Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2024, № 1 | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.6
MSC 35R11, 65M06

OPTIMAL STABILIZATION IN DIFFERENCE EQUATIONS

D. Ya. Khusainov, Y. R. Hahurin
Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: d.y.khusainov@gmail.com, zhenyahahurin@gmail.com

ОПТИМАЛЬНА СТАБІЛІЗАЦІЯ В РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯННЯХ

Д. Я. Хусаінов, Є. Р. Гагурін
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, КНУ імені Тараса Шевченка, Київ,Україна, E-mail: d.y.khusainov@gmail.com, zhenyahahurin@gmail.com

Abstract. The paper deals with the problem of optimal stabilization for difference equations. The use of Lyapunov functions for optimal stabilization is discussed. The theorem of optimal stabilization is proved and the form of optimal control for the considered class of problems is determined.
Keywords: optimal stabilization, difference equations, Lyapunov functions, optimal control.

Анотація. В роботі розглянуто задачу оптимальної стабілізації для різницевих рівнянь. Використання функцій Ляпунова для оптимальної стабілізації. Доведено теорему про оптимальну стабілізацію й визначено вигляд оптимального керування для розглянутого класу задач.
Ключові слова: оптимальна стабілізація, різницеві рівняння, функції Ляпунова, оптимальне керування.

Вступ

У цій роботі пропонується використання методу оптимального стабілізаційного керування, запропонованого в попередній роботі [1] для скалярного різницевого рівняння.

Як було зазначено в [1], під час розв'язання задач оптимізації в динамічних систем використовують два підходи. Перший із них полягає в знаходженні фіксованого керування (програмного керування), за якого система досягає заданого значення і за заданий кінцевий проміжок часу мінімізується інтегральний критерій якості [2, 3]. Другий підхід являє собою оптимальну стабілізацію [4, 5]. Він полягає в знаходженні функції керування у вигляді зворотного зв'язку, за якої нульове рішення є асимптотично стійким і інтегральний критерій якості досягає мінімального значення за нескінченний проміжок часу. Метод заснований на використанні методу функцій Ляпунова [4]. Розвиток цього напряму проводився в роботах [6, 8]. Розглянемо основні положення цього методу, сформульовані в [1], застосовно до процесів, описуваних дискретними рівняннями.

1. Оптимальні функції Ляпунова для різницевих рівнянь

Визначимо загальні положення про оптимальне керування в різницевих системах з використанням другого методу Ляпунова. Вони аналогічні положенням оптимального керування, сформульованим для диференціальних систем, сформульованим у [3].

Розглянемо задачу оптимальної стабілізації нульового положення рівноваги $x(k) \equiv 0$ системи, що описується різницевими рівняннями

$$x(k+1) = f(k, x(k), u(x(k))),\ x(k) \in \mathbb{R}^n,\ u(k) \in \mathbb{R}^m,\ k = 0, 1, 2, ..., \qquad (1)$$

тобто побудову керування, що забезпечує найкращу якість перехідного процесу, який можна виразити у вигляді умови мінімізації критерія якості вздовж розв'язків системи (1)

$$I\left[x(k), u(x(k))\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \omega(k, x(k), u(k)). \qquad (2)$$

Тут $\omega(k, x, u)$ невід'ємна функція, що визначена в області

$$|x| < H, |x| = \left[\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \ k = 0, 1, 2, ...t_0, \qquad (3)$$

що містить початок координат. Зокрема, для лінійних систем

$$x(k+1) = Ax + Bx(k),\ x(k) \in \mathbb{R}^n,\ u(k) \in \mathbb{R}^m,\ k = 0, 1, 2, ...,$$

функція «якості динаміки системи» може мати вигляд квадратичної форми

$$\omega(x, u) = x^T C x + u^T D u \qquad (4)$$

з додатно визначеними матрицями C та D.

У роботі [1] розглядалася задача оптимальної стабілізації систем диференціальних рівнянь.

$$\dot{x} = f(t, x, u(x)),\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in |\mathbb{R}^m, t \geq 0.$$

Критерій якості мав вигляд інтеграла

$$I\left[t, x(t), u(x(t))\right] = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x(t), u(x(t)))\, \mathrm{d}t.$$

Поставлена задача була названа задачею оптимальної стабілізації. Функція $u_0(x(t))$ називалася оптимальним керуванням. Вводився вираз

$$B\left[V, x, u, t\right] = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + grad_x^T V(x,t) f(t, x, u) + \omega(t, x, u).$$

Умови оптимальної стабілізації були сформульовані та доведені у вигляді теореми про оптимальну стабілізацію [3].

Теорема 1 (про оптимальну стабілізацію). *Нехай для диференціального рівняння незбуреного руху, що допускає нескінченно малу вищу межу, можна знайти додатно визначену функцію $V_0(x,t)$ та функцію $u_0(x,t)$, що задовльняють умови:*

1. *функція $\omega(t,x,u)$ є додатно визначеною;*
2. *виконується рівність $B\left[V_0(x,t),x,u(x_0,t),t\right]\equiv 0$;*
3. *якими б не були інші функції керування $u(x,t)$, виконується нерівність $B\left[V(x,t),x,u(x,t),t\right]\geq 0$.*

Тоді фукнція $u_0(x,t)$ є розв'язком задачі оптимальної стабілізації. При цьому виконується співвідношення

$$\int\limits_{t_0}^{\infty}\omega(t,x(t),u_0(x(t),t))\,\mathrm{d}t=$$

$$=\min_u\left\{\int\limits_{t_0}^{\infty}\omega(t,x(t),u(x(t),t))\,\mathrm{d}t\right\}=V_0(x(t_0),t_0). \quad (5)$$

Розглянемо аналогічний результат стосовно різницевого рівняння (1) з критерієм якості (2).

Розглянемо аналогічну задачу оптимальної стабілізації різницевих систем [11]. Нехай є система різницевих рівнянь

$$x(k+1)=f(k,x(k),u(x(k))),\ \ k=0,1,2,...$$

Задано критерій якості

$$I\left[k,x(k),u(x(k))\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\omega(k,x(k),u(x(k))).$$

Вводиться функція

$$B_\delta\left[V,k,x,u\right]=\left[V(x(k+1),k+1)-V(x(k),k)\right]+\omega(k,x,u(x,k)).$$

Має місце таке твердження.

Теорема 2 (про оптимальну стабілізацію різницевих систем). *Нехай для системи різницевих рівнянь збуреного руху (1) можна знайти позитивно визначену функцію $V_0(x,k)$ та функцію $u_0(x,k)$, що допускає нескінченно малу вищу межу, і що задовольняє в області (3) умовам*

1. *функція $\omega(x,k)$ є додатно визначеною;*
2. *виконується рівність $B\left[V_0(x,k),k,x,u_0(x,k)\right]\equiv 0$;*
3. *якими б не були інші функції керування $u(x,k)$, виконується нерівність $B\left[V_0(x,k),k,x,u(x,k)\right]\geq 0$.*

Тоді фукнція $u_0(x,k)$ є розв'язком задачі оптимальної стабілізації. При цьому виконується співвідношення

$$\sum_{k=0}^{\infty}\omega(k,x(k),u_0(x(k)))=\min_u\,\omega(k,x(k),u(x(k)))=V_0(x(k_0),k_0). \quad (6)$$

Доведення. Аналогічно доведенню теореми про оптимальну стабілізацію для диференціальних систем.

Нехай $u_0(x,k)$ функція керування, що задовольняє умовам теореми, а $V_0(x,k)$ функція Ляпунова. Перша різниця функції Ляпунова через систему (1) має вигляд

$$\Delta V_o(x(k),k) = V_0(f(x(k),u(k),k)) - V(x(k),k) = -\omega(x(k),u(k),k) \qquad (7)$$

і, як випливає з умов теореми, є від'ємно визначеною функцією. Тоді, як випливає з другої теореми Ляпунова, нульовий розв'язок системи буде асимптотично стійким.

Таким чином, функція керування $u_0(x,k)$ розв'язує задачу стабілізації.

Покажемо, що вона розв'язує і задачу оптимальної стабілізації, тобто при цьому управлінні інтегральний критерій якості досягає мінімального значення, тобто виконується (6).

Через асимптотичну стійкість нульового положення рівноваги для довільного розв'язку $x(k)$ системи (1) буде виконуватися

$$\lim_{k\to\infty} V_0(x(k),k) = 0.$$

Підсумовуючи рівності (7) уздовж розв'язку $x(k)$ і використовуючи записану рівність, отримуємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \omega(k,x(k),u_0(x(k))) =$$
$$= -\lim_{k\to\infty} V_0(x(k),k) + V_0(x(k_0),k_0) = V_0(x(k_0),k_0).$$

□

2. Оптимальна стабілізація лінійних різницевих рівнянь

Розглянемо застосування цього підходу до лінійних стаціонарних стаціонарних різницевих рівнянь. Розглянемо скалярне рівняння

$$x(k+1) = ax(k) + bu(x(k)), \quad |a| < 1, \quad k = 0,1,2,... \qquad (8)$$

Потрібно знайти керування $u(x)$, за якого рівняння асимптотично стійке і критерій якості

$$I\left[x(k),u(x(k))\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[cx^2(k) + du^2(x(k))\right], \quad c>0, \quad d>0$$

досягає мінімального значення. Розв'язання задачі шукається методом функцій Ляпунова. Функція береться у вигляді $V(x) = hx^2$, $h > 0$.

Перевіряємо виконання умов теореми.

1. Функція $\omega(k,x,u(x,k)) = cx^2(k) + du^2(x,k)$, $c > 0$, $d > 0$ є додатно визначеною функцією.

2. Перша різниця функції Ляпунова має вигляд

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) = \\ = hx^2(k+1) - hx^2(k) = h(ax(k) + bu(x(k)))^2 - hx^2(k).$$

Звідси отримуємо

$$B\,[V,k,x,u] = \Delta V(x(k)) + \omega(k,x,u(x,k)) = \\ = h(a^2-1)x^2(k) + h(2abx(k)u(x(k)) + b^2u^2(x(k))) + \\ + cx^2(k) + du^2(x(k)).$$

Прирівнюючи до нуля, отримуємо

$$-h(1-a^2)x^2(k) + h(2abx(k)u(x(k)) + b^2u^2x(k))) = \\ = -cx^2(k) - du^2(x(k)).$$

Далі, прирівнявши відповідні члени, запишемо

$$-h(1-a62)x^2(k) = -cx^2(k), \\ h(2abx(k)u(x(k)) + b^2u^2(x(k))) = -du^2(x(k)).$$

З першої рівності отримуємо

$$h = \frac{c}{1-a^2} > 0. \tag{9}$$

Скоротивши на $u(x(k)) \neq 0$, перепишемо друге у вигляді у вигляді

$$h(2abx(k) + b^2u(x(k))) = -du(x(k)).$$

Розв'язавши відносно $u(x(k)) \neq 0$, отримаємо

$$u_0(x(k)) = -\frac{2abh}{d+hb^2}x(k).$$

Підставивши значення з (9), отримаємо

$$u_0(x(k)) = -\frac{2abc}{d(1-a^2+b^2c}x(k). \tag{10}$$

Таким чином, при управлінні (10), отриманому з використанням функції Ляпунова $V_0 = \frac{cx^2}{1-a^2}$, $|a| < 1$, рівняння буде асимптотично стійким, а інтегральний критерій досягатиме мінімального значення, що дорівнює

$$I\,[x_0(k), u_0(x(k))] = \frac{c}{1-a^2}x_0^2.$$

3. Покажемо, що при керуванні $u = u_0(x(k)) + \Delta u(x(k))$, $\Delta u(x(k)) \neq 0$, $B\,[V,x,u_0+\Delta o] = 0$, буде виконуватись третя умова теореми.

Дійсно

$$
\begin{aligned}
B\,[V,x,u_0+\delta u] = \Delta V(x) + \omega(x,u_0+\Delta u) = \\
= h(ax(k)+b(u_0(x(k))+\Delta u(x(k))))^2 - \\
- hx(k)^2 + cx^2(k) + d(u_0(x(k))+\Delta u(x(k)))^2 = \\
= (h(a^2-1)+c(x^2(k)+2habx(k)u_0(x(k))+(hb^2+d)u_0^2(x(k))+ \\
+ (2habx(k)+2hb^2u_0(x(k))+2du_0(x(k)))\Delta u(x(k)) + d(\Delta(x(k)))^2.
\end{aligned}
$$

Оскільки виконується умова (9), то лишається

$$
\begin{aligned}
B\,[V,x,u_0+\Delta u] = \\
= 2(habx(k)+hb^2u_0(x(k))+du_0(x(k)))\Delta u(x(k)) + d(\Delta u(x(k)))^2.
\end{aligned}
$$

Вираз $B\,[V,x,u_0+\Delta u]$ рівний нулю в двох випадках:

1. $\Delta(u(x(k))) = 0$,
2. $2(habx(k)+(hb^2+d)u_0(x(k))) + d(\Delta u(x(k))) = 0$.

Підставивши замість $u_0(x(k))$ його значення, отримаємо

$$2\left[habx(k)-(hb^2+d)u_0(x(k))\right] + d(\Delta u(x(k))) = 0.$$

Звідси, другий випадок можливий лише при такій умові:

$$\Delta u(x(k)) = -\frac{2}{d}\left[hab-(hb^2+d)(1-a^2)\frac{d+2ab}{b^2h}\right]x(k).$$

Розглянемо рівняння

$$I\,[x(k),u(x(k))] = \sum_{k=0}^{\infty} x^2(k)+u^2(k)).$$

В даному випадку $a=\frac{1}{2}$, $b=2$, $c=1$, $d=1$, $h=\frac{4}{3}$. І оптимальне керування має такий вигляд $u_0(x(k)) = \frac{8x}{19}$, а критерій якості $I\,[x_0(k),u_0(x(k))] = \frac{4x}{3}$.

Зауваження 1. Слід зазначити, що умова теореми $|a|<1$ накладає досить жорстке обмеження на вихідне рівняння, а саме, вона вимагає асимптотичної стійкості рівняння без керування. Однак лінійне рівняння (8) за рахунок вибору «додаткового (стабілізуючого) управління»

$$\Delta u_0(x(k)) = \Delta ax(k)$$

завдяки вибору постійної Δa завжди можна зробити асимптотично стійким, тобто домогтися, щоб при управлінні

$$u(x(k)) = \Delta x(k) + \Delta u_1(x(k))$$

у рівняння

$$
\begin{aligned}
x(k+1) = ax(k)+b\Delta u_1(x(k)) = \\
= ax(k)+b\Delta uu-1(x(k)) = (a+\Delta a)x(k)+\Delta u_1(x(k)) \quad (11)
\end{aligned}
$$

виконувалася умова

$$|a+\Delta a| < 1.$$

А для «підправленого» рівняння (11) вже проводити описану вище процедуру. На жаль, оскільки вибір Δa неоднозначний, то єдиність отриманого керування проблематична.

Висновки

В статті, використовуючи апарат методу функцій Ляпунова, розглянута задача оптимальної стабілізації, що полягає в знаходженні такого керування, за якого нульовий розв'язок буде асимптотично стійким та інтегральний критерій якості буде досягати найменшого значення.

Розглянуто основні положення методу оптимальних функцій Ляпунова та застосовано їх до різницевих рівнянь. Розглянуто й доведено умови оптимальної стабілізації.

Виведено загальний вигляд функції оптимального керування для різницевих рівнянь.

Література

1. Malkin I.G. Theory of stability of motion. M.: Nauka, 1966. 532 p.
2. Halanai A., Wexler D. Qualitative theory of impulse systems. Mir Publishing House, Moscow, 1971. 309 p.
3. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. Киев: Наукова думка. 1972. 246 с.
4. Rusch N, Abets P, Lalois M. The direct Lyapunov method in stability theory. Mir Publishing House, Moscow, 1980. 300 p.
5. Слюсарчук В.Ю. Стійкість розв'язків різницевих рівнянь у банаховому просторі. Рівне: Вид-во УДУВГП, 2003. 366 с.
6. Demchenko H., Diblik J., Khusainov D.Ya. Optimal stabilization for differential systems with delays – Malkin's approach. *Journal of the Franklin Institute.* 356(9), 4811–4841. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2019.04.021.
7. Мартинюк А.А., Чернієнко В.О. Про стабілізацію руху неавтономних поліноміальних систем. *Прикладна механіка.* Т. 57. № 5. С. 35–45.
8. Мартынюк А.А., Хусаинов Д.Я., Черниенко В.А. Конструктивная оценка функции Ляпунова для систем с кваратичной нелинейностью. *Прикладная механика.* 2018. Т. 54(64). № 3. С. 114–126.
9. Матвієнко В.Т., Пічкур В.Т., Черній Д.І., Демківський Є.О. Загальний розв'язок задачі термінального керування лінійної дискретної системи. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2022. № 2. С. 83–90.
10. Хусаінов Д.Я., Шатирко А.В., Гагурін Є.Р. Оптимальна стабілізація в диференціальних рівняннях. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2022. № 1. С. 158–164.
11. Хусаінов Д.Я., Шатирко А.В., Гагурін Є.Р. Оптимальна стабілізація в системах різницевих рівнянь. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях».* 2023. №1. С. 205–211.

Надійшла: 16.12.2023 / Прийнята: 20.02.2024