КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ЦАНЬ ВІКТОРІЯ БОРИСІВНА

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

АСИМПТОТИЧНІ ТА КОЛИВНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ НА ЧАСОВИХ ШКАЛАХ

Спеціальність 111 — Математика
Галузь знань 11 — Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня *доктора філософії*

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
______________________ *В.Б. Цань*

Науковий керівник
доктор фізико-математичних наук, професор
Станжицький Олександр Миколайович

Київ – 2024

Анотація

Цань В. Б. Асимптотичні та коливні властивості розв'язків динамічних рівнянь на часових шкалах. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2024.

Дисертаційна робота присвячена вивченню асимптотичних та коливних властивостей динамічних рівнянь на сім'ї часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$, зокрема дисипативності динамічних систем, обмеженості, коливності та періодичності їх розв'язків і пошуку умов збереження таких властивостей при переході від диференціальних до динамічних рівнянь на часових шкалах та навпаки.

Сім'я часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$, що розглядається, охоплює весь можливий діапазон часу від $-\infty$ до $+\infty$, де $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ і $\lambda = 0$ гранична точка множини Λ. Функція зернистості $\mu_\lambda(t) : \mathbb{T}_\lambda \to [0, \infty)$ така, що якщо $\mu_\lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$, то $\mathbb{T}_\lambda$ збігається з неперервною шкалою часу $\mathbb{T}_0 = \mathbb{R}$, а система динамічних рівнянь переходить в систему диференціальних рівнянь.

В роботі вивчено властивість обмеженості розв'язків динамічних рівнянь на сім'ї часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$ за припущення, що права частина системи неперервно диференційовна та обмежена разом зі своїми частинними похідними. Для динамічних систем на часовій шкалі загального вигляду вперше отримано явну оцінку малості функції зернистості μ_λ, яка гарантує збереження глобальних обмежених розв'язків при переході від диференціальних до динамічних рівнянь на часових шкалах загального вигляду та навпаки.

Також одержано достатні умови дисипативності та рівномірної дисипативності системи динамічних рівнянь на часових шкалах загального вигляду в термінах функції Ляпунова. Вперше в теорії часових шкал доведено існування функції Ляпунова з певними властивостями для дисипативної системи динамічних рівнянь. Питання про зв'язок між дисипативністю системи диференціальних рівнянь та відповідної їй системи різницевих рівнянь, що є частковим випадком динамічних рівнянь на часових шкалах, коли шкала набуває вигляду $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ з кроком $h > 0$, раніше вивчалось у роботах О. Станжицького та А.

Ткачук. У даній роботі такий зв'язок був досліджений між диференціальними та динамічними системами на сім'ї часових шкал з малою функцією зернистості.

Визначенню критеріїв коливності розв'язків різних видів динамічних рівнянь на часових шкалах присвячені роботи R. Agarwal, D. O'Regan, G. Guseinov, B. Kaymakçal, L. Erbe, A. Peterson, S. Saker, M. Bohner та інших. Однак, у перерахованих роботах коливність розв'язків динамічних рівнянь досліджується на певних часових шкалах із заданими властивостями, тоді як зв'язок між коливністю розв'язків динамічних рівнянь на шкалах та відповідних диференціальних рівнянь раніше досліджено не було. Даному питанню присвячено один з розділів цієї дисертації, де визначено умови коливності розв'язків лінійного динамічного рівняння другого порядку на загальних часових шкалах при коливності відповідних розв'язків диференціального рівняння та навпаки, а також отримано умови коливності розв'язків слабко нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку та слабко нелінійних динамічних рівнянь другого порядку на часових шкалах, за наявності такої властивості у відповідних розв'язків лінійних динамічних рівнянь на часових шкалах та лінійних диференціальних рівнянь на дійсній осі відповідно.

У дисертації встановлено, що з існування асимптотично стійкого періодичного розв'язку системи динамічних рівнянь на періодичній часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$ з періодом τ випливає наявність періодичного з періодом кратним τ розв'язку відповідної системи диференціальних рівнянь і навпаки за умови достатньої малості функції зернистості часової шкали.

Усі отримані результати проілюстровано прикладами, що містять побудови виконані за допомогою середовища MATLAB, які відображають поведінку розв'язків систем динамічних рівнянь на часових шкалах при зменшенні функції зернистості.

Дисертаційна робота має як теоретичне, так і практичне значення. Отримані в ній теоретичні результати, а також розроблена методика досліджень сприятимуть подальшому розвитку теорії динамічних рівнянь на часових шкалах. Вони також можуть бути використані при дослідженні процесів у біології, економіці, фізиці та інших об'єктів природознавства, математичними моделями яких є динамічні рівняння на часових шкалах.

Ключові слова: Динамічні рівняння, диференціальні рівняння, часова шкала,

функція зернистості, обмежені розв'язки, асимптотична стійкість, експоненційна стійкість, коливання, дисипативність, періодичність.

Abstract

Tsan, V.B. Asymptotic and oscillation behavior of solutions of dynamic equations on time scales. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Doctor of Philosophy thesis undertaken in specialty 111 — Mathematics — Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2024.

The thesis is devoted to the study of asymptotic and oscillatory properties of dynamic equations on a family of time scales $\mathbb{T}_\lambda$, in particular, the dissipativity of dynamic systems, boundedness, oscillation, and periodicity of their solutions, and the search for conditions to preserve such properties when transitioning from differential of dynamic equations on time scales and vice versa.

The considered family of time scales $\mathbb{T}_\lambda$ covers the range of time from $-\infty$ to $+\infty$. Here $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ and $\lambda = 0$ is a boundary point of the set Λ. The graininess function $\mu_\lambda(t) : \mathbb{T}_\lambda \to [0, \infty)$ is such that if $\mu_\lambda \to 0$ as $\lambda \to 0$, then $\mathbb{T}_\lambda$ coincides with the continuous time scale $\mathbb{T}_0 = \mathbb{R}$, and the system of dynamic equations turns into a system of differential equations.

The study investigates the boundedness property of solutions of dynamic equations on a family of time scales $\mathbb{T}_\lambda$, assuming that the function describing the dynamic system is continuously differentiable and bounded along with its partial derivatives. For dynamic systems on general time scales, an explicit estimate of the smallness of the graininess function μ_λ has been obtained, which ensures the preservation of global bounded solutions in passing from differential of dynamic equations on general time scales.

Sufficient conditions for both dissipativity and uniform dissipativity of dynamic equations on general time scales have been established using Lyapunov functions. The existence of a Lyapunov function with specific properties of a dissipative system of dynamic equations has been proven for the first time in the theory of time scales. The relationship between the dissipation of a differential equation system and the

corresponding difference equation system, which is a special case of dynamic equations on time scales when the scale is of the form $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ with step $h > 0$, has been previously studied by O. Stanzhytskiy and A. Tkachuk. This thesis extends such a relationship between dynamic and differential systems on a family of time scales with a small graininess function.

Criteria for the oscillation of solutions of various types of dynamic equations on time scales have been studied by leading mathematicians including R. Agarwal, D. O'Regan, G. Guseinov, B. Kaymakçal, L. Erbe, A. Peterson, S. Saker, M. Bohner, and others. However, these studies explore oscillation on specific time scales with given properties, while the relationship between the oscillation of solutions of dynamic equations on time scales and the corresponding differential equations has not been previously investigated. This study includes a chapter dedicated to defining the conditions for oscillation of solutions of linear second-order dynamic equations on general time scales in relation to the oscillation of solutions of differential equations and vice versa, as well as obtaining conditions for oscillation of solutions of weakly nonlinear second-order differential and dynamic equations on time scales, given such properties in the corresponding solutions of linear dynamic equations on time scales and linear differential equations on the real axis, respectively.

This work also establishes that the existence of an asymptotically stable periodic solution of a dynamic equation system on a periodic time scale $\mathbb{T}_\lambda$ with period τ implies the existence of a periodic solution with period multiples of τ of the corresponding system of differential equations and vice versa, provided that the graininess function of the time scale is sufficiently small.

All obtained results are illustrated with examples that include constructions performed using MATLAB, which demonstrate the behavior of solutions of dynamic equation systems on time scales as the graininess function decreases.

This thesis holds both theoretical and practical significance. The theoretical findings and developed methodologies will advance the theory of dynamic equations on time scales and can be applied to various fields such as biology, economics, and physics.

Keywords: Dynamic equations, differential equations, time scales, graininess function, bounded solutions, asymptotic stability, exponential stability, oscillation, dissipativity, periodicity.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Цань В. Б., Перестюк Ю. М., Могильова В. В. Зв'язок між обмеженими розв'язками диференціальних рівнянь і динамічних рівнянь на часових шкалах. *Нелінійні коливання.* 2023 Випуск 26 (2), С. 274–293. DOI: 10.37863/nosc.v26i2.1433 Переклад англійською: Tsan, V., Perestyuk, Y., Mogylova, V. Relationship Between Bounded Solutions of Differential Equations and Dynamic Equations on Time Scales. *Journal of Mathematical Sciences* (2024). DOI: 10.1007/s10958-024-07022-2 *Особистий внесок: авторці належить формулювання та доведення основних результатів, побудова прикладу та його аналіз, написання рукопису статті* (**Q3**)
2. Stanzhytskyi O., Uteshova R., Tsan V., Khaletska Z. On the relation between oscillation of solutions of differential equations and corresponding equations on time scales.*Turkish Journal of Mathematics.* 2023. Vol. 47 (2). P. 476–501. DOI: 10.55730/1300-0098.3373 *Особистий внесок: авторці належить формулювання та доведення основних результатів, побудова прикладу та його аналіз, написання рукопису статті* (**Q2**)
3. Tsan V., Stanzhytskyi O., Martynyuk O. On the correspondence between periodic solutions of differential and dynamic equations on periodic time scales. *Georgian Mathematical Journal.* 2024. Vol. 31 (5). P. 899–908. DOI: 10.1515/gmj-2024-200 *Особистий внесок: авторці належить формулювання та доведення основних результатів, побудова прикладу та його аналіз, написання рукопису статті* (**Q2**)
4. Tsan V., Stanzhytsky O., Kapustian O. Dissipativity Of Dynamical Systems On Time Scales And The Relationship Between Dissipative Differential And Dynamic Systems. *Carpathian Mathematical Publications.*2024. Vol. 16 (2). P. 427–447. DOI: DOI: 10.15330/cmp.16.2.427-447 *Особистий внесок: авторці належить формулювання та доведення основних результатів, побудова прикладу та його аналіз, написання рукопису статті* (**Q2**)

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Цань В. Б. Зв'язок між коливністю розв'язків динамічного рівняння на часових шкалах та коливністю розв'язків диференціального рівняння другого порядку // XX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2022». Київ, Україна. 14 квітня 2022. С. 29.
2. Цань В., Ковальчук Т. Коливність розв'язків лінійних диференціальних рівнянь та відповідних рівнянь на часових шкалах // Міжнародна наукова конференція «Прикладна математика та інформаційні технології», присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій. Чернівці, Україна. 22–24 вересня 2022. С. 85–87.
3. Цань В., Ковальчук Т. Деякі властивості розв'язків лінійних динамічних рівнянь другого порядку на часових шкалах // III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації». Запоріжжя, Україна. 30 вересня 2022. С. 92–95.
4. Цань В. Б., Перестюк Ю. М. Існування обмежених розв'язків динамічних рівнянь на часовій шкалі при умові обмеженості розв'язків вихідної диференціальної системи // XII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Луцьк, Україна. 2–4 червня 2023. С. 48–50.
5. Цань В. Б., Перестюк Ю. М., Умови існування обмеженого розв'язку динамічного рівняння на часових шкалах // Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики. Чернівці, Україна. 28–30 вересня 2023. С. 337–338.
6. Tsan V., Kovalchuk T. The connection between oscillation of solutions of linear equations and their corresponding equations on time scales // The 29th Conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2022. Chisinau, Republic of Moldova. August 25–27, 2022. P. 76–77.
7. Tsan V., Stanzhytskyi O., Uteshova R., Mohyl'ova V. Existence of bounded solutions of a dynamic equation // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2022. Tbilisi, Georgia. December 17–19, 2022. P. 209-213.
8. Tsan V., Stanzhytskyi O., Marynyuk O. Periodic solutions in dynamic equations on time scales and their relationship with differential equations // International

Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2023. Tbilisi, Georgia. December 9–11, 2023. P. 202–207.

9. Цань В.Б., Мартинюк О.В., Перестюк, Ю.М. Існування функції Ляпунова дисипативних систем динамічних рівнянь на часових шкалах //XIII Міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Луцьк – Світязь, Україна. 31 травня – 2 червня, 2024. С. 70–72.
10. Станжицький О., Цань В. Дослідження дисипативності систем динамічних рівнянь на часових шкалах з малою функцією зернистості // V Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації». Запоріжжя, Україна. 29 – 31 травня, 2024. С. 24–28.
11. Цань В., Перестюк Ю. Дисипативність систем динамічних рівнянь на часових шкалах // V Міжнародна конференція, присвячена 145-ій річниці від дня народження Ганса Гана. Чернівці, Україна. 23 – 27 вересня, 2024. С. 102–105.

Зміст

Вступ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена вивченню коливної та асимптотичної поведінки динамічних рівнянь на часових шкалах.

Ці рівняння виникли в результаті наукових досліджень, проведених у роботі S. Hilger (1988) [48], де було введено поняття похідної (дельта-похідної) для будь-якої замкненої підмножини числової прямої (часова шкала), частковими випадками якої є класична похідна, коли часова шкала - це вісь дійсних чисел, і звичайний диференціальний приріст, коли часова шкала - це множина цілих чисел. Такий підхід дозволив об'єднати теорії неперервних і дискретних систем та призвів до розвитку теорії динамічних рівнянь на часових шкалах.

Теорію динамічних рівнянь на часових шкалах у різних напрямках розвивали А. Мартинюк [33,70–72,75], О. Станжицький та його учні [13,18,29,32,57,67,84,90], О. Бойчук, О. Страх [27,28,44], О. Кічмаренко, А. Огуленко [64,77,78], B. Aulbach [16], T. Bhaskar [17], O. Došlý [34,35], Z. Drici [36], R. Hilscher [50], V. Zeidan [51], V. Lakshmikantham [65,66], B. Kaymakçalan [61–63], G. Guseinov [46], F. Atici [15], E. Kaufmann [58–60], A.S. Vatsala [99], P. Wong [101], M. Bohner, A. Peterson [19,25,26], R. Agarwal [3, 5–8], M. Adivar [1, 2], D. O'Regan [4, 37, 47], E. Akin [10, 42, 81], L. Erbe [41], Y. Raffoul [82], J. Hoffacker [54], C. Tisdell [83] та багато інших математиків [9, 12, 23, 38–40, 45, 49, 68, 103].

Раніше прикладні науки використовували диференціальні рівняння для опису неперервних процесів і різницеві рівняння – для дискретних подій. Проте природа функціонує на різноманітних часових шкалах, від мінімальних коливань субатомних частинок до грандіозних небесних рухів, які тривають мільярди років. Багато природних процесів мають як неперервні, так і дискретні характеристики, і традиційні методи не завжди можуть охопити їх складність. Рівняння на часових шкалах стали потужним інструментом для дослідження таких явищ і є математичними моделями для відтворення процесів, де час може мати різноманітний характер поведінки, як неперервний, так і дискретний із постійним кроком (шкала Ейлера), дискретний із змінним кроком, набувати значень з фрактальних множин [31, 85] тощо. Завдяки своїй здатності моделювати гібридні системи вони знайшли застосування у біології та епідеміології, екології, економіці та дослідженнях фінансових процесів, робототехніці та інших. У кожному з цих прикладів дослідження властивостей динамічних систем на часових шкалах має важливе значення для розуміння поведінки процесів у реальному світі, прийняття обґрунтованих рішень для керування ними, розробки ефективних втручань або стратегій контролю. Тому актуальність таких досліджень не викликає сумніву.

Особливого інтересу набуває вивчення зв'язку між властивостями розв'язків диференціальних та відповідних їм динамічних рівнянь за умови, коли функція зернистості прямує до нуля. Формально тоді рівняння на шкалі переходить у звичайне диференціальне рівняння і питання зв'язку між властивостями їх розв'язків набуває важливого значення.

У цьому напрямку слід згадати роботи, присвячені дослідженню подібних зв'язків між розв'язками систем диференціальних рівнянь та їх дискретних аналогів, тобто для частинного випадку Ейлерових часових шкал. Такий зв'язок було розглянуто у роботах А. Атейві [14], О. Станжицького та А. Ткачук [92, 109], О. Карпенко [22, 56, 106, 107], де розглядались умови збереження властивостей стійкості, коливності та періодичності розв'язків даних рівнянь та дисипативності відповідних систем.

Актуальність цієї дисертаційної роботи полягає у вивченні умов збереження таких властивостей при переході від диференціальних до динамічних рівнянь на загальних часових шкалах та навпаки.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводилися на кафедрі загальної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка відповідно до планів, передбачених у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, й у межах держбюджетних науково-дослідних проєктів "Якісний аналіз, керування та методи апроксимації у некоректних та нелокальних детермінованих і стохастичних еволюційних задачах"(Державний

реєстраційний номер: 0121U109988), "Асимптотична поведінка, стійкість та керованість у нескінченновимірних еволюційних системах із детермінованими та випадковими збуреннями"(Державний реєстраційний номер: 0124U001412) та в межах проєкту "Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою"Національного фонду досліджень України (реєстраційний номер проєкту 2023.03/0074).

Мета та завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є розвиток теорії динамічних рівнянь на часових шкалах, зокрема, дослідження коливних і асимптотичних властивостей розв'язків таких рівнянь.

Основними завданнями даної роботи є:

- отримання умов існування глобально обмеженого на часовій шкалі розв'язку динамічного рівняння та встановлення зв'язку між існуванням обмежених розв'язків диференціальних рівнянь та динамічних рівнянь на часових шкалах при достатньо малих значеннях функції зернистості;
- доведення існування відповідної функції Ляпунова для дисипативної системи динамічних рівнянь, що має обмежений розв'язок;
- встановлення зв'язку між дисипативністю систем диференціальних рівнянь та динамічних рівнянь на часових шкалах при достатньо малих значеннях функції зернистості;
- отримання умов коливності розв'язків динамічного рівняння на часових шкалах та встановлення зв'язку між коливністю розв'язків диференціальних рівнянь та динамічних рівнянь на часових шкалах при достатньо малих значеннях функції зернистості;
- отримання умов коливності розв'язків слабко нелінійних динамічних рівнянь на часових шкалах;
- встановлення зв'язку між існуванням періодичних розв'язків диференціальних рівнянь та динамічних рівнянь на періодичних часових шкалах при достатньо малих значеннях функції зернистості.

Об'єктом дослідження є динамічні рівняння на часових шкалах.

Предметом дослідження є коливні та асимптотичні властивості розв'язків динамічних рівнянь на часових шкалах.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії диференціальних рівнянь та динамічних рівнянь на часових шкалах, класичного аналізу, асимптотичні методи та методи нелінійного аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі наукові результати, отримані в дисертаційній роботі, є новими. Основні результати такі:

- отримана явна оцінка малості функції зернистості, яка гарантує збереження глобальних обмежених розв'язків при переході від диференціальних до динамічних рівнянь та навпаки;
- отримано достатні умови в термінах функції Ляпунова, за яких система динамічних рівнянь на часових шкалах є дисипативною, та доведено існування відповідної функції Ляпунова для дисипативної системи динамічних рівнянь на часових шкалах;
- встановлено взаємозв'язок між дисипативністю системи диференціальних рівнянь та відповідної динамічної системи на сім'ї часових шкал з малою функцією зернистості;
- отримано умови коливності розв'язків лінійного динамічного рівняння другого порядку на часових шкалах при коливності відповідних розв'язків диференціального рівняння, та навпаки;
- отримано умови коливності розв'язків слабко нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку та слабко нелінійних динамічних рівнянь другого порядку на часових шкалах, за наявності такої властивості у відповідних розв'язків лінійних динамічних рівнянь на часових шкалах та лінійних диференціальних рівнянь на дійсній осі відповідно;
- встановлено, що для досить малої функції зернистості, динамічне рівняння на періодичній шкалі часу має періодичний розв'язок, за наявності асимптотично стійкого періодичного розв'язку відповідного диференціального рівняння, і навпаки.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має як теоретичне, так і практичне значення. Отримані в ній теоретичні результати, а також розроблена методика досліджень, сприятимуть подальшому розвитку теорії динамічних рівнянь на часових шкалах. Вони також можуть бути використані при дослідженні процесів у галузях біології, економіки, фізики та інших об'єктів природознавства, математичними моделями яких є динамічні рівняння на часових шкалах.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи одержані здобувачем самостійно. Визначення загального плану напрямку досліджень дисертації і постановка задач належать науковому керівникові Станжицькому Олександру Миколайовичу. У роботах [79, 96, 97] та [118] (переклад англійською [94]) співавторам належить обговорення можливих шляхів дослідження, перевірка та аналіз отриманих результатів.

Апробація матеріалів дисертації. Результати дисертації доповідалися та обговорювалися на таких міжнародних конференціях:

1. XX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2022», 14 квітня 2022, Київ, Україна.
2. Міжнародна наукова конференція «Прикладна математика та інформаційні технології», присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, 22–24 вересня 2022, Чернівці, Україна.
3. III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації», 30 вересня 2022, Запоріжжя, Україна.
4. XII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», 2–4 червня 2023, Луцьк – Світязь, Україна.
5. Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики, 28–30 вересня 2023, Чернівці, Україна.
6. The 29th Conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2022, August 25–27, 2022, Chisinau, Republic of Moldova.
7. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2022, December 17–19, 2022, Tbilisi, Georgia.
8. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2023, December 9–11, 2023, Tbilisi, Georgia.
9. XIII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», 31 травня – 2 червня 2024, Луцьк – Світязь, Україна.

10. V Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації», 29–31 травня 2024, Запоріжжя, Україна.
11. Міжнародна конференція, присвячена 145-річчю з дня народження Ганса Гана, 23–27 вересня 2024, Чернівці, Україна.

Публікації. За результатами дисертації опубліковано

- 4 статті у виданнях, які індексуються в наукометричних базах Scopus [79, 94, 96, 97]; три з них [79, 96, 97] — у виданнях, що входять до квартиля Q2; одна [94] — у виданні, що входить до квартиля Q3.
- 11 тез доповідей на конференціях [43, 93, 95, 110–117].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, шести розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел та додатку, який містить перелік публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Повний обсяг дисертації становить 152 сторінок, основний текст займає 126 сторінок.

Зміст роботи. **Перший розділ** містить огляд літератури за тематикою дисертації та висвітлює сучасний стан вивчення проблем, схожих до тих, що розглядаються в дисертаційній роботі.

Другий розділ містить загальні означення та деякі твердження теорії динамічних рівнянь на часових шкалах, які використано в дисертаційній роботі.

У розділах з **третього** по **шостий** розглядаються властивості розв'язків динамічних рівнянь на сім'ї часових шкал T_λ таких, що $\inf \mathbb{T}_\lambda = -\infty$, $\sup \mathbb{T}_\lambda = \infty$, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$, і $\lambda = 0$ гранична точка множини Λ, причому для всіх $\lambda \in \Lambda$ точка $t = 0$ належить $\mathbb{T}_\lambda$. Крім того, $\mu_\lambda := \sup_{t\in\mathbb{T}_\lambda} \mu_\lambda(t)$, де $\mu_\lambda(t) : \mathbb{T}_\lambda \to [0, \infty)$ - функція зернистості. Причому, якщо $\mu_\lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$, то $\mathbb{T}_\lambda$ збігається з неперервною шкалою часу $\mathbb{T}_0 = \mathbb{R}$.

У **третьому розділі** вивчено питання існування глобально обмежених розв'язків динамічних рівнянь на часових шкалах. Розглядається система диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$, D - область в просторі $\mathbb{R}^n$, і відповідна їй система динамічних рівнянь

$$x_\lambda^\Delta = X(t, x_\lambda), \tag{2}$$

де $t \in \mathbb{T}_\lambda$, $x_\lambda : \mathbb{T}_\lambda \to \mathbb{R}^n$, і $x_\lambda^\Delta(t)$ – дельта-похідна функції $x_\lambda(t)$ на $\mathbb{T}_\lambda$.

Тут вектор-функція $X(t, x)$ неперервно-диференційовна і обмежена разом зі своїми частинними похідними, тобто існує стале число $C > 0$ таке, що

$$|X(t, x)| + \left|\frac{\partial X(t, x)}{\partial t}\right| + \left\|\frac{\partial X(t, x)}{\partial x}\right\| \le C \tag{3}$$

при $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$, де $\frac{\partial X}{\partial x}$ відповідна матриця Якобі. Тут $|\cdot|$ – евклідова норма векторів, а $||\cdot||$ – норма матриці, узгоджена з нормою вектора.

У підрозділах 3.1 та 3.2 розглянуто питання про зв'язок між обмеженими розв'язками системи (1) звичайних диференціальних рівнянь та системи (2) динамічних рівнянь на часових шкалах.

Уведено поняття експоненціальної стійкості розв'язку динамічного рівняння на часових шкалах у наступному вигляді.

Означення 0.1. Розв'язок $x_\lambda(t)$ системи (2), визначений на $\mathbb{T}_\lambda$, будемо називати експоненціально стійким рівномірно за t_0, якщо існують $\delta > 0$, $N > 0$ і $\alpha > 0$ такі, що для будь-якого розв'язку $y_\lambda(t)$ системи (2) такого, що

$$|x_\lambda(t_0) - y_\lambda(t_0)| < \delta, \tag{4}$$

при $t \ge t_0$ має місце нерівність

$$|x_\lambda(t) - y_\lambda(t)| \le N e^{-\alpha(t-t_0)} |x_\lambda(t_0) - y_\lambda(t_0)|, \tag{5}$$

де сталі δ, N і α не залежать від t_0.

Отримано явну оцінку малості функції зернистості, яка гарантує збереження глобальних обмежених розв'язків системи динамічних рівнянь на часових шкалах зі зменшенням функції зернистості.

Теорема 0.1. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) *$X(t, x)$ визначена і виконана умова* (3) *та неперервно-диференційована при $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$, де D-область з простору $\mathbb{R}^n$;*

2) *Існує таке* $\mu_0 > 0$, *що система* (2) *має обмежений на* $\mathbb{T}_{\lambda_0}$, *рівномірно за* t_0 *експоненційно стійкий розв'язок* $x_{\lambda_0}(t)$, *що лежить в області* D *разом з деяким своїм* $\rho-$*околом.*

Тоді якщо виконуються нерівності

$$\mu_0\left(e^{C\left(\frac{\ln 4N}{\alpha}+\mu_0+1\right)}\left(C+\frac{C^2\left(\frac{\ln 4N}{\alpha}+\mu_0\right)}{4}\right)+3C\right)\le\frac{\delta}{8}, \tag{6}$$

$$\mu_0\left(e^{C(\mu_0+1)}\left(C+\frac{C^2\mu_0}{4}\right)+3C\right)\le\frac{\rho}{2}, \tag{7}$$

$$\frac{3N\delta}{2}<\rho \tag{8}$$

$$\mu_0\le\frac{\rho}{4C} \tag{9}$$

де сталі δ, N *і* α *визначені в Означенні 0.1 та* C *визначена в умові* (3), *то при кожному* μ_λ *такому, що* $\mu_\lambda < \mu_0$, *система* (2) *має обмежений на* $\mathbb{T}_\lambda$ *розв'язок.*

Отримано явну оцінку малості функції зернистості, яка гарантує збереження глобальних обмежених розв'язків при переході від системи динамічних рівнянь на часових шкалах до системи диференціальних рівнянь та навпаки, а також доведено близькість отриманих розв'язків.

Теорема 0.2. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) *функція* $X(t,x)$ *визначена і неперервно-диференційовна при* $t\in\mathbb{R}$, $x\in D$, *де* D *– область в* $\mathbb{R}^n$, *та задовольняє умову* (3).
2) *система* (1) *має обмежений на* $\mathbb{R}$, *рівномірно по* $t_0\in\mathbb{R}$ *експоненційно стійкий розв'язок* $x(t)$, *який лежить в* D *разом з деяким* $\rho-$*околом, тобто існують* $\delta>0$, $N>0$ *і* $\alpha>0$ *незалежні від* t_0, *такі, що для будь-якого розв'язку* $y(t)$ *системи* (3.1) *такого, що*

$$|x(t_0)-y(t_0)|<\delta, \tag{10}$$

при $t\ge t_0$ *має місце нерівність*

$$|x(t)-y(t)|\le Ne^{-\alpha(t-t_0)}\left|x(t_0)-y(t_0)\right|. \tag{11}$$

Тоді, якщо виконуються нерівності (6)-(9), *то при кожному* μ_λ *такому, що* $\mu_\lambda < \mu_0$, *система* (2) *має обмежений на* $\mathbb{T}_\lambda$ *розв'язок* $x_\lambda(t)$. *При цьому справедливе відношення*

$$\sup_{t\in\mathbb{T}_\lambda} |x_\lambda(t) - x(t)| \to 0, \quad \mu_\lambda \to 0. \tag{12}$$

Теорема 0.3. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) *функція* $X(t,x)$ *задовольняє умови 1) Теореми 0.1;*
2) *існує* $\mu_0 > 0$, *що система* (2) *має обмежений на* $\mathbb{T}_{\lambda_0}$, *рівномірно за* t_0 *експоненціально стійкий розв'язок, який лежить в області* D *разом з деяким своїм* $\rho-$*околом.*

Тоді, якщо виконуються нерівності (6)-(9), *то система* (1) *має обмежений на* $\mathbb{R}$ *розв'язок.*

Четвертий розділ присвячено вивченню властивостей дисипативності систем (1) та (2), де функція $X(t,x)$ визначена при всіх $t \geq 0$, $x \in D$, неперервна по t та x і обмежена разом зі своїми частинними похідними по t та x в кожній обмеженій області з $\{t \geq 0\} \times D$. Дисипативність системи динамічних рівнянь на часових шкалах визначено в сенсі наступних означень.

Означення 0.2. Систему (2) будемо називати дисипативною по $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}_\lambda}$, якщо існує число $R(\lambda) > 0$ таке, що для довільного $r > 0$ існує $T = T(r, t_0, \lambda)$ для якого розв'язок $x_\lambda(t, t_0, x_0)$ системи (2) з початковими умовами (t_0, x_0),

$$|x_0| < r, \tag{13}$$

при $t \geq t_0 + T$ задовольняє нерівність

$$|x_\lambda(t, t_0, x_0)| < R.$$

Означення 0.3. Систему (2) називатимемо рівномірно дисипативною по $t_0 \in \mathbb{T}_\lambda$ і $\lambda \leq \lambda_0$, якщо в Означенні 0.2, R та T не залежать від t_0 та λ.

У підрозділі 4.1 наведено допоміжні твердження, серед яких доведено наступне.

Лема 0.1. *Нехай* $t_0 \in \mathbb{T}_\lambda$, $y_\lambda : \mathbb{T}_\lambda \to \mathbb{R}$. *Якщо* $y_\lambda(t)$ *визначена при* $t \geq t_0$, Δ-*похідна якої* y_λ^Δ *задовольняє нерівність*

$$y_\lambda^\Delta < A(t) y_\lambda + B(t) \text{ для майже всіх } t \geq t_0, \tag{14}$$

де $A(t), B(t) \in C_{rd}(\mathbb{T})$, *та* $1 + \mu_\lambda(t)A(t) > 0$ *при всіх* $t \in \mathbb{T}_\lambda$, *тоді при* $t \geq t_0$ *виконується нерівність*

$$y_\lambda(t) < y_\lambda(t_0)e_A(t, t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e_A(t, \sigma(\tau))B(\tau)\Delta\tau. \tag{15}$$

Також встановлено, що має місце наступна лема.

Лема 0.2. *Припустимо, що* $V : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *і* $V \in C^1(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n)$ *та* $x : [0, T]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$ *–* Δ*-диференційовна на* $\mathbb{T}^k$*. Нехай* $z : [0, T] \to \mathbb{R}$, $z(\cdot) = V(\cdot, x(\cdot))$, *тоді* z *–* Δ*-диференційовна по* t *і*

$$z^\Delta(t_0) = \frac{\partial V}{\Delta t}(t_0, x_0) + F(\sigma(t_0), x) \cdot x^\Delta(t_0), \tag{16}$$

де $F(\sigma(t_0), x) = (F_1(\sigma(t_0), x), .., F_n(\sigma(t_0), x))$ *та*

$$F_i(\sigma(t_0), x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial V}{\partial x_i}(\sigma(t_0), x_1(\sigma(t_0)), ..., x_{i-1}(\sigma(t_0)), x_i$$
$$+ h\mu(t_0)x_i^\Delta(t_0), x_{i+1}(t_0), ..., x_n(t_0))dh.$$

Зауваження 0.1. З огляду на систему (2), будемо розглядати функцію $\overset{\Delta}{V}(t, x)$, визначену наступним чином:

$$\overset{\Delta}{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\Delta t}(t, x) + \sum_{i=1}^{n} F_i(\sigma(t), x_\lambda)X_i(t, x_\lambda) = \frac{\partial V}{\Delta t}(t, x) + F(\sigma(t), x_\lambda) \cdot X(t, x_\lambda). \tag{17}$$

Функцію $\overset{\Delta}{V}(t, x)$ назвемо Δ-похідною функції $V(t, x)$ в силу системи (2).

У підрозділі 4.2 отримано умови в термінах функції Ляпунова $V(t, x)$, за яких система динамічних рівнянь (2) на часових шкалах є дисипативною. Всі функції Ляпунова, що тут розглядаються є Δ-абсолютно неперервні по t та рівномірно неперервні по x в околі кожної розглядуваної точки. Крім того, вони задовольняють локальну умову Ліпшиця по x для кожного $0 < \lambda \leq \lambda_0$ в області $\{t \in [0, T]_{\mathbb{T}_\lambda}\} \times \{x \in \mathbb{R} | \, |x| \leq R\}$ зі сталою Ліпшиця, що залежить від R та T. Цей факт позначається: $V \in \mathbf{C}_0$. Має місце теорема.

Теорема 0.4. *Якщо система динамічних рівнянь* (4.2) *на часовій шкалі* $\mathbb{T}_\lambda$, $\lambda > 0$, *має невід'ємну функцію Ляпунова* $V(t, x) \in \mathbf{C}_0$, *визначену при* $t \geq t_0$, $t \in \mathbb{T}_\lambda$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, *з наступними властивостями:*

1)

$$\inf_{t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}_\lambda},|x|\geq\rho} V(t,x) = V_\rho(\lambda) \to \infty, \quad \rho \to \infty, \tag{18}$$

2) при $x \in \bar{U}_{R_0} = \{|x| \geq R_0, t \geq t_0\}$ існує $C = C(\lambda) > 0$ таке, що

$$\overset{\Delta}{V}(t,x) \leq -C(\lambda)V(t,x), \tag{19}$$

а при $x \in U_{R_0}$ функції V і $\overset{\Delta}{V}(t,x)$ обмежені згори,
тоді система (2) *дисипативна.*

Якщо в умовах Теореми 0.4 $V(t,x)$ та C не залежать від λ і співвідношення (18) виконується рівномірно по $\lambda \leq \lambda_0$, тоді система (2) рівномірно дисипативна.

У підрозділі 4.3 отримано обернений результат до Теореми 0.4. Нехай функція $X(t,x)$ така, що існують локально інтегровні функції $M_R(t)$ та $B_R(t)$, що виконуються наступні властивості

$$|X(t,x)| \leq M_R(t), \tag{20}$$

$$|X(t,x_1) - X(t,x_2)| \leq B_R(t)|x_2 - x_1|, \tag{21}$$

при x, x_i, що лежать в кулі радіуса R.

Теорема 0.5. *Якщо існує таке $\lambda_0 > 0$, що система динамічних рівнянь* (4.2) *дисипативна для кожного $\lambda \leq \lambda_0$ і виконуються умови* (20), (21)*, то існує невід'ємна функція Ляпунова $V(t,x)$, що задовольняє умови* (18), (19) *при $\lambda < \lambda_0$.*

У підрозділі 4.4 досліджено умови дисипативності системи диференціальних рівнянь (1) за умови дисипативності відповідної динамічної системи (2) на часових шкалах, та навпаки, що відображено у наступних теоремах.

Теорема 0.6. *Нехай $X(t,x)$ задовольняє умову* (3) *та існує таке λ_0, що для всіх $\lambda \leq \lambda_0$ система динамічних рівнянь* (2) *рівномірно дисипативна по $t_0 \in \mathbb{T}_\lambda$ та λ. Тоді система диференціальних рівнянь* (1) *рівномірно дисипативна по t_0 при $t_0 > 0$.*

Теорема 0.7. *Припустимо $X(t,x)$ задовольняє умову* (3)*, а система диференціальних рівнянь* (1) *рівномірно дисипативна по t_0 при $t_0 > 0$. Тоді, існує таке λ_0, що динамічна система* (2) *рівномірно дисипативна по t_0 і λ для всіх $\lambda \leq \lambda_0$.*

У **п'ятому розділі** досліджено зв'язок між коливністю розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку та коливністю розв'язків відповідного динамічного рівняння на часових шкалах, а також коливністю відповідних розв'язків слабко нелінійного динамічного рівняння на сім'ї часових шкал T_λ. Крім того, досліджено і обернену залежність.

Розглядається лінійне диференціальне рівняння другого порядку на відрізку $[0, a]$

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \tag{22}$$

де $p \in C([0, a])$, і відповідне йому динамічне рівняння, визначене на множині часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$

$$x_\lambda^{\Delta\Delta} + p(t)x_\lambda = 0, \tag{23}$$

тут $t \in \mathbb{T}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$, $\lambda = 0$ - гранична точка множини Λ, $x_\lambda : \mathbb{T}_\lambda \to \mathbb{R}^d$, і $x_\lambda^\Delta(t)$ – дельта-похідна функції $x_\lambda(t)$ на $\mathbb{T}_\lambda$.

Нагадаємо, що нетривіальний розв'язок рівняння (22) є коливним на $[0, a]$, якщо він на $[0, a]$ перетворюється в нуль більше одного разу.

Означення 0.4. Розв'язок $x_\lambda(t)$ динамічного рівняння (5.2) має узагальнене нуль у точці $t \in \mathbb{T}_\lambda$, якщо виконується одна з умов:

1) якщо $x_\lambda(t) = 0$;
2) якщо t – розсіяний справа і $x_\lambda(t) \cdot x_\lambda(\sigma(t)) < 0$.

У підрозділі 5.1 наведено ряд допоміжних тверджень, необхідних для подальшого доведення теорем.

У підрозділі 5.2 досліджені зв'язок між коливністю розв'язків лінійного динамічного рівняння (23) на часових шкалах, за умови коливності розв'язку відповідного диференціального рівняння (22) на дійній осі, та навпаки.

Теорема 0.8. *Для будь-якого ε існує $\mu_0 = \mu_0(\lambda)$ таке, що при усіх $\mu_\lambda \leq \mu_0$ справедливе твердження:*

Якщо $x(t)$ розв'язок диференціального рівняння (22) *з початковими даними $x(0) = x_0$, $\dot{x} = x_1$, а $x_\lambda(t)$ відповідний розв'язок динамічного рівняння* (23) *на часових шкалах $\mathbb{T}_\lambda$ з початковими даними $x_\lambda(0) = x_0$, $x_\lambda^\Delta(0) = x_1$, то в ε-околі будь-якого нуля t_0 розв'язку $x(t)$ лежить принаймні один узагальнений нуль $t_{0\lambda}$ відповідного розв'язку рівняння* (23).

З Теореми 0.8 випливає наступне: якщо $\{t_n\}_1^N$ є нулями довільного нетривіального розв'язку $x(t)$ диференціального рівняння (22) на $[0,a]$, то відповідний розв'язок $x_\lambda(t)$ динамічного рівняння (23) при достатньо малих значеннях μ_λ також має принаймні N нулів t_{n_λ} на $[0,a]$, причому

$$\left|t_{n_\lambda} - t_n\right| \to 0, \quad \lambda \to 0.$$

Таким чином доведено, що якщо розв'язок $x(t)$ диференціального рівняння (22) коливний на $[0,a]$, то відповідний розв'язок $x_\lambda(t)$ динамічного рівняння (23) також коливний на $[0,a]_{\mathbb{T}_\lambda}$. Отримано і зворотний результат.

Теорема 0.9. *Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $\mu_\lambda \le \mu_0$ виконується твердження:*

Якщо $x_\lambda(t, x_0, x_1)$ є розв'язком динамічного рівняння (23) *з початковими умовами $x_\lambda(0) = x_0$, $x_\lambda^\Delta(0) = x_1$, а $x(t)$ є відповідним розв'язком диференціального рівняння* (22) *з тими самими початковими умовами, то в ε-околі будь-якого узагальненого нуля $t_{0\lambda}$ розв'язку $x_\lambda(t)$ знаходиться хоча б один нуль t_0 відповідного розв'язку рівняння* (22).

З Теореми 0.9 випливає твердження: Якщо $\{t_{n_\lambda}\}_1^N$ нулі довільного нетривіального розв'язку $x\lambda(t)$ динамічного рівняння (23), то відповідний розв'язок $x(t)$ диференціального рівняння (22) при достатньо малих μ_λ також має принаймні N нулів t_n на $[0,a]$, причому $\left|t_n - t_{n_\lambda}\right| \to 0$ при $\lambda \to 0$. Таким чином доведено, що якщо розв'язок $x_\lambda(t)$ динамічного рівняння (23) коливний на $[0,a]_\lambda$, то відповідний розв'язок $x(t)$ диференціального рівняння (22) також коливний на $[0,a]$.

Наслідок 0.1. *Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $\mu_\lambda \le \mu_0$ виконується твердження:*

Якщо $x(t)$ - розв'язок диференціального рівняння (22) *з початковими умовами $x(0) = x_0$, $\dot{x} = x_1$, а $x_\lambda(t)$ - відповідний розв'язок динамічного рівняння* (23) *з початковими умовами $x_\lambda(0) = x_0$, $x_\lambda^\Delta(0) = x_1$, то в ε-околі будь-якого нуля t_0 розв'язку $x(t)$ знаходиться один і лише один нуль $t_{0\lambda}$ відповідного розв'язку рівняння* (23)*, і навпаки.*

В підрозділі 5.3 доведено результат, що стосується умов коливності розв'язків слабко нелінійних рівнянь. А саме, розглянуто нелінійне диференціальне рівняння

$$\ddot{x} + p(t)x + \varepsilon f(t, x, \dot{x}) = 0, \tag{24}$$

де $\varepsilon > 0$ - малий параметр, $t \in [0, a]$, з початковими даними $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = y(0) = y_0$, що належать компакту $(x_0, y_0) \in K$, який не містить точку $(0, 0)$.

Функції $f(t, x, y)$ і $p(t)$ при $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, a]$ такі, що:

1. $f(t, x, y)$ є неперервною за сукупністю змінних;
2. $f(t, x, y)$ має лінійний ріст по x та y, тобто існує $N > 0$ таке, що виконується нерівність
$$|f(t, x, y)| \le N(1 + |x| + |y|);$$
3. $p(t) \ge 0$;
4. $p(t)$ задовольняє умову Ліпшиця на $[0, a]$.

При $\varepsilon = 0$ рівняння (24) переходить у лінійне рівняння (22). Рівняння (22) та відповідне йому динамічне рівняння (23) розглядаються при початкових умовах $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = y_0$ і $x_\lambda(0) = x_0$, $x_\lambda^\Delta(0) = y_0$ відповідно.

Разом із рівнянням (23) розглядається нелінійне рівняння

$$x_\lambda^\Delta + p(t)x_\lambda + \varepsilon f(t, x_\lambda, x_\lambda^\Delta) = 0. \tag{25}$$

Доведено наступні теореми.

Теорема 0.10. *Нехай $f(t, x, y)$ і $p(t)$ задовольняють умови 1)-4) та існують такі $\varepsilon_0 > 0$ і $\mu_0 > 0$, що для довільного $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ і $0 < \mu_\lambda < \mu_0$ розв'язок лінійного динамічного рівняння* (23) *має на інтервалі* $[0, a]$ *щонайменше три узагальнені нулі, то відповідний розв'язок нелінійного диференціального рівняння* (24) *коливний на* $[0, a]$.

Теорема 0.11. *Нехай $f(t, x, y)$ і $p(t)$ задовольняють умови 1)-4) та існують такі $\varepsilon_0 > 0$ і $\mu_0 > 0$, що для довільного $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ і $0 < \mu_\lambda < \mu_0$ розв'язок лінійного диференціального рівняння* (22) *має на інтервалі* $[0, a]$ *щонайменше три нулі, то відповідний розв'язок нелінійного динамічного рівняння* (25) *коливний на* $[0, a]_\lambda$.

Шостий розділ присвячено дослідженню питання існування періодичних розв'язків динамічних рівнянь (2) на періодичних часових шкалах.

У підрозділі 6.1 сформульовано основні поняття теорії періодичних часових шкал. У підрозділі 6.2 отримано результати, що існування періодичних розв'язків системи динамічних рівнянь на періодичній часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$ з періодом τ випливає з наявності періодичних з періодом кратним τ розв'язків вихідної системи диференціальних рівнянь на $\mathbb{R}$, і навпаки.

Розглядаються система диференціальних рівнянь (1) та відповідна система динамічних рівнянь (2) на сім'ї часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$, права частина яких $X(t, x)$ є неперервно диференційовною та обмеженою разом зі своїми частинними похідними, а також періодичною по t з періодом ω, тобто

$$X(t + \omega, x) = X(t, x), t \in \mathbb{R}, x \in D. \tag{26}$$

Нехай $\mathbb{T}_\lambda$ – послідовність періодичних часових шкал з найменшим періодом $\tau(\lambda)$ таким, що $\tau(\lambda) \to 0$, якщо $\lambda \to 0$, і $\frac{\tau(\lambda)}{\omega} \in \mathbb{Q}$. Тут $\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел. Тоді мають місце наступні теореми.

Теорема 0.12. *Припустимо, що існує $\lambda_0 > 0$ таке, що для будь-якого $\lambda < \lambda_0$ система* (2) *має рівномірно по $t_0 \in \mathbb{T}_\lambda$ та λ асимптотично стійкий періодичний розв'язок $x_\lambda(t)$, який лежить в області D разом з деяким ρ-околом. Тоді система* (1) *також має періодичний розв'язок з періодом $p = r\omega$, де r – ціле.*

Теорема 0.13. *Припустимо, що система диференціальних рівнянь* (1) *має асимптотично стійкий періодичний розв'язок $x(t)$ з періодом ω, який лежить в області D з деяким свої ρ-околом. Тоді існує $\lambda_0 > 0$ таке, що для будь-якого $\lambda < \lambda_0$ система динамічних рівнянь* (2) *має щонайменше один нетривіальний періодичний розв'язок з періодом $r\omega$ на часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$, де r – ціле число.*

У **висновках** сформульовано основні результати дисертаційної роботи.

Автор висловлює щиру вдячність науковому керівнику — доктору фізико-математичних наук, професору Станжицькому Олександру Миколайовичу — за постановку задач, цінні поради, незмінну підтримку та постійну увагу до роботи.

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Розвиток теорії динамічних рівнянь на часових шкалах розпочався у 80-их роках XX століття з дослідження S. Hilger [48], у якому він представив концепцію часових шкал, що об'єднала неперервний та дискретний аналіз та поширила його на будь-яку непорожню замкнуту підмножину множини дійсних чисел, яка називається часовою шкалою $\mathbb{T}$, що може мати як дискретну, так і неперервну структуру, або бути комбінацією дискретних і неперервних множин. У його роботі було вперше введене поняття Δ-похідної на часовій шкалі $\mathbb{T}$. Це дозволило вибудувати єдиний підхід до дослідження диференціальних і різницевих рівнянь.

Пізніше теорію динамічних рівнянь на часових шкалах у різних напрямках розвивали B. Aulbach, S. Hilger [16], T. Bhaskar [17], O. Došlý [34, 35], Z. Drici [36], R. Hilscher [50] разом із V. Zeidan [51], V. Lakshmikantham [65, 66], B. Kaymakçalan [61–63] разом із G. Guseinov [46] та F. Atici [15], E. Kaufmann [58], A.S. Vatsala [99], P. Wong [101] та інші. На початку XXI століття M. Bohner, A. Peterson узагальнили теоретичні основи щодо розв'язування та дослідження динамічних рівнянь на часових шкалах у своїх роботах [25, 26]. Зокрема, результати отримані ними разом з R. Agarwal [3] за участю D. O'Regan [4, 37] та P. Wong [5], E. Akin та L. Erbe [42] за участю A. Billur і B. Kaymakçalan [81] та іншими математиками [9, 12, 23, 38–40, 49].

Динамічні системи на часових шкалах, завдяки своїй здатності моделювати гібридні системи, які демонструють як неперервну, так і дискретну поведінку, знайшли застосування в різних галузях таких, як біологія та епідеміологія, екологія, економіка та дослідження фінансових процесів, робототехніка та автоматизація та інших. Серед прикладів реальних процесів, математичними моделями яких можуть бути такі системи, можна навести процес поширення інфекційних захворювань, зміна популяції видів, ціноутворення опціонів, динаміка цін, торгова поведінка на фінансових ринках тощо.

У кожному з цих прикладів дослідження властивостей динамічних систем на часових шкалах має важливе значення для розуміння поведінки процесів у реальному світі, прийняття обґрунтованих рішень для керування ними, розробки ефективних втручань або стратегій контролю.

Дослідженням стійкості розв'язків систем динамічних рівнянь на часових шкалах у 2000-их роках було були присвячені, наприклад, роботи A. Peterson, Y. Raffoul [82], J. Hoffacker, C. Tisdell [54], де вивчалась експоненціальна стійкість нульового розв'язку динамічних систем на часових шкалах, встановлено умови стійкості та нестійкості рівноважного розв'язку $x = 0$ системи динамічних рівнянь першого порядку на часових шкалах та принцип інваріантності в термінах функції Ляпунова.

Анатолій Мартинюк у своїй монографії [71] вперше представив три підходи до аналізу стійкості розв'язків динамічних рівнянь, заснованих на застосуванні інтегральних нерівностей та фундаментальної матриці розв'язків лінійної апроксимації динамічних рівнянь, на узагальненні прямого методу Ляпунова на часових шкалах із застосуванням допоміжних функції (скалярних, векторних та матрично-визначених) та на застосуванні таких функцій в поєднанні з диференціальними нерівностями на часових шкалах.

Умови, за яких розв'язки динамічних рівнянь на часових шкалах є обмеженими, досліджувались у багатьох роботах. Зокрема, A. Peterson та C. Tisdell [83] сформулювали умови обмеженості та єдиності розв'язку динамічного рівняння першого порядку на часових шкалах в термінах функції Ляпунова; E. Akin-Bohner, Y. Raffoul [10] довели загальні теореми про обмеженість усіх розв'язків функціонального динамічного рівняння на часових шкалах та отримали достатні умови обмеженості та рівномірної обмеженості розв'язків лінійних та нелінійних інтегро-динамічних рівнянь Вольтерра на часових шкалах; E. Kaufmann, N. Kosmatov, Y. Raffoul [59] узагальнили теорему Массера про зв'язок між обмеженістю та існуванням періодичних розв'язків на функціонально-диференціальні рівняння на загальних періодичних часових шкалах.

Питання дисипативних властивостей динамічних систем на часових шкалах загалом вивчалось в контексті обмеженості розв'язків таких систем в деякій області. Подібний підхід зустрічається у роботах E. Akin-Bohner, Y. Raffoul [10], A.L. Liu [68].

Широко вивчалася науковцями коливність розв'язків динамічних рівнянь на часових шкалах. Так у роботі S. Saker, R. Agarwal, D. O'Regan [86] було встановлено критерії коливності розв'язків лінійних та нелінійних динамічних рівнянь другого порядку із умовами затухання. Подібним дослідженням також присвячено роботи G. Guseinov, B. Kaymakçal [46], L. Erbe, A. Peterson, S. Saker [41], M. Bohner, L. Erbe, A. Peterson [19]. Автори Z. Han, T. Li, S. Sun, C. Zhang у своєму дослідженні [80] визначили критерії коливання та асимптотичної поведінки розв'язків динамічного рівняння третього порядку з нейтральним запізненням на часовій шкалі. Пізніше у роботі S. Grace, J. Graef, M. El-Beltagy [45] дані результати було узагальнено і уніфіковано. А автори S. Salem, A. Hassan [87] розглянули динамічне рівняння третього порядку з нейтральним запізненням на часовій шкалі як у канонічній, так і напівканонічній формах та отримали результати щодо коливності розв'язків динамічного рівняння третього порядку, що доповнюють опубліковані раніше. Дослідження [76] присвячене вивченню динамічного рівняння першого порядку із немонотонними аргументами, для якого представлено умову коливності розв'язку на часових шкалах.

Поряд з цим T. Hassan та D. O'Regan [47] покращили кілька відомих результатів для лінійних і нелінійних динамічних рівнянь другого, третього та вищого порядку, дослідивши коливну та асимптотичну поведінку розв'язків нейтральних динамічних рівнянь вищого порядку зі збуренням. Їх дослідження було продовжене X. Wu, T. Sun та J. Wang [103], які розв'язали поставлену T. Hassan та D. O'Regan задачу, використовуючи узагальнений підхід Ріккаті та метод інтегрального усереднення.

Періодичність розв'язків динамічних рівнянь на часових шкалах широко вивчається науковцями останніми роками. Питання існування періодичних розв'язків різних видів динамічних рівнянь на часових шкалах досліджували D. Anderson [11], M. Bohner, M. Fan та J. Zhang [20], X. Liu та W. Li [69], S.-T. Wu та L.-Y. Tsai [102], S.-P. Wang [100] та інші. Також широко вивчаються інші властивості таких розв'язків. Так у своїх дослідженнях E. Kaufmann, Y. Raffoul [59, 60] вивчено періодичні розв'язки нелінійного нейтрального динамічного рівняння із запізненням на часових шкалах. Дослідження M. Adivar, H. Koyuncuoğlu, Y. Raffoul [1, 2] присвячені майже автоморфним розв'язкам нейтральної динамічної системи із запізненням на часових шкалах, які є адитивно періодичними, майже автоморфними розв'язкам нейтральної динамічної системи та її майже періодичним розв'язкам. У роботі M. Bohner, J. Mesquita, S. Streipert [24] розглянуто умови існування і єдиності періодичних розв'язків динамічного аналогу рівняння Бевертона-Холда на ізольованих періодичних часових шкалах.

У 2024 році R. Agarwal, B. Hazarika та S. Tikare опублікували роботу [7], що містить дослідження функціональних динамічних рівнянь на часових шкалах, стійкості деяких класів таких рівнянь, існування, єдиності і критеріїв осциляції їх розв'язків, численні застосування у теорії керування на часових шкалах, аналіз стійкості, оптимізації та стохастичних часових шкал, існування розв'язків різних типів задач оптимального керування, керованості систем різних типів та інші актуальні дослідження теорії часових шкал. У цій роботі також наведено різноманітні конкретні застосування теорії часових шкал, зокрема, у біології, динаміці популяцій, включаючи модель COVID-19, та економіці.

Слід відзначити, що дослідження динамічних рівнянь на часових шкалах тим складніше, чим складнішою є структура часових шкал, що розглядаються. Такі дослідження вимагають застосування спеціальних підходів. У цьому напрямку відзначимо роботи О. Бойчука та О. Страха [28, 44], у яких вивчаються динамічні рівняння на часових шкалах, що є канторовими множинами. А також, роботи О. Кічмаренко та А. Огуленко [64, 77, 78], у яких обґрунтовано метод усереднення для динамічних систем та описано чисельно-асимптотичний метод розв'язання задачі оптимального керування на часових шкалах. Як ілюстрацію, автори побудували модель розповсюдження інформації в соціальних мережах на основі принципу імітації найліпшої поведінки та встановили умови існування єдиного стану рівноваги та його стійкості.

Однак, у перерахованих роботах якісні властивості розв'язків динамічних рівнянь досліджуються на певній часовій шкалі із заданими властивостями методами теорії часових шкал, тоді як природно виникає запитання про умови збереження таких властивостей розв'язків при переході від динамічних рівнянь на часових шкалах до відповідних диференціальних рівнянь, та навпаки.

У цьому напрямку відзначимо роботу А. Атейві [14], де досліджується зв'язок між стійкістю розв'язків диференціальних рівнянь та відповідних їм динамічних рівнянь на часовій шкалі $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, що є частковим випадком часових шкал, при якому динамічне рівняння набуває вигляду різницевого з кроком $h > 0$. А саме, розглянуто умови збереження стійкості систем диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(t, x_1, ..., x_n), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

за умови стійкості відповідної системи різницевих рівнянь

$$x_{m+1}^h = x_m^h + hX(t_0 + mh, x_{1m}^h, ..., x_{nm}^h), \quad m = 0, 1, 2, ..., \tag{1.2}$$

де $h > 0$ – крок різницевого рівняння, $x_m^h = x_m^h(t_0 + mh)$, $x^h(t_0) = x_0^h$. Функція $X(t, x_1, ..., x_n)$ визначена і неперервна по $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D – область в $\mathbb{R}^n$ та по t, причому $x_m^h \equiv 0$ – розв'язок рівняння (1.2).

Відносно випадку, коли системи (1.1) та (1.2) є системами лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, доведено наступні результати.

Теорема 1.1. *Якщо існує $h > 0$ таке, що система* (1.1) *асимптотично стійка, то і система* (1.2) *також асимптотично стійка.*

Крім того, якщо $X(t, x)$ задовольняє наступним умовам:

- функція $X(t, x)$ та її частинні похідні $\frac{\partial X_s}{\partial x_j}$, $s = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., n$, обмежені при $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$;
- $\frac{\partial X_s}{\partial t}$ – задовольняють умові Ліпшиця по $x \in \mathbb{R}^n$,

звідки випливає, що частинні похідні $X(t, x)$ задовольняють наступну нерівність

$$\left| \frac{\partial X_s}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_s}{\partial x_j} X_j \right| \leq N|x|, \tag{1.3}$$

де N – деяка додатна стала, то для систем (1.1) та (1.2) доведено наступний результат

Теорема 1.2. *Якщо існує $h_0 > 0$ таке, що при $h \leq h_0$ нульовий розв'язок системи* (1.1) *асимптотично стійкий рівномірно по t_0 і по h, тоді і нульовий розв'язок системи* (1.2) *рівномірно стійкий також.*

Також у роботі [14] розглянуто зв'язок між коливністю розв'язків диференціальних рівнянь та відповідних різницевих рівнянь другого порядку. А саме, розглядається різницеве рівняння

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_m = 0, \tag{1.4}$$

де коефіцієнти p_n та q_n пов'язані з відповідними коефіцієнтами $p_1(t)$ та $q_1(t)$ рівняння

$$y" + p_1(t)y' + q_1(t)y = 0 \tag{1.5}$$

формулами $p_n = p(t_n) = p(t_0 + hn) = hp_1(t_n) - 2$, $q_n = q(t_n) = q(t_0 + hn) = 1 + h^2 q_1(t_n) - hp_1(t_n)$ для яких доведено наступну теорему.

Теорема 1.3. *Якщо при деякому достатньо малому $h = h_0$ на інтервалі (a, b) рівняння* (1.4) *має коливний розв'язок, то і рівняння* (1.5) *також має на інтервалі (a, b) коливний розв'язок.*

При цьому розв'язок y_n різницевого рівняння (1.4), у даній роботі, називають коливним на інтервалі (a, b), якщо він має не менше двох змін знаків на ньому. Вважають, що y_n змінює знак у точці $t = t_n$, якщо або $y_n \cdot y_{n+1} < 0$, або $y_n = 0$, але при цьому y_{n-1} і y_{n+1} різних знаків.

Використане означення зміни знаку розв'язку перегукується з означенням узагальненого нуля розв'язку рівняння на часових шкалах, що було сформульоване у роботах присвячених побудові аналога класичної теорії Штурма дослідження коливності розв'язків лінійних рівнянь другого порядку на часових шкалах [73, 74]. А саме, кажуть, що розв'язок x рівняння вигляду $(p(t)x^{\Delta})^{\nabla} + q(t)x = 0$ має узагальнений нуль у точці t, якщо або $x(t) = 0$, або t розсіяна зліва точка та $x(\rho(t))x(t) < 0$.

Дане дослідження були продовжене у роботах О. Карпенко [55, 107], у яких доведено, що існує такий крок, що при переході від диференціального рівняння до різницевого і навпаки коливність усіх розв'язків (для всіх початкових даних) зберігається. А саме, у роботі [107] розглядається диференціальне рівняння

$$\ddot{x} + p(t)x = 0. \tag{1.6}$$

де $p(x) \in C([0, a])$, $p(x) \geq 0$ і ліпшецева на $[0, a]$ та відповідне йому різницеве рівняння

$$\Delta_k^2 x + h^2 p(kh)x(kh) = 0, \tag{1.7}$$

де $\Delta_k x = x((k+1)h) - x(kh)$, $\Delta_k^2 x = \Delta_k(\Delta_k x)$. Тоді виконується наступна теореми.

Теорема 1.4. *Існує h_0 таке, що при всіх $0 < h \leq h_0$ справедливе твердження:*

якщо розв'язок рівняння (1.7) має на $[0, a]$ принаймні три зміни знаку, то відповідний йому розв'язок диференціального рівняння (1.6) коливний на $[0, a]$.

В роботі [55] для рівнянь

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0. \tag{1.8}$$

де $p(x), q(x) \in C([0, a])$ та

$$\Delta_k^2 x(t_0) + hp(t_0 + kh)\Delta_k x(t_0) + h^2 q(t_0 + kh)x(t_0 + kh) = 0, \tag{1.9}$$

де $\Delta_k x(t_0) = x(t_0 + (k+1)h) - x(t_0 + kh)$, $\Delta_k^2 x(t_0) = \Delta_k(\Delta_k x(t_0))$, доведено наступне твердження.

Теорема 1.5. *Існує $h_0 > 0$ таке, що при всіх $0 < h \leq h_0$ справедливе твердження:*

якщо розв'язок рівняння диференціального (1.8) з початковими умовами $t_0 \in [0, h]$ має на $(t_0, a]$ принаймні три нулі, то відповідний йому розв'язок різницевого рівняння (1.9) коливний на $[t_0, a]$.

З огляду на це природно сподіватись, що за певних умов коливність розв'язків диференціальних рівнянь буде зберігатись при переході до відповідних рівнянь на часових шкалах, і навпаки.

Дане питання одне з тих, які розв'язані у цій дисертації.

Питання про зв'язок між дисипативністю системи диференціальних рівнянь та відповідної їй системи різницевих рівнянь, що є частковим випадком динамічних рівнянь на часових шкалах, коли шкала набуває вигляду $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ з кроком $h > 0$, вивчалось у роботах О. Станжицького та А. Ткачук [92, 109]. Розглянуто систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \tag{1.10}$$

і відповідну їй систему різницевих рівнянь

$$x_{k+1}^h = x_k^h + hX(t_0 + kh, x_k^h), \tag{1.11}$$

де $k \in \mathbb{Z}$, $h > 0$ – крок різницевого рівняння, $x_k^h = x_k^h(t_0 + kh)$, $x^h(t_0) = x_0^h$, $x(t_0) = x_0$. Вектор-функція $X(t, x)$ визначена при $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$ (D – деяка область в $\mathbb{R}^n$), $t_0 \in \mathbb{R}$. Задача розглядається за умови, що $X(t,x)$ в області $\mathbb{R} \times D$ є неперервно-диференційовною і обмеженою зі своїми частинними похідними, так що

$$|X(t,x)| + \left|\frac{\partial X}{\partial t}\right| + \left\|\frac{\partial X}{\partial x}\right\| \leq C. \tag{1.12}$$

Дисипативність систем (1.10) та (1.11) розглядаються відповідно до наступних означень.

Означення 1.1. Система (1.10) називається дисипативною при $t \geq 0$, якщо існує число $R > 0$, що для довільного $r > 0$ існує $T = T(r, t_0)$, що розв'язок $x(t, t_0, x_0)$ системи (1.10) такий, що

$$|x_0| < r, \quad t_0 \geq 0,$$

при $t \geq T$ задовольняє нерівність

$$|x(t, t_0, x_0)| < R.$$

Означення 1.2. Система (1.11) називається дисипативною при $k \geq 0$, якщо існує $R(h)$, що для довільного довільного $r > 0$ можна вказати $T = T(r, t_0, h)$, що розв'язок x_k^h системи (1.11) такий, що

$$|x_0^h| < r,$$

при $kh \geq T$ задовольняє нерівність

$$|x_k^h| < R.$$

Означення 1.3. Система (1.11) називається рівномірно дисипативною по $h \leq h_0$, якщо в означенні 1.2 R та T не залежать від h.

Отримано умови в термінах функції Ляпунова $V(t,x)$, за яких з дисипативності системи різницевих рівнянь (1.11) випливає дисипативність системи диференціальних рівнянь (1.10). А саме

Теорема 1.6. *Якщо система* (1.11) *для кроку* $h > 0$ *має невід'ємну функцію Ляпунова* $V_h(t,x)$, *визначену в області* $t \geq t_0$, $x \in \mathbb{R}^n$, *таку, що:*

1) виконується умова

$$\inf_{k \in \mathbb{Z}_+, |x| \geq R} V_h(t_0 + kh, x) = V_{h,R} \to \infty, \quad R \to \infty, \tag{1.13}$$

2) існують $C = C(h) > 0$ та $C_1 = C_1(h) > 0$ такі, що

$$V_h(t_0 + (k+1)h, x + hX(kh, x)) - V_h(t_0 + kh, x) \le -C(h)V_h(t_0 + kh, x)h + C_1(h)h,$$

то система (1.11) *дисипативна для даного $h > 0$ за умови, що $C(h) \cdot h < 2$.*

Якщо ж в умовах теореми $V_h(t,x)$, C_1 та C не залежать від h і співвідношення (1.14) *виконується рівномірно по $h \le h_0$, то* (1.11) *рівномірно дисипативна.*

Для випадку, коли функція $X(t,x)$ задовольняє умову Ліпшиця по x з константою L, у даних роботах доведено обернений результат.

Теорема 1.7. *Якщо система* (1.10) *є дисипативною в сенсі означення 1.2, то для неї в області $t \ge t_0$, $x \in \mathbb{R}^n$ існує невід'ємна функція Ляпунова $V_h(t,x)$, що задовольняє по x локальну умову Ліпшиця, і таку, що:*

1) виконується умова

$$\inf_{t \ge t_0, |x| \ge R} V_h(t,x) \to \infty, \quad R \to \infty, \tag{1.14}$$

2) існує $C = C(h) > 0$ таке, що

$$V_h(t+h, x + hX(t,x)) - V_h(t,x) \le -C(h)V_h(t,x)h$$

і $C(h)h < 2$, якщо $h \le 2$.

Причому цьому для $h < h_0$, де h_0 – розв'язок рівняння $\frac{1-e^{-h}}{h} = \frac{1}{2}$, сталу $C(h)$ можна взяти рівною $\frac{1}{2}$.

Якщо система (1.11) *є рівномірно дисипативною по h, то функція Ляпунова $V(t,x)$ не залежить від h.*

Крім того, також визначено умови, за яких дисипативність системи диференціальних рівнянь (1.10) випливає з дисипативності системи різницевих рівнянь (1.11), що визначаються наступною теоремою.

Теорема 1.8. *Нехай $X(t,x)$ визначена й обмежена в області $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ так, що*

$$|X(t,x)| \le M,$$

де M – деяка додатна стала.

Тоді, якщо в даній області існує неперервно-диференційовна по t та x невід'ємна функція Ляпунова $V(t,x)$, що задовольняє по x умову Ліпшиця з константою L, а також:

1) *існують* $C > 0$ *і* $C_1 > 0$ *такі, що для будь-якого* $t \geq 0$, $x]in\mathbb{R}^n$, $h > 0$

$$V(t+h, x+hX(t,x)) - V(t,x) \leq -CV(t,x)h + C_1 h,$$

1) *виконується умова*

$$\inf_{t\geq t_0, |x|\geq R} V(t,x) \to \infty, \quad R \to \infty,$$

то система диференціальних рівнянь (1.10) *дисипативна при* $t \geq 0$.

Також у роботах [91,108] цих авторів досліджується збереження періодичності розв'язків систем диференціальних (1.10) та відповідних їм різницевих рівнянь (1.11) з неперервно-диференційовною функцією $X(t,x)$, що задовольняє умову (1.12), такою, що є періодичною по t з періодом ω, який кратний крокові $h > 0$ шкали $h\mathbb{Z}$, тобто

$$X(t+\omega, x) = X(t,x), \tag{1.15}$$

де $\omega = hn$ (n – натуральне число). Тоді справедливі наступні теореми.

Теорема 1.9. *Якщо система* (1.11) *для достатньо малого кроку* h *(*$n \geq N_0$*) має рівномірно по* k_0 *і* h *асимптотично стійкий періодичний розв'язок* x_k^h*, що належить* D *разом із деякими* ρ*-околом, то система* (1.10) *має також періодичний розв'язок періоду, кратного* ω.

Теорема 1.10. *Якщо при виконанні умов теореми 1.9 система* (1.10) *має єдиний періодичний розв'язок* $\phi(t)$ *періоду* $s\omega$ *(*s*-ціле), то має місце співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\leq n} \left| x_m^h \left(\frac{ms\omega}{n}\right) - \phi\left(\frac{ms\omega}{n}\right) \right| = 0,$$

де x_m^h *– періодичний розв'язок системи* (1.11), $h = s\omega/n$ *– крок.*

У роботі О. Карпенко [106] подібного результату було отримано за менших обмежень та за умови, що періодичний розв'язок різницевого рівняння існує хоча б за одного фіксованого кроку $h = h_0$ також визначено умови малості такого кроку.

У роботі розглянуто систему диференціальних рівнянь (1.10) та відповідну їй систему різницевих рівнянь (1.11) з функцією $X(t,x)$, що задовольняє умови

(1.12) та є періодичною по t з періодом ω. Системи розглядаються при початкових даних $t_0 = 0$, тобто система різницевих рівнянь набуває вигляду

$$x_{k+1}^h = x_k^h + hX(kh, x_k^h), \tag{1.16}$$

де $x_k^h = x^h(kh)$, $h > 0$ – крок різницевого рівняння. Припускається, що при деякому $h = h_0 = \frac{\omega}{m_0}$ ($m_0 \in \mathbb{N}$, m_0 – фіксоване) система (1.16) має періодичний, експоненціально стійкий розв'язок $x_k^{h_0}$ періоду $p(h_0) \in \mathbb{N}$, тобто $x_{k+p}^{h_0} = x_k^{h_0}$ для довільного $k \in \mathbb{Z}$. Експоненціальна стійкість розв'язку x_k^h визначається в сенсі наступного означення.

Означення 1.4. Розв'язок x_k^h рівняння (1.16) називається експоненційно стійким рівномірно за k_0, якщо існують сталі $\delta > 0$, $N > 0$, $\alpha > 0$ такі, що для довільного розв'язку y_k^h системи (1.16) такого, що $|y_{k_0}^h - x_{k_0}^h| < \delta$, виконується нерівність $|y_k^h - x_k^h| \le N\exp\{-\alpha(k-k_0)h\}|y_{k_0}^h - x_{k_0}^h|$ при $k \ge k_0$.

Тоді для $k_0 \in \mathbb{N}$ такого, що $k_0 h_0 > \frac{1}{\alpha}\ln 2N$ ($\alpha > 0$, $N > 0$ з Означення 1.4), та для найменшого натурального числа r такого, що $prm_0 \ge k_0$, доведено наступне твердження.

Теорема 1.11. *Якщо при $h = h_0$ система* (1.16) *має експоненціально стійкий в сенсі Означення 1.4 періодичний з періодом p розв'язок $\psi_k^{h_0}$, що лежить в D разом з деяким своїм ρ-околом і виконуються умови:*

$$\begin{aligned} h_0 e^{Cp\omega}[1 + (C + C^2)pr\omega] &\le \frac{\delta}{2}, \\ \frac{3N\delta}{2} &< \rho, \\ h_0 &< \frac{\rho}{2C}, \end{aligned}$$

то система (1.10) *має періодичний розв'язок періоду кратного ω.*

Питання умов існування подібних зв'язків між розв'язками динамічних рівнянь загальних на часових шкалах та розв'язками відповідних диференціальних рівнянь раніше не досліджувалось і є одним з тих, яким присвячено цю дисертацію.

Зв'язок між глобальними обмеженими розв'язками звичайних і динамічних рівнянь на часових шкалах було розглянуте у спільних роботах О. Станжицького з А. Ткачук [91] та О. Карпенко [56, 57]. У роботах [56, 91] розглянуто лише випадок, коли часова шкала набуває вигляду дискретної Ейлерової шкали. Розглянуто систему диференціальних рівнянь вигляду (1.10) та відповідну систему різницевих рівнянь (1.11), праві частини яких задовольняють співвідношення (1.12). Так у роботі [91] доведено існування обмеженого розв'язку системи різницевих рівнянь (1.11) за умови, що система диференціальних рівнянь (1.10) має обмежений розв'язок.

Теорема 1.12. *Якщо система* (1.10) *має обмежений, рівномірно по* $t_0 \in \mathbb{R}$ *асимптотично стійкий розв'язок* $x(t)$, *визначений на* $\mathbb{R}$ *і такий, що належить області* $D \subset \mathbb{R}^n$ *разом з деяким своїм околом, то існує крок* h_0 *таке, що при* $h \leq h_0$ *система* (1.11) *також буде мати обмежений розв'язок.*

У роботі [56] покращено попередній результат, а саме отримано явну оцінку малості кроку, що гарантує існування обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку різницевого рівняння, і встановлено зв'язок між існуванням такого розв'язку диференціального та відповідного різницевого рівняння, що спираються на поняття експоненціальної стійкості розв'язків.

Означення 1.5. Розв'язок $x^h(t)$ різницевої системи (1.11), визначеної при $t \in \mathbb{R}$, називають експоненціально стійким рівномірно по t_0, якщо існує $\delta > 0$, $N > 0$ та $\alpha > 0$ такі, що довільний розв'язок $y^h(t)$ системи (1.11) такий, що $|y^h(t_0) - x^h(t_0)| < \delta$ при $t \geq t_0$ задовольняє нерівність

$$|x^h(t) - y^h(t)| \leq Ne^{-\alpha(t-t_0)}|x^h(t_0) - y^h(t_0)|, \tag{1.17}$$

де N, δ та α не залежать від t_0.

Теорема 1.13. *Нехай виконуються наступні умови:*

1. *Функція* $X(t,x)$ *задовольняє умові* (1.12).
2. *Існує* h_0 *таке, що система* (1.11) *має обмежений на* $\mathbb{R}$ *експоненційно стійкий розв'язок* $x_k^{h_0} = x^{h_0}(t_0 + kh_0)$, *який лежить в області* D *разом зі своїм* ρ*-околом,* $\rho > 0$.
3. *Виконуються нерівності*

$$h_0 e^{C(\frac{\ln 4N}{\alpha}+1)} \left[1 + (C + C^2)(\frac{\ln 4N}{\alpha} + 1)\right] \leq \frac{\delta}{8}, \tag{1.18}$$

$$\frac{2N\delta}{2} < \rho, \tag{1.19}$$

$$h_0 \le \frac{\rho}{4C}, \tag{1.20}$$

де N, δ і α визначені в (1.17),*а стала C в* (1.12).
Тоді для всіх h, $0 < h < h_0$, система (1.11) *має обмежений розв'язок на* $\mathbb{R}$.

Для випадку, коли $t_0 = 0$ і система (1.11) набуває вигляду

$$x_{k+1} = x_k^h + hX(kh, x_k^h), \tag{1.21}$$

доведено встановлено наступний зв'язок.

Теорема 1.14. *Нехай виконуються наступні умови:*

1. *Функція $X(t,x)$ задовольняє умові* (1.12).
2. *Існує h_0 таке, що система* (1.21) *має обмежений на $\mathbb{Z}$ рівномірно по k_0 експоненційно стійкий розв'язок, який лежить в області D разом зі своїм ρ-околом, $\rho > 0$.*
3. *Виконуються нерівності* (1.18)-(1.20)*, де N, δ і α визначені в* (1.17),*а стала C в* (1.12).

Тоді система (1.10) *має обмежений розв'язок на* $\mathbb{R}$.

Теорема 1.15. *Нехай виконуються наступні умови:*

1. *Функція $X(t,x)$ задовольняє умові* (1.12).
2. *Система* (1.10) *має обмежений на $\mathbb{R}$ рівномірно по $t_0 \in \mathbb{R}$ асимптотично стійкий розв'язок $x(T)$, який лежить в області D разом зі своїм ρ-околом, $\rho > 0$.*

Тоді існує h_0 таке, що для всіх h, $0 < h \le h_0$, система (1.11) *має обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок $x^h(t)$.*

У роботі [57] розширено результати дослідження [91] до випадку загальних часових шкал. Розглянуто зв'язок між обмеженими розв'язками диференціальних рівняннями (1.10) та відповідної системи динамічних рівнянь на множині часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$

$$x_\lambda^\Delta(t) = X(t, x_\lambda), \tag{1.22}$$

де $T \in \mathbb{T}_\lambda$, $x_\lambda : \mathbb{T}_\lambda \to \mathbb{R}^d$ і x_λ^Δ – дельта-похідна $x_\lambda(t)$ на $\mathbb{T}_\lambda$. Права частина систем $X(t,x)$ задовольняє умові (1.12).

Нехай $\mu_\lambda := \sup_{t \in \mathbb{T}_\lambda} \mu_\lambda(t)$, $\mu_\lambda : \mathbb{T}_\lambda \to [0, +\infty)$ - функція зернистості. Більше того, якщо $\mu_\lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$, то $\mathbb{T}_\lambda$ збігається з дійсною віссю. Тоді виконуються наступні теореми.

Теорема 1.16. *Якщо система диференціальних рівнянь* (1.10) *має обмежений на* $\mathbb{R}$, *асимптотично стійкий по* $t_0 \in \mathbb{R}$ *розв'язок, що разом зі своїм* ρ*-околом* $(\rho > 0)$ *лежить в області* D, *тоді існує* $\lambda_0 > 0$ *таке, що для всіх* $\lambda < \lambda_0$ *система* (1.22) *має обмежений на* $\mathbb{T}_\lambda$ *розв'язок* $x_\lambda(t)$.

Теорема 1.17. *Припустимо існує* $\lambda_0 > 0$ *таке, що для всіх* $\lambda < \lambda_0$ *система динамічних рівнянь рівнянь* (1.22) *має рівномірно по* $t_0 \in \mathbb{T}_\lambda$ *асимптотично стійкий розв'язок, обмежений на усій часовій шкалі. Нехай* ρ*-окіл цього розв'язку лежить в області* D, *для деякого* $\rho > 0$. *Тоді система диференціальних рівнянь* (1.10) *має обмежений на* $\mathbb{R}$ *розв'язок.*

У цій дисертації продовжено дослідження описаних робіт та розвиває їх, а саме отримано явну оцінку малості функції зернистості, яка гарантує збереження глобальних обмежених розв'язків при переході від диференціальних до динамічних рівнянь на загальних часових шкалах, і навпаки.

Розділ 2

ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

У цьому розділі будуть представлені ключові визначення та твердження, необхідні для подальшого викладу. Результати, що включені сюди, можна знайти у джерелах [25], [26] та [57].

Означення 2.1. Довільна непорожня замкнута підмножина дійсної осі називається *часовою шкалою* $\mathbb{T}$. Для довільної підмножини дійсної осі $A \subset \mathbb{R}$ відповідна підмножина часової шкали визначається як $A_{\mathbb{T}} = A \cap \mathbb{T}$.

Для кожної точки t часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ визначають [25] три функції, що характеризують шкалу. *Оператор стрибка вперед* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ такий, що $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} | s > t\}$; *оператор стрибка назад* $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, що визначається як $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} | s < t\}$ та *функція зернистості* $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ така, що $\mu(t) = \sigma(t) - t$.

Відповідно до властивостей шкали у точках $t \in \mathbb{T}$ точки шкали поділяються на *ліво-щільні* (LD), якщо $\rho(t) = t$; *ліво-розсіяні* (LS), якщо $\rho(t) < t$; *право-щільні* (RD), якщо $\sigma(t) = t$; та *право-розсіяні* (RS), якщо $\sigma(t) > t$. Якщо шкала $\mathbb{T}$ має право-розсіяний максимум M, то визначається $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} \setminus M$; інакше покладається $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.

Означення 2.2. Функція $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ називається Δ-*диференційовною* при $t \in \mathbb{T}^k$, якщо границя

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}$$

існує в $\mathbb{R}^d$. Тоді відповідне значення $f^\Delta(t)$ називають Δ-*похідною* в точці t.

Означення 2.3. Функція $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ називається *rd-неперервною*, якщо вона неперервна в право-щільних точках часової шкали $\mathbb{T}$ і має лівосторонню скінченну границю у ліво-щільних точках цієї шкали.

Означення 2.4. Функція $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ називається *регульованою*, якщо її правосторонні границі існують (скінченні) у всіх право-щільних, а лівосторонні границі – у всіх ліво-щільних точках часової шкали $\mathbb{T}$.

Означення 2.5. Неперервна функція $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ називається *переддиференційовною (pre-differentiable)* функцією з областю диференціювання D, якщо $D \subset \mathbb{T}^k$, множина $\mathbb{T}^k \backslash D$ – зліченна і не містить право-щільних елементів часової шкали $\mathbb{T}$, і f диференційовна в кожній точці $t \in D$.

Теорема 2.1. *Нехай f є регульованою. Тоді існує функція F переддиференційовною з областю диференціювання D така, що рівність*

$$F^{\Delta}(t) = f(t) \quad \text{виконується для всіх } t \in D.$$

Означення 2.6. Нехай $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ – регульована функція. Довільна функція F з теореми 2.1 називається *передпервісною (pre-antiderivative)* функції f. Невизначений інтеграл регульованої функції f визначається як

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C,$$

де C – довільна стала, а F – передпервісна функції f. *Визначений інтеграл на відрізку* $[s, r]_{\mathbb{T}}$ визначається як

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r) \quad \text{для всіх } r, s \text{ шкали } \mathbb{T}.$$

Функція $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ називається *первісною функції $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$* якщо рівність

$$F^{\Delta}(t) = f(t)$$

виконується для всіх t часової шкали $\mathbb{T}^k$.

Теорема 2.2 (Існування первісної). *Кожна rd-неперервна функція має первісну. Зокрема, якщо t_0 точка часової шкали $\mathbb{T}$, тоді функція F визначена як*

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(r)\Delta r \quad \text{при } t \in \mathbb{T}.$$

є первісною функції f.

Означення 2.7. Функцію $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ називають *регресивною*, якщо $1+\mu(t)f(t) \neq 0$ для всіх $t \in \mathbb{T}^k$.

Означення 2.8. Функція $\ominus p$ визначається як $(\ominus p)(t) := \frac{p(t)}{1+\mu(t)p(t)}$ для всіх $t \in \mathbb{T}^k$ і вона також регресивна.

Означення 2.9. Якщо p – регресивна, тоді *узагальнена експоненційна функція* $e_p(t,x)$ визначається наступним чином

$$e_p(t,s) = \exp\left(\int\limits_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \quad \text{при } s,t \in \mathbb{T}, \tag{2.1}$$

де $\xi_h(z) : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ – циліндричне відображення $\xi_h(z) = \frac{1}{h}\mathrm{Log}(1+zh)$, Log – основна логарифмічна функція.

Теорема 2.3. *Якщо функції p, q регресивні, то*

1) $e_0(t,s) \equiv 1$ *і* $e_p(t,t) \equiv 1$*;*
2) $e_p(\sigma(t),s) = (1+\mu(t)p(t))e_p(t,s)$*;*
3) $\frac{1}{e_p(t,s)} = e_{\ominus p}(t,s)$*;*
4) $e_p(t,s) = \frac{1}{e_p(s,t)} = e_{\ominus p}(s,t)$*;*
5) $e_p(t,s)e_p(s,r) = e_p(t,r)$*.*

Теорема 2.4. *Якщо функція p регресивна, $a,b,c \in \mathbb{T}$, то*

$$[e_p(c,\cdot)]^\Delta = -p[e_p(c,\cdot)]^\sigma$$

та

$$\int\limits_a^b p(t)e_p(c,\sigma(t))\Delta t = e_p(c,a) - e_p(c,b).$$

Для доведення основного результату знадобиться лема про оцінку близькості розв'язків задачі Коші для системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x) \tag{2.2}$$

де $x \in D,\ D$ - область в просторі $\mathbb{R}^n$, та відповідної системи динамічних рівнянь на часових шкалах

$$x_\lambda^\Delta = X(t,x_\lambda) \tag{2.3}$$

де $t \in \mathbb{T}_\lambda, x_\lambda : \mathbb{T}_\lambda \to \mathbb{R}^n$, і $x_\lambda^\Delta(t)$ – дельта-похідна функції $x_\lambda(t)$ на $\mathbb{T}_\lambda$. з однаковими початковими умовами.Нехай $\inf \mathbb{T}_\lambda = -\infty$, $\sup \mathbb{T}_\lambda = \infty$, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$, та $\lambda = 0$ гранична точка множини Λ, і при кожному $\lambda \in \Lambda$ точка $t = 0$ лежить у $\mathbb{T}_\lambda$. Нехай також, функція $X(t, x)$ неперервно диференційовна і обмежена разом зі своїми частинними похідними, тобто існує таке $C > 0$, що

$$|X(t,x)| + \left|\frac{\partial X(t,x)}{\partial t}\right| + \left\|\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\right\| \leq C \tag{2.4}$$

при $t \in \mathbb{T}_\lambda$, $x \in D$, де $\frac{\partial X}{\partial x}$ відповідна матриця Якобі.

Покладемо, $\mu_\lambda := \sup_{t \in \mathbb{T}_\lambda} \mu_\lambda(t)$, де $\mu_\lambda(t) : \mathbb{T}_\lambda \to [0, \infty)$ - функція зернистості часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ така, що при $\lambda \to 0$, $\mu_\lambda \to 0$, часова шкала $\mathbb{T}_\lambda$ збігається з дійсною віссю $\mathbb{T}_0 = \mathbb{R}$, а система (2.3) переходить в систему (2.2).

Припустимо $t_0 \in \mathbb{T}_\lambda$, $t_0 + T \in \mathbb{T}_\lambda$, $x(t)$ і $x_\lambda(t)$ розв'язки (2.2) і (2.3) на $[t_0, t_0 + T]$ і на $[t_0, t_0 + T]_{\mathbb{T}_\lambda}$ відповідно та $x(t_0) = x_0$, $x_\lambda(t_0) = x_{\lambda 0}$.

Лема 2.1. *[57] Якщо x_λ і $x(t)$ розв'язки задачі Коші для* (2.3) *і* (2.2) *такі, що $x_0 = x_{\lambda 0}$, $x_0 \in D$, то наступна нерівність є справедливою*

$$|x(t) - x_\lambda(t)| \leq \mu(\lambda) K(T) \tag{2.5}$$

де $\mu(\lambda) = \sup_{t \in [t_0, t_0+T]_{\mathbb{T}_\lambda}} \mu_\lambda(t)$ для $t \in [t_0, t_0 + T]_{\mathbb{T}_\lambda}$, $K(T) = e^{C(T+1)}\left(C + \frac{C^2 T}{4}\right) + 3C$ – стала.

Лема 2.2. *[57] При наведених вище умовах розв'язок системи* (2.3) *x_λ неперервно залежить від початкових даних до моменту виходу його з області D.*

Розділ 3

ОБМЕЖЕНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ НА ЧАСОВИХ ШКАЛАХ

Цей розділ присвячений дослідженню властивостей обмеженості розв'язків динамічних рівнянь на часових шкалах. Отримано результат, який показує, за яких умов існування обмежених розв'язків системи диференціальних рівнянь на часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$ випливає з існування розв'язків вихідної системи диференціальних рівнянь обмежених на $\mathbb{R}$.

3.1 Існування обмеженого розв'язку системи динамічних рівнянь на часових шкалах

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \tag{3.1}$$

де $x \in D$, D - область в просторі $\mathbb{R}^n$, і відповідну їй систему динамічних рівнянь

$$x_\lambda^\Delta = X(t, x_\lambda), \tag{3.2}$$

де $t \in \mathbb{T}_\lambda$, $x_\lambda : \mathbb{T}_\lambda \to \mathbb{R}^n$, і $x_\lambda^\Delta(t)$ – дельта-похідна функції $x_\lambda(t)$ на $\mathbb{T}_\lambda$. Нехай $\inf \mathbb{T}_\lambda = -\infty$, $\sup \mathbb{T}_\lambda = \infty$, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$, та $\lambda = 0$ гранична точка множини Λ, і при кожному $\lambda \in \Lambda$ точка $t = 0$ лежить у $\mathbb{T}_\lambda$. Нехай також, функція $X(t, x)$ неперервно диференційовна і обмежена разом зі своїми частинними похідними, тобто існує таке $C > 0$, що

$$|X(t,x)| + \left|\frac{\partial X(t,x)}{\partial t}\right| + \left\|\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\right\| \le C, \tag{3.3}$$

при $t \in \mathbb{T}_\lambda$, $x \in D$, де $\frac{\partial X}{\partial x}$ відповідна матриця Якобі. Тут $|\cdot|$ – евклідова норма векторів, а $||\cdot||$ – норма матриці, узгоджена з нормою вектора.

Покладемо, $\mu_\lambda := \sup_{t\in\mathbb{T}_\lambda} \mu_\lambda(t)$, де $\mu_\lambda(t) : \mathbb{T}_\lambda \to [0,\infty)$ - функція зернистості часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ така, що при $\lambda \to 0$, $\mu_\lambda \to 0$, часова шкала $\mathbb{T}_\lambda$ збігається з дійсною віссю $\mathbb{T}_0 = \mathbb{R}$, а система (3.2) переходить в систему (3.1). Тому природно припускати, що за певних умов із існування обмеженого на осі розв'язку рівняння (3.1) випливає існування обмеженого розв'язку рівняння (3.2) на часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$.

Подібно до визначення експоненціальної стійкості розв'язків диференціальних рівнянь [89], сформулюємо означення поняття експоненціальної стійкості розв'язків динамічних рівнянь на часових шкалах.

Означення 3.1. Розв'язок $x_\lambda(t)$ системи (3.2), визначений на $\mathbb{T}_\lambda$, будемо називати *експоненціально стійким рівномірно за* t_0, якщо існують $\delta > 0$, $N > 0$ та $\alpha > 0$ такі, що для довільного розв'язку $y_\lambda(t)$ системи (3.2) такого, що

$$|x_\lambda(t_0) - y_\lambda(t_0)| < \delta, \tag{3.4}$$

при $t \ge t_0$ виконується нерівність

$$|x_\lambda(t) - y_\lambda(t)| \le Ne^{-\alpha(t-t_0)}\,|x_\lambda(t_0) - y_\lambda(t_0)|\,, \tag{3.5}$$

де сталі δ, N і α не залежать від t_0.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) $X(t,x)$ *визначена і задовольняє умову* (3.3) *та неперервно-диференційована при* $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$, *де* D*-область з простору* $\mathbb{R}^n$.
2) *Існує таке* $\mu_0 > 0$, *що система* (3.2) *має обмежений на* $\mathbb{T}_{\lambda_0}$, *рівномірно за* t_0 *експоненційно стійкий розв'язок* $x_{\lambda_0}(t)$, *що лежить в області* D *разом з деяким своїм* $\rho-$*околом.*

Тоді якщо виконуються нерівності

$$\mu_0\left(e^{C\left(\frac{\ln 4N}{\alpha}+\mu_0+1\right)}\left(C + \frac{C^2\left(\frac{\ln 4N}{\alpha}+\mu_0\right)}{4}\right) + 3C\right) \le \frac{\delta}{8}, \tag{3.6}$$

$$\mu_0\left(e^{C(\mu_0+1)}\left(C+\frac{C^2\mu_0}{4}\right)+3C\right)\le\frac{\rho}{2}, \tag{3.7}$$

$$\frac{3N\delta}{2}<\rho, \tag{3.8}$$

$$\mu_0\le\frac{\rho}{4C}, \tag{3.9}$$

де сталі δ, N і α визначені в Означенні 3.1 та C визначена в умові (3.3), *то при кожному μ_λ такому, що $\mu_\lambda<\mu_0$, система* (3.2) *має обмежений на $\mathbb{T}_\lambda$ розв'язок.*

Доведення. За умовою 2) даної Теореми, система (3.2) при $\mu_\lambda=\mu_0$ має експоненційно стійкий обмежений рівномірно за t_0 розв'язок x_{λ_0}, який разом зі своїм $\rho-$околом лежить в області D. Звідси, існує константа $C_0>0$

$$|x_{\lambda_0}(t)|\le C_0 \tag{3.10}$$

для будь-якого $t\in\mathbb{T}_{\lambda_0}$.

Нехай на часовій шкалі $\mathbb{T}_{\lambda_0}$, з функцією зернистості $\mu_0(t)$, $\mu_0:=\sup_{t\in\mathbb{T}_{\lambda_0}}\mu_0(t)$, t^* найменша точка така, що $t^*\ge\frac{\ln 4N}{\alpha}$, тобто $t^*=\inf\{t\in\mathbb{T}_{\lambda_0}|t\ge\frac{\ln 4N}{\alpha}\}$. Очевидно, що $t^*\le\frac{\ln 4N}{\alpha}+\mu_0$.

Оберемо $0<\mu_\lambda<\mu_0$ і зафіксуємо його. Позначимо розв'язки системи (3.2) на відповідній часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$ через x_λ.

Розглянемо точки $t\in[0,t^*]_{\mathbb{T}_\lambda}$. Тоді для кожної t можна вказати таку найменшу точку t_{λ_0} часової шкали $\mathbb{T}_{\lambda_0}$, що

$$0\le t_{\lambda_0}-t\le\mu_0, \tag{3.11}$$

Позначимо x_λ – розв'язок системи (3.2) такий, що $x_\lambda(0)=x_{\lambda_0}(0)$. Нехай $x(t)$ розв'язок системи (3.1) із початковими даними $x(0)=x_{\lambda_0}(0)$.

Доведемо, що даний розв'язок можна продовжити на інтервал $[0,t^*]$. Справді, з теореми Пікара випливає, що даний розв'язок можна продовжити праворуч на інтервал, довжина якого не менша за $\frac{\rho}{C}$. Звідси, в силу (3.9) розв'язок $x(t)$ визначений в точці $t=\mu_0\le\frac{\rho}{4C}<\frac{\rho}{C}$.

Отже за Лемою 2.1 та умовою (3.7) в даній точці виконується наступна нерівність

$$\left|x(\mu_0)-x_{\lambda_0}(\mu_0(0))\right|\le\mu_0\left(e^{C(\mu_0+1)}\left(C+\frac{C^2\mu_0}{4}\right)+3C\right)\le\frac{\rho}{2}. \tag{3.12}$$

Тоді, оскільки за умовою Теореми $x_{\lambda 0}$ разом зі своїм ρ-околом належить області D, то $x(\mu_0)$ лежить в області D разом з $\frac{\rho}{2}-$околом. Таким чином, розв'язок $x(t)$ продовжується від точки μ_0 вправо на інтервал не менший, ніж $\frac{\rho}{2C}$. Отже, він визначений в точці $2\mu_0$, аналогічно попередньому, в силу Леми 2.1 та умови (3.7) виконується нерівність

$$|x(2\mu_0) - x_{\lambda_0}(\mu_0(\mu_0(0)))| \leq \frac{\rho}{2}.$$

Продовжуючи аналогічно далі, можна впевнитися, що розв'язок $x(t)$ продовжується на весь інтервал $[0, t^*]$ і разом із $\frac{\rho}{2}-$околом лежить в області D.

Покажемо, що розв'язок x_λ системи (3.2) визначений при всіх t часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$, $t \leq t^*$, і лежить в області D. Дійсно, з Теореми про локальне існування та єдиність [25, с.322] випливає, що розв'язок можна продовжити на інтервал, не менший, ніж $\frac{\rho}{C}$. Звідси, в силу (3.9) і того, що $\mu_\lambda < \mu_0$ розв'язок x_λ визначений в $t = \mu_\lambda(0) < \frac{\rho}{C}$.

Тоді за Лемою 2.1 та умовою (3.7) в даній точці справедлива нерівність

$$|x_\lambda(\mu_\lambda(0)) - x(\mu_\lambda)| \leq \mu_\lambda \left(e^{C(\mu_\lambda+1)} \left(C + \frac{C^2\mu_\lambda}{4} \right) + 3C \right) \leq \frac{\rho}{2}. \tag{3.13}$$

Отже, $x_\lambda(\mu_\lambda(0))$ лежить в області D разом з $\frac{\rho}{2}-$околом. Тому розв'язок $x_\lambda(t)$ продовжується вправо від точки $\mu_\lambda(0)$ на інтервал не менший, ніж $\frac{\rho}{2C}$. Таким чином, він визначений в точці $\mu_\lambda(\mu_\lambda(0))$, аналогічно попередньому, в силу Леми 2.1 та умови (3.7) виконується нерівність

$$|x_\lambda(\mu_\lambda(\mu_\lambda(0))) - x(2\mu_\lambda)| \leq \frac{\rho}{2}.$$

Продовжуючи аналогічно далі, можна впевнитися, що розв'язок $x_\lambda(t)$ продовжується на весь інтервал $[0, t^*]_{\mathbb{T}_\lambda}$ і лежить в області D разом із $\frac{\rho}{2}-$околом.

Перейдемо до розгляду різниці $x_\lambda(t) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})$, де для кожної точки $t \in [0, t^*]_{\mathbb{T}_\lambda}$ значення $t_{\lambda_0} \in \mathbb{T}_{\lambda_0}$ обирається з урахуванням умови (3.11). Тоді матимемо

$$|x_\lambda(t) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \leq |x_\lambda(t) - x(t)| + |x(t) - x(t_{\lambda_0})| + |x(t_{\lambda_0}) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})|. \tag{3.14}$$

З Леми 2.1 та, враховуючи нерівність (3.6), отримаємо

$$|x_\lambda(t) - x(t)| \leq \frac{\delta}{8} \quad \text{і} \quad |x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0}) - x(t_{\lambda_0})| \leq \frac{\delta}{8} \tag{3.15}$$

В силу нерівностей (3.6) та (3.11), отримаємо наступну оцінку різниці $x(t)-x(t_{\lambda_0})$:

$$|x(t) - x(t_{\lambda_0})| \leq \int_{t}^{t_{\lambda_0}} |X(s, x(s))|\, ds \leq C\mu_0 < \frac{\delta}{8}. \tag{3.16}$$

З нерівностей (3.14)-(3.16) випливає, що наступні нерівності

$$|x_\lambda(t) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| < \frac{3\delta}{8} \tag{3.17}$$

і

$$|x_\lambda(t)| \leq |x_\lambda(t) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0}) + x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \leq \frac{3\delta}{8} + |x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \leq \frac{3\delta}{8} + C_0, \tag{3.18}$$

виконуються при всіх t часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ таких, що $0 \leq t \leq t^*$, де $t_{\lambda_0} \in \mathbb{T}_{\lambda_0}$ обрані з урахуванням умови (3.11).

Нехай t_1 – найбільша точка шкали $\mathbb{T}_\lambda$, що не перевищує t^*.

Перейдемо до інтервалу $[t^*, 2t^*]$. Розглянемо поведінку розв'язку x_λ при $t \in \mathbb{T}_\lambda$ таких, що $t_1 \leq t \leq 2t^*$.

Для цього розглянемо два розв'язки $x(t)$ і $y(t)$ системи (3.1) та розв'язок y_{λ_0} системи (3.2) на часовій шкалі $\mathbb{T}_{\lambda_0}$. Причому початкові умови x_λ, x, y та y_{λ_0} такі, що

$$x(t_1) = x_\lambda(t_1) = y(t^*) = y_{\lambda_0}(t^*). \tag{3.19}$$

Доведемо, що ці розв'язки визначені на відрізку $[t^*, 2t^*]$. В силу (3.17) з урахуванням рівності (3.19), отримаємо

$$|y_{\lambda_0}(t^*) - x_{\lambda_0}(t^*)| < \frac{3\delta}{8}, \quad |x(t_1) - x_{\lambda_0}(t^*)| < \frac{3\delta}{8}, \quad |y(t^*) - x_{\lambda_0}(t^*)| < \frac{3\delta}{8}. \tag{3.20}$$

Таким чином, з умови 2) даної Теореми та першої з нерівностей (3.20), розв'язок динамічного рівняння $y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})$ задовольняє нерівність

$$|y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0}) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \leq N\frac{3\delta}{8} < \frac{\rho}{4} \quad \text{при} \quad t_{\lambda_0} \geq t^*. \tag{3.21}$$

Звідки, даний розв'язок y_{λ_0} визначений для всіх $t_{\lambda_0} \geq t^*$ і разом зі своїм $\frac{\rho}{4}$–околомлежить в D.

Тепер дослідимо поведінку розв'язку $y(t)$ рівняння (3.1) такого, що

$$y(t^*) = x_\lambda(t_1). \tag{3.22}$$

З нерівності (3.8) і третьої нерівності (3.20) отримаємо, що значення $y(t^*)$ лежить в області D щонайменше зі своїм $\frac{\rho}{4}$−околом. Тоді, розв'язок $y(t)$ можна продовжити вправо на інтервал, довжина якого не менше за $\frac{\rho}{4C}$. Звідси і з нерівності (3.9), випливає його продовжуваність вправо на крок μ_0.

Отже, з Леми 2.1, в точці $t^* + \mu_0$ виконується нерівність

$$|y(t^* + \mu_0) - y_{\lambda_0}(t^* + \mu_0(t^*))| \le \frac{\rho}{2},$$

Таким чином, значення $y(t^* + \mu_0)$ належить області D разом зі своїм $\frac{\rho}{2}$−околом. Далі, міркуючи подібним чином, можна переконатись, що $y(t)$ продовжується на весь інтервал $[t^*, 2t^*]$.

Нарешті розглянемо розв'язок $x(t)$ системи (3.1) з початковими умовами $x(t_1) = x_\lambda(t_1)$. Очевидно, його можна продовжити до t^*. Тоді в даній точці матимемо

$$x(t^*) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t^*} X(s, x(s))ds, \tag{3.23}$$

звідки, враховуючи нерівність (3.8), випливає

$$|x(t^*) - x_{\lambda_0}(t^*)| \le |x(t_1) - x_{\lambda_0}(t^*)| + C\mu_0 \le \frac{3\delta}{8} + C\mu_0 \le \frac{\delta}{2} \le \frac{\rho}{3N} \le \frac{\rho}{3}. \tag{3.24}$$

Тоді, $x(t^*)$ лежить у області D щонайменше зі своїм $\frac{\rho}{3}$−околом і продовжується ще на крок μ_0.

Розглянемо розв'язок z_{λ_0} системи (3.2) на часовій шкалі $\mathbb{T}_{\lambda_0}$, що визначена функцією зернистості μ_0, з початковими даними $z_{\lambda_0}(t^*) = x(t^*)$.

В силу експоненціальної стійкості, враховуючи (3.24) і (3.8), матимемо

$$|z_{\lambda_0}(t_{\lambda_0}) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \le \frac{N\delta}{2} < \frac{\rho}{3} \quad \text{при} \quad t_{\lambda_0} \ge t^*. \tag{3.25}$$

Відповідно, z_{λ_0} лежить в області D разом зі своїм $\frac{2\rho}{3}$−околом.

З Леми 2.1 та умови (3.6) в точці $t^* + \mu_0$ отримаємо

$$|x(t^* + \mu_0) - z_{\lambda_0}(t^* + \mu_0(t^*))| \le \frac{\delta}{8} \le \frac{\rho}{12}. \tag{3.26}$$

Тоді, $x(t^* + \mu_0)$ разом зі своїм $\frac{7\rho}{12}$−околом належить області D . Таким чином, враховуючи (3.26), матимемо, що $x(t)$ продовжується на інтервал $[t^*, 2t^*]$ і разом зі своїм $\frac{7\rho}{12}$−околом лежить на ньому.

Покажемо, що розв'язок x_λ динамічної системи (3.2) визначений при всіх t часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$, $t \le 2t^*$, з початковими умовами (3.19) і лежить в області D.

Розглянемо розв'язок z системи диференціальних рівнянь (3.1) з початковими даними $z(t_1) = x(t_1)$.

З нерівностей (3.24) і (3.8) та експоненціальної стійкості розв'язку z, матимемо

$$|z(t_{\lambda_0}) - x(t_{\lambda_0})| \le \frac{N\delta}{2} < \frac{\rho}{3} \quad \text{при} \quad t_{\lambda_0} \ge t^*. \tag{3.27}$$

Отже, z_{λ_0} разом зі своїм $\frac{2\rho}{3}$−околом лежить в області D.

Враховуючи Лему 2.1 та умову (3.6), в $t^* + \mu_0$ отримаємо

$$|x(t^* + \mu_0) - z_{\lambda_0}(t^* + \mu_0(t^*))| \le \frac{\delta}{8} \le \frac{\rho}{12}. \tag{3.28}$$

Тоді, значення $x(t^* + \mu_0)$ лежить разом зі своїм $\frac{7\rho}{12}$−околом у області D. Таким чином, враховуючи нерівність (3.28), отримаємо, що розв'язок $x(t)$ продовжується на інтервал $[t^*, 2t^*]$ і разом зі своїм $\frac{7\rho}{12}$−околом лежить на ньому.

Тоді з нерівностей (2.5) і (3.6) отримаємо, що розв'язок x_λ динамічної системи визначений при всіх t часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$, $t \le 2t^*$ і лежить в області D.

Наступним кроком, для заданого значення t, $t_1 \le t \le 2t^*$, оберемо таке t_{λ_0}, що нерівність (3.11) виконується. Проведемо оцінку різниці $x_\lambda(t)$ і $x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})$, для кожного такого t. Отже,

$$|x_\lambda(t) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \le |y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0}) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| + |x_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})|. \tag{3.29}$$

Враховуючи експоненціальну стійкість розв'язку x_{λ_0}, отримаємо

$$|y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0}) - x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \le \frac{3N\delta}{8} \le \frac{\rho}{4} \tag{3.30}$$

коли $t_{\lambda_0} \in [\sigma_{\lambda_0}(t^*), \rho_{\lambda_0}(2t^*)]_{\mathbb{T}_{\lambda_0}}$, а якщо $t_{\lambda_0} = 2t^*$, то

$$|y_{\lambda_0}(2t^*) - x_{\lambda_0}(2t^*)| < \frac{\delta}{4}. \tag{3.31}$$

Оцінимо другий доданок (3.29):

$$\begin{aligned} |x_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| &\le |x_\lambda(t) - x(t)| + |x(t) - x(t_{\lambda_0})| + |x(t_{\lambda_0}) - y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \\ &\le \frac{\delta}{8} + \frac{\delta}{8} + |x(t) - y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})|. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Залишилось оцінити третій доданок нерівності (3.32). Отже, отримаємо

$$|x(t) - y(t_{\lambda_0})| \le |x(t) - x(t_{\lambda_0})| + |x(t_{\lambda_0}) - y(t_{\lambda_0})| \tag{3.33}$$

і

$$|x(t) - x(t_{\lambda_0})| = \int_{t}^{t_{\lambda_0}} |X(s, x(s))ds \le C\mu_0 < \frac{\delta}{8}. \tag{3.34}$$

Оцінимо другий доданок нерівності (3.33). З рівностей

$$y(t_{\lambda_0}) = y(t^*) + \int_{t^*}^{t_{\lambda_0}} X(s, y(s))ds \quad \text{і} \quad x(t_{\lambda_0}) = x(t^*) + \int_{t^*}^{t_{\lambda_0}} X(s, x(s))ds$$

отримаємо

$$|x(t_{\lambda_0}) - y(t_{\lambda_0})| \le |x(t^*) - y(t^*)| + \int_{t^*}^{t_{\lambda_0}} C|X(s) - Y(s)|ds.$$

Звідки та з нерівності Гронуолла випливає

$$|x(t_{\lambda_0}) - y(t_{\lambda_0})| \le |x(t^*) - y(t^*)|e^{C|t_{\lambda_0} - t^*|}. \tag{3.35}$$

В силу рівностей (3.23) і (3.18), з іншого боку випливає, що $|x(t^*) - y(t^*)| = |x(t^*) - x(t_1)| \le C\mu_0$. Звідки

$$|y(t_{\lambda_0}) - x(t_{\lambda_0})| \le C\mu_0 e^{Ct^*} \le \frac{\delta}{8}. \tag{3.36}$$

Таким чином, з нерівностей (3.33), (3.34) та (3.36) отримаємо

$$|x(t) - x(t_{\lambda_0})| \le \frac{\delta}{4}. \tag{3.37}$$

Враховуючи (3.32) отримаємо

$$|x_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \le \frac{\delta}{2}. \tag{3.38}$$

Отже, $|x_\lambda(t)| \le |x_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| + |y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \le \frac{\delta}{2} + |y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})|$. Проте, враховуючи умови (3.30) і (3.10), маємо $|y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \le |x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0}) - y_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| + |x_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})| \le \frac{3\delta}{8} + C_0$, звідки отримаємо нерівність

$$|x_\lambda(t)| \le \frac{\delta}{2} + \frac{3\delta}{8} + C_0, \tag{3.39}$$

при всіх $t \in [t_1, 2t^*]$.

Нехай t_2 – найбільша точка часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$, що не перевищує $2t^*$.

З нерівностей (3.29), (3.31) і (3.38) тоді випливає, що

$$|x_\lambda(t_2) - x_{\lambda_0}(2t^*)| \leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \frac{3\delta}{4}. \tag{3.40}$$

Звідки випливає, що при всіх t часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ таких, що $t_1 \leq t \leq t_2$, розв'язок x_λ задовольняє нерівність (3.39), а в точці t_2 потрапляє в $\frac{3\delta}{4}$–окіл точки $x_{\lambda_0}(2t^*)$.

Аналогічним чином, для таких t отримаємо нерівність $t_2 \leq t \leq 3t^*$. У висновку, отримаємо, що $|x_\lambda(t)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{3N\delta}{2} + C_0$.

Як і раніше, позначимо t_3 – найбільша точку часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$, що не перевищує $3t^*$. Тоді отримаємо $|x_\lambda(t_3) - x_{\lambda_0}(3t^*)| < \frac{3\delta}{4}$.

Аналогічно продовжуючи далі, будемо мати, що розв'язок $x_\lambda(t)$ визначений для всіх невід'ємних t і обмежений на додатній півосі часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$.

Тепер побудуємо розв'язок динамічної системи (3.2), який обмежений на всій осі часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$.

Позначимо через $x_\lambda(t, t^*)$ такий розв'язок динамічного рівняння (3.2), що починається в точці t^* часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$, $t \geq t^*$, причому $x_\lambda(t^*, t^*) = x_\lambda(t^*)$.

Для кожної точки t^* оберемо найменшу невід'ємну точку $\tilde{t}_{\lambda_0}$ часової шкали $\mathbb{T}_{\lambda_0}$, що

$$t^* \leq \tilde{t}_{\lambda_0} \leq t^* + \mu_0. \tag{3.41}$$

Далі розглянемо розв'язок $x_\lambda(t, t^*)$, що задовольняє нерівність

$$|x_\lambda(t^*, t^*) - x_{\lambda_0}(\tilde{t}_{\lambda_0})| \leq \frac{3\delta}{4}, \tag{3.42}$$

де x_{λ_0} – обмежений розв'язок динамічної системи (3.2) на часовій шкалі $\mathbb{T}_{\lambda_0}$ з функцією зернистості $\mu_\lambda = \mu_0$, який визначається в умовах Теореми.

З отриманих вище результатів випливає, що всі розв'язки $x_\lambda(t, t^*)$ мають такі властивості:

1°) розв'язки $x_\lambda(t, t^*)$ визначені при $t \geq t^*$;

2°) якщо $t \geq t^*$, то $x_\lambda(t, t^*)$ задовольняють нерівність

$$|x_\lambda(t, t^*)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{3N\delta}{4} + C_0; \tag{3.43}$$

3°) має місце нерівність

$$|x_\lambda(t_1, t^*) - x_{\lambda_0}(\tilde{t}_{\lambda_0} + t^*)| \leq \frac{3\delta}{4}, \tag{3.44}$$

де t_1 – найбільше таке t, що $(t_1+t^*) \le \tilde{t}_{\lambda_0}+t^*$, а t^* вибране з умови $t^* \ge \frac{\ln 4N}{\alpha}$.

Розіб'ємо ліву піввісь часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ на інтервали виду $[-nt^*, -(n+1)t^*]_{\mathbb{T}_\lambda}$, де $n \in \mathbb{N}$. Для кожної точки $-nt^*$ оберемо таке найбільше t_n часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$, що

$$t_n \le -nt^* \le t_n + \mu_0. \tag{3.45}$$

Точка t_0 обирається аналогічним чином.

Lfks розглянемо множину розв'язків $x_\lambda(t, t_n)$ системи (3.2), початкові дані яких задовольняють нерівність

$$|x_\lambda(t_n, t_n) - x_{\lambda_0}(-nt^*)| \le \frac{3\delta}{4}. \tag{3.46}$$

Цілком очевидно, що ці розв'язки відповідають умовам 1°)-3°).

Позначимо через S_n множину значень цих розв'язків в точці t_1. Кожна множина S_n за побудовою є образом кулі з центром в точці $x_{\lambda_0}(-nt^*)$ радіуса $\frac{3\delta}{4}$, що породжений відображенням $x_\lambda(t_n, t_n)$. З Леми (2.2), кожна з множин S_n є компактною. Отже, множини задовольняють умови:

1) для довільного $n \in \mathbb{N}$ $S_n \ne \emptyset$;
2) для довільного $n \in \mathbb{N}$ S_n - замкнена;
3) $S_n \subset S_{n-1}$ – за побудовою S_n і в наслідок умов 1°)-3°).

Нехай $z = \bigcap_n S_n$, тоді розглянемо розв'язок $x_\lambda(t, t_1)$ рівняння (3.2) з початковими даними $x_\lambda(t_1, t_1) = z$. Відповідно до побудови, даний розв'язок можна продовжити вліво до точок t_n, в яких він потрапляє до $\frac{3\delta}{4}$-околу точки $x_{\lambda_0}(t_n)$ для кожного натурального n.

Таким чином, даний розв'язок є визначеним при всіх t, що задовольняють нерівність (3.44). Крім того, він обмежений. Звідси випливає, що система (3.2) має обмежений розв'язок, визначений на $\mathbb{T}_\lambda$.

Зауважимо, що наведені раніше міркування для системи (3.2) з початковими умовами в точці $t_0 = 0$ можна провести для цієї системи динамічних рівнянь з початковими умовами у будь-якій фіксованій точці t_0. Усі отримані оцінки при цьому залишатимуться незалежними від t_0, що випливає з умови 2) даної Теореми і рівномірної по t_0 оцінки (2.5).

Отже, міркуючи подібним чином, для кожного $t_0 \in [0, \mu_\lambda]$ можна побудувати розв'язок (3.2), який є обмеженим на $\mathbb{T}_\lambda$. □

Тепер розглянемо умови існування розв'язку динамічної системи (3.2), обмеженого на $\mathbb{T}_\lambda$, за умови існування обмеженого розв'язку відповідної системи диференціальних рівнянь (3.1).

Теорема 3.2. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) *функція $X(t,x)$ визначена і неперервно-диференційовна при $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$, де D – область в $\mathbb{R}^n$, та задовольняє умову* (3.3).
2) *система* (3.1) *має обмежений на $\mathbb{R}$, рівномірно по $t_0 \in \mathbb{R}$ експоненційно стійкий розв'язок $x(t)$, який лежить в D разом з деяким $\rho-$околом, тобто існують $\delta > 0$, $N > 0$ і $\alpha > 0$ незалежні від t_0, такі, що для будь-якого розв'язку $y(t)$ системи* (3.1) *такого, що*
$$|x(t_0) - y(t_0)| < \delta, \tag{3.47}$$
при $t \geq t_0$ має місце нерівність
$$|x(t) - y(t)| \leq N e^{-\alpha(t-t_0)} \left| x(t_0) - y(t_0) \right|. \tag{3.48}$$

Тоді, якщо виконуються нерівності
$$\mu_0 \left(e^{C\left(\frac{\ln 4N}{\alpha} + \mu_0 + 1\right)} \left(C + \frac{C^2 \left(\frac{\ln 4N}{\alpha} + \mu_0 \right)}{4} \right) + 3C \right) \leq \frac{\delta}{8}, \tag{3.49}$$
$$\mu_0 \left(e^{C(\mu_0+1)} \left(C + \frac{C^2 \mu_0}{4} \right) + 3C \right) \leq \frac{\rho}{2}, \tag{3.50}$$
$$\frac{3N\delta}{2} < \rho, \tag{3.51}$$
$$\mu_0 \leq \frac{\rho}{4C}, \tag{3.52}$$
де C визначена в умові (3.3), *то при кожному μ_λ такому, що $\mu_\lambda < \mu_0$, система* (3.2) *має обмежений на $\mathbb{T}_\lambda$ розв'язок $x_\lambda(t)$. При цьому справедливе відношення*
$$\sup_{t \in \mathbb{T}_\lambda} |x_\lambda(t) - x(t)| \to 0, \quad \mu_\lambda \to 0. \tag{3.53}$$

Доведення. З умови 2) даної Теореми випливає, що система диференціальних рівнянь (3.1) має експоненційно стійкий обмежений рівномірно за t_0 розв'язок x, який лежить в області D разом зі своїм $\rho-$околом. Отже, існує стала $C_1 > 0$
$$|x(t)| \leq C_1 \tag{3.54}$$

для довільного $t \in \mathbb{R}$.

Оберемо $0 < \mu_\lambda < \mu_0$ і зафіксуємо його. Нехай x_λ – розв'язок системи динамічних рівнянь (3.2) на відповідній часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$ такий, що $x_\lambda(0) = x(0)$.

Нехай точка t^* така, що $t^* = \frac{\ln 4N}{\alpha}$. Позначимо через t_1 найменшу точку шкали $\mathbb{T}_\lambda$, що більше за t^*. Тоді $t_1 < \frac{ln4N}{\alpha} + \mu_\lambda$.

Покажемо, що розв'язок x_λ системи динамічних рівнянь (3.2) можна продовжити на інтервал $[0, t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}$. Справді, з Теореми про локальне існування та єдиність [25, с.322] випливає, що розв'язок можна продовжити на інтервал довжиною не менше за $\frac{\rho}{C}$. Отже, враховуючи умову (3.52) і оскільки $\mu_\lambda < \mu_0$, отримаємо, що розв'язок $x_\lambda(t)$ визначений в $t = \mu_\lambda(0) < \frac{\rho}{4C}$.

Звідси, з Леми 2.1 та умови (3.50), отримаємо

$$|x_\lambda(\mu_\lambda(0)) - x(\mu_\lambda)| \le \mu_\lambda \left(e^{C(\mu_\lambda+1)} \left(C + \frac{C^2 \mu_\lambda}{4} \right) + 3C \right) \le \frac{\rho}{2}. \tag{3.55}$$

Таким чином, оскільки за умовою Теореми x лежить в області D разом зі своїм ρ-околом, то $x_\lambda(\mu_\lambda(0))$ лежить разом з $\frac{\rho}{2}$-околом в області D. Тому розв'язок $x_\lambda(t)$ продовжується вправо від точки $\mu_\lambda(0)$ на інтервал не менший, ніж $\frac{\rho}{2C}$. Отже, він визначений у точці $\mu_\lambda(\mu_\lambda(0))$, і, аналогічно попередньому, в силу Леми 2.1 та умови (3.50) виконується нерівність

$$|x_\lambda(\mu_\lambda(\mu_\lambda(0))) - x(2\mu_\lambda)| \le \frac{\rho}{2}. \tag{3.56}$$

Повторюючи цей процес можна пересвідчитись, що розв'язок $x_\lambda(t)$ динамічної системи продовжується на весь інтервал $[0, t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}$ і разом з $\frac{\rho}{2}$-околом лежить в області D.

Далі розглянемо різницю $x_\lambda(t_\lambda) - x(t)$, коли для кожної точки t_λ з інтервалу $[0, t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}$ виконується нерівність

$$0 < t_\lambda - t < \mu_\lambda. \tag{3.57}$$

Тоді матимемо

$$|x_\lambda(t_\lambda) - x(t)| \le |x_\lambda(t_\lambda) - x(t_\lambda)| + |x(t_\lambda) - x(t)|. \tag{3.58}$$

Оскільки $t_1 < \frac{\ln 4N}{\alpha} + \mu_\lambda$ та $\mu_\lambda < \mu_0$, в силу умови (3.49) та Леми 2.1 виконується

$$|x_\lambda(t_\lambda) - x(t_\lambda)| \le \mu_\lambda \left(e^{C(t^*+1)} \left(C + \frac{C^2 t^*}{4} \right) + 3C \right) <$$

$$< \mu_0 \left(e^{C\left(\frac{\ln 4N}{\alpha}+\mu_0+1\right)} \left(C + \frac{C^2 \left(\frac{\ln 4N}{\alpha} + \mu_0\right)}{4} \right) + 3C \right) \le \frac{\delta}{8} \quad \text{при } t \in [0, t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}. \quad (3.59)$$

Для різниці $x(t_\lambda) - x(t)$, з урахуванням умови (3.57), матимемо оцінку

$$|x(t_\lambda) - x(t)| \le \int\limits_t^{t_\lambda} |X(s, x(s))|\, ds \le C_1 \mu_\lambda < \frac{\delta}{8}. \quad (3.60)$$

Отже, з (3.58)-(3.60), отримаємо

$$|x_\lambda(t_\lambda) - x(t)| \le \frac{\delta}{8} + \frac{\delta}{8} \le \frac{\delta}{4} \quad (3.61)$$

і

$$|x_\lambda(t_\lambda)| \le |x_\lambda(t_\lambda) - x(t) + x(t)| \le \frac{\delta}{4} + |x(t)| \le \frac{\delta}{4} + C_1, \quad (3.62)$$

що виконуються при всіх t на інтервалі $[0, t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}$.

Розглянемо інтервал $[t_1, t_1 + t^*]$. Позначимо через t_2 найменшу точку шкали $\mathbb{T}_\lambda$, що більше за $t_1 + t^*$. Тоді $t_2 < \frac{ln4N}{\alpha} + \mu_\lambda$. Дослідимо поведінку розв'язку x_λ при t_λ з часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ таких, що $t_1 \le t_\lambda \le t_2$.

Розглянемо z – розв'язок системи диференціальних рівнянь (3.1) з початковими даними $z(t_1) = x_\lambda(t_1)$. Тоді з нерівності (3.61) випливає

$$|z(t_1) - x(t^*)| < \frac{\delta}{4}. \quad (3.63)$$

Оцінимо різницю між $x(t)$ та $x_\lambda(t_\lambda)$.

$$|x_\lambda(t_\lambda) - x(t)| \le |x_\lambda(t_\lambda) - x(t_\lambda)| + |x(t_\lambda) - x(t)| \quad (3.64)$$

Проведенемо оцінку першого доданку

$$|x_\lambda(t_\lambda) - x(t_\lambda)| \le |x_\lambda(t_\lambda) - z(t_\lambda)| + |z(t_\lambda) - x(t_\lambda)|. \quad (3.65)$$

З Леми 2.1 з урахуванням умови (3.49) отримаємо

$$|x_\lambda(t_\lambda) - z(t_\lambda)| \le \frac{\delta}{8} \quad \text{при } t_\lambda \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}_\lambda}. \quad (3.66)$$

Оцінимо другий доданок нерівності (3.65). Для цього проведемо оцінку значення різниці $z(t_1)$ та $x(t_1)$ з урахуванням нерівностей (3.63), (3.60). Тоді маємо

$$|z(t_1) - x(t_1)| \le |z(t_1) - x(t^*)| + |x(t^*) - x(t_1)| \le \frac{3\delta}{8} \quad (3.67)$$

Тоді з експоненціальної стійкості випливає

$$|x(t) - z(t)| \le \frac{3N\delta}{8} \tag{3.68}$$

коли $t_1 \le t < t_2$, а якщо $t = t_2$, то матимемо

$$|x(t_2) - z(t_2)| < \frac{\delta}{4}. \tag{3.69}$$

Отже, з нерівності (3.65) отримаємо

$$|x_\lambda(t_\lambda) - x(t_\lambda)| \le \frac{\delta}{8} + \frac{3N\delta}{8} \tag{3.70}$$

Зважаючи на умову (3.57), отримаємо наступну оцінку різниці $x(t_\lambda) - x(t)$:

$$|x(t_\lambda) - x(t)| \le \int\limits_t^{t_\lambda} |X(s, x(s))|\, ds \le C_1\mu_\lambda < \frac{\delta}{8}. \tag{3.71}$$

З нерівностей (3.70) і (3.71) та враховуючи оцінку (3.64), матимемо

$$|x_\lambda(t_\lambda) - x(t)| \le \frac{\delta}{4} + \frac{3N\delta}{8}, \tag{3.72}$$

звідки та (3.54) отримаємо

$$|x_\lambda(t)| \le |x_\lambda(t) - x(t)| + |x(t)| \le \frac{\delta}{4} + \frac{3N\delta}{8} + C_1 \tag{3.73}$$

для всіх t таких, що $t_1 \le t \le t_2$.

Таким чином, з нерівностей (3.65) та (3.69), (3.71), випливає

$$|x_\lambda(t_2) - x(t_1 + t^*)| \le \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} \le \frac{\delta}{2}. \tag{3.74}$$

Отже, розв'язок x_λ задовольняє нерівність (3.73) при всіх t часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$, а при t_2 потрапляє в $\frac{\delta}{2}$-окіл точки $x(t_1 + t^*)$.

Міркуючи аналогічно, позначимо через t_3 найменшу точку шкали $\mathbb{T}_\lambda$, що більше за $t_2 + t^*$. Тоді для таких t, що

$$t_2 \le t \le t_3, \tag{3.75}$$

в результаті отримаємо

$$|x_\lambda(t)| \le \frac{\delta}{4} + \frac{3N\delta}{8} + C_1 \tag{3.76}$$

і $|x_\lambda(t_3) - x(t_2 + t^*)| \le \frac{\delta}{2}$.

Таким чином продовжуючи далі отримаємо, що розв'язок $x_\lambda(t)$ визначений для всіх невід'ємних t і обмежений на додатній півосі $\mathbb{T}_\lambda$.

Доведення існування обмеженого на всій $\mathbb{T}_\lambda$ розв'язку z_λ системи (3.2) з початковими даними в точці $t_0 = 0$, можна провести аналогічним способом як в Теоремі 3.1.

Не важко показати, що для кожного розв'язку z_λ має місце оцінка

$$|z_\lambda(t) - x(t)| \le \varepsilon, \quad \text{при } t \in \mathbb{T}_\lambda \tag{3.77}$$

Далі оберемо $0 < \varepsilon \le \frac{\rho}{4}$ і $\delta = \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ з умови (3.47). Звідки для всіх μ_λ таких, що задовольняють нерівність (3.49), буде виконуватись неірвність (3.77), звідки випливатиме оцінка (3.53), де супремум взятий по $t \in \mathbb{T}_\lambda$.

Подібно до Теореми (3.1), всі міркування для системи динамічних рівнянь (3.2) з початковими даними у точці $t_0 = 0$ можна застосувати і для довільного фіксованого t_0. Усі отримані оцінки при цьому залишатимуться незалежними від початкової точки t_0, що випливає з умови 2) Теореми (3.2) і рівномірності за t_0 оцінки (2.5).

Провівши для кожного $t_0 \in [0, \mu_\lambda]$ наведені раніше міркування, завершимо доведення даної Теореми. $\square$

3.2 Зв'язок між глобально обмеженими розв'язками систем диференціальних та динамічних рівнянь

Дана частина присвячена дослідженню умов, при яких система диференціальних рівнянь (3.1) має обмежений на всій осі розв'язок. Тобто, розглянемо задачу обернену до розглянутої в попередньому підрозділі 3.1.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (3.1) та систему динамічних рівнянь (3.2) на часових шкалах, для яких виконуються умови вказані в підрозділі 3.1.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) *функція* $X(t,x)$ *задовольняє умови 1) Теореми 3.1;*
2) *існує* $\mu_0 > 0$*, що система* (3.2) *з початковими даними в точці* $t_0 = 0$ *має обмежений на* $\mathbb{T}_{\lambda_0}$*, рівномірно за* t_0 *експоненціально стійкий розв'язок, який лежить в області* D *разом з деяким своїм* $\rho-$*околом.*

Тоді, якщо виконуються нерівності (3.6)-(3.9)*, то система* (3.1) *має обмежений на* $\mathbb{R}$ *розв'язок.*

Доведення. Доведення цієї теореми ґрунтується на міркуваннях поданих в доведенні Теореми 3.1.

Розглянемо основні моменти.

Позначимо через x_{λ_0} експоненційно стійкий розв'язок динамічної системи (3.2) з початковими даними в точці $t_0 = 0$ на часовій шкалі $\mathbb{T}_{\lambda_0}$, який визначений і обмежений на ній. Згідно Означення 3.1 та Леми 2.1, подібно до доведення Теореми 3.1, можна показати, що всі розв'язки системи диференціальних рівнянь (3.1), які беруть початок у точці nt^*, де $n \in \mathbb{Z}$, із $\frac{\delta}{2}-$околу $x_{\lambda_0}(nt^*)$ лежать в D при $t \in [nt^*, (n+1)t^*]$. Більше того, вони належать $\frac{\delta}{2}-$околу $x_{\lambda_0}((n+1)t^*)$. Це означає, що $x(t)$ продовжується на піввісь $[nt^*, +\infty)$. Крім цього, з виразу $x(t) = x(nt^*) + \int_{nt^*}^{t} X(s, x(s))ds$ випливає рівномірну оцінку

$$|x(t)| \le C_0 + \frac{\delta}{2} + Ct^*, \tag{3.78}$$

при $t \in [nt_{k_0,(n+1)}, t^*]$ і сталій C_0, що визначається в умові (3.10).

Далі розіб'ємо ліву піввісь точками вигляду $-mt^*$, $m \in \mathbb{N}$. Позначимо через S_m множину значень розв'язків системи диференціальних рівнянь(3.1), що починаються в точці $t = -mt^*$ із $\frac{\delta}{2}-$околу x_{λ_0} при $t = 0$. Міркуваннями подібними до наведених в доведенні Теореми 3.1, неважко пересвідчитись, що $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} S_m \neq \emptyset$. Тоді розв'язок $x(t)$ системи (3.1) з початковими даними $x(0) = z_0$, де $z_0 \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} S_m$, обмежений і визначеним на $\mathbb{R}$. Теорема доведена. □

Наведемо приклад, який ілюструє отримані результати.

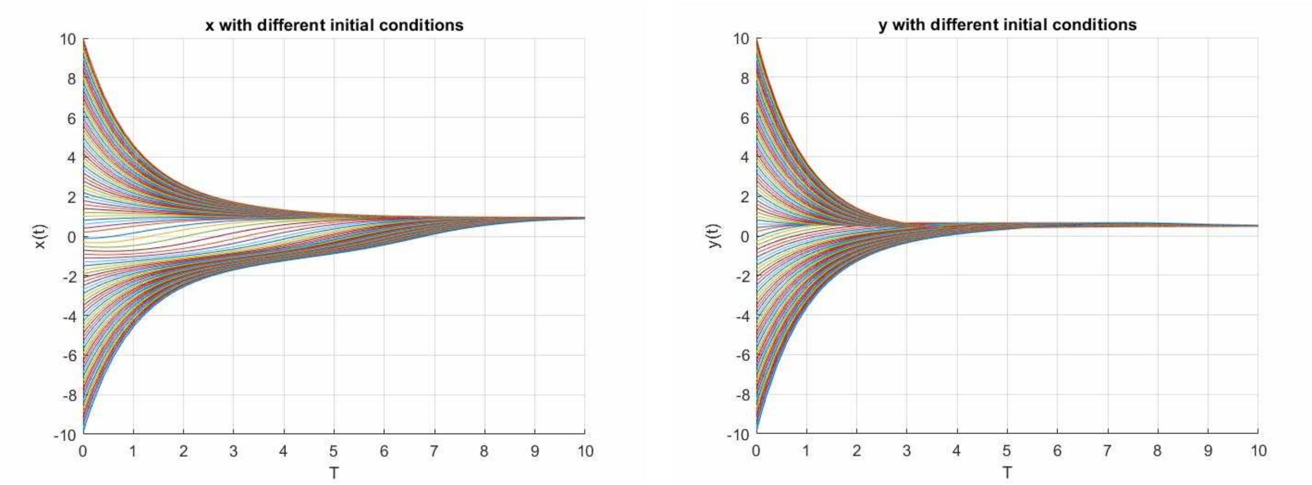
Приклад. Розглянемо у ролі (3.1) систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + arctg(x+y), \\ \frac{dy}{dt} = -y + \frac{1}{1+x^2+y^2}. \end{cases} \tag{3.79}$$

Функції $f_1(t, x, y) = \operatorname{arctg}(x+y)$ та $f_2(t, x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ визначені на $\mathbb{R}^3$, належать класу $C^1(\mathbb{R}^3)$ і обмежені там разом зі своїми частинними похідними деякою сталою $C > 0$. Побудуємо розв'язки системи (3.1) з початковими даними

$$\begin{cases} x_n(0) = (-1)^n \frac{n}{10}, \\ y_n(0) = (-1)^n \frac{n}{10}. \end{cases} \tag{3.80}$$

Дана система має обмежений на $\mathbb{R}$, рівномірно по t_0 експоненціально стійкий розв'язок, що і видно на Рисунку 3.1.



(а) $x(t)$ (б) $y(t)$

Рис. 3.1. Графіки розв'язків системи (3.79) з початковими даними (3.80)

Тепер розглянемо розв'язок наступної системи динамічних рівнянь:

$$\begin{cases} x_\lambda^\Delta(t) = -x_\lambda(t) + \operatorname{arctg}(x_\lambda(t) + y_\lambda(t)), \\ y_\lambda^\Delta(t) = -y_\lambda(t) + \frac{1}{1+x_\lambda^2(t)+y_\lambda^2(t)}, \end{cases} \tag{3.81}$$

на множині часових шкал $\mathbb{T}_\lambda = h\mathbb{Z}$. Зауважимо, що функція зернистості даної шкали є сталою і $\mu_\lambda = h$.

Тоді система (3.81) набуває вигляду:

$$\begin{cases} x_{k+1}^h = x_k^h - hx_k^h + h \operatorname{arctg}(x_k^h + y_k^h), \\ y_{k+1}^h = y_k^h - hy_k^h + \frac{h}{1+(x_k^h)^2+(y_k^h)^2}, \end{cases} \tag{3.82}$$

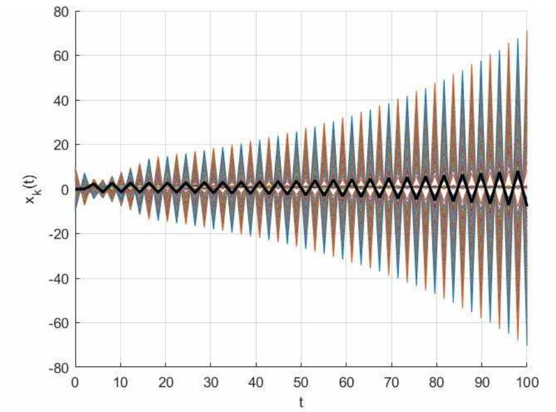
де $h > 0$ крок різницевого рівняння на $[0, 100]$, $kh = t_k \in \mathbb{T}_\lambda = h\mathbb{Z}$, $x_k^h = x_\lambda(t_k)$.

Позначимо через $x_{k,n}^h$ розв'язки системи (3.82) з початковими даними:

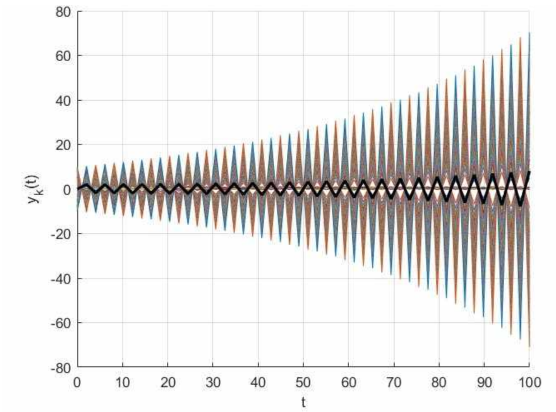
$$\begin{cases} x_{0,n}^h = x_n(0) = (-1)^n \frac{n}{10}, \\ y_{0,n}^h = y_n(0) = (-1)^n \frac{n}{10}, \end{cases} \tag{3.83}$$

де $n = 1, \ldots, 100$, та побудуємо розв'язки системи (3.82) з початковими даними (3.83) на проміжку $[0, 100]$.

При величині кроку $h > 2$ розв'язки системи необмежені як можна побачити на Рисунку 3.2, проте при $h \leq 2$ вони стають обмеженими (див. 3.3, 3.4 та 3.5).

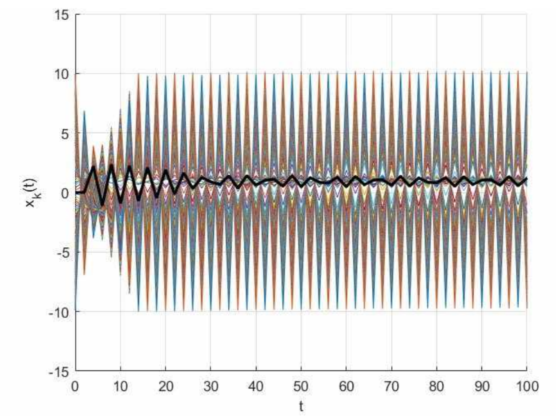


(а) $x_{k,n}^h$

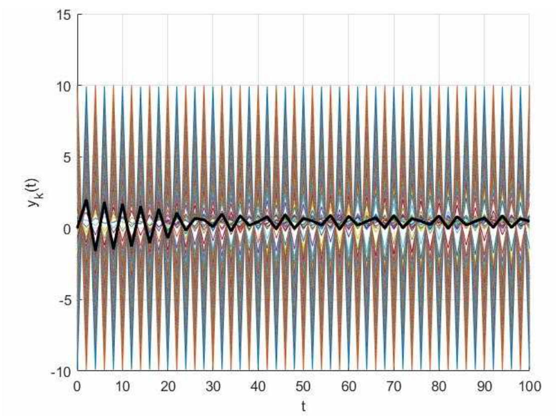


(б) $y_{k,n}^h$

Рис. 3.2. Графіки розв'язків системи (3.82) при $h = \frac{100}{49}$ з початковими даними (3.83)

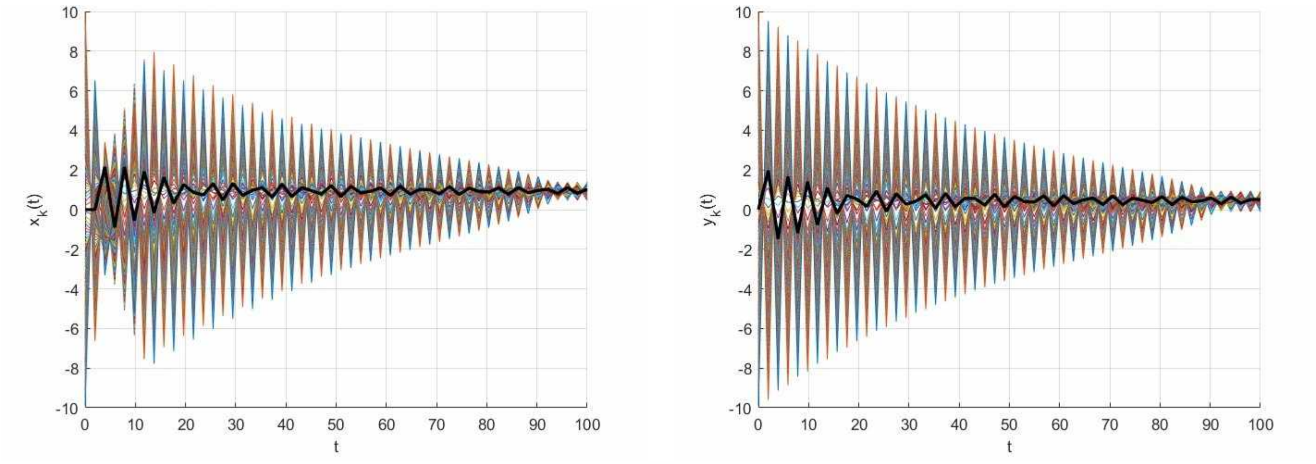


(а) $x_{k,n}^h$



(б) $y_{k,n}^h$

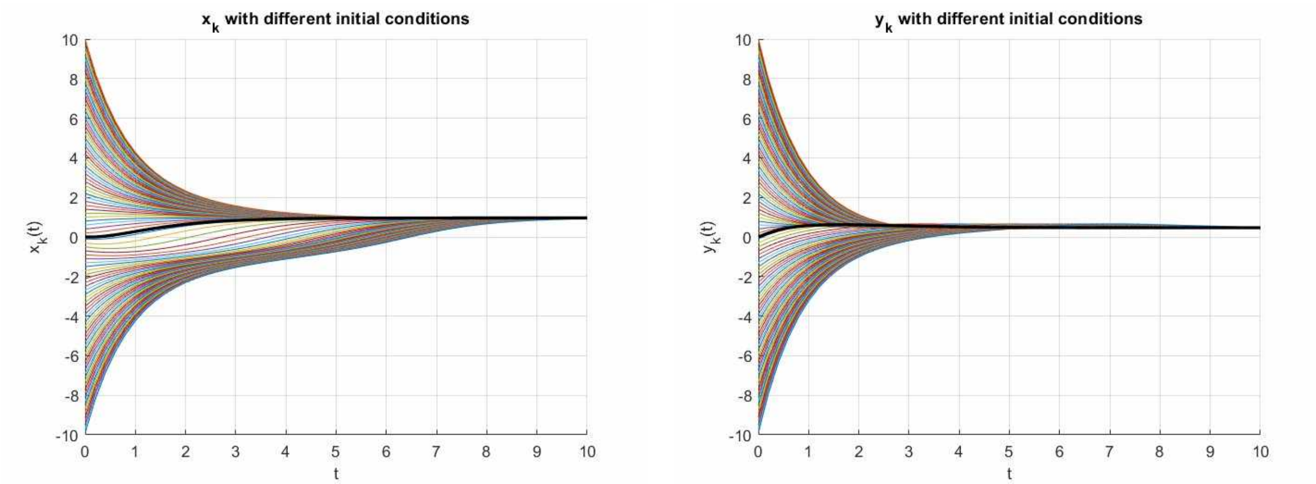
Рис. 3.3. Графіки розв'язків системи (3.82) при $h = 2$ з початковими даними (3.83)



(а) $x_{k,n}^h$ (б) $y_{k,n}^h$

Рис. 3.4. Графіки розв'язків системи (3.82) при $h = \frac{100}{51}$ з початковими даними (3.83)

А при $h \to 0$ збігаються до розв'язків системи диференціальних рівнянь (3.1) (див. Рисунок 3.2-3.4). При значеннях $h \leq \frac{1}{2}$ модуль різниці відповідних розв'язків диференціального та динамічного рівнянь не перевищує $4.5 \cdot 10^{-3}$.



(а) $x_{k,n}^h$ (б) $y_{k,n}^h$

Рис. 3.5. Графіки розв'язків системи (3.82) при $h = \frac{1}{2}$ з початковими даними (3.83)

3.3 Висновки до Розділу 3

У цьому розділі вивчено властивість обмеженості розв'язків динамічних рівнянь на сім'ї часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$ за припущення, що праві частини системи неперервно диференційовні та обмежені разом зі своїми частинними похідними. Отримано наступні результати:

- Встановлено умови, за яких з існування обмеженого експоненціально стійкого розв'язку системи динамічних рівнянь на деякій часовій шкалі випливає існування обмеженого розв'язку даної системи на всіх більш щільних часових шкалах.
- Встановлено умови, за яких з існування обмеженого експоненціально стійкого розв'язку системи диференціальних рівнянь випливає існування обмеженого розв'язку відповідної динамічної системи на часових шкалах.
- Отримана явна оцінка малості функції зернистості(кроку), яка гарантує збереження глобальних обмежених розв'язків при переході від диференціальних до динамічних рівнянь та навпаки.
- Встановлено взаємозв'язок між існуванням обмеженого розв'язку системи динамічних рівнянь на часовій шкалі та наявністю обмеженого на всій осі розв'язку системи диференціальних рівнянь.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [118] (переклад англ. – [94]), [43, 115, 117].

Розділ 4

ДИСИПАТИВНІСТЬ СИСТЕМ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ НА ЧАСОВИХ ШКАЛАХ

Цей розділ присвячений дослідженню властивостей дисипативності систем диференціальних рівнянь на часових шкалах. Отримано результат, який показує, за яких умов дисипативність системи диференціальних рівнянь на часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$ випливає з дисипативності вихідної системи диференціальних рівнянь на $\mathbb{R}$.

Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$. Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \tag{4.1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$, та відповідну систему динамічних рівнянь на сім'ї часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$:

$$x_\lambda^\Delta = X(t, x_\lambda), \tag{4.2}$$

де $t \in \mathbb{T}_\lambda$, $x_\lambda : \mathbb{T}_\lambda \to \mathbb{R}^n$, і $x_\lambda^\Delta(t)$ – Δ-похідна функції $x_\lambda(t)$ на $\mathbb{T}_\lambda$. Припустимо, $\inf \mathbb{T}_\lambda = -\infty$, $\sup \mathbb{T}_\lambda = \infty$, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$, і $\lambda = 0$ – гранична точка Λ, а точка $t = 0$ лежить в $\mathbb{T}_\lambda$ при всіх $\lambda \in \Lambda$.

Також припустимо, що функція $X(t, x)$ визначена при всіх $t \geq 0$, $x \in D$, неперервна по t та x і обмежена разом зі своїми частинними похідними по t та x в кожній обмеженій області з $\{t \geq 0\} \times D$, тобто для кожного $M > 0$ існує число $L(M)$ таке, що

$$|X(t, x)| + \left|\frac{\partial X(t, x)}{\partial t}\right| + \left\|\frac{\partial X(t, x)}{\partial x}\right\| \leq L(M), \tag{4.3}$$

якщо $t \leq M$ і $\|x\| \leq M$. Тут $|\cdot|$ – евклідова норма на $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ – норма матриці представлена векторною нормою. З нерівності (4.3) випливає, що існують локально інтегровні функції $M_R(t)$ та $B_R(t)$ такі, що

$$|X(t,x)| \leq M_R(t), \tag{4.4}$$

$$|X(t,x_1) - X(t,x_2)| \leq B_R(t)|x_2 - x_1| \tag{4.5}$$

при $x, x_i \in U_R$. Тут і далі через U_R позначено множину точок x, що $|x| \leq R$.

Покладемо $\mu_\lambda := \sup_{t\in\mathbb{T}_\lambda} \mu_\lambda(t)$, де $\mu_\lambda(t) : \mathbb{T}_\lambda \to [0,\infty)$ – функція зернистості. Якщо $\mu_\lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$, тоді $\mathbb{T}_\lambda$ збігається з неперервною шкалою часу $\mathbb{T}_0 = \mathbb{R}$, а система (4.2) переходить в систему (4.1). Тому природно сподіватись, що за певних умов з дисипативності системи диференціальних рівнянь (4.1) випливає дисипативність відповідної системи динамічних рівнянь (4.2) на часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$.

Дисипативність системи диференціальних рівнянь (4.1) будемо розуміти у сенсі наступного означення.

Означення 4.1. [104] Систему (4.1) будемо називати дисипативною по $t \geq t_0$, якщо існує число $R > 0$ таке, що для довільного $r > 0$ існує $T = T(r, t_0)$ таке, що розв'язок $x(t; t_0, x_0)$ системи (4.1) з початковими умовами (t_0, x_0),

$$|x_0| < r, \tag{4.6}$$

при $t \geq t_0 + T$ задовольняє нерівність

$$|x(t, t_0, x_0)\| < R.$$

Означення 4.2. [104] Систему (4.1) називатимемо рівномірно дисипативною по t_0, якщо в Означенні 4.1, T не залежить від t_0.

Дисипативність системи динамічних рівнянь (4.2) визначимо аналогічним чином.

Означення 4.3. Систему (4.2) будемо називати дисипативною по $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}_\lambda}$, $t_0 \in \mathbb{T}_\lambda$, якщо існує число $R(\lambda) > 0$ таке, що для довільного $r > 0$ існує $T = T(r, t_0, \lambda)$ для якого розв'язок $x_\lambda(t, t_0, x_0)$ системи (4.2) з початковими умовами (t_0, x_0),

$$|x_0| < r, \tag{4.7}$$

при $t \geq t_0 + T$ задовольняє нерівність

$$|x_\lambda(t, t_0, x_0)| < R.$$

Означення 4.4. Систему (4.2) називатимемо рівномірно дисипативною по $t_0 \in \mathbb{T}_\lambda$ і $\lambda \leq \lambda_0$, якщо в Означенні 4.3, R та T не залежать від t_0 та λ.

4.1 Допоміжні твердження

Для дослідження умов дисипативності системи (4.2) необхідна наступна лема.

Лема 4.1. *Нехай $t_0 \in \mathbb{T}_\lambda$, $y_\lambda : \mathbb{T}_\lambda \to \mathbb{R}$. Якщо $y_\lambda(t)$ визначена при $t \geq t_0$, Δ-похідна якої y_λ^Δ задовольняє нерівність*

$$y_\lambda^\Delta < A(t)y_\lambda + B(t) \text{ для майже всіх } t \geq t_0, \tag{4.8}$$

де $A(t), B(t) \in C_{rd}(\mathbb{T})$, та $1 + \mu_\lambda(t)A(t) > 0$ при всіх $t \in \mathbb{T}_\lambda$, тоді при $t \geq t_0$ виконується нерівність

$$y_\lambda(t) < y_\lambda(t_0)e^A(t, t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e_A(t, \sigma(\tau))B(\tau)\Delta\tau. \tag{4.9}$$

Доведення. Перепишемо нерівність (4.8) у вигляді

$$y_\lambda(t)^\Delta < A(t)(y_\lambda(\sigma(t)) - \mu_\lambda(t)y_\lambda^\Delta(t)) + B(t),$$

звідки

$$y^\Delta(t)(1 + \mu_\lambda(t)A(t)) < A(t)y_\lambda(\sigma(t)) + B(t).$$

З твердження Леми $1 + \mu_\lambda(t)A(t) \geq 0$, звідки

$$y_\lambda^\Delta(t) < \frac{A(t)}{1 + \mu_\lambda(t)A(t)}y_\lambda(\sigma(t)) + \frac{B(t)}{1 + \mu_\lambda(t)A(t)}.$$

Оскільки $\frac{-A(t)}{1+\mu_\lambda(t)A(t)} = (\ominus A)(t)$, тоді отримаємо

$$y_\lambda^\Delta(t) < -(\ominus A)(t)y_\lambda(\sigma(t)) + \frac{B(t)}{1 + \mu_\lambda(t)A(t)}.$$

Домножимо обидві частини на узагальнену експоненційну функцію $e_{\ominus A}(t,t_0)$:

$$e_{\ominus A}(t,t_0)y_\lambda^\Delta(t) < -e_{\ominus A}(t,t_0)(\ominus A)(t)y_\lambda(\sigma(t)) + e_{\ominus A}(t,t_0)\frac{B(t)}{1+\mu_\lambda(t)A(t)},$$

звідки

$$\begin{aligned}(e_{\ominus A}(\cdot,t_0)y_\lambda)^\Delta(t) &= e_{\ominus A}(t,t_0)y_\lambda^\Delta(t) + e_{\ominus A}(t,t_0)(\ominus A)(t)y_\lambda(\sigma(t)) \\ &< e_{\ominus A}(t,t_0)\frac{B(t)}{1+\mu_\lambda(t)A(t)}.\end{aligned}$$

Проінтегрувавши обидві частини останньої нерівності з t_0 по t, отримаємо

$$e_{\ominus A}(t,t_0)y_\lambda(t) - e_{\ominus A}(t_0,t_0)y_\lambda(t_0) < \int_{t_0}^{t} e_{\ominus A}(\tau,t_0)\frac{B(\tau)}{1+\mu_\lambda(\tau)A(\tau)}\Delta\tau.$$

Використовуючи властивості узагальненої експоненційної функції (див. Теорему 2.3 (п.1)), $e_{\ominus A}(t_0,t_0) \equiv 1$, тоді отримаємо

$$e_{\ominus A}(t,t_0)y_\lambda(t) < y_\lambda(t_0) + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus A}(\tau,t_0)\frac{B(\tau)}{1+\mu_\lambda(\tau)A(\tau)}\Delta\tau,$$

$$y_\lambda(t) < \frac{1}{e_{\ominus A}(t,t_0)}y_\lambda(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{e_{\ominus A}(\tau,t_0)}{e_{\ominus A}(t,t_0)}\frac{B(\tau)}{1+\mu_\lambda(\tau)A(\tau)}\Delta\tau.$$

Використавши Теорему 2.3 (див. п.5), отримаємо

$$y_\lambda(t) < \frac{1}{e_{\ominus A}(t,t_0)}y_\lambda(t_0) + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus A}(t,\tau)\frac{B(\tau)}{1+\mu_\lambda(\tau)A(\tau)}\Delta\tau.$$

Оскільки $\frac{1}{e_{\ominus A}(t,t_0)} = e_A(t,t_0)$ та $\frac{e_{\ominus A}(t,\tau)}{1+\mu_\lambda(\tau)A(\tau)} = \frac{e_A(t,\tau)}{e_A(\sigma(\tau),\tau)} = e_A(t,\sigma(\tau))$ (див. Теорему 2.3 (пп.2-4)), маємо наступний результат

$$y_\lambda(t) < e_A(t,t_0)y_\lambda(t_0) + \int_{t_0}^{t} e_A(t,\sigma(\tau))B(\tau)\Delta\tau.$$

□

Лема 4.2. *Припустимо, що* $V : \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *і* $V \in C^1(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^n)$ *та* $x : [0,T]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$ *–* Δ*-диференційовна на* $\mathbb{T}^k$*. Нехай* $z : [0,T] \to \mathbb{R}$, $z(\cdot) = V(\cdot,x(\cdot))$*, тоді* z *–* Δ*-диференційовна по* t *і*

$$z^\Delta(t_0) = \frac{\partial V}{\Delta t}(t_0,x_0) + F(\sigma(t_0),x)\cdot x^\Delta(t_0), \tag{4.10}$$

де $F(\sigma(t_0), x) = (F_1(\sigma(t_0), x), .., F_n(\sigma(t_0), x))$ *та*

$$F_i(\sigma(t_0), x) = \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x_i}(\sigma(t_0), x_1(\sigma(t_0)), ..., x_{i-1}(\sigma(t_0)), x_i$$
$$+ h\mu(t_0)x_i^{\Delta}(t_0), x_{i+1}(t_0), ..., x_n(t_0))dh.$$

Доведення. Нехай точка $t_0 \in [0, T]^k$ - фіксована. Спочатку розглянемо випадок, коли t_0 – щільна справа точка. В цьому випадку $\sigma(t_0) = t_0$, x – Δ-диференційовна, неперервна в точці t_0 і

$$\lim_{(t,x)\to(t_0,x_0)} \alpha_1((t_0, x_0), (t, x)) = \lim_{(t,x)\to(t_0,x_0)} \beta_{ij}((t_0, x_0), (t, x)) = 0.$$

З означення повного Δ-диференціала функції в точці [21, Def.6.97], отримаємо

$$z^{\Delta}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{V(t, x) - V(t_0, x_0)}{t - t_0} =$$
$$= \lim_{t\to t_0} \frac{A(t - t_0) + \sum_{i=1}^{n} B_i(x_i(t) - x_i(t_0)) + \alpha_1(t - t_0) + \sum_{i=1}^{n} \beta_{i1}((x_i(t) - x_i(t_0)))}{t - t_0} =$$
$$= \frac{\partial V}{\Delta t}(t_0, x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(t_0, x_0) \cdot x_i^{\Delta}(t_0).$$

Позначимо $F_i(t, x) = \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x)$ та $F(t, x) = (F_1(t, x), F_2(t, x), ..., F_n(t, x))$, тоді

$$z^{\Delta}(t_0) = \frac{\partial V}{\Delta t}(t_0, x_0) + F(t_0, x) \cdot x^{\Delta}(t_0).$$

Тепер розглянемо випадок, коли t_0 – розсіяна справа точка. Позначимо $x(\sigma(t_0)) = x(\sigma_0)$, тоді $x(\sigma_0) - x(t_0) = \mu(t_0)x^{\Delta}(t_0)$ і

$$z^{\Delta}(t_0) = \frac{V(\sigma_0, x(\sigma_0)) - V(t_0, x(t_0))}{\mu(t_0)}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{V(\sigma_0, x_1(\sigma_0), ..., x_i(\sigma_0), x_{i+1}(t_0), ..., x_n(t_0))}{x_i(\sigma_0) - x_i(t_0)}$$
$$- \frac{V(\sigma_0, x_1(\sigma_0), ..., x_{i-1}(\sigma_0), x_i(t_0), ..., x_n(t_0))}{x_i(\sigma_0) - x_i(t_0)} x_i^{\Delta}(t_0)$$
$$+ \frac{V(\sigma_0, x(t_0)) - V(t_0, x(t_0))}{\mu(t_0)}.$$

Оскільки $V \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^n)$, застосовуючи теорему про середнє значення, отримаємо

$$F_i(\sigma_0, x) = \frac{V(\sigma_0, x_1(\sigma_0), ..., x_i(\sigma_0), x_{i+1}(t_0), ..., x_n(t_0))}{x_i(\sigma_0) - x_i(t_0)}$$
$$- \frac{V(\sigma_0, x_1(\sigma_0), ..., x_{i-1}(\sigma_0), x_i(t_0), ..., x_n(t_0))}{x_i(\sigma_0) - x_i(t_0)} =$$
$$\int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x_i}(\sigma_0, x_1(\sigma_0), ..., x_{i-1}(\sigma_0), x_i + h(x_i(\sigma_0) - x_i(t_0)), x_{i+1}(t_0), ..., x_n(t_0))dh =$$
$$\int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x_i}(\sigma_0, x_1(\sigma_0), ..., x_{i-1}(\sigma_0), x_i + h\mu(t_0)x_i^\Delta(t_0), x_{i+1}(t_0), ..., x_n(t_0))dh.$$

Звідки отримаємо

$$z^\Delta(t_0) = \frac{\partial V}{\Delta t}(t_0, x_0) + \sum_{i=1}^n F_i(\sigma_0, x)x_i^\Delta(t_0).$$

Позначивши $F(t,x) := (F_1(t,x), F_2(t,x), ..., F_n(t,x))$, отримаємо

$$z^\Delta(t_0) = \frac{\partial V}{\Delta t}(t_0, x_0) + F(\sigma_0, x) \cdot x^\Delta(t_0).$$

□

Зауваження 4.1. З огляду на систему (4.2), будемо розглядати функцію $\overset{\Delta}{V}(t,x)$, визначену наступним чином:

$$\overset{\Delta}{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\Delta t}(t,x) + \sum_{i=1}^n F_i(\sigma(t), x_\lambda)X_i(t, x_\lambda) = \frac{\partial V}{\Delta t}(t,x) + F(\sigma(t), x_\lambda) \cdot X(t, x_\lambda). \quad (4.11)$$

Функція $\overset{\Delta}{V}(t,x)$ є Δ-похідною функції $V(t,x)$ в силу системи (4.2).

4.2 Умови дисипативності системи динамічних рівнянь в термінах функції Ляпунова

Розглянемо умови дисипативності системи динамічних рівнянь (4.2) в термінах функції Ляпунова $V(t,x)$.

Відносно всіх функцій Ляпунова, що розглядатимуться далі, припустимо, що $V(t,x)$ Δ-абсолютно неперервні по t та рівномірно неперервні по x в околі кожної точки. Крім того, вони задовольняють локальну умову Ліпшиця по x для кожного $0 < \lambda \le \lambda_0$ в області $\{t \in [0,T]_{\mathbb{T}_\lambda}\} \times U_R$ зі сталою Ліпшиця, що залежить від R та T. Цей факт будемо позначати: $V \in \mathbf{C}_0$.

Означення 4.5. Оператором Ляпунова, що відповідає системі (4.2) будемо називати оператор $d^0/\Delta t$, що визначається співвідношенням

$$\frac{d^0 V(t,x)}{\Delta t} = \overline{\lim_{t\to t_0+0, t\in\mathbb{T}_\lambda}} \frac{1}{t-t_0}\left[V(t, x_\lambda(t,t_0,x_0)) - V(t_0,x_0)\right].$$

З [30] випливає, що:

Зауваження 4.2. Якщо $V(t,x)\in \mathbf{C}_0$, тоді для майже всіх t оператор Ляпунова збігатиметься з Δ-похідною функції V в силу системи (4.2).

Тоді виконується наступна теорема.

Теорема 4.1. *Якщо система динамічних рівнянь* (4.2) *на часовій шкалі* $\mathbb{T}_\lambda$, $\lambda > 0$, *має невід'ємну функцію Ляпунова* $V(t,x)\in \boldsymbol{C}_0$, *визначену при* $t\geq t_0$, $t\in\mathbb{T}_\lambda$, $x\in D\subset\mathbb{R}^n$, *з наступними властивостями:*

1)

$$\inf_{t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}_\lambda}, |x|\geq\rho} V(t,x) = V_\rho(\lambda)\to\infty, \quad \rho\to\infty, \tag{4.12}$$

2) при $x\in \bar{U}_{R_0} = \{|x|\geq R_0, t\geq t_0\}$ *існує* $C = C(\lambda) > 0$ *таке, що*

$$\overset{\Delta}{V}(t,x)\leq -C(\lambda)V(t,x), \tag{4.13}$$

а при $x\in U_{R_0}$ *функції* V *і* $\overset{\Delta}{V}(t,x)$ *обмежені згори,*

тоді система (4.2) *дисипативна.*

Доведення Теореми 4.1. В силу умови (4.13) маємо

$$\overset{\Delta}{V}(t,x)\leq -CV(t,x), \quad \text{при } t\geq t_0, |x|\geq R_0,$$

і при $|x| < R_0$, існує додатна стала $C_1 > 0$ така, що

$$\overset{\Delta}{V}(t,x)\leq C_1, \quad V(t,x) < C_1. \tag{4.14}$$

Таким чином, з (4.13) та (4.14) отримаємо наступну нерівність

$$\overset{\Delta}{V}(t,x)\leq -CV(t,x) + C_2, \quad \text{при всіх } t\geq t_0 \text{ та } x\in\mathbb{R}^n, \tag{4.15}$$

де $C_2 > 0$ - деяка стала.

Тепер застосувавши Лему 4.1 до нерівності (4.15), та згідно Теореми 2.4, отримаємо

$$\begin{aligned} V(t,x) &\le V(t_0,x_0)\cdot e_{-C}(t,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} C_2 e_{-C}(t,\sigma(\tau))\Delta\tau \\ &= V(t_0,x_0)\cdot e_{-C}(t,t_0) + \frac{C_2}{C}\left(1 - e_{-C}(t,t_0)\right) \\ &\le V(t_0,x_0)\cdot e_{-C}(t,t_0) + \frac{C_2}{C} \le e_{-C}(t,t_0)\sup_{|x_0|<r} V(t_0,x_0) + \frac{C_2}{C}. \end{aligned}$$

Тоді існує $T = T(t_0, r, \lambda)$ таке, що при $t \ge t_0 + T$ виконується нерівність

$$V(t,x) \le C_3.$$

Звідси і з умови (4.12) випливає дисипативність системи (4.2) при кожному $\lambda > 0$.

□

Зауваження 4.3. Подібний результат до Теореми 4.1 при інших умовах та іншим методом отримано в [10, Th.3.4].

Зауваження 4.4. Якщо в умовах Теореми 4.1 $V(t,x)$ та C не залежать від λ і співвідношення (4.12) виконується рівномірно по $\lambda \le \lambda_0$, тоді система (4.2) рівномірно дисипативна.

4.3 Існування функції Ляпунова дисипативних систем динамічних рівнянь на часових шкалах

Дана частина присвячена дослідженню проблеми існування функції Ляпунова для системи динамічних рівнянь на часових шкалах, яку ми, за умовою, вважаємо дисипативною. Іншими словами, ми будемо розглядати обернену до задачі розглянутої у частині 4.2.

Розглянемо систему динамічних рівнянь (4.2), де функція $X(t,x)$ неперервна по t та x і обмежена разом зі своїми частинними похідними.

Наступний висновок надає критерії існування функції Ляпунова для дисипативної системи динамічних рівнянь на сім'ї часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$ з властивостями 4.12 та 4.13, які були визначені у Теоремі 4.1.

Теорема 4.2. *Якщо існує таке* $\lambda_0 > 0$*, що система динамічних рівнянь* (4.2) *дисипативна для кожного* $\lambda \le \lambda_0$ *і виконуються умови* (4.4), (4.5)*, то для кожної системи* (4.2) *існує невід'ємна функція Ляпунова* $V(t,x)$*, що задовольняє умови* (4.12), (4.13) *при* $\lambda < \lambda_0$.

Доведення Теореми 4.2. З дисипативності системи динамічних рівнянь (4.2) випливає, що для довільного $r > 0$ існує таке $T = T(r, t_0, \lambda) > 0$, що розв'язок x_λ системи (4.2) з початковими умовами (t_0, x_0), $t_0 \in [0, T_0]_{\mathbb{T}_\lambda}$ та x_0, $|x_0| < r$, міститься в кулі радіуса R при $t \in [t_0 + T; +\infty)_{\mathbb{T}_\lambda}$, тобто $|x_\lambda(t; t_0, x_0)| < R$.

Розглянемо наступну функцію:

$$L(\zeta) = \begin{cases} \zeta - R, & \text{if } \zeta \ge R; \\ 0, & \text{if } 0 \le \zeta < R. \end{cases}$$

Дана функція неперервна та набуває лише невід'ємних значень. Більше того, вона визначена при $\zeta \ge 0$, $L(\zeta) \to +\infty$ при $\zeta \to +\infty$ і

$$|L(\zeta) - L(\zeta')| \le |\zeta - \zeta'|. \tag{4.16}$$

Визначимо функцію $V(t,x)$ наступним чином:

$$V(t,x) = \sup_{\tau \ge 0} \{L(|x_\lambda(t_\tau; t, x)|) \cdot e^\tau\},$$

де $t_\tau = \sigma(t + \tau) = \inf\{s \in \mathbb{T}_\lambda | s \ge t + \tau\}$.

Зауважимо, якщо $\tau > T$, то, з дисипативності системи (4.2), розв'язок x_λ міститься в кулі радіуса R, а отже, $L(|x|) = 0$. Тому

$$V(t,x) = \sup_{\tau \in [0,T]} \{L(|x_\lambda(t_\tau; t, x)|) \cdot e^\tau\}.$$

З означення функції G випливає, що $L(|x|) \le V(t,x)$. Отже, $V(t,x)$ задовольняє умову (4.12).

Тепер покажемо, що $V(t,x)$ задовольняє локальну умову Ліпшиця по t і x. Припустимо, що (t,x) та $(\hat{t}, \hat{x})$ такі, що $t, \hat{t} \in [0, T_0]_{\mathbb{T}_\lambda}$, $t < \hat{t}$ та $x, \hat{x}$ містяться в кулі радіуса r.

З неперервної залежності розв'язку системи динамічних рівнянь (4.2) від початкових умов на скінченному інтервалі часової шкали [52, Theorem 3.2], можна гарантувати, що для всіх $\tau \in [0, T]$ за будь-яких початкових умов $t, \hat{t} \in [0, T_0]_{\mathbb{T}_\lambda}$ і $x, \hat{x} \in U_r$, розв'язки $x_\lambda(t_\tau; t, x)$ та $x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x})$ лежать у фіксованій кулі радіуса r. Тоді, існує таке N_r, що $|x_\lambda(t_\tau; t, x)| \leq N_r$, $|x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x})| \leq N_r$. Отже, з (4.16), отримаємо

$$\begin{aligned} V(t, x) - V(\hat{t}, \hat{x}) &= \sup_{\tau \in [0,T]} \{L(|x_\lambda(t_\tau; t, x)|)e^\tau\} - \sup_{\tau \in [0,T]} \{L(|x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x})|)e^\tau\} \\ &\leq \sup_{\tau \in [0,T]} \{|L(|x_\lambda(t_\tau; t, x)|) - L(|x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x})|)|e^\tau\} \\ &\leq \sup_{\tau \in [0,T]} \{|x_\lambda(t_\tau; t, x) - x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x})|e^\tau\}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Розглянемо докладніше різницю

$$|x_\lambda(t_\tau; t, x) - x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x})|,$$

де $x_\lambda(t_\tau; t, x)$ розв'язок системи (4.2) з початковими умовами (t, x). Тоді

$$|x_\lambda(t_\tau; t, x) - x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x})| \leq |x_\lambda(t_\tau; t, x) - x_\lambda(\hat{t}_\tau; t, x)| + |x_\lambda(\hat{t}_\tau; t, x) - x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x})|. \tag{4.18}$$

Оцінимо першу різницю правої частини нерівності (4.18). Оскільки розв'язки $x_\lambda(t_\tau; t, x)$ і $x_\lambda(\hat{t}_\tau; t, x)$ можуть бути подані у вигляді

$$x_\lambda(t_\tau; t, x) = x + \int_t^{t_\tau} X(s, x_\lambda(s; t, x))\Delta s,$$

$$x_\lambda(\hat{t}_\tau; t, x) = x + \int_t^{\hat{t}_\tau} X(s, x_\lambda(s; t, x))\Delta s,$$

отримаємо наступну оцінку різниці $|x_\lambda(t_\tau; t, x) - x_\lambda(\hat{t}_\tau; t, x)|$, оскільки $t \leq t_\tau \leq \hat{t}_\tau$:

$$\begin{aligned}
&|x_\lambda(t_\tau; t, x) - x_\lambda(\hat{t}_\tau; t, x)| \\
&\quad \leq \left| x + \int\limits_t^{t_\tau} X(s, x_\lambda(s; t, x))\Delta s - x - \int\limits_t^{\hat{t}_\tau} X(s, x_\lambda(s; t, x))\Delta s \right| \\
&\quad \leq \left| \int\limits_t^{t_\tau} X(s, x_\lambda(s; t, x))\Delta s - \int\limits_t^{t_\tau} X(s, x_\lambda(s; t, x))\Delta s - \int\limits_{t_\tau}^{\hat{t}_\tau} X(s, x_\lambda(s; t, x))\Delta s \right| \\
&\quad \leq \int\limits_{t_\tau}^{\hat{t}_\tau} |X(s, x_\lambda(s; t, x))|\Delta s.
\end{aligned}$$

Позначимо

$$\max_{t \in [0,T]_{\mathbb{T}_\lambda}, |x| \leq N_r} |X(t, x)| = M_r, \tag{4.19}$$

тоді

$$|x_\lambda(t_\tau; t, x) - x_\lambda(\hat{t}_\tau; t, x)| \leq \int\limits_{t_\tau}^{\hat{t}_\tau} M_r \Delta s \leq M_r |\hat{t}_\tau - t_\tau| \leq M_r |\hat{t} - t|. \tag{4.20}$$

Тепер розглянемо другу різницю правої частини (4.18): $|x_\lambda(\hat{t}_\tau; t, x) - x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x})|$. Позначимо $x_\lambda(\hat{t}; t, x) := x^*$, тоді отримаємо:

$$|x_\lambda(\hat{t}_\tau; t, x) - x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x})| = |x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, x^*) - x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x})|.$$

Оскільки $x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, x^*)$ та $x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x})$, можна переписати

$$x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, x^*) = x^* + \int\limits_{\hat{t}}^{\hat{t}_\tau} X(s, x_\lambda(s; \hat{t}, x^*))\Delta s,$$

$$x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x}) = \hat{x} + \int\limits_{\hat{t}}^{\hat{t}_\tau} X(s, x_\lambda(s; \hat{t}, \hat{x}))\Delta s,$$

тоді

$$|x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, x^*) - x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x})|$$

$$\le \left| x^* + \int\limits_{\hat{t}}^{\hat{t}_\tau} X(s, x_\lambda(s; \hat{t}, x^*))\Delta s - \hat{x} - \int\limits_{\hat{t}}^{\hat{t}_\tau} X(s, x_\lambda(s; \hat{t}, \hat{x}))\Delta s \right|$$

$$\le |x^* - \hat{x}| + \int\limits_{\hat{t}}^{\hat{t}_\tau} \left| X(s, x_\lambda(s; \hat{t}, x^*)) - X(s, x_\lambda(s; \hat{t}, \hat{x})) \right| \Delta s.$$

Враховуючи ліпшицовість $X(t, x)$ зі сталою K по x, з останнього матимемо

$$\left| x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, x^*) - x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x}) \right| \le |x^* - \hat{x}| + K \int\limits_{\hat{t}}^{\hat{t}_\tau} \left| x_\lambda(s; \hat{t}, x^*) - x_\lambda(s; \hat{t}, \hat{x}) \right| \Delta s.$$

Звідки, з аналога нерівності Гронуолла на часових шкалах [25, Th.6.4] при $s \in [\hat{t}; \hat{t}_\tau]_{\mathbb{T}_\lambda}$ та за Лемою 1 [32], отримаємо

$$\begin{aligned} \left| x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, x^*) - x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x}) \right| &\le e_K(\hat{t}_\tau, \hat{t}) \, |x^* - \hat{x}| \le e^{K(\hat{t}_\tau - \hat{t})} \, |x^* - \hat{x}| \\ &\le e^{K(\hat{t}_\tau - \hat{t})} \left(|x^* - x| + |x - \hat{x}| \right). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Оскільки $x^* := x_\lambda(\hat{t}; t, x)$, тоді $\|x_\lambda(\hat{t}; t, x) - x\| \le \int_t^{\hat{t}} \|X(s, x_\lambda(s; t, x))\| \Delta s$. Звідки, з (4.19), зважаючи, що $t_\tau \in [0, \hat{t}_\tau]$, отримаємо

$$|x^* - x| = \left| x_\lambda(\hat{t}; t, x) - x \right| \le \int\limits_t^{\hat{t}} M_r \Delta s \le M_r |\hat{t} - t|.$$

Підставивши останню рівність у (4.21), маємо

$$\left| x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, x^*) - x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x}) \right| \le e^{K(\hat{t}_\tau - \hat{t})} \left(M_r |\hat{t} - t| + |x - \hat{x}| \right). \tag{4.22}$$

Таким чином, з (4.18), (4.20) та (4.22), отримаємо

$$\begin{aligned} \left| x_\lambda(t_\tau; t, x) - x_\lambda(\hat{t}_\tau; \hat{t}, \hat{x}) \right| &\le M_r |\hat{t} - t| + e^{K(\hat{t}_\tau - \hat{t})} \left(M_r |\hat{t} - t| + |x - \hat{x}| \right) \\ &\le M_r \left(e^{K(\hat{t}_\tau - t_\tau)} + 1 \right) |\hat{t} - t| + e^{K(\hat{t}_\tau - \hat{t})} \, |\hat{x} - x|. \end{aligned}$$

При достатньо малому $\mu_\lambda > 0$ точка $\hat{t}_\tau$ лежить на відрізку $[\hat{t} + \tau; \hat{t} + \tau + 1]$, тоді $\hat{t}_\tau - t_\tau \le \hat{t} - t + 1$. Отже звідси, з умови (4.17), враховуючи дисипативність системи динамічних рівнянь (4.2) та нерівність (4.4), отримаємо

$$V(t,x) - V(\hat{t},\hat{x}) \le \sup_{\tau\in[0,T]} \left\{ \left(M_R \left(e^{K(\hat{t}_\tau - \hat{t})} + 1 \right) |\hat{t} - t| + e^{K(\hat{t}_\tau - \hat{t})} \|\hat{x} - x\| \right) e^\tau \right\}$$
$$\le M_R (e^{K(T+1)+T} + 1)|\hat{t} - t| + e^{K(T+1)+T} |\hat{x} - x| \,. \quad (4.23)$$

Аналогічним чином, виконуючи перетворення подібні до (4.17)-(4.23), можемо отримати оцінку:

$$V(\hat{t},\hat{x}) - V(t,x) \le \sup_{\tau\in[0,T]} \left\{ \left(M_R (e^{K(\hat{t}_\tau - \hat{t})} + 1)|t - \hat{t}| + e^{K(\hat{t}_\tau - \hat{t})} |x - \hat{x}| \right) e^\tau \right\}$$
$$\le M_R \left(e^{K(T+1)+T} + 1 \right) |t - \hat{t}| + e^{K(T+1)+T} |x - \hat{x}| \,.$$

Звідки, матимемо

$$V(t,x) - V(\hat{t},\hat{x}) \ge -M_R \left(e^{K(T+1)+T} + 1 \right) |t - \hat{t}| + e^{K(T+1)+T} |x - \hat{x}| \,. \qquad (4.24)$$

Таким чином, з (4.23) та (4.24), отримаємо

$$|V(t,x) - V(\hat{t},\hat{x})| \ge M_R \left(e^{K(T+1)+T} + 1 \right) |t - \hat{t}| + e^{K(T+1)+T} |x - \hat{x}| \,.$$

Отже, ми отримали ліпшицовість функції $V(t,x)$ по t та x.

Покажемо виконання умови (4.13). Для кожної точки $t \in \mathbb{T}_\lambda$ можливі два випадки: коли точка t – розсіяна справа, тобто $\mu_\lambda(t) > 0$, та коли точка t є щільною справа, тобто $\mu_\lambda(t) = 0$. Позначимо

$$V_\tau(t,x) = L(|x_\lambda(\sigma(t+\tau);t,x)|) \cdot e^\tau$$

тоді при $\mu_\lambda(t) \ge 0$ отримаємо

$$\begin{aligned} &V_\tau(t+\mu_\lambda(t), x(t+\mu_\lambda(t);t,x)) \\ &= L(|x_\lambda(\sigma(t+\mu_\lambda(t)+\tau); t+\mu_\lambda(t), x(t+\mu_\lambda(t);t,x))|)e^\tau \\ &= L(|x_\lambda(\sigma(t+\mu_\lambda(t)+\tau); t+\mu_\lambda(t), x(t+\mu_\lambda(t);t,x))|)e^{\tau+\mu_\lambda(t)}e^{-\mu_\lambda(t)}. \end{aligned} \qquad (4.25)$$

В силу єдиності розв'язку на часових шкалах [30, Proposition 4], отримаємо

$$x_\lambda(\sigma(t+\mu_\lambda(t)+\tau); t+\mu_\lambda(t), x(t+\mu_\lambda(t);t,x)) = x_\lambda(\sigma(t+\mu_\lambda(t)+\tau); t, x). \qquad (4.26)$$

Підставивши (4.26) в (4.25) та позначивши $\tau' = \tau + \mu_\lambda(t)$, матимемо

$$V_\tau(t+\mu_\lambda(t), x(t+\mu_\lambda(t);t,x)) = L(|x_\lambda(\sigma(t+\tau');t,x))|)e^{\tau'}e^{-\mu_\lambda(t)} = V_{\tau'}(t,x)e^{-\mu_\lambda(t)}.$$

Зауважимо, якщо $\tau \in [0, T]$, то $\tau' \in [\mu_\lambda(t), T+\mu_\lambda(t)]$, звідки $t+\tau' \in [t+\mu_\lambda(t), t+T+\mu_\lambda(t)]$. Оскільки з дисипативності $|x_\lambda(t+\tau'; t, x)| < R$ при $t+\tau' \geq t+T$, тоді $L(|x_\lambda(t+\tau'; t, x)|) = 0$ при $t+\tau' \geq t+T$. Звідси,

$$\begin{aligned} V(t+\mu_\lambda(t), x(t+\mu_\lambda(t); t, x)) &= \sup_{\tau\in[0,T]} V_\tau(t+\mu_\lambda(t), x(t+\mu_\lambda(t); t, x)) \\ = \sup_{\tau'\in[\mu_\lambda(t), T+\mu_\lambda(t)]} V_{\tau'}(t,x)e^{-\mu_\lambda(t)} &= \sup_{\tau'\in[\mu_\lambda(t), T]} V_{\tau'}(t,x)e^{-\mu_\lambda(t)} \\ &\leq \sup_{\tau'\in[0,T]} V_{\tau'}(t,x)e^{-\mu_\lambda(t)}, \end{aligned}$$

тобто

$$V(t+\mu_\lambda(t), x(t+\mu_\lambda(t); t, x)) \leq V(t,x)e^{-\mu_\lambda}. \tag{4.27}$$

Розглянемо оператор Ляпунова, що відповідає системі (4.2). Оскільки за доведеним вище функція $V(t, x)$ задовольняє умову Ліпшиця по t та x, то вона абсолютно неперервна по t та x, а тому майже для всіх t та x має похідну (Δ-похідну по t та звичайну похідну по x). З урахуванням (4.27), для розсіяної справа точки t, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d^0V(t,x)}{\Delta t} &= \frac{1}{\mu_\lambda(t)}\left[V(t+\mu_\lambda(t), x(t+\mu_\lambda(t,t,x)) - V(t,x)\right] \\ &\leq \frac{1}{\mu_\lambda(t)}\left[V(t,x)e^{-\mu_\lambda(t)} - V(t,x)\right] = V(t,x)\cdot\frac{e^{-\mu_\lambda(t)}-1}{\mu_\lambda(t)}. \end{aligned}$$

Із Зауваження 4.2 та, оскільки $\lim_{\mu_\lambda(t)\to 0}\frac{e^{-\mu_\lambda(t)}-1}{\mu_\lambda(t)} = -1$, матимемо

$$\overset{\Delta}{V}_\lambda(t,x) \leq -C(\mu_\lambda)V_\lambda(t,x),$$

де $C(\mu_\lambda) = \frac{e^{-\mu_\lambda(t)}-1}{\mu_\lambda(t)} > 0$.

Якщо t – щільна справа, тобто $\mu_\lambda(t) = 0$, тоді існує послідовність $\{h_n\}$, $h_n \in \mathbb{T}_\lambda$ таких, що $h_n \longrightarrow t+0$. Розглянемо

$$\begin{aligned} V_\tau(t+h_n, x(t+h_n; t, x)) &= L(|x(t+h_n+\tau; t+h_n, x(t+h_n; t, x)|)e^\tau \\ &= L(|x(t+h_n+\tau; t+h_n, x(t+h_n; t, x)|)e^{\tau+h_n}e^{-h_n}. \end{aligned}$$

В силу єдиності розв'язку системи (4.2), $x(t+h_n+\tau; t+h_n, x(t+h_n; t, x) = x(t+h_n+\tau; t, x)$. Тоді замінивши $\tau + h_n = \tau_n$, отримаємо

$$V(t+h_n, x(t+h_n;t,x)) = \sup_{\tau\in[0,T]} V_\tau(t+h_n, x(t+h_n;t,x))$$
$$= \sup_{\tau_n\in[h_n,T+h_n]} V_{\tau_n} e^{-h_n} \leq \sup_{\tau_n\in[0,T]} V_{\tau_n}(t,x)e^{-h_n} \leq V(t,x)e^{-h_n}.$$

Віднявши $V(t,x)$ від обох частин нерівності та поділивши на $h_n > 0$, отримаємо що

$$\frac{V(t+h_n, x(t+h_n;t,x)) - V(t,x)}{h_n} \leq V(t,x)\frac{e^{-h_n}-1}{h_n}.$$

Звідки, в силу означення Δ-похідної в щільних точках, при $h_n \to 0$, матимемо

$$V^\Delta(t,x) \leq -V(t,x).$$

Таким чином, твердження (4.13) доведене. □

4.4 Взаємозв'язок між дисипативністю систем диференціальних рівнянь та відповідних динамічних систем на часових шкалах

У попередніх частинах цього розділу було досліджено дисипативність систем динамічних рівнянь на часових шкалах. Природно виникає питання про взаємозв'язок між дисипативністю цих систем та дисипативністю систем звичайних диференціальних рівнянь.

Розглянемо системи (4.1) та (4.2). У наступній теоремі отримано умови дисипативності системи диференціальних рівнянь за умови дисипативності відповідної динамічної системи.

Теорема 4.3. *Нехай $X(t,x)$ задовольняє умову* (4.3) *та існує таке λ_0, що для всіх $\lambda \leq \lambda_0$ система динамічних рівнянь* (4.2) *рівномірно дисипативна по $t_0 \in \mathbb{T}_\lambda$ та λ. Тоді система диференціальних рівнянь* (4.1) *рівномірно дисипативна по t_0 при $t_0 > 0$.*

Доведення Теореми 4.3. Оберемо довільне число $r > 0$. Не обмежуючи загальності, покладемо $t_0 = 0 \in \mathbb{T}_\lambda$. З умови Теореми, якщо $x_\lambda(t;0,x_0)$ – розв'язок системи динамічних рівнянь (4.2) з початковими умовами $(0,x_0)$, де $|x_0| < r$,тоді для всіх $\lambda \leq \lambda_0$ тіснує таке $\tilde{T} = \tilde{T}(r)$, що виконується нерівність

$$|x_\lambda(t,0,x_0)| < R \text{ при } t \in [\tilde{T}, +\infty)_{\mathbb{T}_\lambda}.$$

З неперервної залежності розв'язку динамічної системи (4.2) від початкових даних на скінченному проміжку [52, Theorem 3.2] випливає, що існує таке $M > 0$, що $|x_\lambda(t, 0, x_0)| < M$ при всіх $t \in \mathbb{T}_\lambda$, $t \leq \tilde{T}$ та $|x_0| \leq r$. Таким чином, умова (4.3) виконується при $t \in [0, \tilde{T}]_{\mathbb{T}_\lambda}$ та $|x| \leq M$.

Нехай x – розв'язок системи диференціальних рівнянь (4.1) такий, що в початковій точці $t_0 = 0$ виконується $x(0) = x_\lambda(0) = x_0$. Оберемо $T = \inf\{s \in \mathbb{T}_\lambda | s \geq \tilde{T}\}$. Оскільки $T \geq \tilde{T}$, для нього виконується нерівність $|x_\lambda(T, 0, x_0)| < R$. З Леми 2.1 про оцінку близькості розв'язків системи диференціальних рівнянь та відповідної системи динамічних рівнянь на часових шкалах з однаковими початковими даними, при $t \in [0, T]$ маємо нерівність

$$|x(t, 0, x_0) - x_\lambda(t, 0, x_0)| \leq \mu_\lambda K(T) \to 0, \quad \lambda \to 0.$$

Зауважимо, що оскільки $\mu_\lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$, то завжди можна обрати $\lambda_1 \leq \lambda_0$ таке, що для всіх $\lambda \leq \lambda_1$ виконується нерівність $\mu_\lambda K(T) < 1$. Отже матимемо

$$|x(T, 0, x_0)| \leq |x(T, 0, x_0) - x_\lambda(T, 0, x_0)| + |x_\lambda(T, 0, x_0)| \leq 1 + R. \tag{4.28}$$

Тепер виберемо такий розв'язок $y_\lambda(t)$ системи динамічних рівнянь (4.2), що $x(T, 0, x_0) = y_\lambda(T)$. Оскільки система (4.2) рівномірно дисипативна по t_0 та λ, то взявши у нерівності (4.7) $r = R + 1$, ми отримаємо, що існує таке $T_1 = T_1(R + 1)$, що з нерівності $|y_\lambda(t_1)| < R + 1$ випливає, що

$$|y_\lambda(t, T, x(T, 0, x_0))| < R, \text{ для } t \in [T + T_1; +\infty)_{\mathbb{T}_\lambda}.$$

Оберемо $t_1 = \inf\{s \in \mathbb{T}_\lambda | s \geq T + T_1\}$, тоді $|y_\lambda(t_1, T, x(T, 0, x_0))| < R$. Як і раніше, виберемо $\lambda_2 \leq \lambda_1$, що для всіх $\lambda \leq \lambda_2$ точка t_1 лежатиме на відрізку $[T + T_1, T + T_1 + 1]_{\mathbb{T}_\lambda}$ і при $t \in [T, t_1]$ виконуватиметься нерівність

$$|x(t, T, x(T, 0, x_0)) - y_\lambda(t, T, x(T, 0, x_0))| \leq \mu_\lambda K(t_1) < 1.$$

Звідки, аналогічно (4.28), отримаємо $|x(t_1, T, x(T, 0, x_0))| < R + 1$. В силу єдиності розв'язку системи диференціальних рівнянь (4.1), маємо $x(t, T, x(T, 0, x_0)) = x(t, 0, x_0)$. Звідси та з рівномірної дисипативності системи динамічних рівнянь (4.2) по t_0 отримаємо, що

$$|x(t_1, 0, x_0)| < R + 1,$$

де $t_1 \in [T + T_1, T + T_1 + 1]$.

Продовжуючи далі аналогічним чином, матимемо, що для довільного $k \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$|x(t_k, 0, x_0)| < R + 1,$$

де t_k – найменше значення на відрізку $[T + kT_1, T + kT_1 + 1]_{\mathbb{T}_\lambda}$.

З неперервної залежності $x(t, t_0, x_0)$ від початкових умов випливає, що розв'язок системи диференціальних рівнянь (4.1) на проміжках (t_k, t_{k+1}) також лежить у фіксованій кулі радіуса $R_1 \geq R$. Отже, система (4.1) рівноміно дисипативна по $t_0 > 0$, відповідно до Означень 4.1, 4.2 при $R = R_1$. □

Теорема 4.4. *Припустимо $X(t, x)$ задовольняє умову* (4.3)*, а система диференціальних рівнянь* (4.1) *рівномірно дисипативна по t_0 при $t_0 > 0$. Тоді, існує таке λ_0, що динамічна система* (4.2) *рівномірно дисипативна по t_0 і λ для всіх $\lambda \leq \lambda_0$.*

Доведення. Оберемо довільне число $r > 0$. Не втрачаючи загальності, покладемо $t_0 = 0$. З умови Теореми, якщо $x(t, 0, x_0)$ – розв'язок системи диференціальних рівнянь (4.1) з початковими умовами $(0, x_0)$, де $|x_0| < r$, то існує таке $\tilde{T} = \tilde{T}(r)$, що виконується наступна нерівність

$$|x(t, 0, x_0)| < R \text{ при } t \in [\tilde{T}, +\infty).$$

З неперервної залежності розв'язку системи диференціальних рівнянь (4.1) від початкових умов та скінченному проміжку випливає, що існує таке $M > 0$, що $|x(t, 0, x_0)| < M$ при всіх $t \in \mathbb{R}$, $t \leq \tilde{T}$ та $|x_0| \leq r$. Таким чином, умова (4.3) виконується при $t \in [0, \tilde{T}]$ та $|x| \leq M$.

Нехай x_λ – такий розв'язок системи динамічних рівнянь (4.2), що в початковій точці $t_0 = 0 \in \mathbb{T}_\lambda$ виконується $x_\lambda(0) = x(0) = x_0$. Оберемо $T = \inf\{s \in \mathbb{T}_\lambda | s \geq \tilde{T}\}$. Оскільки $T \geq \tilde{T}$, то для нього виконується нерівність $|x_\lambda(T, 0, x_0)| < R$. З Леми 2.1 про оцінку близькості розв'язків системи диференціальних рівнянь та відповідної системи динамічних рівнянь на часових шкалах з однаковими початковими даними, при $t \in [0, T]_{\mathbb{T}_\lambda}$ матимемо нерівність

$$|x_\lambda(t, 0, x_0) - x(t, 0, x_0)| \leq \mu_\lambda K(T) \to 0, \lambda \to 0.$$

Зауважимо, що оскільки $\mu_\lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$, то завжди можна обрати таке $\lambda_1 \leq \lambda_0$, що для всіх $\lambda \leq \lambda_1$ виконуватиметься нерівність $\mu_\lambda K(T) < 1$. Отже, матимемо

$$|x_\lambda(T,0,x_0)| \le |x_\lambda(T,0,x_0) - x(T,0,x_0)| + |x(T,0,x_0)| \le 1 + R. \tag{4.29}$$

Оберемо розв'язок $y(t)$ системи диференціальних рівнянь (4.1) таким чином, що $x_\lambda(T,0,x_0) = y(T)$. Оскільки система (4.1) рівномірно дисипативна по t_0, то взявши у нерівності (4.6) $r = R+1$, отримаємо, що існує таке $T_1 = T_1(R+1)$, що з нерівності $|y(T)| < R+1$ випливає, що

$$|y(t,T,x_\lambda(T,0,x_0))| < R, \text{ при } t \ge T + T_1.$$

Оберемо $t_1 = \inf\{s \in \mathbb{T}_\lambda | s \ge T + T_1\}$, тоді

$$|y(t_1,T,x_\lambda(T,0,x_0))| < R.$$

Як і раніше, виберемо таке $\lambda_2 \le \lambda_1$, що для всіх $\lambda \le \lambda_2$ точка t_1 належить відрізку $[T+T_1, T+T_1+1]_{\mathbb{T}_\lambda}$ і при $t \in [T,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}$ виконується нерівність

$$|x_\lambda(t,T,x(T,0,x_0)) - y(t,T,x(T,0,x_0))| \le \mu_\lambda K(t_1) < 1.$$

Звідки, аналогічно (4.29), отримаємо $|x_\lambda(t_1,T,x(T,0,x_0))| < R+1$. В силу неперервної залежності розв'язку системи динамічних рівнянь (4.2) від початкових умов на часових шкалах [52, Теорема 3.2], маємо $x_\lambda(t,T,x(T,0,x_0)) = x_\lambda(t,0,x_0)$, звідки отримаємо

$$|x_\lambda(t_1,0,x_0)| < R+1,$$

де $t_1 \in [T+T_1, T+T_1+1]$.

Продовжуючи подібним чином далі, отримаємо, що для довільного натурального k виконується

$$|x_\lambda(t_k,0,x_0)| < R+1,$$

де $t_k \in [T+kT_1, T+kT_1+1]$.

З неперервної залежності $x_\lambda(t,t_0,x_0)$ від початкових даних на скінченному інтервалі на часових шкалах [52, Теорема 3.2], розв'язок системи динамічних рівнянь (4.2) на проміжках $[t_k,t_{k+1}]_{\mathbb{T}_\lambda}$ також лежить у фіксованій кулі радіуса $R_1 \ge R$. Отже, система динамічниз рівнянь (4.2) рівномірно дисипативна по t_0 та λ, відповідно до Означень 4.3, 4.4 при $R = R_1$. $\square$

Наведемо приклад, який ілюструє отримані результати на прикладі рівняння Л'єнара.

Приклад. Розглянемо диференціальне рівняння

$$x'' + (\cos x + 2)x' + x = 0. \tag{4.30}$$

Для дослідження дисипативності даного рівняння розглянемо еквівалентну йому систему

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -(\cos x + 2)y - x. \end{cases} \tag{4.31}$$

Покладемо

$$F(x) = \int_0^x \cos t + 2dt = \sin x + 2x, \quad G(x) = \int_0^x tdt = \frac{x^2}{2}$$

та

$$\begin{aligned} W(x,y) &= (F(x) - 2x)y + G(x) + \int_0^x (\cos t + 2)(F(t) - 2t)dt + 1 + \frac{y^2}{2} \\ &= y \sin x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x (\cos t + 2) \sin t dt + 1 + \frac{y^2}{2} \\ &= y \sin x + \frac{x^2}{2} + (5 + \cos x) \sin^2 \frac{x}{2} + 1 + \frac{y^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} y^2 + y \sin x + (5 + \cos x) \sin^2 \frac{x}{2} + 1, \end{aligned}$$

тоді задамо функцію Ляпунова $V(t,x)$ наступним чином

$$V(t,x) = \begin{cases} (W(x,y))^\alpha - C & \text{for } (W(x,y))^\alpha > C, \\ 0 & \text{for } (W(x,y))^\alpha \leq C. \end{cases}$$

Розглянемо функцію W як квадратичну форму по y. Зважаючи, що $0 < 1 \leq \cos x + 2 \leq 3$, отримаємо, що $W \to \infty$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$. Можна обрати таке $\alpha > 0$, що $V(x,y) \in \mathbf{C}_0$. Використовуючи рівність

$$\frac{d^0 W}{dt} = -(2y^2 + x \sin(x)),$$

отримаємо, що в області $r > r_0$ виконується

$$\frac{d^0 V}{dt} \leq -CV. \tag{4.32}$$

Звідки випливає, що при відповідному C нерівність (4.32) виконується для $V(x, y)$ всюди. Звідки, враховуючи умови дисипативності системи диференціальних рівнянь в термінах функції Ляпунова [104, Теорема 11], випливає дисипативність системи (4.31).

Побудуємо розв'язок системи (4.31) з початковими даними $x_0 = x(0) = 2$, $y_0 = y(0) = 0$ (див. Рис.4.1).

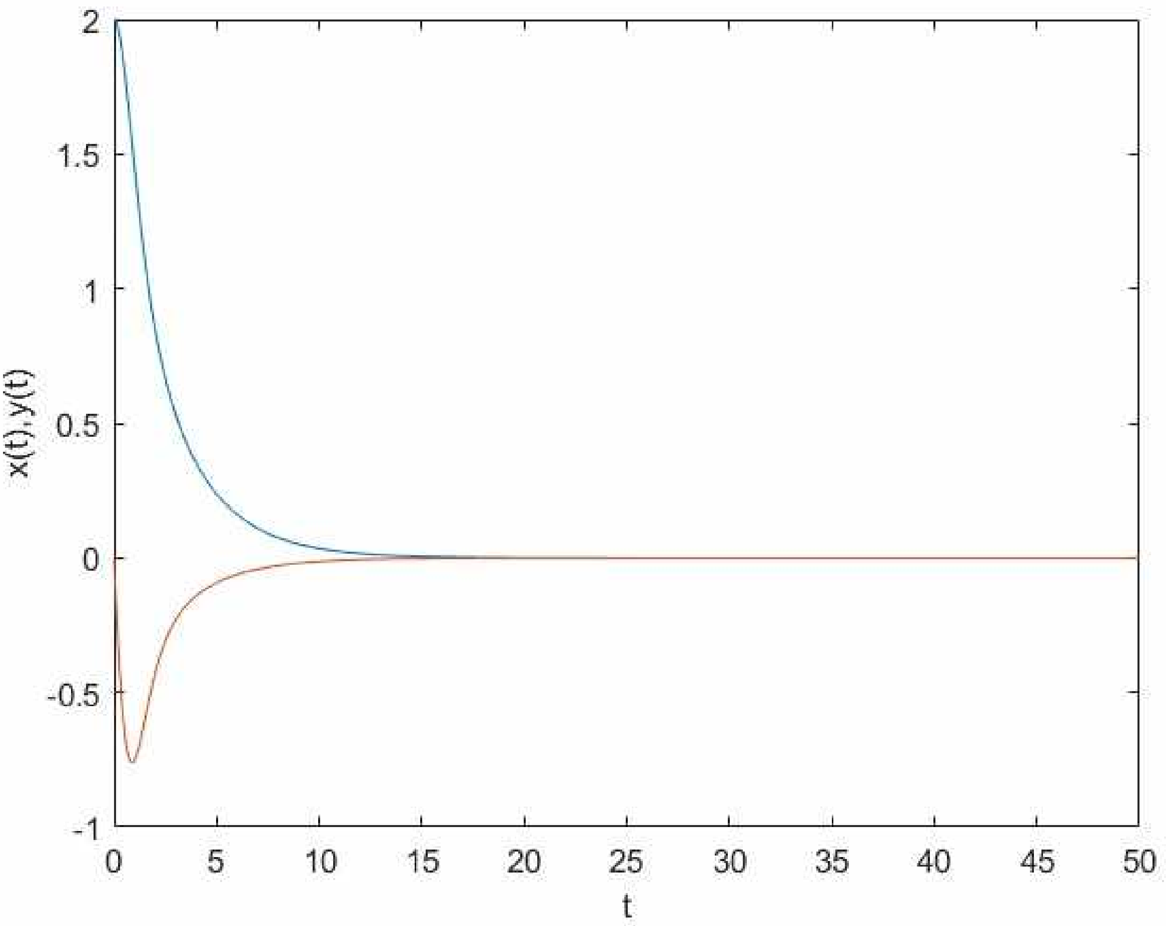


Рис. 4.1. Розв'язок системи диференціальних рівнянь (4.31) на проміжку $[0, 50]$

Тепер розглянемо відповідне до (4.30) динамічне рівняння

$$x_\lambda^{\Delta\Delta} + (\cos x_\lambda + 2)x_\lambda^{\Delta} + x_\lambda = 0 \tag{4.33}$$

на множині часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$, де $\mu_\lambda = \sup_{\mathbb{T}_\lambda} \mu_\lambda(t)$.

Часова шкала побудована таким чином, що неперервні інтервали чергуються з дискретними (див. Рис.4.2), а щільність шкали регулюється множником λ таким, що $\mu_\lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$.

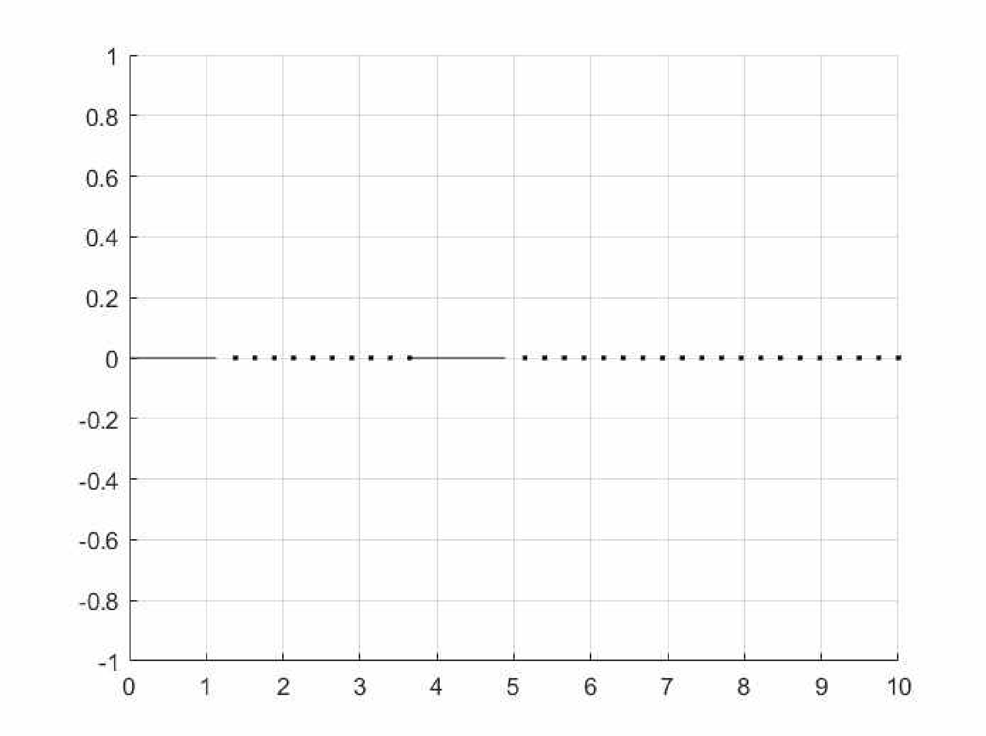
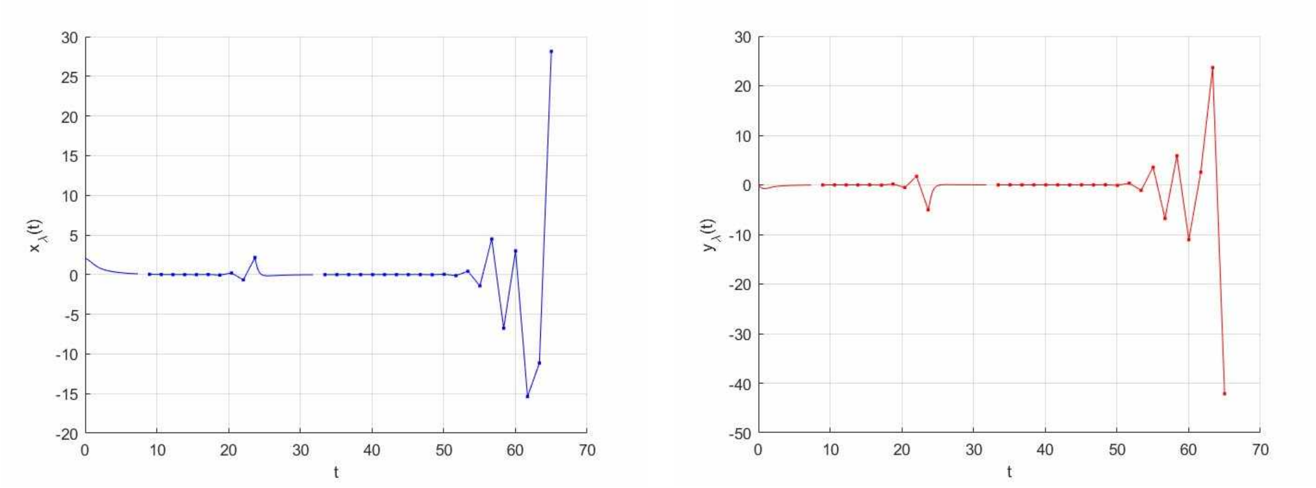


Рис. 4.2. Відрізок часової шкали $[0, 10]_{\mathbb{T}_\lambda}$

Подамо динамічне рівняння (4.33) у вигляді системи

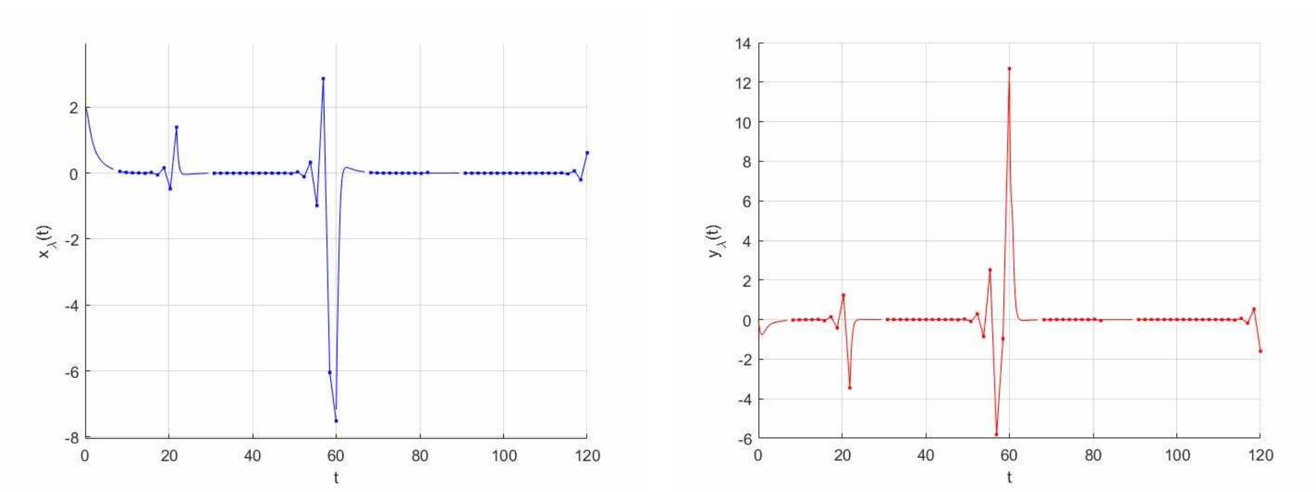
$$\begin{cases} x_\lambda^\Delta = y_\lambda, \\ y_\lambda^\Delta = -(e^{-x_\lambda^2} + 1)y_\lambda - x_\lambda, \end{cases} \tag{4.34}$$

та побудуємо її розв'язки на проміжку $[0, 50]_{\mathbb{T}_\lambda}$ при різних значеннях λ. Отже, при $\lambda = 0.65, 0.6, 0, 45, 0.3, 0.1, 0.05$, ми отримали Рисунки 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 та 4.8, відповідно. Бачимо, що зі зменшенням λ розв'язки динамічної системи (4.34) наближаються до розв'язку диференціального рівняння (4.30) і є дисипативними.



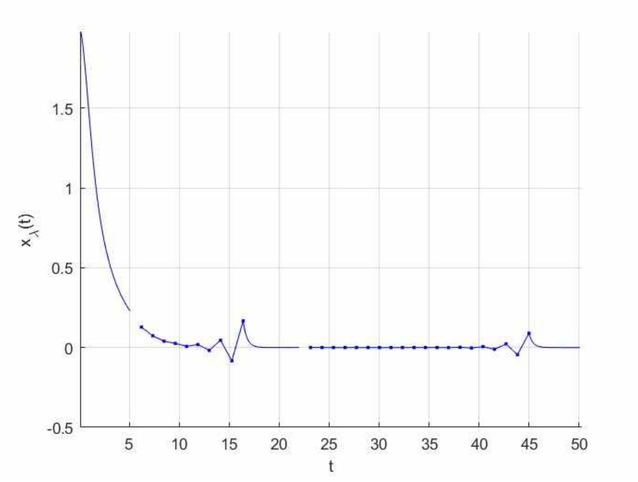
(a) $x_\lambda(t)$ (b) $y_\lambda(t)$

Рис. 4.3. Графік розв'язків динамічної системи (4.34) при $\lambda = 0.65$

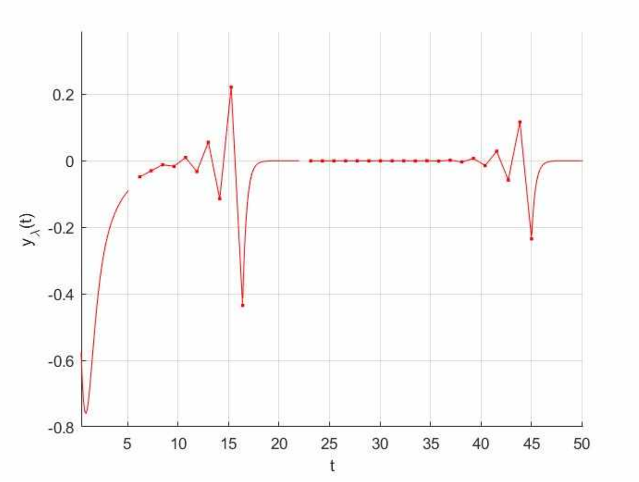


(a) $x_\lambda(t)$ (b) $y_\lambda(t)$

Рис. 4.4. Графік розв'язків динамічної системи (4.34) при $\lambda = 0.6$

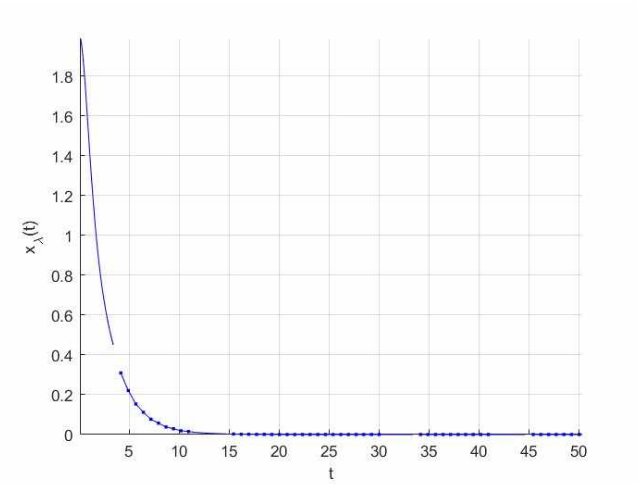


(a) $x_\lambda(t)$

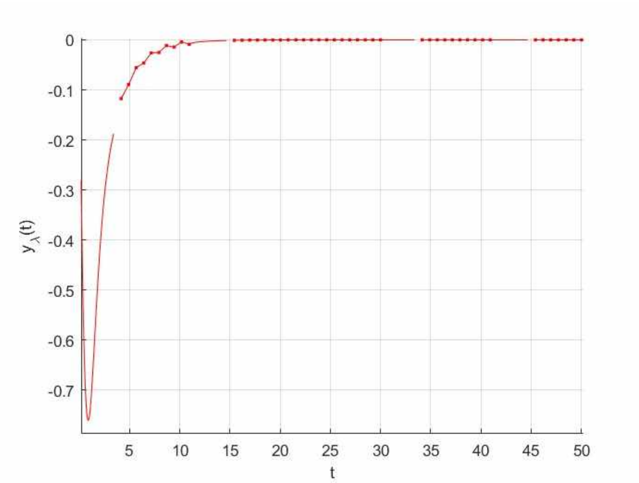


(b) $y_\lambda(t)$

Рис. 4.5. Графік розв'язків динамічної системи (4.34) при $\lambda = 0.45$

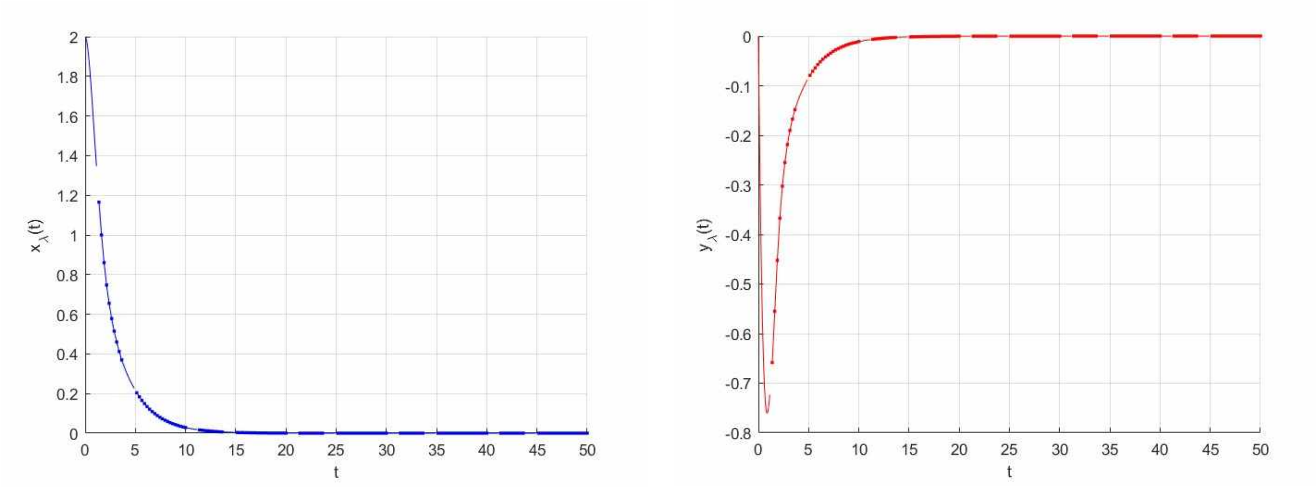


(a) $x_\lambda(t)$



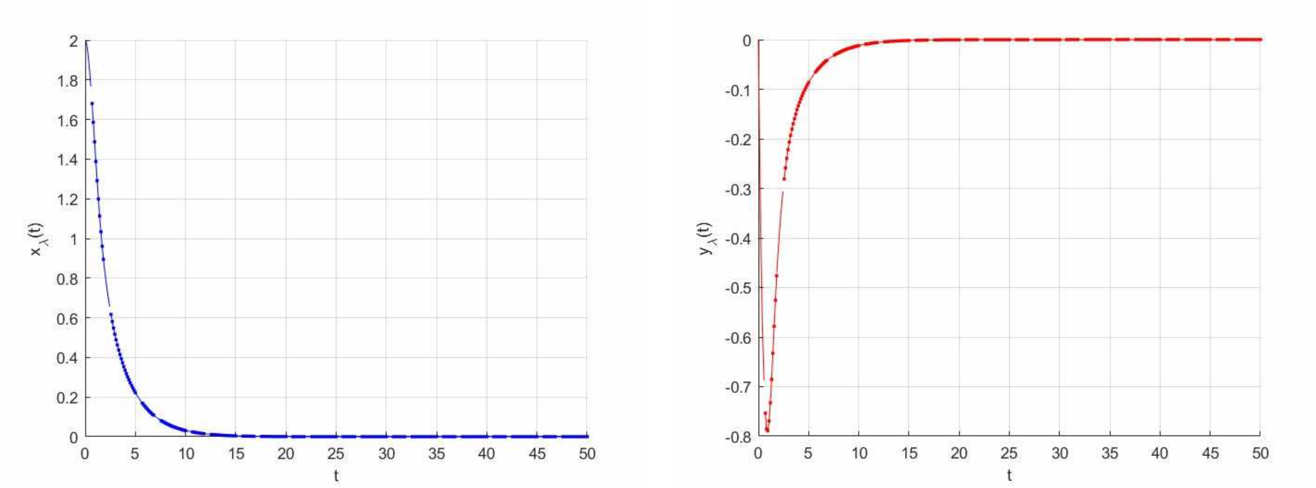
(b) $y_\lambda(t)$

Рис. 4.6. Графік розв'язків динамічної системи (4.34) при $\lambda = 0.3$



(a) $x_\lambda(t)$ (b) $y_\lambda(t)$

Рис. 4.7. Графік розв'язків динамічної системи (4.34) при $\lambda = 0.1$



(a) $x_\lambda(t)$ (b) $y_\lambda(t)$

Рис. 4.8. Графік розв'язків динамічної системи (4.34) при $\lambda = 0.05$

4.5 Висновки до Розділу 4

У цьому розділі вивчено властивість дисипативності системи динамічних рівнянь на сім'ї часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$ за припущення, що функція, яка описує динаміку системи, обмежена разом зі своїми частинними похідними та неперервна. Отримано наступні результати:

- Доведено теорему про умови в термінах функції Ляпунова, за яких система динамічних рівнянь на часових шкалах є дисипативною.
- Доведено теорему про існування функції Ляпунова для дисипативної системи динамічних рівнянь на часових шкалах.
- Встановлено взаємозв'язок між дисипативністю системи диференціальних рівнянь та відповідної динамічної системи на сім'ї часових шкал з малою функцією зернистості.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [96, 110, 114, 116].

Розділ 5

КОЛИВНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ НА ЧАСОВИХ ШКАЛАХ

У даному розділі вивчаються критерії коливності розв'язків динамічних рівнянь на часових шкалах за умови коливності розв'язків відповідного диференціального рівняння на дійсній осі. Розглянута також зворотна задача.

Розглядається лінійне диференціальне рівняння другого порядку на відрізку $[0, a]$

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \tag{5.1}$$

де $p \in C([0, a])$, і відповідне йому динамічне рівняння, визначене на множині часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$

$$x_\lambda^{\Delta\Delta} + p(t)x_\lambda = 0, \tag{5.2}$$

тут $t \in \mathbb{T}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$, $\lambda = 0$ - гранична точка множини Λ, точка $t = 0$ лежить в $\mathbb{T}_\lambda$ при всіх $\lambda \in \Lambda$, $x_\lambda : \mathbb{T}_\lambda \to \mathbb{R}^d$, і $x_\lambda^\Delta(t)$ – дельта-похідна функції $x_\lambda(t)$ на $\mathbb{T}_\lambda$.

Визначимо $\mu_\lambda := \sup_{t \in \mathbb{T}_\lambda} \mu_\lambda(t)$, де $\mu_\lambda : \mathbb{T}_\lambda \to [0, \infty)$ - функція зернистості. Якщо $\mu_\lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$, то $\mathbb{T}_\lambda$ збігається до неперервної шкали часу $\mathbb{T}_0 = \mathbb{R}$.

Оскільки $p(t)$ є неперервною на $[0, a]$, то розв'язок рівняння (5.1) з довільними початковими умовами в точці $t_0 \in [0, a]$ існує та єдиний на всьому відрізку $[0, a]$ [89].

Далі нам знадобляться наступні означення.

Означення 5.1. Розв'язок $x_\lambda(t)$ динамічного рівняння (5.2) має узагальнений нуль у точці $t \in \mathbb{T}_\lambda$, якщо виконується одна з умов:

1) якщо $x_\lambda(t) = 0$;

2) якщо t – розсіяний справа і $x_\lambda(t) \cdot x_\lambda(\sigma(t)) < 0$.

Означення 5.2. Якщо на певному інтервалі розв'язок $x_\lambda(t)$ матиме принаймні два узагальнені нулі, ми будемо називати його коливним на цьому інтервалі.

Означення 5.3. Розв'язки $x(t)$ і x_λ рівнянь (5.1) і (5.2) будемо називати відповідними, якщо $x(t_0) = x_\lambda(t_0) = x_0$, а $\dot{x}(t_0) = x_\lambda^\Delta(t_0) = \dot{x}_0$.

5.1 Допоміжні твердження

Для подальших доведень нам знадобиться наступний результат щодо близькості відповідних розв'язків систем диференціальних рівнянь та відповідної системи рівнянь на часових шкалах.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \ t \in [0, a], \tag{5.3}$$

де $x \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ - область в просторі $\mathbb{R}^n$, і відповідну систему рівнянь, визначену на $\mathbb{T}_\lambda$

$$x_\lambda^\Delta = X(t, x_\lambda). \tag{5.4}$$

У нашому випадку система (5.3), що відповідає диференціальному рівнянню (5.1), має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -p(t)x, \end{cases}$$

а система (5.4), відповідна динамічному рівнянню (5.2) на часових шкалах, має вигляд

$$\begin{cases} \frac{\Delta x}{\Delta t} = y_\lambda, \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} = -p(t)x_\lambda. \end{cases}$$

Припустимо, що функція $X(t, x)$ є неперервно диференційованою і обмеженою разом зі своїми частинними похідними, тобто існує $C > 0$ таке, що

$$|X(t, x)| + \left|\frac{\partial X(t, x)}{\partial t}\right| + \left\|\frac{\partial X(t, x)}{\partial x}\right\| \le C,$$

при $t \in \mathbb{T}_\lambda$, $x \in D$, де $\frac{\partial X}{\partial x}$ є відповідною матрицею Якобі.

Нехай $t_0 \in \mathbb{T}_\lambda$, $t_0 + T \in \mathbb{T}_\lambda$, $x(t)$ та $x_\lambda(t)$ є розв'язками (5.1) і (5.2), а також відповідних їм систем (5.3) на $[t_0, t_0 + T]$ і (5.4) на $[t_0, t_0 + T]_{\mathbb{T}_\lambda}$. Справедлива наступна лема:

Лема 5.1. *[57] Якщо x_λ і $x(t)$ є відповідними розв'язками систем* (5.4) *і* (5.3)*, то справедлива нерівність*

$$|x(t) - x_\lambda(t)| \leq \mu_\lambda K(T) \tag{5.5}$$

де K – константа, залежна від T , $\mu_\lambda = \sup_{t \in [t_0, t_0+T]_{\mathbb{T}_\lambda}} \mu_\lambda(t)$ для $t \in [t_0, t_0 + T]_{\mathbb{T}_\lambda}$.

Оскільки при достатньо малих значеннях μ_λ матриця X системи (5.4) є неперервною, обмеженою, регресивною і ліпшицево-неперервною, то, як випливає з [25, Теореми 8.16, 8.18, 8.20], розв'язок задачі Коші (5.4) з початковими даними $x(t_0) = x_0 \in D$, $t_0 \in \mathbb{T}_\lambda$ може бути продовжено як вправо, так і вліво від точки t_0, в тому числі в точку $t = 0 \in \mathbb{T}_\lambda$. Таким чином, всі розв'язки системи (5.4) можна визначити початковими даними в точці $t_0 = 0$.

Представимо кілька необхідних у подальшому тверджень.

У наступних лемах ми розглядатимемо розв'язки рівняння (5.1) з початковими умовами $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = x_1$, де

$$x_0^2 + x_1^2 = 1. \tag{5.6}$$

Позначимо дану сферу як S. Нехай $x(t)$ - такий розв'язок, а t_k - його нулі на $(0, a)$, тоді справедливі наступні леми.

Лема 5.2. *Існує число $\nu > 0$, таке що для будь-якого нуля t_k будь-якого розв'язку $x(t)$ рівняння* (5.1) *з початковими умовами* (5.6) *виконується нерівність*

$$|\dot{x}(t_k)| \geq \nu. \tag{5.7}$$

Доведення. Доведемо це твердження від супротивного. Припустимо, що твердження леми не виконується. Тоді існує послідовність $\nu_n \to 0$, для кожного n існує розв'язок $x_n(t)$ з початковими умовами $x_{n0} = x_n(0)$, $x_{n1} = \dot{x}_n(0)$, який має принаймні один нуль t_n такий, що $x_n(t_n) = 0$, $|\dot{x}_n(t_n)| \leq \nu_n$. Оскільки S - компакт, то існують збіжні підпослідовності $x_{n0} \to x_0$, $x_{n1} \to x_1$, де $x_0, x_1 \in S$.

Розглянемо розв'язок $x^*(t)$ рівняння (5.1) з початковими умовами x_0, x_1 та нулями $t_n \to t^* \in [0, a]$. З неперервної залежності розв'язків від початкових умов маємо:

$$\sup_{t\in[0,a]} \left(|x_n(t) - x^*(t)| + |\dot{x}_n(t) - \dot{x}^*(t)|\right) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.8}$$

Отже,

$$|x_n(t_n) - x^*(t^*)| \le |x_n(t_n) - x^*(t_n)| + |x^*(t_n) - x^*(t^*)| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{5.9}$$

звідки $x^*(t_0) = 0$.

Аналогічно отримаємо $|\dot{x}_n(t_n) - \dot{x}^*(t^*)| \to 0$. Але оскільки $\dot{x}_n(t_n) \to 0$, $n \to \infty$, отримаємо $\dot{x}^*(t^*) = 0$. Отже, $x^*(t)$ є тривіальним розв'язком рівняння (5.1), що суперечить припущенню.

Таким чином, ми маємо

$$|\dot{x}(t_k)| \ge \nu.$$

□

Лема 5.3. *Існує $\varepsilon > 0$-окіл нулів t_k всіх розв'язків $x(t)$ рівняння* (5.1) *з початковими умовами* (5.6) *такий, що для всіх $t \in [t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon]$ виконується*

$$|\dot{x}(t)| > 0.$$

Доведення. Припустимо, що це не так. Тоді існує послідовність $\{\varepsilon_n\}$ така, що $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, і послідовність розв'язків $x_n(t)$ рівняння (5.1) з нулем в точці t_n, в ε_n-околі якої існує τ_n, таке що $\dot{x}_n(\tau_n) = 0$.

З попередньої леми відомо, що нулі t_n розв'язку $x(t)$ рівняння (5.1) збігаються (за підпослідовністю) до t_0, що є нулем граничного розв'язку $x^*(t)$. Але $\tau_n \to t_0$ при $n \to \infty$, звідки $x^*(t)$ є тривіальним, що суперечить умові. □

Лема 5.4. *Для будь-якого $\delta \le \varepsilon$, де ε з Леми 5.3, існує $\gamma > 0$ таке, що для будь-якого нуля t_n розв'язку $x(t)$ рівняння* (5.1) *з початковими умовами* (5.6) *справедливі нерівності*

$$|x(t_n - \delta)| \ge \gamma, \quad |x(t_n + \delta)| \ge \gamma.$$

Доведення. Припустимо, що це не так, тобто існують такі $\delta \le \varepsilon$, послідовність $\{\gamma_n\}$, що $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$, і послідовність розв'язків $x_n(t)$ з нулем в точці t_n, такі, що, наприклад,

$$|x(t_n - \delta)| < \gamma. \tag{5.10}$$

Послідовність розв'язків $x_n(t)$ рівномірно збігається до $x_0(t)$, а $\dot{x}_n(t)$ до $\dot{x}_0(t)$ при $t \in [0, a]$. Послідовність нулів $t_n \to t_0$, і $x_0(t_0) = 0$, тоді з нерівності (5.10) випливає, що $x_n(t_n - \delta) \to 0$, $n \to \infty$. Але, як і раніше, з рівномірної збіжності послідовності розв'язків $x_n(t)$ випливає, що $x_0(t_0 - \delta) = 0$. Отже, існує такий розв'язок, що $x_0(t_0 - \delta) = x_0(t_0) = 0$. Проте δ-окіл точки t_0 лежить в ε-околі точки t_0, в якому, згідно з Лемою 5.3, похідна $\dot{x}_0(t)$ не обертається в нуль. Однак, оскільки $x_0(t_0 - \delta) = x_0(t_0) = 0$, то згідно з Теоремою Ролля на інтервалі $(t_0 - \delta, t_0)$ існує принаймні одна точка $\tilde{t}$, в якій похідна $\dot{x}_0(\tilde{t}) = 0$. З суперечності випливає доведення леми. □

Розглянемо тепер динамічне рівняння (5.2) при $t \in [0, a]_{\mathbb{T}_\lambda}$, де $a > 0$ і $p \in C([0, a])$. Вивчатимемо розв'язки рівняння (5.2) з початковими умовами, аналогічними (5.6): $t_0 = 0$, $x_\lambda(0) = x_0$, $x_\lambda^\Delta(0) = x_1$, де

$$x_0^2 + x_1^2 = 1. \tag{5.11}$$

Тоді мають місце наступні леми.

Лема 5.5. *Існує таке число $\nu(\mu_\lambda) > 0$, що для будь-якого узагальненого нуля t_k деякого розв'язку $x_\lambda(t)$ динамічного рівняння* (5.2) *з початковими умовами* (5.11) *виконується нерівність*

$$\left|x_\lambda^\Delta(t_k)\right| \geq \nu(\mu_\lambda). \tag{5.12}$$

Доведення. Доведемо це твердження від супротивного. Припустимо, що умова (5.12) не виконується. Тоді існує така послідовність $\{\nu_n\}$, $\nu_n \to 0$ при $n \to \infty$, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує розв'язок $x_\lambda^{(n)}(t)$ динамічного рівняння (5.2) з початковими умовами $t_{n0} = 0$, $x_{n0} = x_\lambda^{(n)}(0)$, $x_{n1} = \left(x_\lambda^{(n)}\right)^\Delta(0)$, що задовольняють умові (5.11), і розв'язок $x_\lambda^{(n)}(t)$ має хоча б один узагальнений нуль t_n, тобто виконується одна з умов:

$$1) \quad x_\lambda^{(n)}(t_n) = 0;$$

$$2) \quad t_n \text{ – розсіяний справа і } x_\lambda^{(n)}(t_n) \cdot x_\lambda^{(n)}(\sigma(t_n)) < 0; \tag{5.13}$$

при цьому $\left|\left(x_\lambda^{(n)}\right)^\Delta(t_n)\right| \leq \nu_n$.

Оскільки множина початкових даних (5.11) є компактною, то з послідовності (x_{n0}, x_{n1}) можна виділити збіжні підпослідовності, які збігаються до (x_0, x_1).

Без втрати загальності можна припустити, що сама послідовність (x_{n0}, x_{n1}) є збіжною:

$$(x_{n0}, x_{n1}) \to (x_0, x_1), \quad n \to \infty,$$

де ${x_0}^2 + {x_1}^2 = 1$.

Розглянемо нетривіальний розв'язок $x^*_\lambda(t)$ динамічного рівняння (5.2) з початковими умовами $x^*_\lambda(0) = x_0$, $\left(x^*_\lambda\right)^\Delta(0) = x_1$, $x_0^2 + x_1^2 = 1$. Без втрати загальності також можна припустити, що послідовність $\{t_n\}$ - збіжна, $t_n \to t^* \in [0, a]_\lambda$, $n \to \infty$.

З неперервної залежності розв'язків системи (5.4) від початкових умов задачі Коші на скінченному інтервалі [52, Теорема 3.2], маємо:

$$\sup_{t \in [0,a]_\lambda} \left(\left| x^{(n)}_\lambda(t) - x^*_\lambda(t) \right| + \left| \left(x^{(n)}_\lambda\right)^\Delta(t) - \left(x^*_\lambda\right)^\Delta(t) \right| \right) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.14}$$

Тоді, оскільки

$$\left| x^{(n)}_\lambda(t_n) - x_\lambda(t) \right| \le \left| x^{(n)}_\lambda(t_n) - x^*_\lambda(t_n) \right| + \left| x^*_\lambda(t_n) - x^*_\lambda(t^*) \right| \to 0, \quad n \to \infty,$$

отримаємо, що

$$x^{(n)}_\lambda(t_n) \to x^*_\lambda(t^*), \quad n \to \infty.$$

Аналогічно, отримаємо

$$\left(x^{(n)}_\lambda\right)^\Delta(t_n) \to \left(x^*_\lambda\right)^\Delta(t^*), \quad n \to \infty.$$

Розглянемо узагальнені нулі t_n такі, що $x^{(n)}_\lambda(t_n) = 0$ і $\left| \left(x^{(n)}_\lambda\right)^\Delta(t_n) \right| \le \nu_n$. Тоді $x^*_\lambda(t^*) = 0$.

А оскільки $\left(x^{(n)}_\lambda\right)^\Delta(t_n) \to 0$, $n \to \infty$, то $\left(x^*_\lambda\right)^\Delta(t^*) = 0$. Отже, $x^*_\lambda(t)$ тривіальний розв'язок диференціального рівняння (5.1), що суперечить припущенню.

Таким чином, отримаємо, що

$$\left| x^\Delta_\lambda(t_k) \right| \ge \nu(\mu_\lambda).$$

Тепер розглянемо такі узагальнені нулі t_n, що t_n - розсіяні справа,

$$x^{(n)}_\lambda(t_n) \cdot x^{(n)}_\lambda(\sigma(t_n)) < 0 \text{ і } \left| \left(x^{(n)}_\lambda\right)^\Delta(t_n) \right| \le \nu_n.$$

Звернемо увагу, що якщо розв'язок з початком у нулі був нетривіальним, то в силу [25, Теорема.8.16] не існує жодної точки на часовій шкалі після якої він вироджується в тривіальний.

Розглянемо послідовність $\{\sigma(t_n)\}$ для нулів t_n. Оскільки за означенням $\sigma(t_n) := \inf\{t \in [0, a]_\lambda \mid t > t_n\}$, то для розсіяних t_n

$$\sigma(t_n) \in (t_n; t_{n+1}], \tag{5.15}$$

причому $\sigma(t_n) = t_{n+1}$, якщо t_{n+1} - наступна точка часової шкали після t_n. Окрім того, якщо

$$t_n \to t^* \quad n \to \infty, \tag{5.16}$$

то

$$|t_{n+1} - t_n| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.17}$$

Таким чином з (5.15)-(5.17), отримаємо:

$$\sigma(t_n) \to t^*, \quad n \to \infty.$$

Тоді з (5.14) і нерівності

$$\left|x_\lambda^{(n)}(\sigma(t_n)) - x_\lambda^*(t^*)\right| \leq \left|x_\lambda^{(n)}(\sigma(t_n)) - x_\lambda^*(\sigma(t_n))\right| + \left|x_\lambda^*(\sigma(t_n)) - x_\lambda^*(t^*)\right| \to 0, \quad n \to \infty,$$

отримаємо,

$$x_\lambda^{(n)}(\sigma(t_n)) \to x_\lambda^*(t^*), \quad n \to \infty.$$

Аналогічним чином можна показати, що

$$\left(x_\lambda^{(n)}\right)^\Delta(\sigma(t_n)) \to \left(x_\lambda^*\right)^\Delta(t^*), \quad n \to \infty.$$

Тоді переходячи до границі в нерівності (5.13) отримаємо,

$$x_\lambda^*(t^*) \cdot x_\lambda^*(t^*) \leq 0,$$

тобто $x_\lambda^*(t^*) = 0$. А оскільки $\left(x_\lambda^{(n)}\right)^\Delta(t_n) \to 0, \quad n \to \infty$, то $\left(x_\lambda^*\right)^\Delta(t^*) = 0$. Отже, $x_\lambda^*(t)$ тривіальний розв'язок рівняння (5.1), що суперечить припущенню.

Таким чином, отримаємо, що

$$\left|x_\lambda^\Delta(t_k)\right| \geq \nu(\mu_\lambda).$$

□

Наступна лема стосується лінійних систем (5.3) та (5.4), а саме систем такого вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{5.18}$$

та

$$x_\lambda^\Delta = A(t)x_\lambda. \tag{5.19}$$

Якщо матриця $A(t)$ є неперервною при $t \geq 0$, то всі розв'язки систем (5.18) та (5.19) необмежено продовжуються вправо. Ми будемо розглядати розв'язки з початковими умовами $x(t_0) = x_\lambda(t_0) = x_0$, $t_0 \geq 0$ і

$$|x_0| = 1. \tag{5.20}$$

Позначимо $M(T, t_0) = \max_{[t_0, t_0+T]} |A(t)|$, де $T > 0$ – фіксовано. Тоді справедлива наступна лема.

Лема 5.6. *Всі розв'язки задач Коші систем* (5.18) *та* (5.19) *з початковими умовами* (5.20) *є рівномірно обмеженими, тобто існує таке $R > 0$, яке залежить лише від T та $M(T, t_0)$, що для будь-яких $t \in [t_0, t_0 + T]$ та $t \in [t_0, t_0 + T]_{\mathbb{T}\lambda}$ виконуються нерівності*

$$|x(t)| \leq R, \quad |x_\lambda(t)| \leq R.$$

Доведення. Дійсно, будь-який розв'язок системи (5.18) має інтегральне представлення

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(t_1)x(t_1)dt_1.$$

Використовуючи метод послідовних наближень [105, с.73], отримаємо формальне представлення розв'язку

$$x(t) = \Omega_{t_0}^t x_0,$$

де

$$\Omega_{t_0}^t = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(t_1)x(t_0)dt_1 + \int_{t_0}^{t} A(t_1), ds \int_{t_0}^{t_1} A(t_2)x(t_2)dt_2 + \cdots .$$

Звідси, при $t \in [t_0, t_0 + T]$, оскільки $|t - t_0| \leq T$, маємо оцінку

$$|x(t)| \leq |\Omega_{t_0}^t||x_0| \leq 1 + MT + \frac{M^2T^2}{2!} + \cdots = e^{MT} = R.$$

Тепер розглянемо розв'язок системи (5.19), які мають представлення

$$x_\lambda(t) = x_0 + \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}_\lambda}} A(t_1)x_\lambda(t_1)\Delta t_1.$$

Використовуючи метод послідовних наближень, замінимо в останньому інтегралі $x_\lambda(t_1)$ сумою

$$x_\lambda(t_1) = x_\lambda(t_0) + \int\limits_{[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}} A(t_2)x_\lambda(t_2)\Delta t_2.$$

Отримаємо

$$x_\lambda(t) = x_0 + \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}_\lambda}} A(t_1)x_\lambda(t_0)\Delta t_1 + \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}_\lambda}} A(t_1)\Delta t_1 \int\limits_{[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}} A(t_2)x_\lambda(t_2)\Delta t_2.$$

Повторюючи цей процес нескінченну кількість разів, отримаємо формальне представлення розв'язку

$$x_\lambda(t) = x_0 + \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}_\lambda}} A(t_1)x_\lambda(t_0)\Delta t_1 + \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}_\lambda}} A(t_1)\Delta t_1 \int\limits_{[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}} A(t_2)x_\lambda(t_2)\Delta t_2 + \cdots .$$

Тоді отримаємо оцінку

$$|x_\lambda(t)| \le |x_0| + \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}_\lambda}} |A(t_1)|\,|x_\lambda(t_0)|\,\Delta t_1 + \int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}_\lambda}} |A(t_1)|\Delta t_1 \int\limits_{[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}} |A(t_2)|\,|x_\lambda(t_2)|\,\Delta t_2 + \cdots .$$

Оскільки

$$\int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}_\lambda}} |A(t_1)|\Delta t_1 \le M\,|t-t_0|\,,$$

$$\int\limits_{[t_0,t]_{\mathbb{T}_\lambda}} |A(t_1)|\Delta t_1 \int\limits_{[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}} |A(t_2)|\,|x_\lambda(t_2)|\,\Delta t_2 \le \frac{M^2\,|t-t_0|^2}{2!},$$

продовжуючи аналогічно далі і враховуючи, що $|t-t_0| \le T$, отримаємо

$$|x(t)| \le 1 + MT + \frac{M^2\,|t-t_0|^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(MT)^n}{n!} = e^{MT} = R,$$

що і доводить лему. $\square$

Лема 5.7. *Існують такі μ_0 та B_0, що для всіх $0 < \mu_\lambda \le \mu_0$ виконується нерівність*

$$\nu(\mu_\lambda) \ge B_0,$$

де $\nu(\mu_\lambda)$ з Леми 5.5.

Доведення. Нехай твердження леми не виконується. Тоді існує послідовність функцій зернистості $\{\mu_{\lambda n}(t)\}$ така, що якщо $\mu_n = \sup_{t\in[0,a]_{\mathbb{T}_{\lambda n}}}(\mu_{\lambda n}(t))$, то $\mu_n > 0$ і $\mu_n \to 0$, $n \to \infty$ та при цьому

$$\nu(\mu_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отже, звідси випливає існування для кожного μ_n розв'язків x_{λ_n} динамічного рівняння (5.2) (з даним μ_n) з початковими даними $x_{0n} = x_{\lambda n}(0)$, $x_{1n} = x^{\Delta}_{\lambda n}(0)$, які задовольняють умову (5.11) і такі, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ з послідовності узагальнених нулів $\{t_{k(n)}\}_{\lambda n}$ розв'язку $x_{\lambda n}$ можна вибрати такі, що послідовність значень похідних в цих точках $\{x^{\Delta}_{\lambda n}(t_{k(n)})\}$ задовольняє умову

$$x^{\Delta}_{\lambda n}(t_{k(n)}) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.21}$$

Зауважимо, що оскільки $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$, то значення розв'язку в узагальнених нулях або $x_{\lambda n}(t_{k(n)}) = 0$, або, якщо t_k - розсіяна справа і $x_{\lambda n}(t_{k(n)}) \cdot x_{\lambda n}(\sigma(t_{k(n)})) < 0$, то $x_{\lambda n}(t_{k(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Розглянемо другий випадок. Нехай t_k – розсіяна справа і

$$x_{\lambda n}(t_{k(n)}) \cdot x_{\lambda n}(\sigma(t_{k(n)})) < 0.$$

Перепишемо останню нерівність, враховуючи, що $\sigma(t_{k(n)}) := t_{k(n)} + \mu_{\lambda n}(t_{k(n)})$, отримаємо:

$$x_{\lambda n}(t_{k(n)}) \cdot x_{\lambda n}(t_{k(n)} + \mu_{\lambda n}(t_{k(n)})) < 0. \tag{5.22}$$

Оскільки $\mu_n := \sup_{t\in[0,a]_{\mathbb{T}_{\lambda n}}}(\mu_{\lambda n}(t)) \to 0$ при $n \to \infty$, то і $\mu_{\lambda n}(t_{k(n)}) \to 0$. Тоді $\left|x_{\lambda n}(t_{k(n)} + \mu_{\lambda n}(t_{k(n)})) - x_{\lambda n}(t_{k(n)})\right| \to 0$ при $n \to \infty$. Крім того, з нерівності (5.22) випливає, що значення $x_{\lambda n}(t_{k(n)})$ та $x_{\lambda n}(t_{k(n)} + \mu_{\lambda n}(t_{k(n)}))$ різних знаків, отже $x_{\lambda n}(t_{k(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$. Послідовність (x_{0n}, x_{1n}) можна вважати збіжною. Отже,

$$(x_{0n}, x_{1n}) \to (x_0, x_1), \quad n \to \infty.$$

Позначимо через $t_{k(n)} \in [0,a]_{\mathbb{T}_{\lambda n}}$ часової шкали з даним μ_n — такий аргумент, при якому похідна з властивістю (5.21) досягається. Тоді маємо,

$$x_{\lambda n}(t_{k(n)}) \to 0, \quad n \to \infty \tag{5.23}$$

і

$$x^{\Delta}_{\lambda n}(t_{k(n)}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

З послідовності $\{t_{k(n)}\}$ також можна виділити збіжну підпослідовність. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що сама $\{t_{k(n)}\}$ збіжна. Отже, $t_{k(n)} \to t^*$, $n \to \infty$, $t^* \in [0,a]$.

Розглянемо тепер розв'язок диференціального рівняння (5.1) з початковими даними (5.6). Очевидно, що він нетривіальний. Позначимо його $x(t,x_0,x_1)$. Через $x(t,x_{0n},x_{1n})$ позначимо розв'язок рівняння (5.1) з початковими даними (x_{0n},x_{1n}).

Очевидно, що

$$x(t_n,x_0,x_1) \to x(t^*,x_0,x_1), \quad n \to \infty. \tag{5.24}$$

З неперервної залежності розв'язків задачі Коші від початкових даних на скінченному інтервалі маємо:

$$\sup_{t\in[0,a]} |x(t,x_{0n},x_{1n}) - x(t,x_0,x_1)| \to 0, \quad \text{якщо } (x_{1n},x_{0n}) \to (x_0,x_1).$$

Отже,

$$|x(t_n,x_{0n},x_{1n}) - x(t_n,x_0,x_1)| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.25}$$

З Леми 5.6 випливає, що всі розв'язки задачі Коші для диференціального рівняння (5.1) і динамічного рівняння (5.2) з початковими даними (5.6) є рівномірно обмеженими на $[0,a]$ та $[0,a]_{\mathbb{T}_\lambda}$ відповідно. Тоді з Леми 5.1 випливає, що для відповідних розв'язків цих рівнянь справедлива рівномірна оцінка (5.5). Рівномірність тут означає, що константи $K(T)$ та R в лемах 5.1 і 5.6 можна обрати залежними лише від a та максимуму функції $|p(t)|$ на $[0,a]$.

Отже,

$$|x(t_n,x_{0n},x_{1n}) - x_{\lambda n}(t_n)| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.26}$$

Отже, з (5.23), (5.24)-(5.26) отримаємо:

$$x(t^*,x_0,x_1) = 0.$$

Аналогічним чином можна переконатися, що і $\dot{x}(t^*,x_0,x_1) = 0$, це суперечить нетривіальності розв'язку $x(t,x_0,x_1)$. □

Лема 5.8. *Існують $\varepsilon > 0$ і $\mu_0 > 0$, такі що для всіх $0 < \mu_\lambda \le \mu_0$ для всіх розв'язків $x_\lambda(t)$ динамічного рівняння* (5.2) *з початковими умовами* (5.11) *в ε-околі всіх узагальнених нулів t_k $x_\lambda^\Delta(t)$ зберігає знак, тобто або*

$$\forall t \in [t_k - \varepsilon; t_k + \varepsilon] : x_\lambda^\Delta(t) > 0,$$

або

$$\forall t \in [t_k - \varepsilon; t_k + \varepsilon] : x_\lambda^\Delta(t) < 0.$$

Доведення. Припустимо, що твердження леми не виконується. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує послідовність $\{\mu_n(\varepsilon)\}$ така, що $\mu_n(\varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$, де $\mu_n = \max_{t\in[0,a]_{\mathbb{T}_\lambda}} \mu_\lambda(t)$, і $\left|x_\lambda^\Delta(t)\right| = 0$, де t належить ε-околу деякого узагальненого нуля t_k розв'язку $x_\lambda(t)$ динамічного рівняння (5.2) з початковими умовами (5.11).

Тоді існує послідовність $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to 0$, для кожного з її елементів існує відповідна послідовність $\mu_k(\varepsilon_n)$ така, що $\mu_k(\varepsilon_n) \to 0$, $k \to \infty$, при цьому $\left|x_\lambda^\Delta(t)\right| = 0$.

Використовуючи діагональний метод, ми отримаємо послідовність $\varepsilon_n \to 0$ та відповідну послідовність $\mu_n(\varepsilon_n)$, а також існування розв'язку $x_{\lambda_n}(t)$ з початковими умовами (x_{0n}, x_{1n}) та узагальненим нулем t_n, для якого існує $\tau_n \in (t_n - \varepsilon_n; t_n + \varepsilon_n) \cap [\,0, a]_{\mathbb{T}_{\lambda_n}}$ таке, що або $x_{\lambda_n}^\Delta(\tau_n) = 0$, або $x_{\lambda_n}^\Delta(\tau_n) \cdot x_{\lambda_n}^\Delta(t_n) < 0$.

Припустимо, що $x_{\lambda_n}^\Delta(t_n) > 0$, і з Леми 5.7 маємо, що існує $B_0 > 0$ таке, що

$$x_{\lambda_n}^\Delta(t_n) \ge B_0 \tag{5.27}$$

рівномірно по всіх шкалах. Таким чином, $x_{\lambda_n}^\Delta(\tau_n) = 0$ або $x_{\lambda_n}^\Delta(\tau_n) < 0$.

Розглянемо тепер розв'язок диференціального рівняння (5.1) з початковими умовами (5.6). Очевидно, що це нетривіальний розв'язок. Позначимо його $x(t, x_0, x_1)$. Через $x(t, x_{0n}, x_{1n})$ позначимо розв'язок рівняння (5.1) з початковими умовами (x_{0n}, x_{1n}), такий, що початкові умови (x_{0n}, x_{1n}) рівномірно по всіх шкалах збігаються до (x_0, x_1).

Нехай при $\varepsilon_n \to 0$, $t_n \to t^*$ при $n \to \infty$, тоді $\tau_n \to t^*$ при $n \to \infty$.

З Леми 5.1 випливає, що

$$\left|x_{\lambda_n}(t) - x(t, x_{0n}, x_{1n})\right| \le K\mu_n(\varepsilon_n)$$

і

$$\left|x_{\lambda_n}^\Delta(t) - \dot{x}(t, x_{0n}, x_{1n})\right| \le K\mu_n(\varepsilon_n).$$

Очевидно, що $|\dot{x}(t, x_{0n}, x_{1n}) - \dot{x}(t, x_0, x_1)| \to 0$, $n \to \infty$, звідки

$$x^{\Delta}_{\lambda_n}(\tau_n) \to \dot{x}(t^*, x_0, x_1) \quad n \to \infty.$$

Якщо $x^{\Delta}_{\lambda_n}(\tau_n) = 0$, то з останнього випливає $\dot{x}(t^*, x_0, x_1) = 0$. Проте $x^{\Delta}_{\lambda_n}(t_n) \to \dot{x}(t^*, x_0, x_1) = 0$ при $n \to \infty$, що суперечить (5.27).

Якщо $x^{\Delta}_{\lambda_n}(\tau_n) < 0$, то $x^{\Delta}_{\lambda_n}(\tau_n) \to \dot{x}(t^* x_0, x_1) \leq 0$ при $n \to \infty$. Оскільки $x^{\Delta}_{\lambda_n}(t_n) > 0$, то $x^{\Delta}_{\lambda_n}(t_n) \to \dot{x}(t^* x_0, x_1) \geq 0$ при $n \to \infty$. Звідки випливає, що $\dot{x}(t^*, x_0, x_1) = 0$, що суперечить (5.27).

Отже, припущення невірне, що і завершує доведення леми. □

Лема 5.9. *Для будь-якого $\delta \leq \varepsilon$, де ε з Леми 5.8, існують μ_0 і $\gamma > 0$ такі, що для будь-якого $\mu_\lambda \leq \mu_0$ та будь-якого узагальненого нуля t_0 розв'язки $x_\lambda(t)$ динамічного рівняння* (5.2) *виконуються:*

$$|x_\lambda(t_l)| \geq \gamma \tag{5.28}$$

та

$$|x_\lambda(t_r)| \geq \gamma, \tag{5.29}$$

де $t_l = \inf\{t \in \mathbb{T}_\lambda | t > t_0 - \delta\}$, $t_r = \sup\{t \in \mathbb{T}_\lambda | t < t_0 + \delta\}$.

Зауваження 5.1. Якщо точки $t_0 \pm \delta$ належать шкалі, то $t_l = t_0 - \delta$ і $t_r = t_0 + \delta$ відповідно. В іншому випадку, для кожного фіксованого δ вибором малої функції зернистості $\mu_\lambda(t) \leq \mu_\lambda \leq \mu_0$ ми завжди можемо гарантувати існування точок шкали, відмінних від t_0, в δ-околі точки t_0.

Доведення. Припустимо, що умова леми не виконується, тобто існує $\delta \leq \varepsilon$, ε з Леми 5.8, таке, що для будь-якого μ_0 і будь-якого γ існує шкала $\mu_\lambda < \mu_0$ така, що (5.28) і (5.29) не виконуються. Тоді для будь-якої послідовності $\gamma_k \to 0$ при $n \to \infty$ існує послідовність шкал $\{\mu_k(n)\}$ така, що твердження не виконується.

Знову використовуємо діагональний метод, тоді існують послідовності $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$ і відповідна послідовність $\{\mu_n(n)\}$, і на будь-якій такій шкалі існує розв'язок $x^{(n)}_{\lambda_n}(t)$ з початковими даними (x_{0n}, x_{1n}), який має узагальнений нуль $t^{(n)}_n$, і, приймаючи $t^{(n)}_{n,l} = \inf\{t \in \mathbb{T}_\lambda | t > t^{(n)}_n - \delta\}$ та $t^{(n)}_{n,r} = \sup\{t \in \mathbb{T}_\lambda | t < t^{(n)}_n + \delta\}$,

$$\text{або } \left| x^{(n)}_{\lambda_n}\left(t^{(n)}_{n,l}\right)\right| < \gamma_n, \quad \text{або } \left| x^{(n)}_{\lambda_n}\left(t^{(n)}_{n,r}\right)\right| < \gamma_n. \tag{5.30}$$

Знову розглянемо розв'язок диференціального рівняння (5.1) з початковими даними (5.6). Очевидно, що він нетривіальний. Позначимо його $x(t, x_0, x_1)$. Через $x(t, x_{0n}, x_{1n})$ позначимо розв'язок рівняння (5.1) з початковими даними (x_{0n}, x_{1n}) такий, що початкові дані (x_{0n}, x_{1n}) рівномірно по всіх шкалах збігаються до (x_0, x_1).

Нехай $t_n^{(n)} \to t^*$ при $n \to \infty$, тоді через те, що $\mu_n(t_n^{(n)}) \to 0$, отримаємо, що $\sigma\left(t_n^{(n)}\right) = t_n^{(n)} + \mu_n\left(t_n^{(n)}\right) \to t^*,\, n \to \infty$.

З Леми 5.1 випливає, що

$$\left|x_{\lambda_n}^{(n)}(t) - x(t, x_{0n}, x_{1n})\right| \le K\mu_n(t_n^{(n)}).$$

Очевидно, що $|\dot{x}(t, x_{0n}, x_{1n}) - \dot{x}(t, x_0, x_1)| \to 0,\, n \to \infty$, звідки

$$\left|x_{\lambda_n}^{(n)}(t) - x(t, x_0, x_1)\right| \to 0, n \to \infty. \tag{5.31}$$

З (5.30), (5.31) і, оскільки $\gamma_n \to 0,\, n \to \infty$, отримаємо

$$x(t_l^*) = 0. \tag{5.32}$$

Якщо $t_n^{(n)}$ такий, що $x_{\lambda_n}^{(n)}(t_n^{(n)}) = 0$, тоді $x(t^*) = 0$.

Якщо $t_n^{(n)}$ - право-розсіяна така, що $x_{\lambda_n}^{(n)}(t_n^{(n)}) \cdot x_{\lambda_n}^{(n)}(\sigma(t_n^{(n)})) < 0$, тоді переходячи до границі в останній нерівності, отримаємо $x(t^*)^2 \le 0$, звідки знову

$$x(t^*) = 0. \tag{5.33}$$

З лем 5.1 і 5.8 випливає, що

$$\dot{x}(t, x_0, x_1) \neq 0$$

для будь-якого $t \in \left(t^* - \frac{\varepsilon}{2}, t^* + \frac{\varepsilon}{2}\right)$(можна вважати, що $\delta < \varepsilon$).

Однак, оскільки (5.32),(5.33), то згідно з Теоремою Ролля на інтервалі (t_l^*, t^*) існує хоча б одна точка, в якій похідна $\dot{x}(\ \tilde{t}\ ) = 0$. З суперечності випливає доведення леми. $\square$

5.2 Зв’язок коливності розв’язків лінійних динамічних рівнянь другого порядку на часових шкалах та коливності розв’язків відповідних диференціальних рівнянь на дійсній осі

У даному підрозділі розглянемо результати, що стосуються коливності розв’язку лінійного динамічного рівняння другого порядку на часових шкалах при умові коливності розв’язку відповідного диференціального рівняння на дійсній осі, та зворотний результат.

Теорема 5.1. *Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\mu_0 = \mu_0(\lambda)$ таке, що при усіх $\mu_\lambda \le \mu_0$ справедливе твердження:*

Якщо $x(t)$ розв’язок диференціального рівняння (5.1) *із нетривіальними початковими даними $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1$, а $x_\lambda(t)$ відповідний розв’язок динамічного рівняння* (5.2) *на часових шкалах $\mathbb{T}_\lambda$ з початковими даними $x_\lambda(0) = x_0$, $x_\lambda^\Delta(0) = x_1$, то в ε-околі будь-якого нуля t_0 розв’язку $x(t)$ лежить щонайменше один узагальнений нуль $t_{0\lambda}$ відповідного розв’язку рівняння* (5.2).

Доведення. Оберемо довільне $\varepsilon > 0$ та довільний нетривіальний розв’язок $x(t)$ диференціального рівняння (5.1). Якщо перейти від розв’язку $x(t)$ до розв’язку $y(t) = \frac{1}{\sqrt{x_0^2+x_1^2}} \cdot x(t)$ у рівнянні (5.1), то $y(t)$ також є розв’язком рівняння (5.1), а нулі розв’язку $x(t)$ збігаються з нулями розв’язку $y(t)$, але початкові дані для $y(t)$ лежать на S - одиничній сфері в $\mathbb{R}^2$.

Оберемо μ_0 так, щоб при $\mu_\lambda \le \mu_0$ для відповідних розв’язків рівнянь (5.1) і (5.2) виконувалися нерівності:

$$|x_\lambda(t) - y(t)| < \frac{\gamma}{2}$$

та

$$\left|x_\lambda^\Delta(t) - \dot{y}(t)\right| < \frac{\gamma}{2},$$

при $t \in [0, a]_\lambda$. Тоді відповідно до Леми 5.4 в ε-околі будь-якого нуля t_0 розв’язку $y(t)$ існують такі числа $t_1, t_2 \in \mathbb{T}_\lambda$, що $x_\lambda(t_1) > 0$, а $x_\lambda(t_2) < 0$.

Отже, x_λ має узагальнений нуль в ε-околі нуля розв'язку $y(t)$, а отже і нуля розв'язку $x(t)$. □

Зауваження 5.2. З Теореми 5.1 випливають наступні твердження:

Якщо $\{t_n\}_1^N$ *є нулями довільного нетривіального розв'язку* $x(t)$ *диференціального рівняння* (5.1) *на* $[0, a]$*, то відповідний розв'язок* $x_\lambda(t)$ *динамічного рівняння* (5.2) *при достатньо малих значеннях* μ_λ *також має принаймні* N *узагальнених нулів* t_{n_λ} *на* $[0, a]_{\mathbb{T}_\lambda}$*, причому*

$$\left|t_{n_\lambda} - t_n\right| \to 0, \quad \lambda \to 0.$$

Зауваження 5.3. Якщо розв'язок $x(t)$ *диференціального рівняння* (5.1) *коливний на* $[0, a]$*, то відповідний розв'язок* $x_\lambda(t)$ *динамічного рівняння* (5.2) *також коливний на* $[0, a]_{\mathbb{T}_\lambda}$*.*

Тепер розглянемо результат, що стосується впливу коливності розв'язку лінійного динамічного рівняння другого порядку на часових шкалах на коливність розв'язку відповідного диференціального рівняння на дійсній осі.

Теорема 5.2. *Для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує* $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon)$ *таке, що для всіх* $\mu_\lambda \leq \mu_0$ *виконується твердження:*

Якщо $x_\lambda(t, x_0, x_1)$ *є нетривіальним розв'язком динамічного рівняння* (5.2) *з початковими умовами* $x_\lambda(0) = x_0$, $x_\lambda^\Delta(0) = x_1$*, а* $x(t)$ *є відповідним розв'язком диференціального рівняння* (5.1) *з тими самими початковими умовами, то в* ε*-околі будь-якого узагальненого нуля* $t_{0\lambda}$ *розв'язку* $x_\lambda(t)$ *знаходиться хоча б один нуль* t_0 *відповідного розв'язку рівняння* (5.1)*.*

Доведення. Оберемо довільне $\varepsilon > 0$ та довільний нетривіальний розв'язок $x_\lambda(t, x_0, x_1)$ динамічного рівняння (5.2). Якщо від розв'язку $x_\lambda(t)$ перейти до розв'язку $y_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2}} x_\lambda(t)$ у рівнянні (5.2), то $y_\lambda(t)$ є розв'язком цього рівняння, і узагальнені нулі розв'язку $x_\lambda(t)$ збігаються з узагальненими нулями розв'язку $y_\lambda(t)$, проте початкові дані для $y_\lambda(t)$ знаходяться на S - одиничній сфері в $\mathbb{R}^2$.

Оберемо μ_0 так, щоб при $\mu_\lambda \leq \mu_0$ для відповідних розв'язків рівнянь (5.2) і (5.1) виконувались нерівності:

$$|x(t) - y_\lambda(t)| < \frac{\gamma}{2}$$

і

$$\left|\dot{x}(t) - y_\lambda^\Delta(t)\right| < \frac{\gamma}{2},$$

при $t \in [0, a]_{\mathbb{T}_\lambda}$.

Тоді згідно з Лемами 5.8 і 5.4 в ε-околі будь-якого узагальненого нуля $t_{0\lambda}$ розв'язку $y_\lambda(t)$ існують такі числа $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, що $x(t_1) > 0$, а $x(t_2) < 0$. Отже, оскільки $x(t)$ неперервна на $\mathbb{R}$, то на інтервалі між цими точками існує така точка t_0, що $x(t_0) = 0$.

Таким чином, $x(t)$ має нуль в ε-околі узагальненого нуля розв'язку $y_\lambda(t)$, а отже і узагальненого нуля розв'язку $x_\lambda(t)$. □

Зауваження 5.4. З Теореми 5.2 випливають твердження: *Якщо* $\{t_{n_\lambda}\}_1^N$ *узагальнені нулі довільного нетривіального розв'язку* $x_\lambda(t)$ *динамічного рівняння* (5.2) *на* $[0, a]_{\mathbb{T}_\lambda}$, *то відповідний розв'язок* $x(t)$ *диференціального рівняння* (5.1) *при достатньо малих* μ_λ *також має принаймні* N *нулів* t_n *на* $[0, a]$, *причому* $\left|t_n - t_{n_\lambda}\right| \to 0$ *при* $\lambda \to 0$.

Зауваження 5.5. *З попереднього твердження випливає, що якщо розв'язок* $x_\lambda(t)$ *динамічного рівняння* (5.2) *коливний на* $[0, a]_\lambda$, *то відповідний розв'язок* $x(t)$ *диференціального рівняння* (5.1) *також коливний на* $[0, a]$.

З Теорем 5.1 та 5.2 випливає:

Наслідок 5.1. *Для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує* $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon)$ *таке, що для всіх* $\mu_\lambda \leq \mu_0$ *виконується твердження:*

Якщо $x(t)$ *- розв'язок диференціального рівняння* (5.1) *з початковими умовами* $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = x_1$, *а* $x_\lambda(t)$ *- відповідний розв'язок динамічного рівняння* (5.2) *з початковими умовами* $x_\lambda(0) = x_0$, $x_\lambda^\Delta(0) = x_1$, *то в* ε*-околі будь-якого нуля* t_0 *розв'язку* $x(t)$ *знаходиться один і лише один узагальнений нуль* $t_{0\lambda}$ *відповідного розв'язку рівняння* (5.2), *і навпаки.*

Проілюструємо отримані результати на прикладі рівняння Ейрі.

Приклад Розглянемо диференціальне рівняння

$$\ddot{x} + t \cdot x = 0, \tag{5.34}$$

на інтервалі $[0, \frac{7\pi}{2}]$ з початковими умовами

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \tag{5.35}$$

що задовольняють умову (5.6), та відповідне динамічне рівняння

$$x_\lambda^{\Delta\Delta} + t \cdot x_\lambda = 0 \tag{5.36}$$

на множині шкал $\mathbb{T}_\lambda = h\mathbb{Z}$ з тими самими початковими умовами. Зауважимо, що функція зернистості для кожної такої шкали є сталою і дорівнює $\mu_\lambda = h$.

Рівняння (5.36) набуває вигляду різницевого рівняння

$$\Delta_k^2 x + h^2 \cdot kh \cdot x(kh) = 0, \tag{5.37}$$

де $h > 0$ - крок різницевого рівняння на інтервалі $[0, \frac{7\pi}{2}]$, $kh = t_k \in \mathbb{T}_\lambda = h\mathbb{Z}$, $\Delta_k x = x(\sigma(t_k)) - x(t_k) = x(t_{k+1}) - x(t_k)$, $\Delta_k^2 x = \Delta_k(\Delta_k x)$, $k = 0, 1, 2....$

Позначимо $x_k^h = x(t_k)$ і перепишемо рівняння (5.37) у вигляді системи

$$\begin{cases} x_{k+1}^h = x_k^h + h y_k^h, \\ y_{k+1}^h h = y_k^h - h \cdot t_k x_k^h, \end{cases} \tag{5.38}$$

з початковими умовами

$$x_0^h = 0, \quad y_0^h = 1. \tag{5.39}$$

Розв'язок задачі Коші (5.34), (5.35) можна представити у вигляді [98]

$$x(t) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \Gamma(\frac{1}{3}) \left(\sqrt{3}\mathrm{Bi}(\sqrt[3]{-1}t) - 3\,\mathrm{Ai}(\sqrt[3]{-1}t)\right), \tag{5.40}$$

де $\mathrm{Ai}(t)$ - функція Ейрі першого роду, $\mathrm{Bi}(t)$ - функція Ейрі другого роду, $\Gamma(t)$ - гамма-функція.

При $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$ з Теореми порівняння [89] випливає, що розв'язок рівняння (5.34) має не менше нулів, ніж розв'язок рівняння

$$\ddot{x} + \frac{\pi}{2}x = 0, \tag{5.41}$$

і не більше нулів, ніж розв'язок рівняння

$$\ddot{x} + \frac{7\pi}{2}x = 0, \tag{5.42}$$

з тими ж початковими умовами (5.35). Розв'язавши їх, отримаємо, що розв'язок рівняння (5.41) з початковими умовами (5.35) набуває вигляду:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}t\right), \tag{5.43}$$

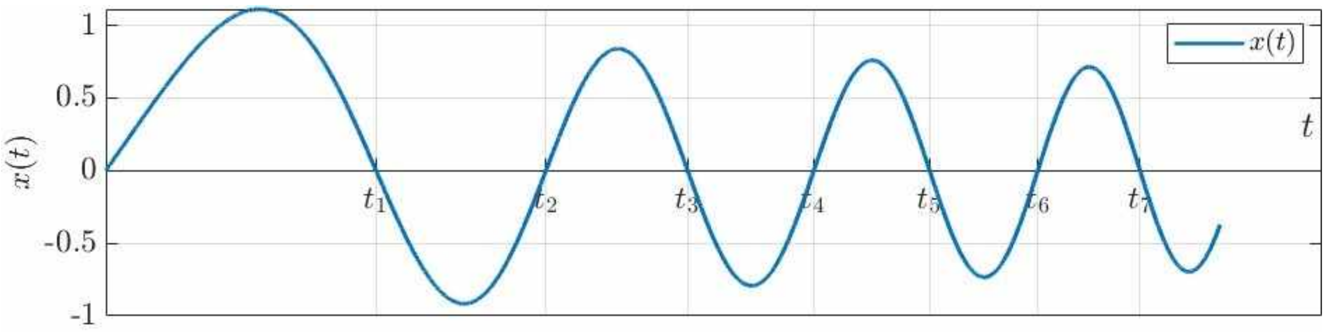


Рис. 5.1. Наближений розв'язок задачі Коші (5.34), (5.35)

який має 4 нулі на $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$, а розв'язок рівняння (5.42) з тими ж початковими умовами має вигляд:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2}{7\pi}} \sin\left(\sqrt{\frac{7\pi}{2}} t\right), \tag{5.44}$$

і має 10 нулів на вказаному інтервалі.

Аналогічно, обравши для дослідження довільне $t_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, отримаємо, що на інтервалі $\left(t_0, \frac{\pi}{2}\right]$ розв'язок рівняння (5.34) з початковими умовами (5.35) не має нулів, оскільки розв'язок рівняння (5.41) з тими ж початковими умовами також не має їх. Звідси випливає, що розв'язок задачі Коші (5.34), (5.35) на інтервалі $(0, \frac{7\pi}{2})$ має не менше 4, але не більше 10 нулів.

Наближено побудувавши графік (див. Рисунок 5.1) розв'язку (5.40) рівняння (5.34), отримали на інтервалі $\left(0, \frac{7\pi}{2}\right]$ 7 нулів, наближені значення яких t_n вказані в таблиці (Табл.5.1).

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
t_n	2.666	4.342	5.741	6.986	8.128	9.196	10.204

Табл. 5.1. Наближені значення нулів розв'язків задачі Коші (5.34),(5.35)

У наступних таблицях кожен стовпчик містить:

t_n - наближене значення нуля розв'язку $x(t)$ задачі Коші для рівняння (5.34) з початковими умовами (5.35);

t_{n_λ} - узагальнений нуль в околиці t_n розв'язку $x_k^h(t)$ системи (5.38) з початковими умовами (5.39) при фіксованому h_λ;

$x_k^h(t_{\lambda n})$ - значення розв'язку в узагальненому нулі при фіксованому h_λ;

$|t_n - t_{\lambda n}|$ - різниця між нулями диференціального та динамічного рівнянь при фіксованому h.

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
t_n	2.666	4.342	5.741	6.986	8.128	9.196	10.204
$t_{\lambda n}$	2.57343	4.44501	5.84870	7.25240	8.65609	9.82583	-
$x_k^h(t_{\lambda n})$	0.48026	-0.54678	2.16404	-4.31641	1.61439	-9.84481	-
$\|t_n - t_{\lambda n}\|$	0.09256	0.10301	0.10770	0.26640	0.52809	0.62983	-

Табл. 5.2. Порівняння значень при $h = \frac{7\pi}{94}$

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
t_n	2.666	4.342	5.741	6.986	8.128	9.196	10.204
$t_{\lambda n}$	2.74889	4.35241	5.95593	7.33038	8.47575	9.62112	10.7664
$x_k^h(t_{\lambda n})$	0.08729	-0.89673	1.00212	-1.89404	11.653	-37.4452	104.816
$\|t_n - t_{\lambda n}\|$	0.08289	0.01041	0.21493	0.34438	0.34775	0.42512	0.56249

Табл. 5.3. Порівняння значень при $h = \frac{7\pi}{96}$

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
t_n	2.666	4.342	5.741	6.986	8.128	9.196	10.204
$t_{\lambda n}$	2.63893	4.39822	5.82765	7.03716	8.24668	9.34623	10.33583
$x_k^h(t_{\lambda n})$	0.14208	-0.03916	0.031304	-0.51241	0.3775	-0.59169	2.79772
$\|t_n - t_{\lambda n}\|$	0.02706	0.05623	0.08665	0.05117	0.11868	0.15024	0.13184

Табл. 5.4. Порівняння значень при $h = \frac{7\pi}{200}$

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
t_n	2.666	4.342	5.741	6.986	8.128	9.196	10.204
$t_{\lambda n}$	2.66093	4.34325	5.73969	6.98219	8.12573	9.19230	10.2039
$x_k^h(t_{\lambda n})$	0.01472	-0.00646	0.012657	-0.02092	0.02143	-0.02634	0.02075
$\|t_n - t_{\lambda n}\|$	0.00507	0.00125	0.00131	0.00381	0.00227	0.00369	0.00017

Табл. 5.5. Порівняння значень при $h = \frac{7\pi}{2000}$

За даними наведеними у Таблицях 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 видно, що існує крок $h_0 = \frac{7\pi}{96}$ такий, що для всіх $h < h_0$ в малих околах кожного нуля t_n розв'язку $x(t)$ задачі (5.34), (5.35) знаходиться узагальнений нуль $t_{\lambda n}$ розв'язку $x_k^h(t)$ задачі (5.38), (5.39).

Більше того, обчисливши узагальнені нулі розв'язку задачі (5.38), (5.39) при $h = \frac{7\pi}{200}$ і $h = \frac{7\pi}{2000}$, легко побачити, що узагальнені нулі при наближенні h до нуля наближаються до нулів розв'язку задачі (5.34), (5.35), що ілюструється графіками (див. Рис.5.2, 5.3, 5.4, 5.5), де червоним побудовано графік розв'язку $x(t)$ рівняння (5.34), а синім – розв'язок $x_k^h(t)$ при відповідних значеннях кроку h.

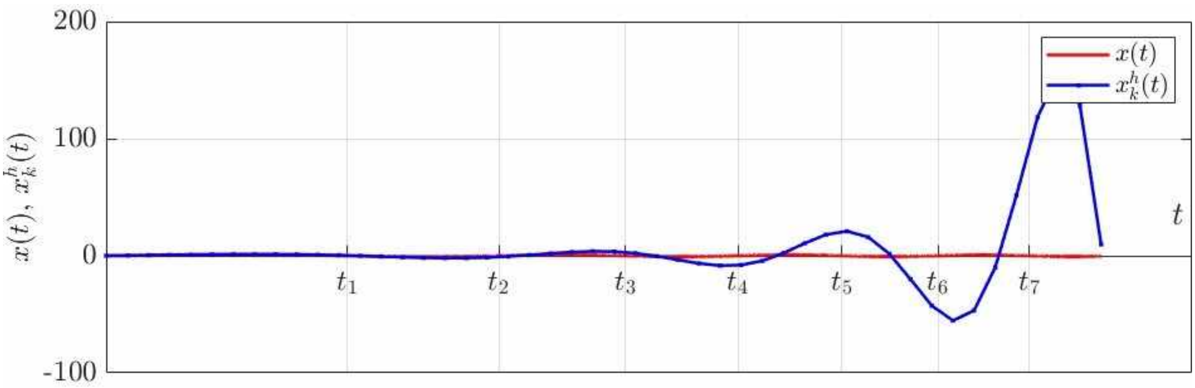


Рис. 5.2. Графік порівняння розв'язків рівнянь (5.34) та (5.36) при $h = \frac{7\pi}{94}$

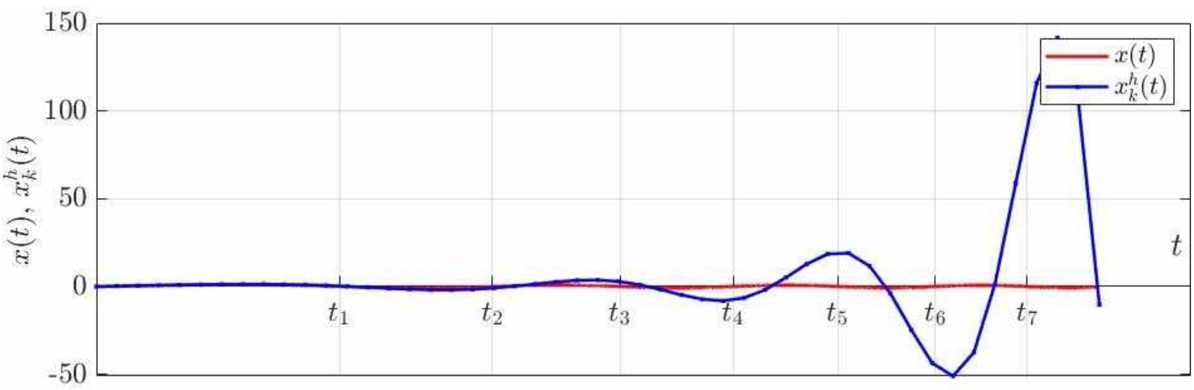


Рис. 5.3. Графік порівняння розв'язків рівнянь (5.34) та 5.36 при $h = \frac{7\pi}{96}$

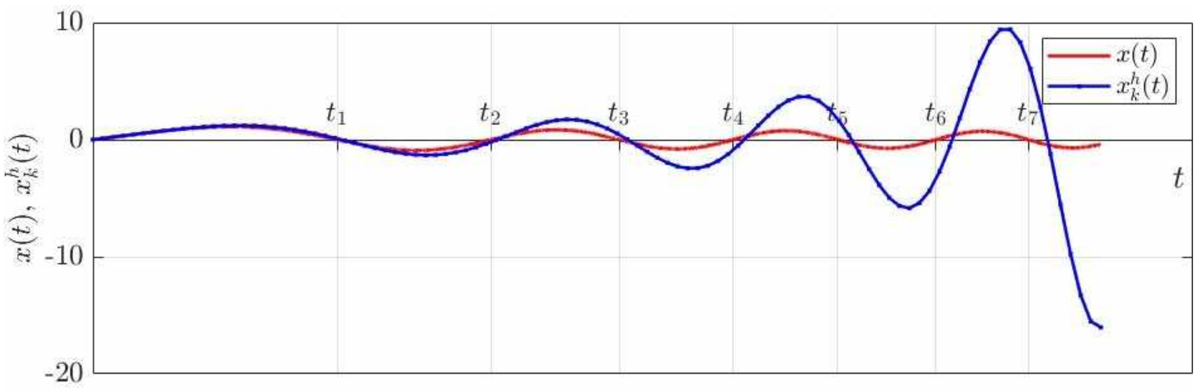


Рис. 5.4. Графік порівняння розв'язків рівнянь (5.34) та (5.36) при $h = \frac{7\pi}{200}$

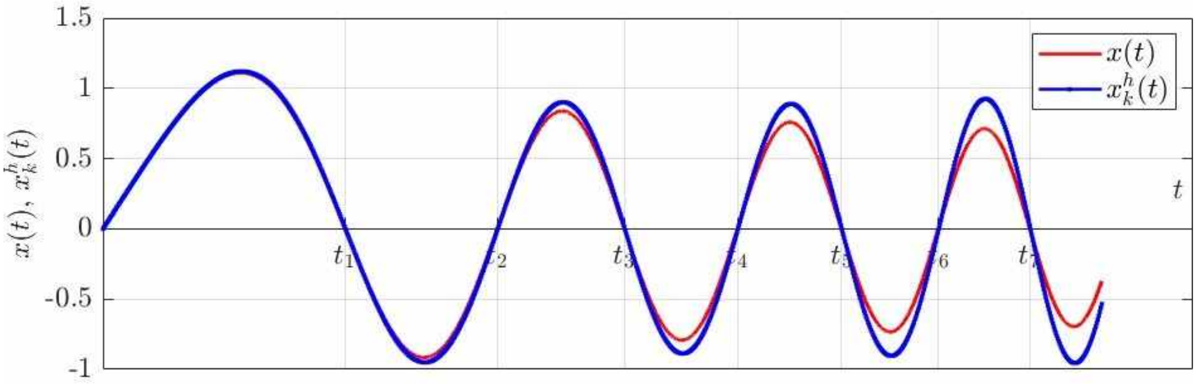


Рис. 5.5. Графік порівняння розв'язків рівнянь (5.34) та (5.36) при $h = \frac{7\pi}{2000}$

5.3 Коливність слабко нелінійних динамічних рівнянь на часових шкалах

У цьому розділі розглянемо властивості коливності розв'язків слабко нелінійних рівнянь.

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння:

$$\ddot{x} + p(t)x + \varepsilon f(t, x, \dot{x}) = 0, \tag{5.45}$$

де $\varepsilon > 0$ - малий параметр, $t \in [0, a]$.

При $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}$, $t \in [0, a]$ вважатимемо, що функції $f(t, x, y)$ і $p(t)$ мають наступні властивості:

1. $p(t) \geq 0$;
2. $p(t)$ задовольняє умові Ліпшиця на $[0, a]$;
3. $f(t, x, y)$ є неперервною за сукупністю змінних;

4. $f(t, x, y)$ має лінійний ріст по x та y, тобто існує $K > 0$ таке, що виконується нерівність
$$|f(t, x, y)| \leq N(1 + |x| + |y|).$$

Рівняння (5.45) розглянемо при початкових умовах
$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y(0) = y_0,$$
що належать компакту $(x_0, y_0) \in K$, який не містить точку $(0, 0)$.

При $\varepsilon = 0$ рівняння (5.45) переходить у рівняння вигляду
$$\ddot{x} + p(t)x = 0. \tag{5.46}$$

Відповідне динамічне рівняння має вигляд
$$x_\lambda^{\Delta\Delta} + p(t)x_\lambda = 0, \tag{5.47}$$
де $t \in \mathbb{T}_\lambda$, $x_\lambda : \mathbb{T}_\lambda \to \mathbb{R}^d$, і $x_\lambda^\Delta(t)$ – дельта-похідна функції $x_\lambda(t)$ на $\mathbb{T}_\lambda$, а початкові умови рівнянь (5.46) і (5.47) мають вигляд $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = y_0$ і $x_\lambda(0) = x_0$, $x_\lambda^\Delta(0) = y_0$ відповідно.

Разом із рівнянням (5.47) розглянемо нелінійне рівняння
$$x_\lambda^\Delta + p(t)x_\lambda + \varepsilon f(t, x_\lambda, x_\lambda^\Delta) = 0. \tag{5.48}$$

Розглянемо умови, при яких з коливності розв'язку лінійного динамічного рівняння (5.47) на часових шкалах випливає коливність розв'язку нелінійного диференціального рівняння (5.45), і умови, при яких з коливності розв'язку лінійного диференціального рівняння (5.46) випливає коливність розв'язку рівняння (5.48) на часових шкалах.

5.3.1 Допоміжні твердження

У подальшому нам знадобляться два додаткові твердження.

Розглянемо розв'язок $x(t)$ лінійного диференціального рівняння (5.46) з початковими умовами $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = x_1$, де $t_0 \in [0, \bar{\mu}]$, а
$$x_0^2 + x_1^2 = 1. \tag{5.49}$$

Тут $\bar{\mu}$ – фіксоване і таке, що $0 < \bar{\mu} < a$.

Якщо даний розв'язок коливний на $[0, a]$, то він має хоча б два нулі. Визначимо через t_k, t_{k+1} – два послідовних нулі з інтервалу $[0, a]$ такого коливного розв'язку. Розглянемо наступну величину

$$M_k^x = \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |x(t)|.$$

Дану скінченну числову послідовність назвемо послідовністю амплітуд коливань на інтервалі $[0, a]$ розв'язку $x(t)$. Відносно цієї послідовності справедлива лема.

Лема 5.10. *[22] Нехай у рівнянні* (5.46) *функція* $p \in C([0, a])$. *Тоді існує* $\Delta > 0$, *що для довільного коливного на* $[0, a]$ *розв'язку рівняння* (5.46) *з початковими умовами* (5.49) *справедливо нерівність*

$$M_k^x \geq \Delta. \tag{5.50}$$

Отже, для будь-якого коливного на відрізку $(0, a)$ розв'язку рівняння (5.46) з початковими умовами (5.49) послідовність амплітуд коливань обмежена знизу числом Δ, яке не залежить від розв'язку.

Також розглянемо розв'язки лінійного динамічного рівняння (5.47) на часових шкалах з початковими умовами $x_\lambda(t_0) = x_0$, $x_\lambda^\Delta(t_0) = x_1$, де $t_0 \in [0, a]_\lambda$, а

$$x_0^2 + x_1^2 = 1. \tag{5.51}$$

Нехай існує єдиний розв'язок $x_\lambda(t)$ рівняння (5.47) на $[0, a]_\lambda$. Якщо цей розв'язок коливний на $[0, a]_\lambda$, то він має принаймні два узагальнені нулі. Позначимо через t_p, t_m – два послідовних узагальнених нулі $x_\lambda(t)$ $(t_p < t_m)$ на $[0, a]_\lambda$ такого коливного розв'язку. Розглянемо наступну величину

$$M_p^x = \max_{t \in [t_p, t_m]} |x_\lambda(t)|.$$

Цю обмежену числову послідовність ми називатимемо послідовністю амплітуд коливань розв'язку $x_\lambda(t)$ на інтервалі $[0, a]_\lambda$. Відносно цієї послідовності справедлива лема.

Лема 5.11. *Нехай функція* $p(t) \in C([0, a]_\lambda)$ *і* $p(t) \geq 0$. *Тоді існує* $\Delta(\mu_\lambda) > 0$ *таке, що для будь-якого коливного розв'язку динамічного рівняння* (5.47) *з початковими умовами* (5.51) *справедлива нерівність*

$$M_p^x(\mu_\lambda) \geq \Delta(\mu_\lambda). \tag{5.52}$$

Доведення. Для доведення цієї леми необхідно довести аналог Теореми Вейєрштрасса про неперервну функцію, а саме: якщо функція $f(t) \in C([a,b]_{\mathbb{T}})$, то вона обмежена на $[a,b]_{\mathbb{T}}$ і досягає на ньому свого найбільшого та найменшого значення.

Відомо, що якщо функція $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ є неперервною, то вона регулярна [25, Теорема 1.60], і кожна регулярна функція на компактному інтервалі обмежена [25, Теорема 1.61]. Отже, $f(t) \in C([a,b]_{\mathbb{T}})$ обмежена на $[a,b]_{\mathbb{T}}$.

Отже, функція f має свої точні верхні та нижні грані. Позначимо $M = \sup_{[a,b]_{\mathbb{T}}} f(t)$.

Припустимо, всупереч умові, що для всіх t з інтервалу $[a,b]_{\mathbb{T}}$ виконується $f(t) < M$. Розглянемо функцію $\phi(t) = \frac{1}{M - f(t)} > 0$.

Оскільки $M - f(t) \neq 0$, то $\phi(t) \in C([a,b]_{\mathbb{T}})$. Отже, $\phi(t)$ обмежена на $[a,b]_{\mathbb{T}}$, тобто існує $M_0 > 0$ таке, що для всіх t з інтервалу $[a,b]_{\mathbb{T}}$ виконується $\phi(t) \leq M_0$.

Звідси, отримуємо наступне твердження:

$$M - f(t) \geq \frac{1}{M_0},$$

звідки випливає, що

$$f(t) \geq M - \frac{1}{M_0}.$$

А це означає, що $M \neq \sup_{[a,b]_{\mathbb{T}}} f(t)$. Таким чином, припущення невірне, і на інтервалі $[a,b]_{\mathbb{T}}$ існує t^* таке, що $f(t^*) = M$, тобто функція $f(t)$ досягає на відрізку $[a,b]_{\mathbb{T}}$ свого верхнього значення, а отже й свого найбільшого значення. Аналогічно можна довести, що функція $f(t)$ також досягає свого нижнього значення на $[a,b]_{\mathbb{T}}$, а отже і свого найменшого значення.

Твердження доведено. Повернемося до доведення леми.

Нехай нерівність (5.52) не виконується. Тоді буде існувати нескінченна послідовність коливних розв'язків $x_\lambda^{(n)}(t)$ рівняння (5.47) з початковими даними $t_{0n} \in [0,a]_\lambda$, x_{0n}, x_{1n}, які задовольняють умові 5.51, і для кожного n з послідовності амплітуд цих розв'язків можна вибрати таку амплітуду $M_{p(n)}^{x_\lambda^{(n)}}(\mu_\lambda)$, що для складеної з цих чисел послідовності $\{M_{p(n)}^{x_\lambda^{(n)}}(\mu_\lambda)\}$виконується наступна умова:

$$M_{p(n)}^{x_\lambda^{(n)}}(\mu_\lambda) \to 0, n \to \infty. \tag{5.53}$$

Тут $M_{p(n)}^{x_\lambda^{(n)}}(\mu_\lambda) = \max_{t \in [t_{p(n)}, t_{m(n)}]} \left| x_\lambda^{(n)}(t) \right|$.

Нехай $t_n \in [t_{p(n)}, t_{m(n)}]$ — точка, в якій цей максимум досягається. Тоді $\Delta x_\lambda^{(n)}(t_n^*) = 0$, $\left|x_\lambda^{(n)}(t_n^*)\right| = M_{p(n)}^{x_\lambda^{(n)}}(\mu_\lambda)$.

Оскільки множина початкових умов (5.51) є компактною, то з послідовності можна виділити збіжну підпослідовність. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що сама послідовність (t_{0n}, x_{0n}, x_{1n}) є збіжною. Отже,

$$(t_{0n}, x_{0n}, x_{1n}) \to (t_0, x_0, x_1), n \to \infty, \tag{5.54}$$

де $t_0 \in [0, a]_\lambda$, $x_0^2 + x_1^2 = 1$.

Нехай $x_\lambda(t)$ – розв'язок динамічного рівняння (5.47) з початковими умовами $x_\lambda(t_0) = x_0$, $\Delta x(t_0) = x_1$. Очевидно, що він є нетривіальним.

З послідовності $\{t_n^*\}$ також виділимо збіжну підпослідовність. Позначимо її $\{t_n^*\}$.

Отже, $t_n^* \to t^* \in [0, a]_\lambda, n \to \infty$.

З неперервної залежності від початкових даних розв'язків задачі Коші на скінченному інтервалі та нерівності [52, Теорема 3.2]

$$\left|x_\lambda^{(n)}(t_n^*) - x_\lambda(t^*)\right| \le \left|x_\lambda^{(n)}(t_n^*) - x_\lambda(t_n^*)\right| + \left|x_\lambda(t_n^*) - x_\lambda(t^*)\right|$$

випливає

$$x_n(t_n^*) \to x(t^*), \qquad \Delta x_\lambda^{(n)}(t_n^*) \to \Delta x(t^*).$$

Проте, з іншого боку, $x_\lambda^{(n)}(t_n^*) \to 0$ при $n \to \infty$ і $\Delta x_\lambda^{(n)}(t_n^*) = 0$ для будь-якого n. Отже, $x_\lambda(t)$ – тривіальний розв'язок рівняння (5.47). Отримана суперечність і доводить лему. □

5.3.2 Основний результат

Теорема 5.3. *Нехай $f(t, x, y)$ і $p(t)$ задовольняють умови 1)-4) та існують такі $\varepsilon_0 > 0$ і $\mu_0 > 0$, що для довільного $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ і $0 < \mu_\lambda < \mu_0$ розв'язок лінійного динамічного рівняння* (5.47) *має на інтервалі $[0, a]$ щонайменше три узагальнені нулі, то відповідний розв'язок нелінійного диференціального рівняння* (5.45) *коливний на $[0, a]$.*

Доведення. Початкові умови (x_0, y_0) рівняння (5.46) знаходяться на компакті K, таким чином з Леми 5.10 випливає, що існує $\Delta > 0$, таке, що амплітуда коливань довільного розв'язку $x(t)$ з початковими умовами $(x_0, y_0) \in K$ обмежена знизу:

$$M_k^x \geq \Delta.$$

Розглянемо відповідні розв'язки (5.45) та (5.46). Запишемо рівняння (5.45) у вигляді системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -p(t)x - \varepsilon f(t, x, y). \end{cases}$$

Позначимо $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\varphi(0) = \varphi_0$. Тоді

$$\dot{\varphi} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A(t)\varphi - \varepsilon f(t, \varphi). \tag{5.55}$$

Рівняння (5.46) перепишемо у вигляді

$$\dot{\varphi_1} = A(t)\varphi_1, \tag{5.56}$$

де $\varphi_1(0) = \varphi_0$. Нехай $X(t, s)$ - фундаментальна матриця розв'язків системи (5.56). Отже

$$\varphi_1(t) = X(t, 0)\varphi_0. \tag{5.57}$$

Подамо (5.55) у інтегральній формі, отже маємо

$$\varphi(t) = X(t, 0)\varphi_0 + \varepsilon \int_0^t X(t, s) f(s, \varphi(s)) ds. \tag{5.58}$$

Оскільки $f(t, x, y)$ лінійно зростає маємо

$$|f(t, \varphi)| \leq N \left(1 + |\varphi|\right).$$

Отже, відповідні розв'язки $\varphi(t)$ (5.58) та $\varphi_1(t)$ (5.57) рівнянь (5.55) та (5.56) задовольняють нерівність:

$$|\varphi(t) - \varphi_1(t)| \leq \varepsilon \int_0^t CN \left(1 + |\varphi(s)|\right) ds, \tag{5.59}$$

де $||X(t, s)|| \leq C$, $t, s \in [0, a]$, C - деяка стала.

Далі проведемо оцінку розв'язку $\varphi(t)$. З (5.58) отримаємо наступне:

$$|\varphi(t)| \leq C|\varphi_0| + \varepsilon CNa + \varepsilon CN \int_0^t |\varphi(s)|\, ds.$$

З урахуванням леми Гронуола-Беллмана, звідси випливає наступна оцінка при $t \in [0, a]$:

$$|\varphi(t)| \leq (C|\varphi_0| + \varepsilon CNa)\, e^{\varepsilon CNa},$$

Зважаючи, що φ_0 належить компакту, то існує радіус $R > 0$ такий, що $|\varphi_0| \leq R$, тоді

$$|\varphi(t)| \leq (CR + \varepsilon CNa)\, e^{\varepsilon CNa} \equiv C_1,$$

де C_1 - деяка стала.

Тоді з (5.59) випливає нерівність

$$|\varphi(t) - \varphi_1(t)| \leq \varepsilon \int_0^t CN(1 + C_1)ds \leq \varepsilon CNa(1 + C_1), \tag{5.60}$$

що оцінює близькість відповідних розв'язків рівнянь (5.45) та (5.46).

З Теореми 5.2 випливає, що якщо розв'язок динамічного рівняння (5.47) має N узагальнених нулів на $[0, a]_\lambda$, то відповідний розв'язок диференціального рівняння (5.46) має щонайменше N нулів на $[0, a]$. Отже, якщо розв'язок динамічного рівняння (5.47) має три узагальнених нулі на $[0, a]_\lambda$, то розв'язок диференціального рівняння (5.46) має щонайменше три нулі на $[0, a]$. Звідси, з оцінки (5.60), Леми 5.4 та відповідності розв'язків рівнянь нелінійного (5.45) та лінійного (5.46) диференціальних рівнянь випливає, що існують $\varepsilon_0 > 0$, $\mu_0 > 0$ і $\gamma > 0$ такі, що розв'язок нелінійного диференціального рівняння (5.45) має щонайменше два нулі на $[0, a]$, тобто є коливним. □

Теорема 5.4. *Нехай $f(t, x, y)$ і $p(t)$ задовольняють умови 1)-4) та існують такі $\varepsilon_0 > 0$ і $\mu_0 > 0$, що для довільного $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ і $0 < \mu_\lambda < \mu_0$ розв'язок лінійного диференціального рівняння* (5.1) *має на інтервалі $[0, a]$ щонайменше три нулі, то відповідний розв'язок нелінійного динамічного рівняння* (5.48) *коливний на $[0, a]_\lambda$.*

Доведення. Оцінимо норму різниці між відповідними розв'язками лінійного динамічного рівняння (5.47) та нелінійного динамічного рівняння (5.48) на часових шкалах. Подамо нелінійне рівняння (5.48) у вигляді системи:

$$\begin{cases} x_\lambda^\Delta = y_\lambda, \\ y_\lambda^\Delta = -p(t)x_\lambda - \varepsilon f(t, x_\lambda, y_\lambda). \end{cases}$$

Позначимо $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix}$, $\phi_\lambda = \begin{pmatrix} x_\lambda \\ y_\lambda \end{pmatrix}$, $\phi_\lambda(0) = \phi_0$, тоді

$$\phi^\Delta = A(t)\phi - \varepsilon f(t, \phi). \tag{5.61}$$

Подібним чином, позначивши $\psi_\lambda = \begin{pmatrix} x_\lambda \\ y_\lambda \end{pmatrix}$ рівняння (5.47) набуде вигляду

$$\psi_\lambda(t) = A(t)\psi, \tag{5.62}$$

де $\psi_\lambda(0) = \psi_0$.

Нехай $X(t, s)$ - фундаментальна матриця розв'язків системи (5.62). Отже,

$$\psi_\lambda(t) = X(t, 0)\psi_0. \tag{5.63}$$

Переписавши (5.61) в інтегральній формі, згідно [26], маємо:

$$\phi_\lambda(t) = X(t, 0)\phi_0 + \varepsilon \int\limits_{[0,t]_\lambda} X(t, \sigma(s)) f(s, \phi_\lambda(s)) \Delta s. \tag{5.64}$$

З рівностей (5.63) та (5.64) отримаємо

$$|\phi_\lambda(t) - \psi_\lambda(t)| \leq \varepsilon \int\limits_{[0,t]_\lambda} |X(t, \sigma(s)) f(s, \phi_\lambda(s))| \Delta s.$$

Оскільки $f(t, x_\lambda, y_\lambda)$ лінійно зростає, то маємо:

$$|f(t, \phi_\lambda(t))| \leq N(1 + |\phi_\lambda(t)|),$$

звідки отримуємо

$$|\phi_\lambda(t)| \leq \tilde{C}|\phi_0| + \varepsilon \int\limits_{[0,t]_\lambda} \tilde{C}N(1 + \phi_\lambda(s))\Delta s \equiv C^*,$$

де $\|X(t, s)\| \leq \tilde{C}$, $t, s \in [0, a]_{\mathbb{T}_\lambda}$. Отже,

$$|\phi_\lambda(t) - \psi_\lambda(t)| \leq \varepsilon\tilde{C}N \int\limits_{[0,t]_\lambda} (1 + C^*)\Delta s$$

Тоді оцінка набуває вигляду

$$|\phi_\lambda(t) - \psi_\lambda(t)| \leq \varepsilon \tilde{C} N a(1 + C^*). \tag{5.65}$$

З Теореми 5.2 будемо мати наступне: якщо розв'язок лінійного диференціального рівняння (5.46) має принаймні два нулі на інтервалі $[0, a]$, то існує $\mu_0 > 0$ таке, що відповідний розв'язок лінійного динамічного рівняння (5.47) коливний на цьому інтервалі, тобто має принаймні два узагальнених нулі.

З Леми 5.11 випливає, що існує $\Delta(\mu_\lambda) > 0$ таке, що амплітуда коливань будь-якого розв'язку лінійного динамічного рівняння (5.47) на часових шкалах обмежена знизу:

$$M_p^x(\mu_\lambda) \geq \Delta(\mu_\lambda),$$

де $M_p^x = \max_{t \in [t_p, t_m]} |x_\lambda(t)|$, t_p і t_m - два послідовних узагальнених нуля розв'язку x_λ рівняння (5.47). Отже, з нерівності (5.65) випливає, що існують $\varepsilon > 0$ та $\mu_0 > 0$ такі, що якщо розв'язок лінійного диференціального рівняння (5.46) має три нулі на $[0, a]$, то відповідний розв'язок нелінійного динамічного рівняння (5.48) має принаймні два узагальнених нулі на інтервалі $[0, a]_{\mathbb{T}_\lambda}$, тобто є коливним. $\square$

5.4 Висновки до Розділу 5

У п'ятому розділі вивчається коливність розв'язків динамічних рівнянь на часових шкалах. Дослідження спрямоване на з'ясування впливу коливності розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку на коливність розв'язків відповідного динамічного рівняння на часових шкалах, а також на коливність відповідних розв'язків слабко нелінійного динамічного рівняння на часових шкалах. Розглянуто також і обернений зв'язок.

Для лінійних рівнянь другого порядку з неперервними коефіцієнтами були отримані наступні результати:

- Доведено, що в околі кожного нуля розв'язку диференціального рівняння при достатньо малих значеннях функції зернистості лежить щонайменше один нуль відповідного розв'язку динамічного рівняння на часовій шкалі.
- Доведено, що в околі кожного нуля розв'язку динамічного рівняння на часовій шкалі при достатньо малих значеннях функції зернистості лежить щонайменше один нуль відповідного розв'язку диференціального рівняння на дійсній осі.

Таким чином, при достатньо малих значеннях функції зернистості в околі кожного нуля розв'язку диференціального рівняння лежить один і лише один нуль відповідного розв'язку динамічного рівняння на часових шкалах, тобто встановлено взаємозв'язок між коливністю розв'язку диференціального рівняння та коливністю відповідного розв'язку динамічного рівняння на часовій шкалі і навпаки.

Для слабко нелінійних рівнянь другого порядку були отримані такі результати:

- Встановлено умови, за яких при достатньо малих значеннях функції зернистості, якщо розв'язок лінійного диференціального рівняння на дійсній осі має достатню кількість нулів, то відповідний розв'язок слабко нелінійного динамічного рівняння на часовій шкалі також буде коливним.
- Встановлено умови, за яких при достатньо малих значеннях функції зернистості, якщо розв'язок лінійного динамічного рівняння на часовій шкалі має достатню кількість нулів, то відповідний розв'язок слабко нелінійного диференціального рівняння на дійсній також буде коливним.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [79, 93, 111–113].

Розділ 6

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ НА ПЕРІОДИЧНИХ ЧАСОВИХ ШКАЛАХ

Цей розділ присвячений дослідженню періодичних розв'язків динамічних рівнянь на часових шкалах. Отримано результат, який показує, за яких умов існування періодичних розв'язків системи динамічних рівнянь на періодичній часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$ з періодом τ випливає з наявності періодичних з періодом кратним τ розв'язків вихідної системи диференціальних рівнянь на $\mathbb{R}$, і навпаки.

6.1 Необхідні поняття теорії періодичних часових шкал

Для вивчення властивостей періодичності розв'язку динамічного рівняння на часових шкалах необхідно визначити поняття періодичної часової шкали.

Означення 6.1. [60] Часова шкала $\mathbb{T}$ називається періодичною, якщо

$$\Pi := \{\tau \in \mathbb{R} : t \pm \tau \in \mathbb{T}, \forall t \in \mathbb{T}\} \neq \{0\},$$

тоді найменше додатне число $\tau \in \Pi$ називають періодом часової шкали.

Означення 6.2. [60] Нехай $\mathbb{T} \neq \mathbb{R}$ періодична часова шкала з періодом τ. Функція $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ називається періодичною, якщо існує натуральне число n таке, що $P = n\tau$, $f(t + P) = f(t)$, для всіх $t \in \mathbb{T}$. Найменше додатне число P називають періодом функції f, якщо $f(t + P) = f(t)$ для будь-яких $t \in \mathbb{T}$.

У випадку $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ функція f періодична з періодом $P > 0$, якщо P – найменше додатне число таке, що $f(t+P) = f(t)$ при будь-яких $t \in \mathbb{T}$.

Зауваження 6.1. Якщо $\mathbb{T}$ періодична часова шкала з періодом τ, тоді $\sigma(t + n\tau) = \sigma(t) + n\tau$. Отже, функція зернистості періодична з періодом τ, оскільки $\mu(t+n\tau) = \sigma(t+n\tau) - (t+n\tau) = \sigma(t) - t = \mu(t)$.

Далі розглядатимемо множину періодичних часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$ з періодом τ, де $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ і $\lambda = 0$ – гранична точка множини Λ. Припустимо, що $\inf \mathbb{T}_\lambda = -\infty$, $\sup \mathbb{T}_\lambda = +\infty$ для всіх $\lambda \in \Lambda$ та точка $t = 0$ належить $\mathbb{T}_\lambda$ при всіх $\lambda \in \Lambda$.

Припустимо, що $\mu_\lambda := \sup_{t\in\mathbb{T}_\lambda} \mu_\lambda(t)$, де $\mu_\lambda(t) : \mathbb{T}_\lambda \to [0,\infty)$ – функція зернистості. Якщо $\mu_\lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$, тоді $\mathbb{T}_\lambda$ збігається до неперервної часової шкали $\mathbb{T}_0 = \mathbb{R}$, і система динамічних рівнянь на часовій шкалі перетворюється на відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь. Тоді, виходячи з періодичності функції зернистості $\mu_\lambda(t)$, на кожній підмножині часової шкали $[t, t+\tau]_\lambda \subset \mathbb{T}_\lambda$ виконується наступна нерівність:

$$\sup_{t\in[t;t+\tau]_\lambda} \mu_\lambda(t) = \mu_\lambda.$$

Отже, природно сподіватись, що за певних умов існування періодичного розв'язку диференціального рівняння випливатиме з існування такого розв'язку відповідного рівняння на періодичній часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$, і навпаки.

6.2 Зв'язок між існуванням періодичних розв'язків системи динамічних рівнянь на часових шкалах та відповідної диференціальної системи

Нехай $D \subset \mathbb{R}$ – область в $\mathbb{R}^n$. Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \tag{6.1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$, і відповідну систему динамічних рівнянь на сім'ї часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$

$$x_\lambda^\Delta = X(t, x_\lambda). \tag{6.2}$$

Далі припустимо $X(t,x)$ – неперервно диференційовна та обмежена разом зі своїми частинними похідними, тобто існує додатна стала C така, що

$$|X(t,x)| + \left|\frac{\partial X(t,x)}{\partial t}\right| + \left\|\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\right\| \leq C$$

при $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$, $\frac{\partial X}{\partial x}$ – матриця Якобі. Крім того, також припустимо, що функція $X(t,x)$ періодична по t з періодом ω, тобто

$$X(t+\omega,x) = X(t,x), t \in \mathbb{R}, x \in D. \tag{6.3}$$

Сформулюємо концепцію асимптотичної стійкості розв'язків динамічних рівнянь на часових шкалах, аналогічно означенню асимптотичної стійкості для розв'язків диференціальних рівнянь [53].

Означення 6.3. Розв'язок x_λ системи (6.2), визначеної на сім'ї часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$, будемо називати рівномірно по t_0 та λ асимптотично стійким, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують $\delta > 0$ і $T > 0$, що не залежать від t_0 та λ такі, що якщо $y_\lambda(t)$ – розв'язок системи (6.2) та

$$|x_\lambda(t_0) - y_\lambda(t_0)| < \delta,$$

тоді

$$|x_\lambda(t) - y_\lambda(t)| < \varepsilon, \qquad \text{при } t \geq t_0$$

та

$$|x_\lambda(t) - y_\lambda(t)| \leq \frac{\delta}{2}, \qquad \text{при } t \in [t_0+T,\infty)_{\mathbb{T}_\lambda}.$$

Нехай $\mathbb{T}_\lambda$ – послідовність періодичних часових шкал з найменшим періодом $\tau(\lambda)$ таким, що $\tau(\lambda) \to 0$, якщо $\lambda \to 0$, і $\frac{\tau(\lambda)}{\omega} \in \mathbb{Q}$. Тут $\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел. У наступній теоремі сформульовано умови існування періодичного розв'язку системи (6.1) за умови, що система (6.2) має періодичний нетривіальний розв'язок.

Теорема 6.1. *Припустимо, що існує $\lambda_0 > 0$ таке, що для будь-якого $\lambda < \lambda_0$ система динамічних рівнянь* (6.2) *має рівномірно по $t_0 \in \mathbb{T}_\lambda$ та λ асимптотично стійкий періодичний розв'язок $x_\lambda(t)$, який лежить в області D разом з деяким ρ-околом. Тоді система диференціальних рівнянь* (6.1) *також має періодичний розв'язок з періодом $p = r\omega$, де r – ціле.*

Доведення. Оскільки $x_\lambda(t)$ – асимптотично стійкий, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \frac{\rho}{2}$), існує $\delta > 0$ ($\delta < \varepsilon$) та $\tilde{T} > 0$, які не залежать від t_0 та λ такі, що якщо

$$|x_\lambda(t_0) - y_\lambda(t_0)| \le \delta,$$

тоді

$$|x_\lambda(t) - y_\lambda(t)| < \varepsilon, \quad \text{при} \quad t \ge 0, \tag{6.4}$$

$$|x_\lambda(t) - y_\lambda(t)| \le \frac{\delta}{2}, \quad \text{при} \quad t \in [\tilde{T}, \infty)_\lambda. \tag{6.5}$$

Не втрачаючи загальності, покладемо $t_0(\lambda) = 0$. Нехай T – найменше значення справа від $\tilde{T}$ таке, що $T = r_0\omega$, де r_0 – ціле.

Оберемо λ_0 таке, що для будь-якого $\lambda < \lambda_0$ та для визначених $\delta > 0$ і T виконуються наступні умови:

1) відповідні часові шкали $\mathbb{T}_\lambda$ з функцією зернистості μ_λ мають період $\tau_\lambda = \frac{\omega}{m_0}$, де m_0 – ціле;
2) якщо $y_\lambda(t)$ – розв'язок системи динамічних рівнянь (6.2) на часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$ та $\varphi(t)$ – розв'язок системи диференціальних рівнянь (6.1) такі, що

   $$\varphi(t_k) = y_\lambda(t_k), \quad t_k \in \mathbb{T}_\lambda,$$

   тоді виконується наступна нерівність:

   $$|\varphi(t) - y_\lambda(t)| < \frac{\delta}{2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}]_\lambda, \tag{6.6}$$

   де t_{k+1} – найменше значення на відрізку $[t_k + T, t_k + T + 1]_{\mathbb{T}_\lambda}$ таке, що $t_{k+1} = i_{k+1}\tau_\lambda$, при $i_{k+1} \in \mathbb{N}$. Так як $\lambda \to 0$, то μ_λ та τ_λ прямують до нуля, що і гарантує існування такої точки при достатньо малих значеннях функції зернистості.

Оскільки, можна обрати λ_0 таке, що для будь-якого $\lambda < \lambda_0$ виконується нерівність

$$\mu_\lambda K(T+1) \le \frac{\delta}{2},$$

тоді, за Лемою 2.1, виконується нерівність (6.6).

Для відповідного μ_λ, згідно з умовами Теореми 6.1 та Означення 6.2, система динамічних рівнянь (6.2) має періодичний, асимптотично стійкий розв'язок $x_\lambda(t)$ з періодом $P_\lambda = n_0\tau_\lambda$.

Розглянемо δ-окіл точки $x_\lambda(0)$. Нехай y_0 – довільна точка цього околу, тобто

$$|x_\lambda(0) - y_0| \le \delta.$$

Нехай $\varphi(t, y_0)$ – розв'язок системи диференціальних рівнянь (6.1), а $y_\lambda(t)$ – розв'язок динамічних рівнянь (6.2) такі, що задовольняють початкові умови $\varphi(0, y_0) = y_\lambda(0) = y_0$ у точці $t_0(\lambda) = 0$.

Розглянемо відрізок $[0, T]_\lambda$. Оскільки $T = r_0\omega$, $\omega = m_0\tau_\lambda$ та $i_1 := r_0 m_0$, тоді $T = r_0 m_0 \tau_\lambda = 0 + i_1\tau_\lambda = t_1 \in \mathbb{T}_\lambda$. Отже, з нерівностей (6.4) та (6.5) випливає:

$$|y_\lambda(t) - x_\lambda(t)| < \varepsilon, \quad t \in [0, T]_\lambda,$$

$$|y_\lambda(T) - x_\lambda(T)| \le \frac{\delta}{2}.$$

Звідки, згідно (6.5) та (6.6), отримаємо

$$|x_\lambda(t) - \varphi(t, y_0)| \le |x_\lambda(t) - y_\lambda(t)| + |y_\lambda(t) - \varphi(t, y_0)| < 2\varepsilon, \quad t \in [0, T]_{\mathbb{T}_\lambda},$$

$$|x_\lambda(T) - \varphi(T, y_0)| \le |x_\lambda(T) - y_\lambda(T)| + |y_\lambda(T) - \varphi(T, y_0)| < \delta.$$

Таким чином, розв'язок $\varphi(t)$ системи диференціальних рівнянь (6.1), що починається в δ-околі точки $x_\lambda(0)$, не покидає 2ε-околу розв'язку $x_\lambda(t)$ системи динамічних рівнянь (6.2) на відрізку $[0, T]_\lambda$ часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ та повертається в δ-окіл $x_\lambda(t)$ у момент T за умови, що розв'язок $\varphi(t)$ визначений на відрізку $[0, T]$.

Нехай $\hat{y}_\lambda(t)$ – розв'язок динамічних рівнянь (6.2) з початковими даними, що співпадають зі значенням розв'язку $\varphi(t)$ в момент T:

$$\varphi(T) = \hat{y}_\lambda(T).$$

Розглянемо інтервал $[T, 2T]_{\mathbb{T}_\lambda}$. Якщо $i_2 := 2r_0 m_0$, то отримаємо $2T = 2r_0 m_0 \tau_\lambda = 0 + i_2\tau_\lambda = t_2 \in \mathbb{T}_\lambda$. Отже,

$$|\hat{y}_\lambda(t) - x_\lambda(t)| < \varepsilon, \quad t \in [T, 2T]_\lambda,$$

$$|\hat{y}_\lambda(2T) - x_\lambda(2T)| \le \frac{\delta}{2}.$$

звідки

$$|x_\lambda(t) - \varphi(t)| < 2\varepsilon, t \in [T, 2T]_\lambda$$

та

$$|x_\lambda(2T) - \varphi(2T)| < \delta.$$

Продовжуючи аналогічно далі, отримаємо, що на кожному відрізку $[(k-1)T, kT]$

$$|x_\lambda(t) - \varphi(t)| < 2\varepsilon, t \in [(k-1)T, kT]_\lambda$$

$$|x_\lambda(kT) - \varphi(kT)| < \delta.$$

Нагадаємо, що часова шкала T_λ має період $\tau_\lambda = \frac{\omega}{m_0}$, та, відповідно до Означення 6.2, розв'язок x_λ системи динамічних рівнянь має період $P_\lambda = n_0\tau_\lambda$.

Тоді у точці $t_{k_M} = M\tau_\lambda$ з множини точок $\{t_k = kT\}$, отримаємо:

$$\left|x_\lambda(t_{k_M}) - \varphi(t_{k_M})\right| < \delta,$$

де M – спільне кратне чисел m_0, r_0 та n_0.

Більше того, $M\tau_\lambda := r\omega$ – кратне ω, де r ділиться на n_0. Звідси випливає, що

$$\left|x_\lambda(t_{k_M}) - \varphi(r\omega)\right| < \delta.$$

Оскільки $x_\lambda(t_{k_M}) = x_\lambda(0)$, то відображення $\pi : y_0 \longrightarrow \varphi(r\omega, y_0)$ переводить кулю радіуса δ в себе. Таким чином, існує фіксована точка y_1 відображення π така, що

$$\varphi(r\omega, y_1) = y_1.$$

Це означає, що розв'язок системи диференціальних рівнянь (6.1) з початковими умовами $\varphi(0) = y_1$ є періодичним з періодом $r\omega$, що і завершує доведення. □

Наступна теорема встановлює умови існування періодичного розв'язку системи динамічних рівнянь (6.2) на часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$, якщо відповідна система диференціальних рівнянь (6.1) має періодичний розв'язок.

Теорема 6.2. *Припустимо, що система диференціальних рівнянь* (6.1) *має асимптотично стійкий періодичний розв'язок $x(t)$ з періодом ω, який лежить в області D з деяким свої ρ-околом. Тоді існує $\lambda_0 > 0$ таке, що для будь-якого $\lambda < \lambda_0$ система динамічних рівнянь* (6.2) *має щонайменше один нетривіальний періодичний розв'язок з періодом $r\omega$ на часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$, де r – ціле число.*

Доведення. Оскільки $x(t)$ – асимптотично стійкий розв'язок системи диференціальних рівнянь (6.1), то для будь-яких $\varepsilon > 0$ та $t_0 \in \mathbb{R}$ існують $\delta > 0$ та $\tilde{T} > 0$ такі, що для довільного розв'язку $y(t)$ цієї системи для якого справедлива умова

$$|x(t_0) - y(t_0)| \leq \delta,$$

виконуються нерівності:

$$|x(t) - y(t)| < \varepsilon, \quad t \geq t_0,$$
$$|x(t) - y(t)| \leq \frac{\delta}{2}, \quad t \geq t_0 + \tilde{T}, \tag{6.7}$$

де δ та $\tilde{T}$ не залежать від t_0.

Не втрачаючи загальності, покладемо $t_0(\lambda) = 0$. Нехай T – найменше число більше за $\tilde{T}$ таке, що $T = r_0\omega$, де r_0 – ціле.

Оберемо λ_0 таке, що для довільного $\lambda < \lambda_0$ та для визначених $\delta > 0$ і T виконуються наступні умови:

1) відповідна часова шкала $\mathbb{T}_\lambda$ з функцією зернистості μ_λ має період $\tau_\lambda = \frac{\omega}{m_0}$, де m_0 – ціле;
2) якщо $y(t)$ – розв'язок системи диференціальних рівнянь (6.1), а $x_\lambda(t)$ – розв'язок системи динамічних рівнянь (6.2) на часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$, і

   $$x_\lambda(t_k) = y(t_k), \quad t_k \in \mathbb{T}_\lambda,$$

   тоді виконується наступна нерівність:

   $$|x_\lambda(t) - y(t)| < \frac{\delta}{2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}]_\lambda, \tag{6.8}$$

   де t_{k+1} – найменша точка відрізку $[t_k + T, t_k + T + 1]_{\mathbb{T}_\lambda}$ така, що $t_{k+1} = i_{k+1}\tau_\lambda$, де $i_{k+1} \in \mathbb{N}$. Оскільки $\lambda \to 0$, то μ_λ та τ_λ прямують до нуля, що і забезпечує існування такої точки при достатньо малих значеннях функції зернистості.

Оскільки можна обрати λ_0 таке, що для будь-якого $\lambda < \lambda_0$ виконуватиметься нерівність

$$\mu_\lambda K(T + 1) \leq \frac{\delta}{2},$$

то за Лемою 2.1, виконуватиметься і нерівність (6.8).

Згідно з умовами Теореми, система диференціальних рівнянь (6.1) має періодичний, асимптотично стійкий розв'язок $x(t)$ з періодом ω.

Розглянемо δ-окіл точки $x(0)$. Нехай y_0 – довільна точка цього околу. Тоді,

$$|x_\lambda(0) - y_0| \le \delta.$$

Нехай $x_\lambda(t)$ – розв'язок системи динамічних рівнянь (6.2), а $\tilde{y}(t)$ – розв'язок системи диференціальних рівнянь (6.1), що мають однакові початкові умови $x_\lambda(0) = \tilde{y}(0) = y_0$ у точці $t_0(\lambda) = 0$.

Оскільки $T = r_0\omega$ і $\omega = m_0\tau_\lambda$, враховуючи $i_1 := r_0 m_0$, отримаємо $T = r_0 m_0 \tau_\lambda = 0 + i_1\tau_\lambda = t_1 \in \mathbb{T}_\lambda$.

Розглянемо відрізок $[0, T]$. Оцінимо різницю $|x(T) - x_\lambda(T)|$. З нерівності (6.7) випливає, що

$$|y(T) - x(T)| \le \frac{\delta}{2}.$$

Отже, з (6.7) та (6.8) матимемо

$$|x(T) - x_\lambda(T)| \le |x(T) - y(T)| + |y(T) - x_\lambda(T)| < \delta.$$

Звідки, розв'язок x_λ системи динамічних рівнянь (6.2), що починається у δ-околі точки $x(0)$, повертається у δ-окіл розв'язку $x(t)$ системи диференціальних рівнянь (6.1) в момент T, за умови, що розв'язок $x_\lambda(t)$ визначений на відрізку $[0, T]_{\mathbb{T}_\lambda}$.

Нехай $\hat{y}(t)$ – розв'язок системи диференціальних рівнянь (6.1) такий, що його початкові умови співпадають зі значенням розв'язку $x_\lambda(t)$ в момент T:

$$x_\lambda(T) = \hat{y}(T).$$

Аналогічно до доведення Теореми 6.1, побудуємо розв'язок $\tilde{y}(t)$ системи диференціальних рівнянь (6.1) на кожному відрізку $[(k-1)T, kT]$ такий, що його початкові умови співпадають зі значенням розв'язку $x_\lambda(t)$ у точці $t_{k-1} = (k-1)T$, тобто $\tilde{y}((k-1)T) = x_\lambda((k-1)T)$. Тоді застосуємо нерівність

$$|x(t) - x_\lambda(t)| \le |x(t) - y(t)| + |y(t) - x_\lambda(t)|.$$

Таким чином, отримаємо, що на кожному відрізку $[(k-1)T, kT]$ виконуються наступні нерівності

$$|x(t) - x_\lambda(t)| < 2\varepsilon, t \in [(k-1)T, kT]_\lambda$$

$$|x(kT) - x_\lambda(kT)| < \delta.$$

Зауважимо, що оскільки $T = r_0\omega$ та $\omega = m_0\tau_\lambda$, то поклавши $i_k := kr_0m_0$, отримаємо $kT = kr_0m_0\tau_\lambda = 0 + i_k\tau_\lambda = t_k \in \mathbb{T}_\lambda$. Отже, у точці $t_{k_M} = M\tau_\lambda$ з множини точок $\{t_k\}$ маємо:

$$\left|x(t_{k_M}) - x_\lambda(t_{k_M})\right| < \delta,$$

де M – спільне кратне чисел m_0, r_0 та n_0.

Більше того, $M\tau_\lambda := r\omega$ – кратне ω. Звідки випливає

$$\left|x(r\omega) - x_\lambda(t_{k_M})\right| < \delta.$$

Оскільки $x_\lambda(t_{k_M}) = x_\lambda(0)$, то $\pi : x_\lambda(0) \to x_\lambda(t_k, 0)$ є відображенням множини $|x_\lambda(0) - x(0)| \leq \delta$ на себе. Отже, існує щонайменше одна фіксована точка y_1 відображення π, що лежить у δ-околі точки $x(0)$. Таким чином, отримаємо

$$x_\lambda(r\omega, y_1) = y_1.$$

Це означає, що розв'язок системи динамічних рівнянь (6.2) з початковою умовою $x_\lambda(t_0) = y_1$ є періодичним з періодом $r\omega$, що і завершує доведення. □

Проілюструємо отримані результати на прикладі рівняння Ван-дер-Поля, що є математичною моделлю лампового осцилятора і відображає коливання електричного струму у ньому.

Приклад Розглянемо рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0,$$

Дане рівняння може бути переписане у вигляді системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \varepsilon(1 - x^2)y - x. \end{cases} \tag{6.9}$$

Виконавши у системі (6.9) наступну заміну:

$$x = a\cos\psi,$$
$$y = -a\sin\psi,$$
$$\psi = t + \phi,$$

отримаємо систему у вигляді

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \varepsilon\left\{\frac{a}{2}(1 - \frac{a^2}{4}) - \frac{a}{2}\cos 2\psi + \frac{a^3}{8}\cos 4\psi\right\}, \\ \frac{d\psi}{dt} = 1 - \varepsilon\left\{\frac{1}{2}(1 - \frac{a^2}{4})\sin 2\psi - \frac{a^2}{8}\sin 4\psi\right\}. \end{cases}$$

Перейшовши до стандартного вигляду, отримаємо рівняння

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon \frac{\frac{a}{2}(1-\frac{a^2}{4}) - \frac{a}{2}\cos 2\psi + \frac{a^3}{8}\cos 4\psi}{1-\varepsilon\left\{\frac{1}{2}(1-\frac{a^2}{4})\sin 2\psi - \frac{a^2}{8}\sin 4\psi\right\}}, \tag{6.10}$$

та усереднене рівняння

$$\frac{da}{d\psi} = -\varepsilon A_1(a), \tag{6.11}$$

де $A_1(a) = \frac{a}{2}(1-\frac{a^2}{4})$.

Стаціонарні амплітуди можна знайти з рівняння

$$A_1(a) = \frac{a}{2}\left(1-\frac{a^2}{4}\right) = 0,$$

що має два розв'язки: $a = 0$ та $a = 2$. У випадку $A_1(a) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}a^2$ та при $a = 2$ матимемо, що $A_1(2) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} < 0$.

Легко перевірити, що рівняння (6.11) задовольняє усі умови другої теореми Боголюбова [88, Теорема II]. Таким чином, згідно з нею, можна стверджувати, що для достатньо малого параметра ε, точне рівняння (6.10) має періодичний розв'язок з періодом $\omega = 2\pi$. Більше того, оскільки при $a = 2$, маємо $A_1(2) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} < 0$, то цей розв'язок стійкий.

Побудуємо розв'язок системи диференціальних рівнянь (6.9) при $\varepsilon = 10^{-5}$ з початковими умовами $x_0 = x(0) = 2$, $y_0 = y(0) = 0$ на Рис. 6.1.

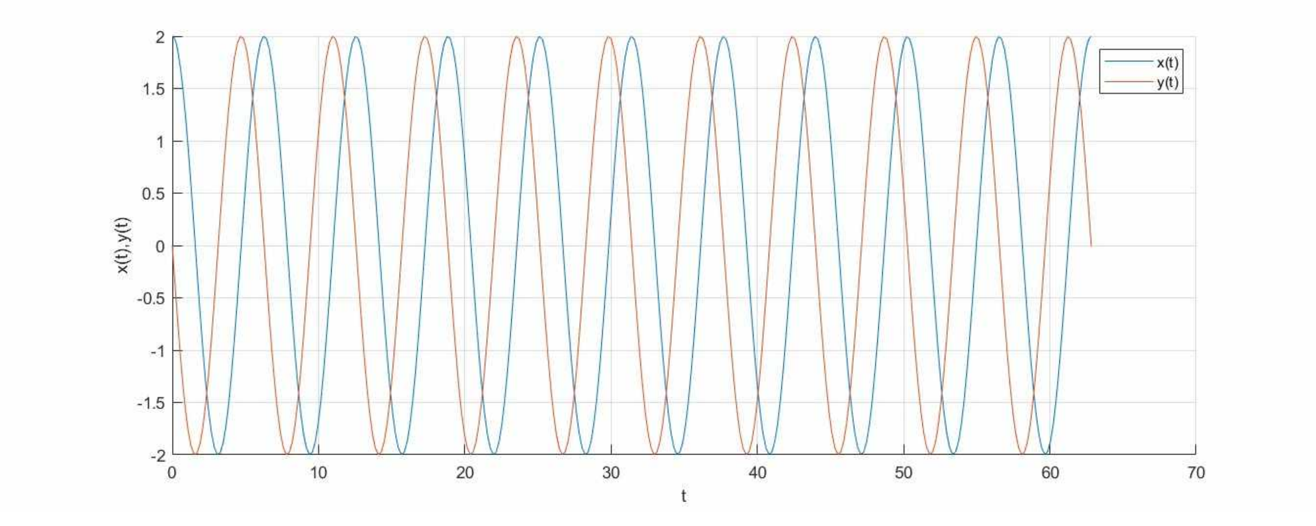


Рис. 6.1. Розв'язок системи (6.9) на відрізку $[0, 10\omega] = [0, 20\pi]$

Також розглянемо розв'язок відповідного динамічного рівняння

$$\frac{\Delta^2 x_\lambda}{\Delta t} - \varepsilon(1-x_\lambda^2)\frac{\Delta x_\lambda}{\Delta t} + x_\lambda = 0, \tag{6.12}$$

на часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$ з періодом $\tau(\lambda) = \frac{\omega}{k}$, де $\omega = 2\pi$ та $k \in \mathbb{N}$. Крім того, побудуємо часову шкалу таким чином, що відрізок $[0, \tau(\lambda)]_{\mathbb{T}_\lambda}$ довільно розділено на чотири інтервали: два з яких неперервні, а два – дискретні (див. Рисунок 6.2).

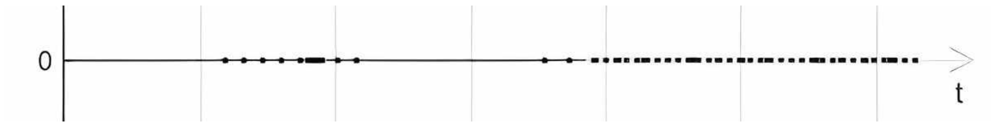
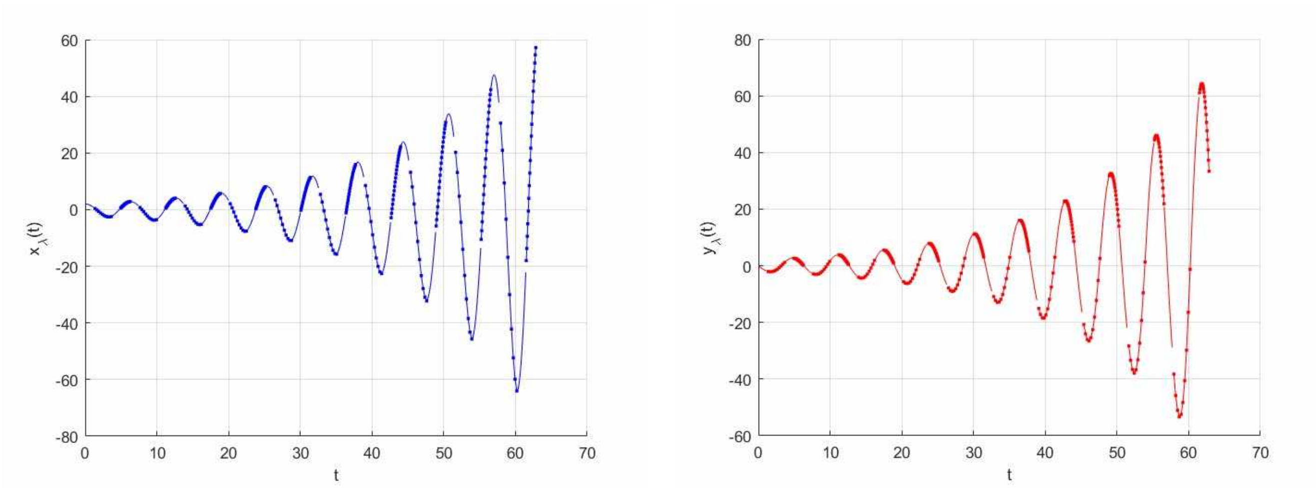


Рис. 6.2. Відрізок часової шкали $[0, \tau(\lambda)]_{\mathbb{T}_\lambda}$, де $\tau(\lambda) = \frac{\omega}{20}$

Перепишемо рівняння (6.12) у вигляді системи:

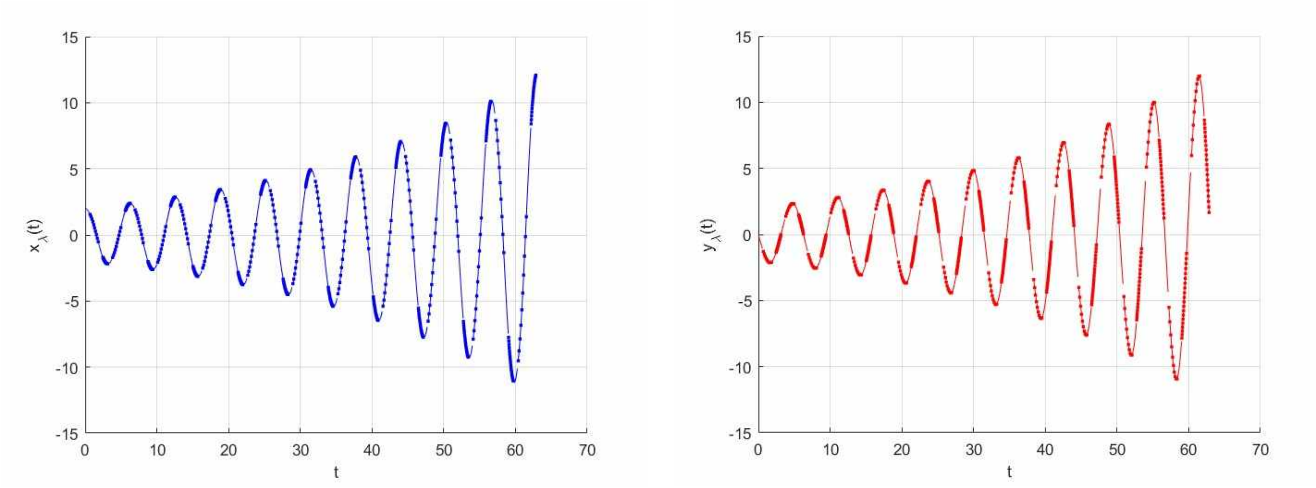
$$\begin{cases} \frac{\Delta x_\lambda}{\Delta t} = y_\lambda, \\ \frac{\Delta y_\lambda}{\Delta t} = \varepsilon(1 - x_\lambda^2) y_\lambda - x_\lambda, \end{cases} \tag{6.13}$$

та побудуємо його розв'язок при $\varepsilon = 10^{-5}$ на інтервалі $[0, 10\omega]_{\mathbb{T}_\lambda}$ за різних значень λ.



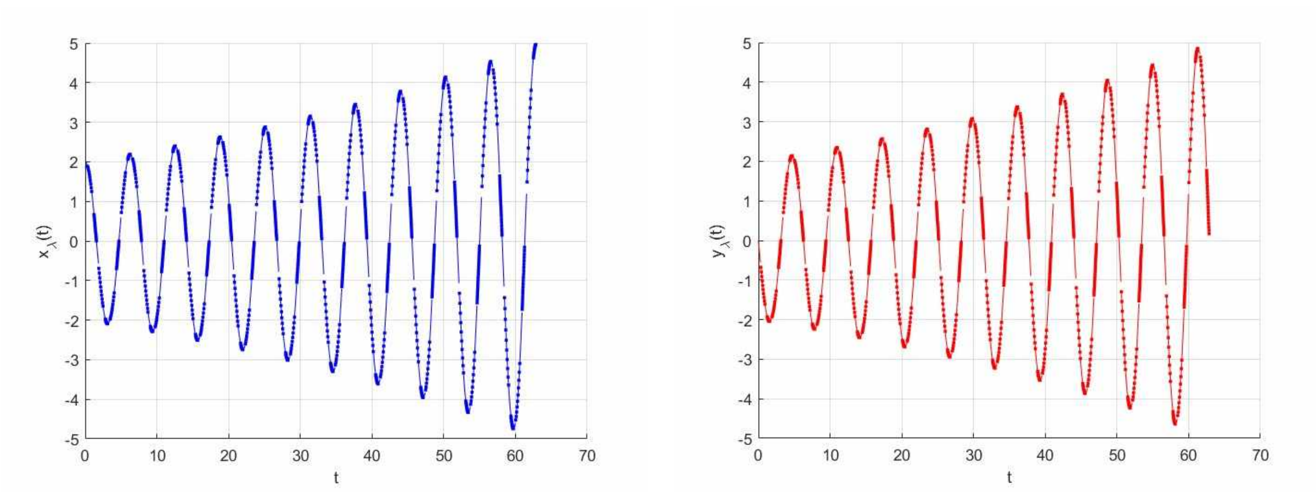
(а) $x_\lambda(t)$ (б) $y_\lambda(t)$

Рис. 6.3. Графіки розв'язків системи (6.13) при $\lambda = 1$ та $\tau(\lambda) = 2\pi$



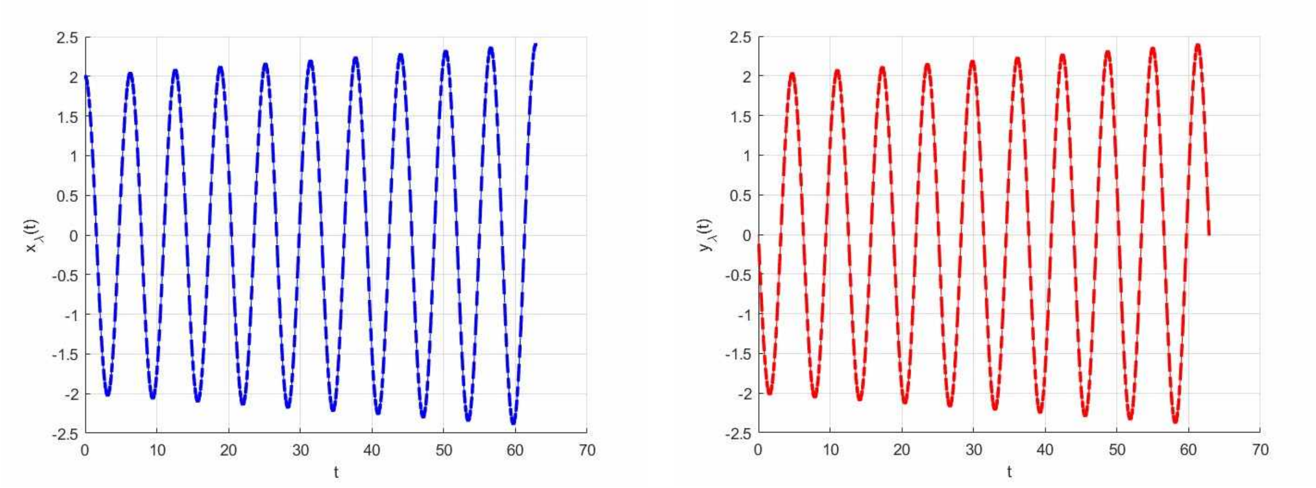
(а) $x_\lambda(t)$ (б) $y_\lambda(t)$

Рис. 6.4. Графіки розв'язків системи (6.13) при $\lambda = 0.5$ та $\tau(\lambda) = \pi$



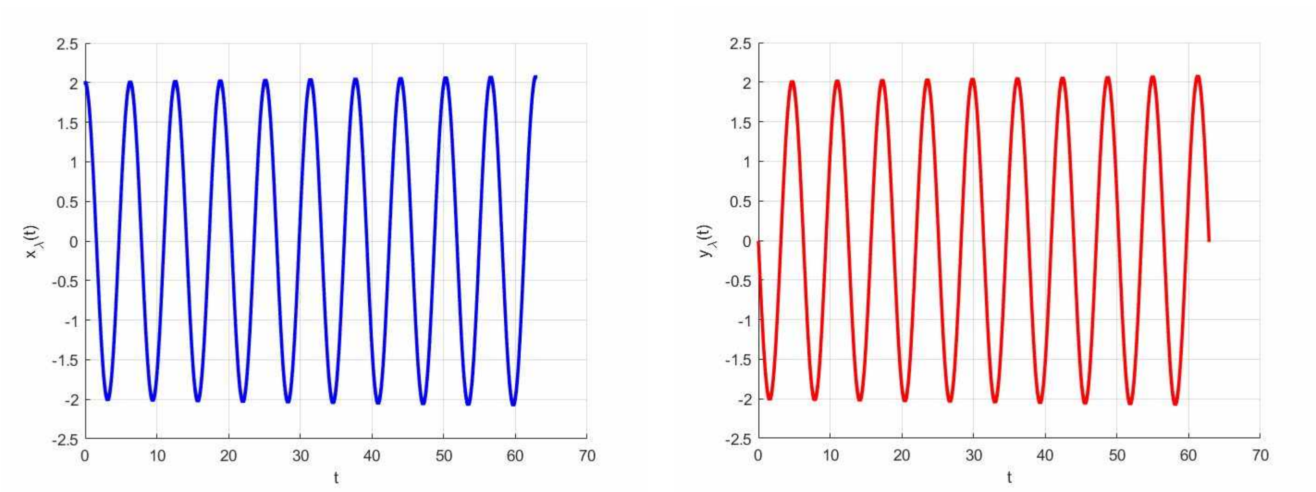
(а) $x_\lambda(t)$ (б) $y_\lambda(t)$

Рис. 6.5. Графіки розв'язків системи (6.13) при $\lambda = 0.25$ та $\tau(\lambda) = 0.5\pi$



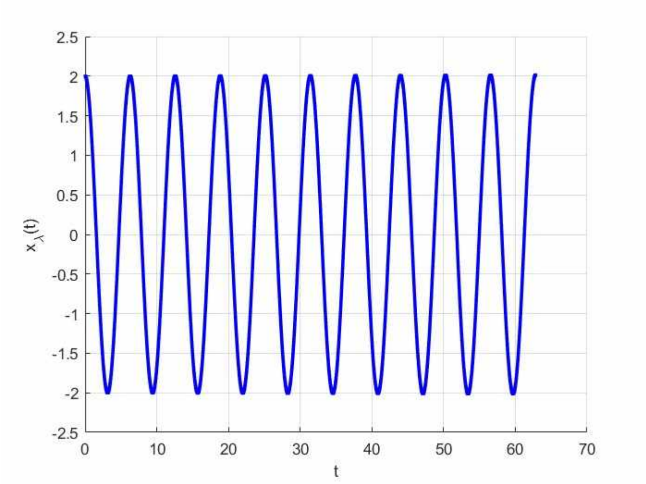
(а) $x_\lambda(t)$ (б) $y_\lambda(t)$

Рис. 6.6. Графіки розв'язків системи (6.13) при $\lambda = 0.05$ та $\tau(\lambda) = 0.1\pi$

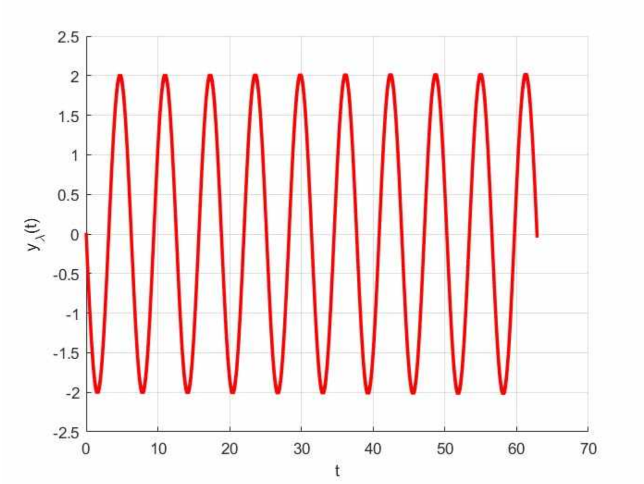


(а) $x_\lambda(t)$ (б) $y_\lambda(t)$

Рис. 6.7. Графіки розв'язків системи (6.13) при $\lambda = 0.01$ та $\tau(\lambda) = 0.02\pi$



(а) $x_{\lambda}(t)$



(б) $y_{\lambda}(t)$

Рис. 6.8. Графіки розв’язків системи (6.13) при $\lambda = 0.002$ та $\tau(\lambda) = 0.004\pi$

Отже, при $\lambda = 1$, 0.5, 0.25, 0.05, 0.01 та 0.002 отримано графіки зображені на Рисунках 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 та 6.8 відповідно. Бачимо, що при зменшенні λ розв’язки системи динамічних рівнянь (6.12) збігаються до періодичних розв’язків відповідної системи диференціальних рівнянь (6.9).

6.3 Висновки до Розділу 6

У шостому розділі вивчено взаємозв'язок між існуванням періодичних розв'язків системи динамічних рівнянь на сім'ї періодичних часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$ та відповідних їм систем диференціальних рівнянь.

Отримано наступні результати:

- Встановлено, що для досить малої функції зернистості, якщо динамічне рівняння на періодичній шкалі часу має асимптотично стійкий періодичний розв'язок, то відповідне диференціальне рівняння також матиме періодичний розв'язок.
- Отримано зворотний результат, коли з існування періодичного розв'язку диференціального рівняння випливає існування відповідного розв'язку на періодичній часовій шкалі за умови, що функція зернистості є достатньо малою.

Результати цього розділу опубліковані в роботах [95, 97].

Висновки

У дисертаційній роботі одержано наступні результати.

Для систем диференціальних рівнянь та динамічних рівнянь на часових шкалах, праві частини яких є неперервно-диференційовними та обмеженими разом зі своїми частинними похідними отримано такі нові результати:

1. Отримана явна оцінка малості функції зернистості, яка гарантує збереження глобальних обмежених розв'язків системи динамічних рівнянь при переході до щільніших часових шкал;
2. Отримана явна оцінка малості функції зернистості, яка гарантує збереження глобальних обмежених розв'язків при переході від диференціальних рівнянь до динамічних рівнянь на часових шкалах, і навпаки;
3. Доведено теорему про умови дисипативності системи динамічних рівнянь на часових шкалах в термінах функції Ляпунова.
4. Доведено теорему про існування функції Ляпунова для дисипативної системи динамічних рівнянь на часових шкалах.
5. Встановлено взаємозв'язок між дисипативністю системи диференціальних рівнянь та відповідної динамічної системи на сім'ї часових шкал з малою функцією зернистості.

Для систем диференціальних рівнянь та динамічних рівнянь на періодичних часових шкалах, праві частини яких є періодичними, неперервно-диференційовними, обмеженими разом зі своїми частинними похідними отримано такі нові результати:

1. Встановлено умови існування періодичного розв'язку динамічного рівняння на періодичній шкалі часу за умови наявності періодичного розв'зку відповідного диференціального рівняння.
2. Отримано зворотний результат, коли з існування періодичного розв'язку динамічного рівняння на періодичній часовій шкалі за умови випли-

ває існування періодичного розв'язку відповідного диференціального рівняння.

Для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку та динамічних рівнянь другого порядку на часових шкалах з неперервними коефіцієнтами, отримано такі нові результати:

1. Встановлено, що при достатньо малих значеннях функції зернистості в околі кожного нуля розв'язку диференціального рівняння лежить точно один узагальнений нуль відповідного розв'язку динамічного рівня на часових шкалах, і навпаки.
2. Отримано умови коливності розв'язків слабко нелінійних диференціальних та динамічних рівнянь на часових шкалах, за наявності такої властивості у відповідних розв'язків лінійних динамічних рівнянь на часових шкалах та лінійних диференціальних рівнянь на дійсній осі відповідно.

Список використаних джерел

1. Adivar M., Koyuncuoğlu H., Raffoul Y. Existence of periodic solutions in shifts $\delta\pm$ for neutral nonlinear dynamic systems // Applied Mathematics and Computation. 2014. Vol. 242. P. 328–339. DOI: 10.1016/j.amc.2014.05.062.
2. Adivar M., Koyuncuoğlu H., Raffoul Y. Almost automorphic solutions of delayed neutral dynamic systems on hybrid domains // Applicable Analysis and Discrete Mathematics. 2016. Vol. 10. P. 128–151. DOI: 10.2298/AADM160402006A.
3. Agarwal R., Bohner M. Quadratic functionals for second order matrix equations on time scales // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 1998. Vol. 33, no. 7. P. 675–692. DOI: 10.1016/S0362-546X(97)00675-5.
4. Agarwal R., Bohner M., O'Regan D. Time scale boundary value problems on infinite intervals // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2001. Vol. 141, no. 1. P. 27–34. DOI: 10.1016/S0377-0427(01)00433-2.
5. Agarwal R., Bohner M., Wong P. Sturm-Liouville eigenvalue problems on time scales // Applied Mathematics and Computation. 1999. Vol. 99, no. 2. P. 153–166. DOI: 10.1016/S0096-3003(98)00004-6.
6. Agarwal R., Grace S., O'Regan D. Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2000. DOI: 10.1007/978-94-015-9401-1.
7. Agarwal R., Hazarika B., Tikare S. Dynamic Equations on Time Scales and Applications (1st ed.). Chapman and Hall/CRC, 2024. DOI: 10.1201/9781003467908.
8. Agarwal R., O'Regan D., Saker S. Dynamic Inequalities On Time Scales. Springer International Publishing, 2014. DOI: 10.1007/978-3-319-11002-8.

9. Ahlbrandt C., Bohner M., Ridenhour J. Hamiltonian Systems on Time Scales // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2000. Vol. 250. P. 561–578. DOI: 10.1006/jmaa.2000.6992.

10. Akin-Bohner E., Raffoul Y. Boundedness in functional dynamic equations on time scales // Advances in Difference Equations. 2006. Vol. 2006. P. 1–18. DOI: 10.1155/ADE/2006/79689.

11. Anderson D. Multiple periodic solutions for a second-order problem on periodic time scales // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2004. Vol. 60, no. 1. P. 101–115. DOI: 10.1016/j.na.2004.08.024.

12. Anderson D., Peterson A. Asymptotic Properties of Solutions of a 2nth-Order Differential Equation on a Time Scale // Mathematical and Computer Modelling. 2000. Vol. 32. P. 653–660. DOI: 10.1016/S0895-7177(00)00162-X.

13. Approximation of the Optimal Control Problem on an Interval with a Family of Optimiztion Problems on Time Scales / Lavrova O., Mogylova V., Stanzhytskyi O., and Misiats O. // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2017. Vol. 17, no. 3. P. 303–314. Access mode: https://www.e-ndst.kiev.ua/v17n3/8(60)a.pdf.

14. Ateiwi A. On a Numerical-Analytic method for second-order difference equations // Ukrainian Mathematical Journal. 1996. Vol. 48. P. 1039–1044. DOI: 10.1007/BF02390961.

15. Atici F., Guseinov G., Kaymakçalan B. On Lyapunov inequality in stability theory for Hill's equation on time scales // Journal of Inequalities and Applications. 2000. Vol. 5. P. 603–620. DOI: 10.1155/S1025583400000333.

16. Aulbach B., Hilger S. Linear Dynamic Processes with Inhomogeneous Time Scale // Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems / ed. by Leonov G. A., Reitmann V., Timmermann W. Berlin, Boston : De Gruyter, 1990. P. 9–20.

17. Bhaskar T. Comparison theorem for a nonlinear boundary value problem on time scales // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2002. Vol. 141. P. 117–122. DOI: 10.1016/S0377-0427(01)00439-3.

18. Bohner M., Bratochkina A., Stanzhytskyi O. Stochastic dynamic equations on general time scales // Electronic Journal of Differential Equations. 2013. Vol. 57. P. 1–15. Access mode: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2013/57/bohner.pdf.

19. Bohner M., Erbe L., Peterson A. Oscillation for nonlinear second order dynamic equations on a time scale // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2005. Vol. 301, no. 2. P. 491–507. DOI: 10.1016/j.jmaa.2004.07.038.

20. Bohner M., Fan M., Zhang J. Existence of periodic solutions in predator–prey and competition dynamic systems // Nonlinear Analysis Real World Applications. 2006. Vol. 7, no. 5. P. 1193–1204. DOI:10.1016/j.nonrwa.2005.11.002 .

21. Bohner M., Georgiev S. Multivariable dynamic calculus on time scales. Berlin : Springer, 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-47620-9.

22. Bohner M., Karpenko O., Stanzhytskyi O. Oscillation of solutions of second-order linear differential equations and corresponding difference equations // Journal of Difference Equations and Applications. 2014. Vol. 20, no. 7. P. 1112–1126. DOI: 10.1080/10236198.2014.893297.

23. Bohner M., Lutz B. Asymptotic behavior of dynamic equations ontime scales // Journal of Difference Equations and Applications. 2001. Vol. 7, no. 1. P. 21–50. DOI: 10.1080/10236190108808261.

24. Bohner M., Mesquita J., Streipert S. The Beverton-Hold model on isolated time scales // Mathematical Biosciences and Engineering. 2022. Vol. 19. P. 11693–11716. DOI: 10.3934/mbe.2022544.

25. Bohner M., Peterson A. Dynamical equations on time scales. An introduction with applications. Boston : Birkhaüser, 2001. DOI: 10.1007/978-1-4612-0201-1.

26. Bohner M., Peterson A. Advances in dynamical equations on time scales. Boston : Birkhaüser, 2003. DOI: 10.1007/978-0-8176-8230-9.

27. Boichuk O., Strakh O. Fredholm Boundary-value Problems for Systems of Linear Integrodynamical Equations with Degenerate Kernel on a Time Scale // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 205. P. 749–756. DOI: 10.1007/s10958-015-2280-1 .

28. Boichuk O., Strakh O. Linear fredholm boundary-value problems for dynamical systems on a time scale // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 208, no. 5. P. 487–497. DOI: 10.1007/s10958-015-2463-9 .

29. Bourdin L., Stanzhytskyi O., Trelat E. Addendum to Pontryagin maximum principle for dynamic systems on time scales // Journal of Difference Equa-

tions and Applications. 2017. Vol. 23, no. 10. P. 1760–1763. DOI: 10.1080/10236198.2017.1363194.

30. Bourdin L., Trelat E. General Cauchy-Lipschitz theory for Δ-Cauchy problems with Carathodory dynamics on time scales // Journal of Difference Equations and Applications. 2014. Vol. 20, no. 4. P. 526–547. DOI: 10.1080/10236198.2013.862358.

31. Continued A_2-fractions and singular functions / Pratsiovytyi M., Goncharenko Y., Lysenko I., and Ratuhniak S. // Matematychni Studii. 2022. Vol. 58, no. 1. P. 3–12. DOI: 10.30970/ms.58.1.3-12.

32. Danilov V., Lavrova O., Stanzhytskyi O. Viscous solutions for the Hamilton-Jakobi-Bellman on time scales // Ukrainian Mathematical Journal. 2017. Vol. 29, no. 7. P. 933–950. DOI: 10.1007/s11253-017-1417-4.

33. Djemai M., Defoort M., Martynyuk A. Stability, control and observation on non-uniform time domain // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2020. 05. Vol. 36. P. 100889. DOI: 10.1016/j.nahs.2020.100889.

34. Došlý O., Hilger S. A necessary and sufficient condition for oscillation of the Sturm-Liouville dynamic equation on time scales // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2002. Vol. 141. P. 147–158. DOI: 10.1016/S0377-0427(01)00442-3.

35. Došlý O., Hilscher R. Disconjugacy, transformations and quadratic functionals for symplectic dynamic systems on time scales // Journal of Difference Equations and Applications. 2001. Vol. 7. P. 265–295. DOI: 10.1080/10236190108808273.

36. Drici Z. Practical stability of large-scale uncertain control systems on time scales // Journal of Difference Equations and Applications. 1996. Vol. 2, no. 2. P. 139–159. DOI: 10.1080/10236199608808049.

37. Dynamic equations on time scales: a survey / Agarwal R., Bohner M., O'Regan D., and Peterson A. // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2001. Vol. 141, no. 1. P. 1–26. DOI: 10.1016/S0377-0427(01)00432-0.

38. Erbe L., Peterson A. Green's Functions and Comparison Theorems for Dierential Equations on Measure Chains // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. 1999. Vol. 6. P. 1–16. Access mode: https://www.math.unl.edu/ apeterson1/pub/erbepet1.pdf.

39. Erbe L., Peterson A. Positive solutions for a nonlinear differential equation on a measure chain // Mathematical and Computer Modelling. 2000. Vol. 32. P. 571–585. DOI: 10.1016/S0895-7177(00)00154-0.

40. Erbe L., Peterson A. Oscillation criteria for second-order matrix dynamic equations on a time scale // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2002. Vol. 141. P. 169–185. DOI: 10.1016/S0377-0427(01)00444-7.

41. Erbe L., Peterson A., Saker S. Oscillation Criteria for Second-Order Nonlinear Dynamic Equations On Time Scales // Journal of the London Mathematical Society. 2003. Vol. 67. P. 701–714. DOI: 10.1112/S0024610703004228.

42. Existence of Bounded Solutions for Second Order Dynamic Equations / Akin E., Bohner M., Erbe L., and Peterson A. // Journal of Difference Equations and Applications. 2002. Vol. 8, no. 4. P. 389–401. DOI: http://dx.doi.org/10.1080/1026190290017414.

43. Existence of Bounded Solutions of a Dynamic Equation / Tsan V., Stanzhytsky O., Uteshova R., and Mohylova V. // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations – QUALITDE. Tbilisi, Georgia : Tbilisi State University Press. December 17-19, 2022. P. 209–213. Access mode: https://rmi.tsu.ge/eng/QUALITDE-2022/Stanzhytskyi_Tsan_Uteshova_Mohylova_workshop_2022.pdf.

44. Fredholm boundary value problems for perturbed systems of dynamic equations on time scales / Agarwal R., Bohner M., Boichuk O., and Strakh O. // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2014. Vol. 38, no. 17. P. 4178–4186. DOI: 10.1002/mma.3356.

45. Grace S., Graef J., El-Beltagy M. On the oscillation of third order neutral delay dynamic equations on time scales // Computers & Mathematics with Applications. 2012. Vol. 63. P. 775–782. DOI: 10.1016/j.camwa.2011.11.042.

46. Guseinov G., Kaymakçalan B. On a disconjugacy criterion for second order dynamic equations on time scales // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2002. Vol. 141. P. 187–196. DOI: 10.1016/S0377-0427(01)00445-9.

47. Hassan T., O'Regan D. Oscillatory behavior of solutions of dynamic equations of higher order on time scales // Rocky Mountain Journal of Mathematics. 2020. Vol. 50, no. 2. P. 599–617. DOI: 10.1216/rmj.2020.50.599.

48. Hilger S. Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, PhD. Würzburg, 1988.
49. Hilger S. Analysis on Measure Chains — A Unified Approach to Continuous and Discrete Calculus // Results in Mathematics. 2000. Vol. 18, no. 1. P. 1420–9012. DOI: 10.1007/BF03323153.
50. Hilscher R. Linear Hamiltonian systems on time scales: Positivity of quadratic functionals // Mathematical and Computer Modelling. 2000. Vol. 32, no. 5. P. 507–527. DOI: 10.1016/S0895-7177(00)00149-7.
51. Hilscher R., Zeidan V. Discrete Optimal Control: The Accessory Problem and Necessary Optimality Conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2000. Vol. 243. P. 429–452. DOI: 10.1006/jmaa.1999.6679.
52. Hilscher R., Zeidan V. Time scale embedding theorem and coercivity of quadratic functionals // Analysis. 2008. Vol. 28, no. 1. P. 1–28. DOI: 10.1524/anly.2008.0900.
53. Hino Y. Stability properties for functional differential equations with infinite delay // Tohoku Mathematic Journal. 1983. Vol. 35. P. 597–605.
54. Hoffacker J., Tisdell C. Stability and instability for dynamic equations on time scales // Computers and Mathematics with Applications. 2005. Vol. 49. P. 1327–1334. DOI: 10.1016/j.camwa.2005.01.016.
55. Karpenko O., Kravets' V., Stanzhyts'kyi O. Oscillation of solutions of the second-order linear functional-difference equations // Ukrainian Mathematical Journal. 2013. Vol. 65. P. 249–259. DOI: 10.1007/s11253-013-0775-9.
56. Karpenko O., Stanzhytskyi O. The relation between the existence of bounded solutions of differential equations andthe corresponding difference equations // Journal of Difference Equations and Applications. 2013. Vol. 19, no. 12. P. 1967–1982. DOI: 10.1080/10236198.2013.794795.
57. Karpenko O., Stanzhytskyi O.and Dobrodzii T. The relation between the existence of bounded global solutions of the differential equations and equations on time scales // Turkish Journal of Mathematics. 2020. Vol. 44. P. 2099–2112. DOI: 10.3906/mat-2006-79.
58. Kaufmann E. Smoothness of solutions of conjugate boundary-value problems on a measure chain. // Electronic Journal of Differential Equations. 2000. Vol. 2000. P. Paper No. 54, 10 p. Access mode: http://eudml.org/doc/120693.

59. Kaufmann E., Kosmatov N., Raffoul Y. The connection between boundedness and periodicity in nonlinear functional neutral dynamic equations on a time scale // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2009. Vol. 1. P. 89–98. Access mode: https://e-ndst.kiev.ua/v9n1/8(26).pdf.
60. Kaufmann E., Raffoul Y. Periodic solutions for a neutral nonlinear dynamical equation on a time scale // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2006. Vol. 319, no. 1. P. 315–325. DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.01.063.
61. Kaymakçalan B. Lyapunov stability theory for dynamic systems on time scales // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 1992. Vol. 5. P. 275–281. DOI: 10.1155/S1048953392000224.
62. Kaymakçalan B. Existence and Comparison Results for Dynamic Systems on a Time Scale // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1993. Vol. 172. P. 243–255. DOI: 10.1006/jmaa.1993.1021.
63. Kaymakçalan B. Stability Analysis in Terms of Two Measures for Dynamic Systems on Time Scales // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 1993. Vol. 6. P. 325–344. DOI: 10.1155/S1048953393000280.
64. Kichmarenko O., Ogulenko A. Averaging of multicriteria control problems of systems on time scales // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2017. Vol. 56. P. 33–43. DOI: 10.1134/S1064230716060071.
65. Lakshmikantham V., Drici Z. Stability of conditionally invariant sets and controlleduncertain dynamic systems on time scales // Mathematical Problems in Engineering. 1995. Vol. 1. P. 1–10. DOI: 10.1155/S1024123X95000020.
66. Lakshmikantham V., Sivasundaram S. Stability of moving invariant sets and uncertain dynamic systems on time scales // Computers & Mathematics with Applications. 1998. Vol. 36, no. 10. P. 339–346. DOI: 10.1016/S0898-1221(98)80034-5.
67. Lavrova O., Danilov O., Stanzhytskyi O. Viscous solutions for the Bellman equation on the time scales // Ukrainian Mathematical Journal. 2017. Vol. 69, no. 7. P. 933–950. Access mode: http://jnas.nbuv.gov.ua/article/UJRN-0000778687.
68. Liu A. Boundedness and exponential stability of solutions to dynamic equations on time scales. // Electronic Journal of Differential Equations. 2007. Vol. 2007, no. 12. P. 1–14. Access mode: http://eudml.org/doc/127807.

69. Liu X., W. L. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications // Periodic solutions for dynamic equations on time scales. 2007. Vol. 67, no. 5. P. 1457–1463. DOI: 10.1016/j.na.2006.07.030.

70. Lukyanova T., Martynyuk A. Stability analysis of impulsive Hopfield-type neuron system on time scale // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2017. 01. Vol. 17. P. 315–326. Access mode: https://www.e-ndst.kiev.ua/v17n3/9(60).pdf.

71. Martynyuk A. Stability Theory for Dynamic Equations on Time Scales. Birkhüser Cham, 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-42213-8.

72. Martynyuk A., Stamova I., Martynyuk-Chernienko Y. Matrix Lyapunov functions method for sets of dynamic equations on time scales // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2019. Vol. 34. P. 166–178. DOI: 10.1016/j.nahs.2019.06.004.

73. Messer K. Riccati techniques on a time scale // Panamerican Mathematical Journal. 2002.

74. Messer K. A second-order self adjoint dynamic equation on time scale // Dynamic Systems and Applications. 2003. Vol. 12. P. 201–216.

75. Nonlinear Dynamic Inequalities and Stability Quasilinear Systems on Time Scales // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, no. 1. P. 14879–14883. 20th IFAC World Congress.

76. Öcalan Ö., Nurten K. Oscillation condition for first order linear dynamic equations on time scales // Malaya Journal of Matematik. 2023. Vol. 11, no. 03. P. 263–271. DOI: 10.26637/mjm1103/002.

77. Ogulenko A. Asymptotical properties of social network dynamics on time scales // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. Vol. 319. P. 413–422. DOI: 10.1016/j.cam.2017.01.031.

78. Ogulenko A., Kichmarenko O. Averaging of the Problem of Optimal Control on Time Scales // Journal of Mathematical Sciences. 2016. Vol. 212. P. 290–304. DOI: 10.1007/s10958-015-2665-1.

79. On the relation between oscillation of solutions of differential equations and corresponding equations on time scales / Stanzhytskyi O., Uteshova R., Tsan V., and Khaletska Z. // Turkish Journal of Mathematics. 2023. Vol. 47, no. 2. P. 476–501. DOI: 10.55730/1300-0098.3373.

80. Oscillation Behavior of Third-Order Neutral Emden-Fowler Delay Dynamic Equations on Time Scales / Han Z., Li T., Sun S., and Zhang C. // Advances in Difference Equations. 2010. Vol. 2010, no. 1. P. 1687–1847. DOI: 10.1155/2010/586312.
81. Oscillation results for a dynamic equation on a time scale / Akin E., Erbe L., Billur A., Peterson A., and Kaymakçalan B. // Journal of Difference Equations and Applications. 2001. Vol. 7. P. 1–13. DOI: 10.1080/10236190108808303.
82. Peterson A., Raffoul Y. Exponential stability of dynamic equations on time scales // Advances in Difference Equations. 2005. Vol. 2005, no. 2. P. 133–144. DOI: 10.1155/ADE.2005.133.
83. Peterson A., Tisdell C. Boundedness and Uniqueness of Solutions to Dynamic Equations on Time Scales // Journal of Difference Equations and Applications. 2004. Vol. 10. P. 1295–1306. DOI: 10.1080/10236190410001652793.
84. Pontryagin maximum principle for dynamic systems on time scales / Bohner M., Kenzhebaev K., Lavrova O., and Stanzhytskyi O. // Journal of Difference Equations and Applications. 2017. Vol. 23, no. 7. P. 1161–1189. DOI: 10.1080/10236198.2017.1284829.
85. Pratsiovytyi M., Ratuhniak S. Properties and distributions of values of fractal functions related to Q_2-representations of real numbers // Probability theory and mathematical statistics. 2019. Vol. 99, no. 2. P. 221–228. DOI: 10.1090/tpms/1091.
86. Saker S., Agarwal R., O'Regan D. Oscillation of second-order damped dynamic equations on time scales // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. Vol. 330. P. 1317–1337. DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.06.103.
87. Salem S., Hassan A. Oscillatory Behavior of Solutions of Third-Order Nonlinear Neutral Delay Dynamic Equations on Time Scales // Mediterranean Journal of Mathematics. 2023. Vol. 20, no. 6. P. 308. DOI: 10.1007/s00009-023-02506-y.
88. Samoilenko A. N. N. Bogolyubov and non-linear mechanics // Russian Mathematical Surveys. 1994. Vol. 49, no. 5. P. 109–154. DOI: 10.1070/RM1994v049n05ABEH002432.
89. Samoilenko A., Perestyuk M., Parasyuk I. Differential equations. Almaty, 2012. Textbook.

90. Stanzhytskyi O., Mogylova V., Lavrova O. Optimal Control for Systems of Differential Equations on the Infinite Interval of Time Scale // Understanding Complex Systems, Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics / ed. by Sadovnichiy V. A., Zgurovsky M. Z. Cham : Springer, 2020. P. 395–405. DOI: 10.1007/978-3-030-50302-4_18.

91. Stanzhytskyi O., Tkachuk A. On the Relationship between Properties of Solutions of Difference Equations and the Corresponding Differential Equations // Ukrainian Mathematical Journal. 2005. Vol. 57. P. 1167–1176. DOI: 10.1007/s11253-005-0253-0.

92. Stanzhytskyi O., Tkachuk A. Dissipativity of differential equations and the corresponding difference equations // Ukrainian Mathematical Journal. 2006. Vol. 58. P. 1415–1424. DOI: 10.1007/s11253-006-0140-3.

93. Tsan V., Kovalchuk T. The connection between oscillation of solutions of linear equations and their corresponding equations on time scales // The 29th Conference on Applied and Industrial Mathematics, dedicated to the Memory of Academician Mitrofan M. Choban, CAIM 2022. Chisinau, Republic of Moldova : Tiraspol State University. August 25-27, 2022. P. 76–77. Access mode: https://ibn.idsi.md/vizualizare_articol/170168.

94. Tsan V., Perestyuk Y., Mogylova V. Relationship Between Bounded Solutions of Differential Equations and Dynamic Equations on Time Scales // Journal of Mathematical Sciences. 2024. Vol. 279, no. 3. P. 414–437. DOI: 10.1007/s10958-024-07022-2.

95. Tsan V., Stanzhytsky O., Martynyuk O. Periodic Solutions in Dynamic Equations on Time Scales and Their Relationship with Differential Equations // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations – QUALITDE. Tbilisi, Georgia : Tbilisi State University Press. December 9-11, 2023. P. 202–207. Access mode: https://rmi.tsu.ge/eng/QUALITDE-2023/Stanzhytskyi_Tsan_Martynyuk_workshop_2023.pdf.

96. Tsan V., Stanzhytskyi O., Kapustian O. Dissipativity of dynamical systems on time scales and the relationship between dissipative differential and dynamic systems // Carpatian Mathematical Publications. 2024. Vol. 16, no. 2. P. 427–447. DOI: 10.15330/cmp.16.2.427-447.

97. Tsan V., Stanzhytskyi O., Martynyuk O. On the correspondence between periodic solutions of differential and dynamic equations on periodic time scales // Georgian Mathematical Journal. 2024. Vol. 31, no. 5. P. 899–908. DOI: 10.1515/gmj-2024-2003.

98. Vall'ee O., Soares M. Airy Functions and Applications to Physics. London : Imperial College Press, 2010. 2nd ed.

99. Vatsala A. Strict stability criteria for dynamic systems on time scales // Journal of Difference Equations and Applications. 1997. Vol. 3, no. 3-4. P. 267–276. DOI: 10.1080/10236199808808102.

100. Wang S.-P. Existence of periodic solutions for higher order dynamic equations on time scales // Taiwanese journal of mathematics. 2012. Vol. 16, no. 6. P. 2259–2273. DOI: 10.11650/twjm/1500406850.

101. Wong P. Optimal Abel-Gontscharoff interpolation error bounds on measure chains // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2002. Vol. 141. P. 267–282. DOI: 10.1016/S0377-0427(01)00452-6.

102. Wu S.-T., Tsai L.-Y. Periodic solutions for dynamic equations on time scales // Tamkang Journal of Mathematics. 2009. Vol. 40, no. 2. DOI: 10.5556/j.tkjm.40.2009.466.

103. Wu X., Sun T., Wang J. Asymptotics and oscillation for certain higher-order nonlinear dynamic equations on time scales // Analysis and Mathematical Physics. 2024. Vol. 55, no. 14. DOI: 10.1007/s13324-024-00917-y.

104. Yoshizawa T. Stability Theory by Lyapunovs Second Method. Tokyo, Japan : The Mathematical Society of Japan, 1966.

105. Капустян О., Пічкур В., Собчук В. Теорія динамічних систем. Навч. посібн. Луцьк : Вежа-Принт, 2020.

106. Карпенко О. Про зв'язок між існуванням періодичних розв'язків різницевих та відповідних їм диференціальних рівнянь // Вісник Одеського Національного Університету (Мат. і мех.). 2012. Т. 4. С. 40–46. Access mode: http://liber.onu.edu.ua/pdf/2012T17%20в4(16).pdf.

107. Карпенко О. Про зв'язок між коливністю розв'язків лінійних диференціальних та відповідних їм різницевих рівнянь другого порядку // Буко-

винський математичний журнал. 2013. Т. 1, № 1–2. С. 71–76. Access mode: https://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/34.

108. Станжицький О., Ткачук А. Про зв'язок між властивостями розв'язків різницевих та відповідних диференціальних рівнянь // Український математичний журнал. 2005. Т. 57, № 7. С. 989–996. Access mode: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/165798.

109. Станжицький О., Ткачук А. Диссипативність диференціальних та відповідних їм різницевих рівнянь // Український математичний журнал. 2006. Т. 58, № 9. С. 1249–1256. Access mode: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/165430.

110. Станжицький О., Цань В. Дослідження дисипативності систем динамічних рівнянь на часових шкалах з малою функцією зернистості // V Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації». Запоріжжя, Україна : Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного. 29 – 31 травня, 2024. С. 24–28. Access mode: https://sites.google.com/tsatu.edu.ua/mvfconf.

111. Цань В. Зв'язок між коливністю розв'язків динамічного рівняння на часових шкалах та коливністю розв'язків диференціального рівняння другого порядку // XX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2022». Київ, Україна : Київський нацональний університет імені Тараса Шевченка. 14 квітня, 2022. С. 29. Access mode: https://probability.knu.ua/shv2022/ShV_2022.pdf.

112. Цань В. Деякі властивості розв'язків лінійних динамічних рівнянь другого порядку на часових шкалах // III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації». Запоріжжя, Україна : Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного. 30 вересня, 2022. С. 92–95. Access mode: http://www.tsatu.edu.ua/tm/wp-content/uploads/sites/14/materyaly.pdf.

113. Цань В., Ковальчук Т. Коливність розв'язків лінійних диференціальних рівнянь та відповідних рівнянь на часових шкалах // Міжнародна наукова конференція «Прикладна математика та інформаційні технології»,

присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій. Чернівці, Україна : Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. 22-24 вересня, 2022. С. 85–87. Access mode: http://www.amit60.fmi.org.ua/files/AMIT2022-Materials.pdf.

114. Цань В., Мартинюк О., Перестюк Ю. Існування функції Ляпунова дисипативних систем динамічних рівнянь на часових шкалах // XIII Міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Луцьк – Світязь, Україна : Волинський національний університет імені Лесі Українки. 31 травня – 2 червня, 2024. С. 70–72. Access mode: http://www.diffeq.univ.kiev.ua/vnuconf2024/wp-content/uploads/thesis_2024.pdf.

115. Цань В., Перестюк Ю. Існування обмежених розв'язків динамічних рівнянь на часовій шкалі при умові обмеженості розв'язків вихідної диференціальної системи // XII Міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Луцьк – Світязь, Україна : Волинський національний університет імені Лесі Українки. 2-4 червня, 2023. С. 48–50. Access mode: http://vnuconference.zzz.com.ua/архів/.

116. Цань В., Перестюк Ю. Дисипативність систем динамічних рівнянь на часових шкалах // Міжнародна конференція, присвячена 145-річчю з дня народженя Ганса Гана. Чернівці, Україна : Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. 23– 27 вересня, 2024. С. 102–105. Access mode: https://hahn.chnu.edu.ua/tezy-dopovidei/.

117. Цань В., Перестюк Ю. Умови існування обмеженого розв'язку динамічного рівняння на часових шкалах // Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики. Чернівці, Україна : Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. 28–30 вересня, 2023. С. 337–33. Access mode: https://fmi.chnu.edu.ua/media/qhufs0d5/materialy-mizhnorodnoi-naukovoi-konferentsii-fmi55.pdf.

118. Цань В., Перестюк Ю., Могильова В. Зв'язок між обмеженими розв'язками диференціальних рівнянь і динамічних рівнянь на часових шкалах // Нелінійні коливання. 2023. Т. 26. С. 274–293. DOI: 10.37863/nosc.v26i2.1433.

Додаток

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Цань В. Б., Перестюк Ю. М., Могильова В. В. Зв'язок між обмеженими розв'язками диференціальних рівнянь і динамічних рівнянь на часових шкалах. *Нелінійні коливання.* 2023 Випуск 26 (2), С. 274–293. DOI: 10.37863/nosc.v26i2.1433 Переклад англійською: Tsan, V., Perestyuk, Y., Mogylova, V. Relationship Between Bounded Solutions of Differential Equations and Dynamic Equations on Time Scales. *Journal of Mathematical Sciences* (2024). DOI: 10.1007/s10958-024-07022-2
2. Stanzhytskyi O., Uteshova R., Tsan V., Khaletska Z. On the relation between oscillation of solutions of differential equations and corresponding equations on time scales.*Turkish Journal of Mathematics* . 2023. Vol. 47 (2). P. 476–501. DOI: 10.55730/1300-0098.3373
3. Tsan V., Stanzhytskyi O., Martynyuk O. On the correspondence between periodic solutions of differential and dynamic equations on periodic time scales *Georgian Mathematical Journal* . 2024. Vol. 32 (5). P. 899–908 DOI: 10.1515/gmj-2024-200
4. Tsan V., Stanzhytsky O., Kapustian O. Dissipativity Of Dynamical Systems On Time Scales And The Relationship Between Dissipative Differential And Dynamic Systems. *Carpathian Mathematical Publications.*2024. Vol. 16 (2). P. 427–447. DOI: DOI: 10.15330/cmp.16.2.427-447

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Цань В. Б. Зв'язок між коливністю розв'язків динамічного рівняння на часових шкалах та коливністю розв'язків диференціального рівняння другого порядку // XX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2022». Київ, Україна. 14 квітня 2022. С. 29.

2. Цань В., Ковальчук Т. Коливність розв'язків лінійних диференціальних рівнянь та відповідних рівнянь на часових шкалах // Міжнародна наукова конференція «Прикладна математика та інформаційні технології», присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій. Чернівці, Україна. 22–24 вересня 2022. С. 85–87.
3. Цань В., Ковальчук Т. Деякі властивості розв'язків лінійних динамічних рівнянь другого порядку на часових шкалах // III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації». Запоріжжя, Україна. 30 вересня 2022. С. 92–95.
4. Цань В. Б., Перестюк Ю. М. Існування обмежених розв'язків динамічних рівнянь на часовій шкалі при умові обмеженості розв'язків вихідної диференціальної системи // XII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Луцьк, Україна. 2–4 червня 2023. С. 48–50.
5. Цань В. Б., Перестюк Ю. М., Умови існування обмеженого розв'язку динамічного рівняння на часових шкалах // Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики. Чернівці, Україна. 28–30 вересня 2023. С. 337–338.
6. Tsan V., Kovalchuk T. The connection between oscillation of solutions of linear equations and their corresponding equations on time scales // The 29th Conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2022. Chisinau, Republic of Moldova. August 25–27, 2022. P. 76–77.
7. Tsan V., Stanzhytskyi O., Uteshova R., Mohyl'ova V. Existence of bounded solutions of a dynamic equation // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2022. Tbilisi, Georgia. December 17–19, 2022. P. 209-213.
8. Tsan V., Stanzhytskyi O., Marynyuk O. Periodic solutions in dynamic equations on time scales and their relationship with differential equations // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2023. Tbilisi, Georgia. December 9–11, 2023. P. 202–207.
9. Цань, В.Б. and Мартинюк, О.В. and Перестюк, Ю.М. Існування функції Ляпунова дисипативних систем динамічних рівнянь на часових шкалах //XIII Міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні

технології. Освіта». Луцьк – Світязь, Україна. 31 травня – 2 червня, 2024 С. 70–72.

10. Станжицький, О. and Цань, В. Дослідження дисипативності систем динамічних рівнянь на часових шкалах з малою функцією зернистості V Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації». Запоріжжя, Україна. 29 – 31 травня, 2024 С. 92–95.
11. Цань В., Перестюк Ю. Дисипативність систем динамічних рівнянь на часових шкалах // V Міжнародна конференція, присвячена 145-ій річниці від дня народження Ганса Гана. Чернівці, Україна. 23 – 27 вересня, 2024. С. 102–105.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Конференції

1. XX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2022», 14 квітня 2022, Київ, Україна.
2. Міжнародна наукова конференція «Прикладна математика та інформаційні технології», присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, 22–24 вересня 2022, Чернівці, Україна.
3. III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації», 30 вересня 2022, Запоріжжя, Україна.
4. XII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», 2–4 червня 2023, Луцьк, Україна.
5. Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики, 28–30 вересня 2023, Чернівці, Україна.
6. The 29th Conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2022, August 25–27, 2022, Chisinau, Republic of Moldova.
7. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2022, December 17–19, 2022, Tbilisi, Georgia.

8. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2023, December 9–11, 2023, Tbilisi, Georgia.
9. XII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», 2–4 червня 2023, Луцьк – Світязь, Україна.
10. V Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації», 29–31 травня 2024, Запоріжжя, Україна.
11. V Міжнародна конференція, присвячена 145-ій річниці від дня народження Ганса Гана, 23 – 27 вересня, 2024, Чернівці, Україна.