УДК 519.6
MSC 49M25

METHOD FOR SOURCE POWER IDENTIFICATION IN RICHARDS EQUATION

S. I. Lyashko, N. I. Lyashko, D. A. Klyushin, A. A. Tymoshenko
Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: lyashko.serg@gmail.com, dokmed5@gmail.com, inna-andry@ukr.net

МЕТОД ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПОТУЖНОСТІ ДЖЕРЕЛ В РІВНЯННІ РІЧАРДСА

С. І. Ляшко, Н. І. Ляшко, Д. А. Клюшин, А. А. Тимошенко
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: lyashko.serg@gmail.com, dokmed5@gmail.com, inna-andry@ukr.net

Abstract. In this paper a one-dimensional nonlinear Richards equation describing fluid flow in porous medium with inserted equal-powered sources is studied. An experimental iterational method is proposed to find source power to minimize the deviation of received humidity values from target values. Modeling was performed using numerical difference approximation of derivatives, resulting into a system of nonlinear equations with dependence from previous time step. The offered method allows to perform modeling for different source power values, and chooses the most suitable one.Iterations stop when they reach average modular difference value less than calculation error of numerical difference scheme. Here explicit scheme was used to save time, equations were tested for unsaturated medium only to avoid flooding the area, so source power is tested with given limitations. Results of simulations and choice for next source power approximations are described and compared until solution is found. This approach is considered as experimental so we plan to perform more analysis in the future.
Keywords: Richards equation, numerical solution, numerical difference method, optimization, modeling.

Анотація. У даній роботі досліджено одновимірне нелінійне рівняння Річардса, що описує потік рідини в пористому середовищі з зануреними джерелами рівної потужності. Запропоновано експериментальний ітераційний метод визначення потужності джерела для мінімізації відхилень отриманих значень вологості від цільових значень. Моделювання виконано за допомогою чисельної різницевої апроксимації похідних, що приводить до системи нелінійних рівнянь із залежністю від попереднього часового кроку. Запропонований метод дозволяє проводити моделювання для різних значень потужності джерела та обрати найбільш вдалу.

Ітерації припиняються, коли досягається значення середньої різниці за модулем що є меншим за похибку обчислень різницевої схеми. Тут була використана явна схема для економії часу, рівняння тестувались лише для неасиченого середовища, щоб уникнути затоплення області, тому потужність джерел тестувалась з заданими обмеженнями. Результати моделювання та вибір наступних наближень потужності джерела описані та порівнюються, доки не буде знайдено розв'язок. Цей підхід вважається експериментальним, тому ми плануємо продовжити його аналіз у майбутньому.
Ключові слова: рівняння Річардса, чисельний розв'язок, метод скінченних різниць, оптимізація, моделювання.

Вступ

Рівняння Річардса у початковому нелінійному вигляді обговорюється вже досить тривалий час через його складність. Огляд досягнень та проблем щодо його вирішення, можна побачити зокрема у M. W. Farthing [1], Y. Zha [2]. У випадку перемінно насиченого потоку в неоднорідних пористих середовищах з різними за властивостями шарами, у H. Suk [3] запропоновано чисельний метод розв'язку який застосовується після перетворення Кірхгофа. За наявності у системі динамічної капілярності, у C. J. Van Duijn [4] запропоновано розширення рівняння Річардса, що включає нерівноважні ефекти, аналіз тиску води та насичення. Параметри, що описують структуру пор отримані L. J. Cooper [5] за допомогою моделювання на основі зображень тривимірної комп'ютерної томографії для зразка грунту. У K. Kumar [6] наведено каталог ефективних моделей, підтверджених чисельними розрахунками, для опису потоку у ненасиченому пористому середовищі, що містить тріщину. Нелінійний розв'язувач рівняння Річардса за допомогою заміни змінних, зокрема введення фіктивної змінної, запропоновано у S. Bassetto [7]. Для прискорення процесу розв'язку порівняно з методами скінченних елементів та скінченних об'ємів, у R. Pinzinger [8] запропоновано використовувати бібліотеку AMGCL - досягнення скорочення часу роботи до 79 відсотків але у випадку 20 000 та більшої кількості вузлів. Кілька методів неявної та напівнеявної часової дискретизації досліджено у S. Keita [9] з точністю другого порядку, використано формули екстраполяції та апроксимацію рядом Тейлора для часової дискретизації нелінійних членів. Також сучасний підхід M. Sadeghi [10] за допомогою радіолокаційного зондування P-діапазону під час місії Airborne Microwave Observatory of Subcanopy and Subsurface (Air-MOSS), продемонстрував великий потенціал для оцінки вологості грунту у кореневій зоні. Отримано фізично застосовну модель профілю вологості грунту з трьома параметрами на остнові рівняння Річардса для ненасиченого потоку. Отже, дослідження рівняння Річардса продовжується і зараз, про що свідчать вище зазначені наукові результати за останні 5 років. При цьому залишаються актуальними і підходи, запропоновані раніше - зокрема ітераційні методи як F. List [11] або підстановка Кірхгофа, заміна змінних як у апроксимації A. J. Pullan [12].

1. Постановка задачі

Запишемо рівняння Річардса переносу вологи для ненасиченого пористого середовища у вигляді [11] , [12]:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}(K(\Theta(\Psi)) \cdot \frac{\partial}{\partial z}(\Psi + z)) = 0. \tag{1}$$

У цьому рівнянні Ψ позначає напірний тиск (pressure head, тиск що чинить стовп рідини на дно ємності - тиск рідини розділений на добуток щільності та гравітаційного прискорення), Θ позначає вміст вологи, K - водопроникність середовища, z - глибина (висота проти напрямку гравітації).

Для моделювання процесу використаємо модель van Genuchten–Mualem аналогічно до [11]:

$$\Theta(\Psi) = \theta_R + (\theta_S - \theta_R) \cdot \left(\frac{1}{1 + (-\alpha \cdot \Psi)^n} \right)^{\frac{n-1}{n}}, \Psi \leq 0. \tag{2}$$

$$\Theta(\Psi) = \theta_S, \Psi > 0. \tag{3}$$

$$K(\Psi) = K_S \cdot \Theta(\Psi)^{0.5} \cdot \left(1 - \left(1 - \Theta(\Psi)^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right)^2, \Psi \leq 0. \tag{4}$$

$$K(\Psi) = K_S, \Psi > 0. \tag{5}$$

Для забезпечення Ліпшицевої неперервності функцій Θ, K, аналогічно до [11] покладемо $n = 2.9$ та оберемо ті самі параметри для опису процесу: $\alpha = 0.95$, $\Theta_S = 0.42$, $\Theta_R = 0.0026$, $K_S = 0.12$.

Отримане рівняння є нелінійним та залежить від Ψ, при цьому значення змінної залежить від моменту часу та положення у просторі (глибини).

Розкриємо дужки та використаємо властивості похідних, щоб переписати рівняння відносно похідних від Ψ.

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(\Psi + z)) - K(\Psi) \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\Psi + z)) = 0. \tag{6}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial \Psi} \cdot \left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - K(\Psi) \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0. \tag{7}$$

Розглянемо для даної моделі задачу оптимального зволоження лінійною системою джерел (крапельниця, розподілена по всій внутрішній частині області) що діє з постійною потужністю, та умовами непроникності на границях області $\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0$. На потужності джерел накладемо обмеження, щоб запобігти повному насиченню частини області. У початковий момент часу вважатимемо значення Ψ відомим. Для чисельного експерименту було обрано $\Psi = -3$ на всій області.

Критерієм якості обраної потужності буде середня різниця за модулем між отриманими значеннями Ψ та цільовими значеннями в кінцевий момент часу. У даній роботі розглянуто випадок досяжної цільової функції, утвореної аналогічним моделюванням за фіксованої потужності. Метою є знаходження оптимальної потужності, за якої вище згадана різниця не перевищує допустимої похибки.

2. Чисельний розв'язок задачі моделювання

Виконаємо перетворення нелінійного рівняння до чисельної постановки задачі, врахувавши в якості умови стійкості різницевої схеми співвідношення між кроком за часом $\tau = 1/1000$ та простором $h = 1/20$ вигляду: $\tau \leq 0.5 \cdot h^2$. Також будемо вважати що потужність джерела на час експерименту для області $[z_k - h, z_k + h]$ навколо вузла дискретизації x_k є рівною Q.

Тоді замінивши частинні похідні різницевими за явною схемою, де $k = 0, .., 1000$ позначає індекс за часом а $i = 0, ..., 20$ індекс за простором, отримаємо рівняння у центрі області вигляду:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \Psi} \cdot \frac{\Psi_i^{k+1} - \Psi_i^k}{\tau} - \frac{\partial K}{\partial \Psi} \cdot \left(\left(\frac{\Psi_{i+1}^k - \Psi_{i-1}^k}{2 \cdot h} \right)^2 + \frac{\Psi_{i+1}^k - \Psi_{i-1}^k}{2 \cdot h} \right) - \\ - K(\Psi_i^k) \cdot \frac{\Psi_{i+1}^k - 2 \cdot \Psi_i^k + \Psi_{i-1}^k}{h^2} = Q. \tag{8}$$

Відповідно, ітераційний процес знаходження значень в наступний момент часу за явною схемою для центральної частини має вигляд:

$$\Psi_i^{k+1} = \Psi_i^k + \frac{\tau}{\frac{\partial \Theta}{\partial \Psi}} \cdot (\frac{\partial K}{\partial \Psi} \cdot \left(\left(\frac{\Psi_{i+1}^k - \Psi_{i-1}^k}{2 \cdot h} \right)^2 + \frac{\Psi_{i+1}^k - \Psi_{i-1}^k}{2 \cdot h} \right) + \\ + K(\Psi_i^k) \cdot \frac{\Psi_{i+1}^k - 2 \cdot \Psi_i^k + \Psi_{i-1}^k}{h^2} + Q). \tag{9}$$

На границях області враховуючи, що похідна за простором рівна нулю та джерел немає, маємо $\Psi_i^{k+1} = \Psi_i^k + 0$

Результат моделювання у кінцевий момент часу для фіксованої потужності Q у точці z позначимо як $F(z, Q)$. Тоді задача пошуку оптимальної потужності з цільовою функцією f зведеться до мінімізації функціонала

$$Err(Q) = \sum_{j=0}^{20} |F(h \cdot j, Q) - f(h \cdot j)| \to \min_{\mathrm{Q}}. \tag{10}$$

Надалі будемо використовувати це позначення для порівняння відхилення при різних апроксимаціях потужності джерела. Допустимий рівень відхилення залежить від кроку дискретизації за часом та простором та оцінки похибки різницевої схеми.

3. Метод ідентифікації потужності джерел

Ідея даного методу є схожою на методі ділення навпіл для випадку розбиття на 2 проміжки, прийняття рішень нагадує градієнтний спуск, а рекурсивне розбиття області нагадує метод Шаманського.

Алгоритм пошуку можна сформулювати наступним чином:

- 1. Визначити межі допустимої потужності. Нижню межу взяти рівною 0 або потужності, заздалегідь меншої за оптимальну. Верхня межа має не приводити до насичення області в жодній точці - інакше зміниться тип рівняння.
- 2. Обрати кількість підпроміжків K, які утворюють нове розбиття. При $K = 2$ виконуємо пошук у середній точці між відомим з попереднього кроку мінімальним значенням та меншим з його сусідніх. У випадку якщо наступне значення виявилось більшим за попереднє, спробувати половину значення до іншого сусіда. При $K > 2$ визначити найменше значення серед усіх відомих зараз, відступити від нього половину відстані до сусідніх точок. Утворений інтервал розбити на K частин. Для непарного значення K центр може співпадати з вже відомою точкою, тому обчислень буде на 1 менше.
- 3. Для кожного з нових отриманих значень Q провести моделювання та отримати значення у кінцевий момент часу. Обчислити значення $Err(Q)$.
- 4. Обрати те значення потужності, що відповідає мінімальному відхиленню $Err(Q)$. Якщо відхилення перевищує допустиме та отримано кращі значення, виконати пункт 2. Якщо відхилення перевищує допустиме і значення гірше за попередні відомі, спробувати виконати аналогічний пошук з іншого боку від найкращого значення. Якщо відхилення менше за допустиме – вивести отриманий результат та зупинити алгоритм.
- 5. У випадку якщо після тестувань з обох боків від поточного найменшого значення покращення результату не відбулось, збільшити кількість проміжків розбиття K та за можливості використати результати обчислень (відомі результати для тестованих потужностей).

Найменша кількість тестованих точок у випадку вдалого розбиття спостерігається при $K = 2$, але у випадку функції що містить кілька перегинів, можна з більшою ймовірністю втратити оптимальний розв'язок. Збільшення K приводить до більшої кількості необхідних обчислень, але дозволяє більш точно проаналізувати функцію. Компроміс між швидкістю та надійністю має обрати користувач.

Покладемо в якості цільової функції результат моделювання при $Q = 0.1$, а інтервал допустимих значень потужності оберемо від 0 до 0.3. Допустиме відхилення встановимо рівним похибці різницевої схеми $max(tau, h^2) = 1/400$ На цьому прикладі можна продемонструвати роботу алгоритму для випадків $K = 2$, $K = 3$, $K = 4$.

K = 2:

КРОК 0

$$\begin{aligned} Q = 0, Err(Q) = 1.279258894 \\ Q = 0.3, Err(Q) = 0.9196990081 \end{aligned} \tag{11}$$

КРОКИ 1 – 9 (послідовне знаходження центрів та обчислення відхилення

$$\begin{aligned} Q = 0.15, Err(Q) = 0.2791226712 \\ Q = 0.075, Err(Q) = 0.1815257930 \\ Q = 0.1125, Err(Q) = 0.07789017241 \\ Q = 0.09375, Err(Q) = 0.04177415784 \\ Q = 0.103125, Err(Q) = 0.02013850936 \\ Q = 0.0984375, Err(Q) = 0.01025084048 \\ Q = 0.10078125, Err(Q) = 0.005079348759 \\ Q = 0.099609375, Err(Q) = 0.002551109523 \\ Q = 0.1001953125, Err(Q) = 0.001272684428 \end{aligned} \tag{12}$$

Отже, отримано розв'язок - потужність приблизно рівна 0.1002.
Покладемо К = 3 та повторимо алгоритм з початку:
КРОК 0

$$\begin{aligned} Q = 0, Err(Q) = 1.279258894 \\ Q = 0.3, Err(Q) = 0.9196990081 \end{aligned} \tag{13}$$

КРОК 1

$$\begin{aligned} Q = 0.1, Err(Q) = 0 \\ Q = 0.2, Err(Q) = 0.5063600109 \end{aligned} \tag{14}$$

Отже, отримано точний розв'язок - потужність рівна 0.1. Звичайно, така швидкість спричинена вдалим виборов вузлів. Для наочності ще продемонструємо випадок розбиття на 4 інтервали. У цьому випадку для першого кроку рахуємо 3 значення, потім додатково рахувати доведеться 4 значення, а центральне візьмемо як мінімальне на попередньому кроці.
Покладемо К = 4 та повторимо алгоритм з початку:
КРОК 0

$$\begin{aligned} Q = 0, Err(Q) = 1.279258894 \\ Q = 0.3, Err(Q) = 0.9196990081 \end{aligned} \tag{15}$$

КРОК 1

$$\begin{aligned} Q &= \frac{3}{40}, Err(Q) = 0.1815257930 \\ Q &= \frac{3}{20}, Err(Q) = 0.2791226712 \\ Q &= \frac{9}{40}, Err(Q) = 0.6108070168 \end{aligned} \tag{16}$$

КРОК 2 (центральне з 5 значень співпадає з попереднім тому його не перераховуємо)

$$\begin{aligned} Q &= \frac{3}{80}, Err(Q) = 0.5648015543 \\ Q &= \frac{9}{160}, Err(Q) = 0.3506569877 \\ Q &= \frac{3}{32}, Err(Q) = 0.04177415784 \\ Q &= \frac{9}{80}, Err(Q) = 0.07789017241 \end{aligned} \tag{17}$$

КРОК 3

$$\begin{aligned} Q &= \frac{27}{320}, Err(Q) = 0.1086599258 \\ Q &= \frac{57}{640}, Err(Q) = 0.07453773640 \\ Q &= \frac{63}{640}, Err(Q) = 0.01025084048 \\ Q &= \frac{33}{320}, Err(Q) = 0.02013850936 \end{aligned} \tag{18}$$

КРОК 4

$$\begin{aligned} Q &= \frac{123}{1280}, Err(Q) = 0.02586436796 \\ Q &= \frac{249}{2560}, Err(Q) = 0.01802139562 \\ Q &= \frac{51}{512}, Err(Q) = 0.002551109523 \\ Q &= \frac{129}{1280}, Err(Q) = 0.005079348759 \end{aligned} \tag{19}$$

КРОК 5

$$
\begin{gathered}
Q = \frac{507}{5120}, Err(Q) = 0.006392222190 \\
Q = \frac{1017}{10240}, Err(Q) = 0.004469489998 \\
Q = \frac{1023}{10240}, Err(Q) = 0.0006370598574 \\
Q = \frac{513}{5120}, Err(Q) = 0.001272684428
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Даний підхід дозволив отримати одразу 2 розв'язки що задовольняють умову точності: $Q = \frac{1017}{10240}$ та $Q = \frac{513}{5120}$ що відповідає вищій впевненості у результаті. При цьому кількість обчислень була суттєво більшою.

Таким чином, усі 3 варіанти вибору розбиття привели до розв'язку, що задовольняє умову точності для випадку досяжної цільової функції.

Висновок

Запропоновано ітераційний метод пошуку оптимальної потужності джерела для випадку рівномірного зволоження. Продемонстровано результативність підходу для випадку досяжної функції та необхідність компромісу між кількістю інтервалів для розбиття та швидкодією методу. Швидкодію можна покращити застосувавши градієнтний спуск з двох боків до значення з мінімальним відхиленням.

Література

1. M. W. Farthing, F. L. Ogden, Numerical solution of Richards' equation: A review of advances and challenges. Soil Science Society of America Journal, 81(6) (2017) 1257-1269. https://doi.org/10.2136/sssaj2017.02.0058
2. Y. Zha, J. Yang, J. Zeng, C.-H. M. Tso, W. Zeng, L. Shi, Review of numerical solution of Richardson-Richards equation for variably saturated flow in soils. Wiley Interdisciplinary Reviews: Water, 6(5) (2019) 1364. https://doi.org/10.1002/wat2.1364
3. H. Suk, E. Park, Numerical solution of the Kirchhoff-transformed Richards equation for simulating variably saturated flow in heterogeneous layered porous media. Journal of Hydrology, 579 (2019) 124213. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2019.124213
4. C. J. Van Duijn, K. Mitra, I. S. Pop, Travelling wave solutions for the Richards equation incorporating non-equilibrium effects in the capillarity pressure. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 41 (2018) 232-268. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.10.015
5. L. J. Cooper, K. R. Daly, P. D. Hallett, M. Naveed, N. Koebernick, A. G. Bengough, T. Roose, Fluid flow in porous media using image-based modelling to parametrize Richards' equation. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 473(2207) (2017) 20170178. https://doi.org/10.1098/rspa.2017.0178

6. K. Kumar, F. List, I. Pop, F. Radu, Formal upscaling and numerical validation of fractured flow models for Richards equation. J. Comput. Phys, 407 (2019) 109138. https://doi.org/ 10.1016/j.jcp.2019.109138
7. S. Bassetto, C. Cances, G. Enchery, Q. H. Tran, Robust Newton solver based on variable switch for a finite volume discretization of Richards equation, In: Finite Volumes for Complex Applications IX - Methods, Theoretical Aspects, Examples (2020) 385-393.
8. R. Pinzinger, R. Blankenburg, Speeding up the Computation of the Transient Richards' Equation with AMGCL. Water, 12(1), 286 (2020). https://doi.org/10.3390/w12010286
9. S. Keita, A. Beljadid, Y. Bourgault, Implicit and semi-implicit second-order time stepping methods for the Richards equation. Advances in Water Resources, 148 (2021) 103841. https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.05224
10. M. Sadeghi, A. Tabatabaeenejad, M. Tuller, M. Moghaddam, S. B. Jones, Advancing NASA's AirMOSS P-band radar root zone soil moisture retrieval algorithm via incorporation of Richards' equation. Remote Sensing, 9(1) (2017) 17. https://doi.org/10.3390/rs9010017
11. F. List, F. Radu, A Study on Iterative Methods for Richards' Equation. Math.NA. URL: http://arxiv.org/abs/1507.07837
12. A. J. Pullan, The Quasilinear Approximation for Unsaturated Porous Media Flow. Water resources research 26 (6) (1990) 1219-1234. https://doi.org/10.1029/WR026i006p01219

Надійшла: 25.09.2022 / Прийнята: 29.09.2022