та, і інша система функцій є повною і ортогональною на відрізок $x = [0, a]$. Зрозуміло, що перша більш придатна для виконання граничних умов на жорстких межах. У випадку ж акустично м'яких сторін (нульовим для них є тиск) перевагу слід віддати іншій системі.

Можливість варіації форми розв'язку при збереженні загального характеру, безумовно, визначає гнучкість методу часткових областей. Ще раз звернемо увагу на важливу відмінність за суттю задач для складеного хвилеводу (рис. 1), з одного боку,

і для трикутної області (рис. 2), з іншого. Якщо в першій задачі межа поверхня області існування звукового поля описувалася частинами координатних поверхонь однієї системи координат, то в задачі для трикутної області це вже не так. Таким чином, сама можливість роботи одночасно в різних системах координат суттєво розширює коло задач математичної фізики, які припускають побудову аналітичного розв'язку. Конкретну задачу, що ілюструє такі можливості наведено нижче.

5. Проникнення хвилі крізь зону стику плоского і клинуватого хвилеводів при куті розхилу клину менше за 180°

Розглянемо ще один приклад використання кількох систем координат при побудові загального розв'язку задачі. Мова йде про задачу поширення хвилі крізь зону стику плоского і клинуватого хвилеводів, рис. 3.

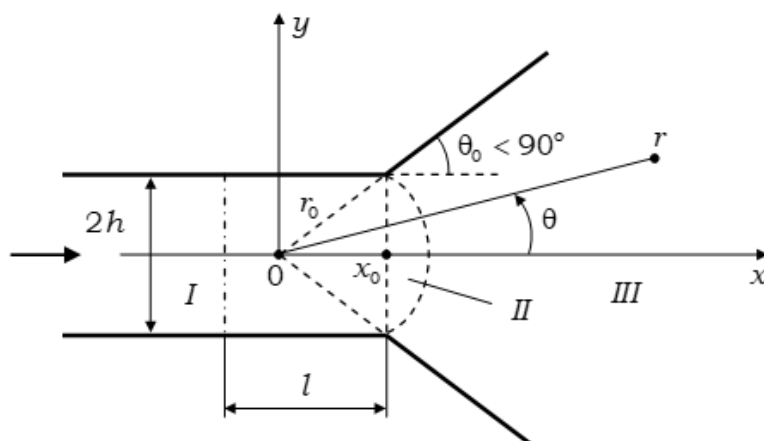


Рис. 3. Хвилеводна структура, $\theta_0 < 90^\circ$

Отже, маємо плоскопаралельний хвилевід з характерним розміром $2h$, який межує з клинуватим хвилеводом з кутом розхилу $2\theta_0$. Нехай кут $\theta_0 < 90^\circ$. Структура заповнена ідеальним стисливим середовищем. Поверхні хвилеводу є ідеально жорсткі.

Згідно з рис. 3 вводимо декартову xOy і полярну $rO\theta$ системи координат зі спільним центром O . Вся область існування звукового поля природно ділиться на часткові області: I – плоский напівнескінченний хвилевід $x \leq x_0$, $|y| \leq h$; III – клинуватий хвилевід $r \geq r_0$, $|\theta| \leq \theta_0$; II – перехідна область – це сегмент круга радіуса r_0 .

Нехай ліворуч в області I на зону стику плоского і клинуватого хвилеводів падає одна з мод плоского хвилеводу. Внаслідок її взаємодії з зоною стику утворюються відбита хвиля і хвиля, що проникла в область III. Відповідно до методу часткових областей слід записати вирази для звукових полів в областях I, II, III. Кожен з цих виразів повинен мати загальний характер, який дозволяє виконати будь-які граничні умови на межах поділу часткових областей. Для області I такий вираз містить у собі

падаючу хвилю і повну сукупність однорідних і неоднорідних відбитих хвиль (так само, як це було для спряжених плоских хвилеводів, рис. 1):

$$p_I(x, y) = \cos(\alpha_q y) \exp(ik_q(x - x_0)) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n y) \exp(-ik_n(x - x_0)), \quad (12)$$

де q – номер падаючої нормальної хвилі, а величини α_n і k_n визначаються згідно з умовою $\partial p_1 / \partial y = 0$ при $y = \pm h$ на жорстких поверхнях плоского хвилеводу:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{h}, \quad k_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}, & k \geq \alpha_n, \\ i\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}, & k < \alpha_n, \quad k = \omega/c. \end{cases} \quad (13)$$

Досить просту конструкцію має і представлення поля тиску в області III. Його природно представити в полярних координатах (Грінченко, Вовк & Маципура, 2007):

$$p_{III}(r, \theta) = \sum_{\mu=0}^{\infty} B_{\mu} H_{\beta_{\mu}}^{(1)}(kr) \cos(\beta_{\mu} \theta), \quad (14)$$

де, відповідно до граничної умови $\partial p_{III} / \partial \theta = 0$ при $\theta = \pm \theta_0$ на поверхнях клинуватого хвилеводу, знаходимо $\beta_{\mu} = \mu\pi / \theta_0$. Радіальні функції $H_{\beta_{\mu}}^{(1)}(kr)$ (функції Ханкеля першого роду) вибрані згідно з умовою випромінювання, тобто хвилі поширюються в додатному напрямку координати r , адже потік енергії в області III нвідбувається саме в цьому напрямку.

Для побудови загального розв'язку граничної задачі в області II з урахуванням геометрії її меж слід використовувати частинні розв'язки рівняння Гельмгольца в декартовій і полярній системах координат. На границі області II ($x = x_0, |y| \leq h$) повною і ортогональною є система функцій $\cos(\alpha_n y)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. На другій границі ($r = r_0, |\theta| \leq \theta_0$) такі ж властивості має система функцій $\cos(\beta_{\mu} \theta)$, $\mu = 0, 1, 2, \dots$. У зв'язку з цим поле тиску в області II можна представити у вигляді

$$p_{II} = p_{II}^{(1)} + p_{II}^{(2)}, \quad (15)$$

де

$$p_{II}^{(1)}(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} D_l \cos(\alpha_l y) f_l(x), \quad (16)$$

$$p_{II}^{(2)}(r, \theta) = \sum_{v=0}^{\infty} C_v \cos(\beta_v \theta) J_{\beta_v}(kr), \quad (17)$$

де $J_{\beta_\nu}(kr)$ – функція Бесселя першого роду, а функції $f_l(x)$ мають вигляд

$$f_l = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{k^2 - \alpha_l^2}(x - x_0)\right), & k > \alpha_l, \\ \exp\left(-\sqrt{\alpha_l^2 - k^2}(x - x_0)\right), & k < \alpha_l. \end{cases} \quad (18)$$

Структура цього розв'язку така ж, як і структура розв'язку внутрішньої задачі для трикутної області (рис. 2). Але фізична суть задачі у даному випадку інша. Якщо в першому випадку мова йшла про пошук власних форм коливань скінченної області, то в даному випадку область II є проміжною для передачі енергії із плоского хвилеводу в клиновидний. Потік енергії крізь цю область має бути відмінним від нуля. Це природна фізична умова має такий же характер, що й умова випромінювання. На перший погляд, розв'язок у формі (15) не відповідає вказаним енергетичним вимогам. Так, в першій сумі розв'язок містить стоячі хвилі по координаті x , які самі енергії не переносять. Такі ж стоячі хвилі по радіальній координаті описуються функціями $J_{\beta_\nu}(kr)$.

Таким чином, окремо кожен з доданків у виразі (15) енергії не переносить. Використовуючи відзначену вище неоднозначність у виборі частинних розв'язків у межах даного методу, зазначені формальні труднощі можна усунути, записавши вираз (15) у вигляді суперпозиції біжучих хвиль. Але в цьому немає необхідності. Аналіз показує, що повний розв'язок у формі (15) дає відмінний від нуля потік енергії крізь область II. Фізично ситуація ідентична тій, яка має місце при проходженні хвилі крізь шар скінченної товщини при кутах падіння хвилі більших за критичний (Грінченко, Вовк & Маципура, 2007). Тут передача енергії відбувається в результаті взаємодії неоднорідних хвиль, «прив'язаних» до протилежних границь. Конкретні розрахунки для різних форм представлення поля тиску в області II також підтверджують, що з енергетичних міркувань в розв'язку (15) нічого змінювати не потрібно.

Умови спряження на межах поділу областей I, II, III (рис. 3) мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} p_I &= p_{II} \\ \frac{\partial p_I}{\partial x} &= \frac{\partial p_{II}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad x = x_0, \quad |y| \leq h, \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{II} &= p_{III} \\ \frac{\partial p_{II}}{\partial r} &= \frac{\partial p_{III}}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad r = r_0, \quad |\theta| \leq \theta_0. \quad (20)$$

Підставляючи розв'язки (12), (14), (15) в умови (19), (20) і враховуючи формули, які визначають зв'язок між декартовою і полярною системами координат, приходимо до системи функціональних рівнянь.

Якщо спробувати розв'язати задачу для випадку кута $\theta_0 > 90^\circ$, то ситуація, як ми переконаємося нижче, корінним чином зміниться у порівнянні з випадком $\theta_0 < 90^\circ$. Тут виникає специфічна задача *продовження (або, інакше, доповнення) граничних умов з фізично заданої межі на деяку неіснуючу ділянку*.

Такий підхід може бути покладений в основу розгляду спеціального класу задач, що допускають побудову загальних розв'язків в межах методу часткових областей за відсутності фізично визначених граничних умов на всій координатній поверхні, до якої прив'язується повна система функцій. Розглянемо конкретні приклади таких задач.

6. Проникнення хвилі крізь зону стику плоского і клинуватого хвилеводів при куті розхилу клину більше за 180° . Доповнення граничних умов

Повернемося до задачі про поширення хвилі крізь зону стику плоского і клинуватого хвилеводів за умови, коли кут розхилу клину більше за 180° , тобто $\theta_0 > 90^\circ$ (рис. 4). Як бачимо, центр полярної системи координат (точка O) зміщується всередину області II. Отже, кутові функції у виразу $p_{II}^{(2)}$ (див. формулу (17)) мають бути періодичними з періодом 2π , що відповідає повному обходу навколо точки O . Зрозуміло, що таку умову не задовольняє система функцій $\cos(\beta_v \theta)$, $v = 0, 1, 2, \dots$ у розв'язку $p_{II}^{(2)}$. Тому її слід замінити на систему функцій $\cos(v\theta)$, $v = 0, 1, 2, \dots$, яка має таку періодичність і є повною і ортогональною на відрізку $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Таким чином, поле в області II, як і раніше, визначається співвідношенням $p_{II} = p_{II}^{(1)} + p_{II}^{(2)}$, причому, якщо $p_{II}^{(1)}$ визначається виразом (16), то для $p_{II}^{(2)}$ слід записати нове співвідношення:

$$p_{II}^{(2)}(r, \theta) = \sum_{v=0}^{\infty} C_v \cos(v\theta) J_v(kr). \quad (21)$$

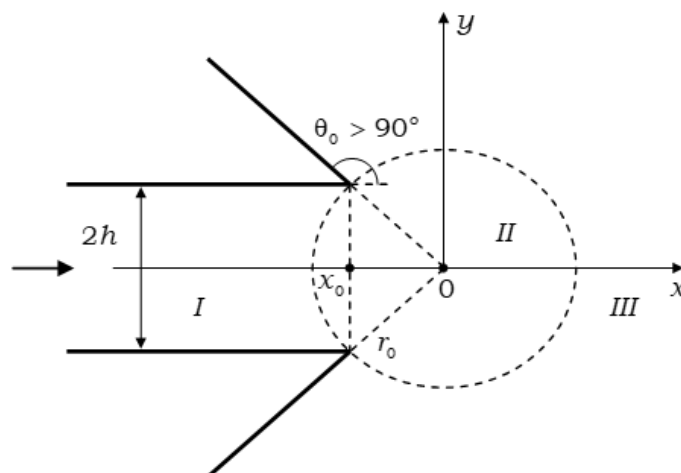


Рис. 4. Хвилеводна структура, $\theta_0 > 90^\circ$

Проте, як видно з рис. 4, конфігурація області II не дозволяє скористатися повнотою і ортогональністю системи функцій $\cos(v\theta)$, $v = 0, 1, 2, \dots$ оскільки межа області II являє собою тільки частину кола радіусом r_0 . Цю складність можна подолати,

якщо для розв'язку $p_{II}^{(2)}$ доповнити межу області II до повного кола радіусом r_0 . На рис. 4 це штрихова лінія в області I: $r = r_0, \theta_0 \leq |\theta| \leq \pi$. Доповнивши межу області II до повного кола, ми отримуємо можливість використовувати повноту та ортогональність системи функцій $\cos(v\theta)$ під час виконання граничних умов. Проте труднощі у тому, що на введений додатковій ділянці межі, у вихідній постановці задачі, умови не задані. Принциповим моментом у даному підході є те, що при формуванні умов спряження на додатковій ділянці межі ($r = r_0, \theta_0 \leq |\theta| \leq \pi$) може бути задане довільне значення коливальної швидкості або тиску. Нехай воно визначається деякою функцією $f_p(r_0, \theta)$ і $f_v(r_0, \theta)$ відповідно.

Отже, для кутів розхилу клину $2\theta_0 > 180^\circ$ (рис. 4), з'являються два варіанти формування умов спряження полів на межах виділених областей. Перший, при продовженні тиску на додатковій ділянці, виглядає так:

$$\begin{cases} p_I = p_{II}, & x = x_0, & |y| \leq h, \\ \frac{\partial p_I}{\partial x} = \frac{\partial p_{II}}{\partial x}, & x = x_0, & |y| \leq h, \\ \frac{\partial p_{II}}{\partial r} = \frac{\partial p_{III}}{\partial r}, & x = x_0, & |\theta| \leq \theta_0, \\ \left\{ \begin{array}{l} p_{II} = p_{III}, & r = r_0, & |\theta| \leq \theta_0, \\ p_{II}^{(2)} = f_p(r_0, \theta), & r = r_0, & \theta_0 \leq |\theta| \leq \pi. \end{array} \right. \end{cases} \quad (22)$$

Другий, при продовженні коливальної швидкості, має вигляд:

$$\begin{cases} p_I = p_{II}, & x = x_0, & |y| \leq h, \\ \frac{\partial p_I}{\partial x} = \frac{\partial p_{II}}{\partial x}, & x = x_0, & |y| \leq h, \\ p_{II} = p_{III}, & x = x_0, & |\theta| \leq \theta_0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_{II}}{\partial r} = \frac{\partial p_{III}}{\partial r}, & r = r_0, & |\theta| \leq \theta_0, \\ \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_{II}^{(2)}}{\partial r} = f_v(r_0, \theta), & r = r_0, & \theta_0 \leq |\theta| \leq \pi. \end{array} \right. \end{cases} \quad (23)$$

Алгебраїзація, про яку будемо говорити нижче, перших двох рівнянь у системах (22) і (23) відбувається за рахунок системи функцій $\cos(\alpha_n y)$, яка ортогональна на відрізьку $|y| \leq h$, третього рівняння – за допомогою системи функцій $\cos(\beta_\mu \theta)$, яка ортогональна на відрізьку $|\theta| \leq \theta_0$, і, нарешті, четвертого, яке включає дві рівності об'єднаних фігурною дужкою, за рахунок системи функцій $\cos(v\theta)$. Система функцій $\cos(v\theta)$ ортогональна на відрізьку $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

7. Випромінювання звуку парою циліндрів, що перетинаються

Як другий приклад, що ілюструє ідею продовження граничних умов на нефізичні межі, розглянемо задачу про випромінювання звуку складною (неканонічною)

поверхнею. Мова йтиме про плоску задачу, в якій маємо пару циліндрів з паралельними осями, що перетинаються. Для простоти візьмемо два циліндра з однаковим радіусом a (рис. 5, а).

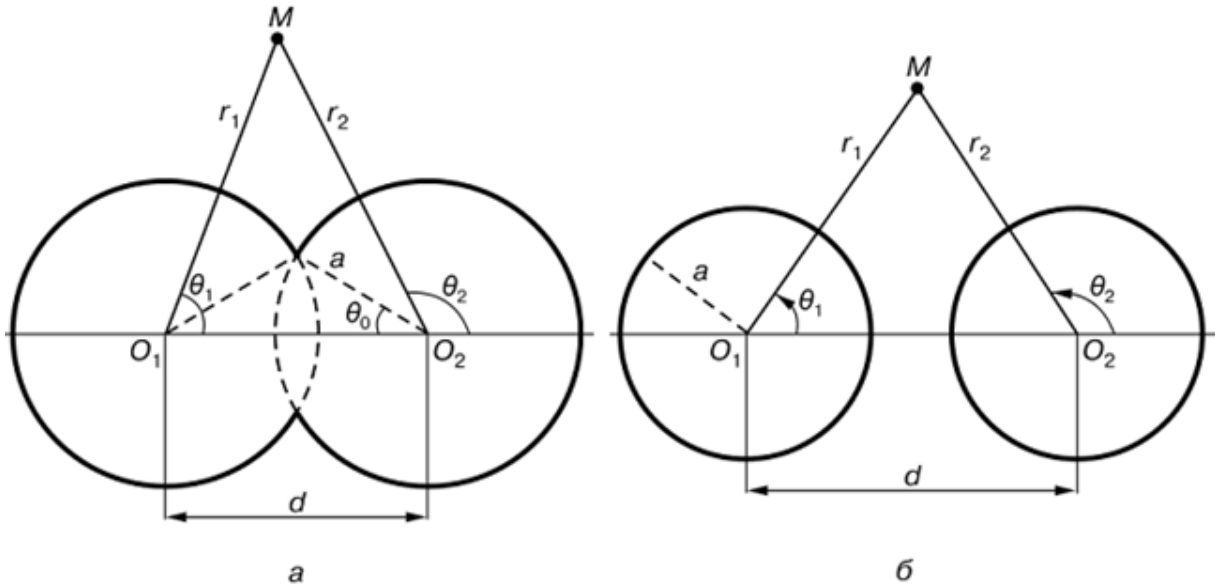


Рис. 5. Приклад системи з двох циліндрів:

а – циліндри перетинаються, б – циліндри не дотикаються один до одного

Спочатку розглянемо ситуацію, коли циліндри не торкаються один одного (рис. 5, б). Така задача добре вивчена. Введемо дві полярні системи координат $r_1 O_1 \theta_1$ і $r_2 O_2 \theta_2$ з центрами O_1 і O_2 на осях циліндрів.

Поле тиску окремо взятого циліндра, наприклад, першого (зліва), являє собою суперпозицію циліндричних хвиль:

$$p_1(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} H_n^{(1)}(kr_1) \cos(n\theta_1), \quad (24)$$

(вважаємо, що функція парна відносно кутової координати, тому можна використовувати тільки функції косинуса). Тут коефіцієнти $A_n^{(1)}$ визначаються із граничної умови на поверхні першого циліндра. Ця умова полягає в заданні радіальної швидкості на поверхні циліндра, тобто

$$\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_1(r_1 = a, \theta_1)}{\partial r_1} = V_1(\theta_1), \quad \theta_1 = [0, 2\pi]. \quad (25)$$

Підставляючи (24) в (25) і, використовуючи властивість ортогональності системи функцій $\cos(n\theta_1)$, $n = 1, 2, \dots$ на відрізку $[0, 2\pi]$, визначаємо коефіцієнти $A_n^{(1)}$. Аналогічно, якщо в просторі маємо тільки другий циліндр (справа), то його поле тиску має вигляд

$$p_2(r_2, \theta_2) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l^{(2)} H_l^{(2)}(kr_2) \cos(l\theta_2), \quad (26)$$

де коефіцієнти $A_l^{(2)}$ визначаються з умови

$$\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_2(r_2 = a, \theta_2)}{\partial r_2} = V_2(\theta_2), \quad \theta_2 = [0, 2\pi] \quad (27)$$

внаслідок ортогональності системи функцій $\cos(l\theta_2)$, $l = 0, 1, 2, \dots$ на відрізку $[0, 2\pi]$.

Тепер повернемося до задачі випромінювання двох циліндрів, котрі не торкаються один одного (рис. 5, б). Тут у порівнянні з одним циліндром ситуація ускладнюється. Річ у тому, що звукове поле в точці спостереження M складається зі звукових полів, що випромінює кожний циліндр, причому випромінювання кожного з циліндрів має бути визначено з врахуванням багаторазового розсіювання звуку на циліндрах. Тому поле тиску пари циліндрів визначаємо як суму тисків p_1 і p_2 , тобто

$$p = p_1 + p_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} H_n^{(1)}(kr_1) \cos(n\theta_1) + \sum_{l=0}^{\infty} A_l^{(2)} H_l^{(2)}(kr_2) \cos(l\theta_2), \quad (28)$$

де коефіцієнти $A_n^{(1)}$ і $A_l^{(2)}$ слід вибирати так, щоб одночасно задовольнити граничні умови на поверхнях обох циліндрів:

- на поверхні першого циліндра

$$\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial(p_1 + p_2)}{\partial r_1} = V_1(\theta_1), \quad r_1 = a, \quad \theta_1 = [0, 2\pi], \quad (29)$$

- на поверхні другого циліндра

$$\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial(p_1 + p_2)}{\partial r_2} = V_2(\theta_2), \quad r_2 = a, \quad \theta_2 = [0, 2\pi]. \quad (30)$$

Слід відмітити, що у формулі (28) хвилі записані в різних системах координат, які пов'язані з центрами кожного з циліндрів. Тому, щоб можна було виконати диференціювання і задовольнити граничну умову (29) на поверхні першого циліндра, слід записати хвилі, що випромінюються другим циліндром в системі координат $r_1 O_1 \theta_1$ з центром в точці O_1 . Аналогічне зауваження маємо відносно граничної умови (30) на поверхні другого циліндра.

Розписуючи умови (29), (30), отримуємо пару функціональних рівнянь. Алгебраїзація першого з них проводиться завдяки ортогональності системи функцій $\cos(n\theta_1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ на відрізку $[0, 2\pi]$, а другого – завдяки ортогональності системи

функцій $\cos(l\theta_2)$, $l = 0, 1, 2, \dots$ на відрізку $[0, 2\pi]$. Таким чином, отримуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь *другого роду*:

$$\begin{aligned} A_m^{(1)} + \sum_{l=0}^{\infty} A_l^{(2)} a_{ml}^{(2)} &= b_m^{(1)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} a_{jn}^{(1)} + A_j^{(2)} &= b_j^{(2)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (31)$$

де $a_{jn}^{(1)}$, $a_{ml}^{(2)}$, $b_m^{(1)}$, $b_j^{(2)}$ – коефіцієнти, котрі обчислюються. Розв'язок нескінченної системи (31) можна отримати завдяки її редукції.

Тепер розглянемо ситуацію, коли циліндри перетинаються (рис. 5, а). Тут граничні умови на штрихових ділянках кіл не визначені, оскільки ці ділянки взагалі не є фізичними межами області. Отже, функції $V_1(\theta_1)$ і $V_2(\theta_2)$ не будуть визначені на повних колах, тому скористатися ортогональністю систем функцій $\cos(n\theta_1)$ і $\cos(l\theta_2)$ немає можливості. Алгебраїзація функціональних рівнянь за таких умов приведе до появи системи алгебраїчних рівнянь *першого роду*, загальний вигляд якої такий:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}^{(1)} A_n^{(1)} + \sum_{l=0}^{\infty} a_{ml}^{(2)} A_l^{(2)} &= b_m^{(1)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_{jn}^{(1)} A_n^{(1)} + \sum_{l=0}^{\infty} c_{jl}^{(2)} A_l^{(2)} &= b_j^{(2)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (32)$$

З обчислювальної точки зору така ситуація небажана, оскільки формулювання даної задачі у вигляді нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь першого роду може виявитися *некоректною*, тобто практично виключається можливість проведення систематичних числових розрахунків. Найбільш загальним проявом некоректності систем рівнянь першого роду є нестабільність результатів їх розв'язку при незначній зміні зовнішніх параметрів задачі або порядку системи при її редукції.

Використовуючи ідею продовження граничних умов, записуємо граничну умову для лівого циліндра (рис. 5, а) так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_1}{\partial r_1} &= f_1(\theta_1), \quad r_1 = a, \quad 0 \leq \theta_1 \leq \theta_0, \quad 2\pi - \theta_0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, \\ \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial(p_1 + p_2)}{\partial r_1} &= V_1(\theta_1), \quad r_1 = a, \quad \theta_0 \leq \theta_1 \leq 2\pi - \theta_0, \end{aligned} \quad (33)$$

де функція $f_1(\theta_1)$ визначає доповнення граничних умов для розв'язку p_1 на нефізичній ділянці поверхні лівого циліндра. Аналогічне співвідношення маємо записати для поверхні правого циліндра:

$$\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial(p_1 + p_2)}{\partial r_2} = V_2(\theta_2), \quad r_2 = a, \quad 0 \leq \theta_2 \leq \pi - \theta_0, \quad \pi + \theta_0 \leq \theta_2 \leq 2\pi, \quad (34)$$

$$\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_2}{\partial r_2} = f_2(\theta_2), \quad r_2 = a, \quad \pi - \theta_0 \leq \theta_2 \leq \pi + \theta_0,$$

де функція $f_2(\theta_2)$ визначає доповнення граничних умов для розв'язку p_2 на нефізичній ділянці правого циліндра.

Тепер ми отримали можливість скористатися ортогональністю систем функцій $\cos(n\theta_1)$ і $\cos(l\theta_2)$ на відрізку $[0, 2\pi]$ і перевести завдяки цьому функціональну систему рівнянь (33), (34) в нескінченну систему алгебраїчних рівнянь другого роду вигляду (31).

Підсумовуючи, можна сказати, що багато практичних обчислень і строгий аналіз деяких простих задач (Grinchenko, 1996), (Грінченко, 2008), (Grinchenko, Vovk & Matsyura, 2013) приводять до незвичайного, на перший погляд, висновку, а саме, *остаточні кількісні оцінки характеристик поля не залежать від вибору функцій, які доповнюють граничні умови на нефізичній ділянці меж* (в розглянутій задачі це $f_1(\theta_1)$ і $f_2(\theta_2)$). Отже, описаний спосіб покращення властивостей нескінченних систем, які отримані під час розв'язання задачі, є дійсно конструктивним і, таким чином, розширює можливості методу часткових областей.

Слід зробити ще таке важливе загальне зауваження. Наявність аналітичного представлення розв'язку задачі виводить процедуру аналізу задачі на новий якісний рівень. Адже, по суті, вся "історія відбувається" на поверхнях меж часткових областей, минаючи тим самим об'ємні області часткових областей, що фактично зменшує розмірність задачі.

8. Алгоритм пошуку значень коефіцієнтів в загальних розв'язках

У розглянутих вище задачах ми побудували загальні розв'язки і записали умови спряження полів на межах часткових областей. Подальший алгоритм визначення коефіцієнтів в загальних розв'язках є універсальним.

На першому кроці слід розписати умови спряження полів, використовуючи представлення полів в часткових областях. Як результат, отримуємо систему функціональних рівнянь. Щоб наші міркування були більш наочними, розпишемо, наприклад, першу умову (19) в задачі проходження хвилі крізь стик плоского і клинуватого хвилеводів (рис. 3), а саме: $p_I = p_{II}$, $x = x_0$, $|y| \leq h$. Використовуючи представлення полів (12), (15), отримуємо таке функціональне рівняння:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n y) - \sum_{l=0}^{\infty} D_l \cos(\alpha_l y) - \sum_{v=0}^{\infty} C_v \cos\left(\beta_v \arctg \frac{y}{x_0}\right) J_{\beta_v}\left(k \sqrt{x_0^2 + y^2}\right) = \quad (35)$$

$$= -\cos(\alpha_q y), \quad |y| \leq h.$$

На другому кроці проводимо процедуру алгебраїзації функціонального рівняння (35), завдяки властивостям повноти і ортогональності набору функцій $\cos(\alpha_n y)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ на плоскій межі $x = x_0$, $|y| \leq h$. Для цього послідовно множимо рівняння (35) на $\cos(\alpha_m y)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ та інтегруємо по координаті y в межах $-h \leq y \leq h$,

використовуючи властивість ортогональності набору функцій $\cos(\alpha_m y)$. Як результат, матимемо нескінченну кількість лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \delta_{mn} - \sum_{l=0}^{\infty} D_l \delta_{ml} - \sum_{v=0}^{\infty} C_v T_{mv} = -\delta_{mq}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (36)$$

де

$$\delta_{ml} = \begin{cases} 2h, & m = l = 0, \\ h, & m = l > 0, \\ 0, & m \neq l, \end{cases} \quad T_{mv} = \int_{-h}^h \cos\left(\beta_v \operatorname{arctg} \frac{y}{x_0}\right) J_{\beta_v}\left(k \sqrt{x_0^2 + y^2}\right) \cos(\alpha_m y) dy. \quad (37)$$

Аналогічно проводиться алгебраїзація другої умови (19). Для умов (20), які визначені на межі ($r = r_0$, $|\theta| \leq \theta_0$), використовується система функцій $\cos(\beta_j \theta)$, $j = 0, 1, 2, \dots$.

У результаті цих двох кроків отримуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь *другого роду*. Якщо сума модулів коефіцієнтів у кожному рядку системи менша за одиницю, то така система рівнянь називається *регулярною* (Kantorovich & Krylov, 1964). Розв'язок регулярних систем можна виконати методом *редукції*. Слід зробити суттєве зауваження: умова регулярності для нескінченних систем рівнянь є *достатньою*, але *не необхідною*. Тому, якщо ця умова не виконується, або проведення такого аналізу ускладнене внаслідок непростого вигляду матриці коефіцієнтів системи рівнянь, то питання про можливість розв'язку таких систем методом редукції визначається в процесі *числового експерименту*, тобто методом редукції при поступовому збільшенні порядку системи. Система матиме розв'язок, якщо в ході числового експерименту маємо:

- умови спряження виконуються з необхідною точністю;
- спостерігається збіжність отриманого розв'язку при збільшенні порядку системи рівнянь в процесі редукції;
- виконується закон збереження енергії.

Наявність сучасних ЕОМ дозволяє успішно проводити числовий експеримент, тому він широко застосовується в сучасній практиці розв'язку нескінченних систем рівнянь.

Таким чином, основною обчислювальною процедурою при отриманні оцінок характеристик поля являється розв'язок нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Кількість врахованих невідомих (порядок скінченної системи) строго залежить від співвідношення довжини хвилі і характерних розмірів геометрії моделі. Зменшення довжини хвилі природно потребує збільшення кількості членів рядів, що використовуються в якості представлень звукового поля.

Про описаний варіант переходу до лінійної системи алгебраїчних рівнянь, який можна назвати класичним, говорять як про наближення функцій у розумінні мінімальності середньоквадратичного відхилення. При цьому можуть виникнути певні складнощі. Наприклад, якщо для запису хвильових полів у часткових областях доводиться використовувати декілька систем координат. Як результат, при переході до системи алгебраїчних рівнянь виникають досить складні інтеграли. Часто їх

аналітичне обчислення неможливе, та й чисельне обчислення може бути пов'язане з певними труднощами.

Після редукції система рівнянь (36) матиме вигляд сукупності з N_1 лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{n=0}^{N_1} A_n \delta_{mn} - \sum_{l=0}^{N_1} D_l \delta_{ml} - \sum_{v=0}^{N_2} C_v T_{mv} = -\delta_{mq}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N_1. \quad (38)$$

Тут кількість коефіцієнтів A_n і D_n дорівнює N_1 , а коефіцієнтів C_n – N_2 .

Інший варіант переходу до системи алгебраїчних рівнянь полягає в пріврівнюванні функцій (полів у суміжних часткових областях) в скінченному наборі точок (назвемо їх вузлові точки) на межі цих областей. Кількість вузлових точок на межі визначає порядок системи рівнянь і тим самим кількість шуканих амплітудних коефіцієнтів мод у часткових областях. Як бачимо, такий підхід не містить обчислювальних проблем. У такому варіанті функціональне рівняння (35) перетворюється на таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{n=0}^{N_1} A_n \cos(\alpha_n y_s) - \sum_{l=0}^{N_1} D_l \cos(\alpha_l y_s) - \sum_{v=0}^{N_2} C_v \cos\left(\beta_v \arctg \frac{y_s}{x_0}\right) J_{\beta_v}\left(k \sqrt{x_0^2 + y_s^2}\right) = -\cos(\alpha_q y_s), \quad s = 0, 1, 2, \dots, N_1. \quad (39)$$

Проте виникає питання: яка хвильова відстань між вузловими точками забезпечить прийнятну точність обчислень? У роботі (Грінченко, Гусак & Маципура, 2021) показано, що, за однакової кількості мод у часткових областях для двох варіантів спряження полів, варіант середньоквадратичного наближення є більш точним. Однак також показано, що за величини хвильової відстані між вузловими точками $\Delta/\lambda < 0,2$ отримуємо цілком прийнятну точність розрахунку для методу точкового спряження полів.

9. Висновки

Підсумовуючи виклад матеріалу статті слід відзначити, що вибір матеріалу та характер викладу визначалися бажанням проілюструвати два важливих аспекти загальної проблеми розвитку аналітичних методів розв'язання граничних задач математичної фізики. Перш за все, хотілося звернути увагу на конструктивність введеного поняття загального розв'язку граничної задачі. Використання закладеної в ньому ідеї дає можливість суттєво розширити коло задач, для яких такі аналітичні розв'язки можна побудувати. З другого боку, практичне використання методу суперпозиції загальних розв'язків канонічних задач при побудові розв'язків задач неканонічних, призвело до необхідності розглянути досить специфічну проблему доповнення граничних умов на певних нефізичних поверхнях для одержання більш

простих співвідношень для шуканих величин. У роботі показано можливість використання дещо нетрадиційного підходу до цієї проблеми. Одержані при цьому результати досить цікаві також з точки зору ілюстрації можливості побудови єдиних, по суті, розв'язків граничних задач у різних формах.

Певне уявлення про можливості методу часткових областей можна сформулювати на основі низки прикладів, наведених у (Грінченко, Вовк & Маципура, 2007), (Grinchenko, Vovk & Matsypura, 2013), (Grinchenko, Vovk & Matsypura 2018).

Список використаних джерел

- Грінченко В. Т., Маципура В.Т. (2024). FRACTALIST // *У світі математики*. Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка. № 2. С. 60–87.
- Грінченко В. Т., Вовк І. В., Маципура В. Т. (2007). *Основи акустики : навчальний посібник*. Київ : Наукова думка, 640 с.
- Grinchenko, V. T. (1996). Development of the method for solving problems of sound radiation and scattering in non-canonical areas, *Hydromechanics*, 70, 27–40. (in Russian)
- Грінченко В. Т. (2008). Задачі математичної фізики з неповністю визначеними граничними умовами // *Мат. Методи та фіз.-мех. поля*. 51, № 2. С. 53–60.
- Viktor T. Grinchenko, I.V. Vovk, V.T. Matsypura (2013). *Wave problems of acoustics*. Beggel Books, Monograph. 572 p. DOI:[10.1615/978-1-56700-459-5.0](https://doi.org/10.1615/978-1-56700-459-5.0)
- Грінченко В. Т., Гусак В. О., Маципура В. Т. (2021). Використання двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. № 2(136). С. 5–16.
- Kantorovich L. V., Krylov V. I. (1964). *Approximate methods of higher analysis*. New York : Interscience Publishers, 708 p.
- Philip M. Morse, Hernan Feshbach (1953). *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London. 1064 p.
- Bowman, J. I., Senior, N. B. A., & Uslenghi, P. L. T. (1969). *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shaper*. North-Holland Publ. Co. 744 p.
- Lame G. (1852). *Lecons sur la theorie mathematique de J'elasticite des corps solides*. Paris, Bechelier, 335 p.
- Viktor T. (2018). Grinchenko, Igor V. Vovk, Vladimir T. Matsypura. *Acoustic wave problems*. New York : Begell House, Inc. 439 p.
- Williams E. G. (1994). From gigabytes to understanding // *Journ. Acoust. Soc. Am.* 95 (5), Pt 2. – P. 2901.

Отримано редакцією журналу: 14.03.2024

Прорецензовано: 18.03.2024

Схвалено до друку: xx.06.2024

Victor GRINCHENKO, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.

ORCID: 0000-0003-3229-1810

e-mail: vgrinchenko@yahoo.com

Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv,

Volodymyr MATSY PURA, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.

ORCID: 0000-0002-0136-6659

e-mail: mnivtt@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

**A NON-MATHEMATICIAN'S VIEW ON CONSTRUCTING A GENERAL SOLUTION TO
BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN NON-CANONICAL DOMAIN**

Abstract. *Using examples of boundary value problems for the Helmholtz and Laplace equations, the method is discussed, which allows significantly expanding the class of mathematical physics problems that allow a complete analytical description of fields in non-canonical domains. The basic concept that defines the procedure for constructing analytical solutions is the concept of a general solution of a boundary value problem. Examples are considered that reveal the essence of the method and illustrate the construction of such solutions using partial solutions in different coordinate systems. It is shown that the theorem on the uniqueness of the solution of a boundary value problem does not exclude the possibility of different analytical forms of its representation. Specific problems that arise due to the ambiguity of the form of general solutions and the possibility of different formulations of functional equations that determine the boundary conditions and conjugation conditions of conjugation on the boundaries of partial domains are indicated. The procedures for finding the values of coefficients in general solutions are discussed.*

Keywords: *method; partial domains; general solution; non-canonical domains.*