МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ПЕЧЕРИЦЯ ОЛЕКСІЙ АНАТОЛІЙОВИЧ

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З КУСКОВО-СТАЛИМИ ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Спеціальність 111 — «Математика»

Галузь знань 11 — «Математика та статистика»

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. ______________ О.А. Печериця

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Городній Михайло Федорович

Київ — 2024

АНОТАЦІЯ

Печериця О. А. Обмежені розв'язки диференціальних рівнянь з кусково-сталими операторними коефіцієнтами. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика». — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2024.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню питань про існування та єдиність обмежених на усій числовій осі розв'язків лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами, деяких нелінійних аналогів таких рівнянь та питань про існування та єдиність обмежених на усій числовій осі розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами.

Робота складається з двох анотацій (українською та англійською мовами), вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновку, списку використаних джерел і додатків, що містять список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, встановлено мету і завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження, наведено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, охарактеризовано особистий внесок здобувача, наведено список конференцій та наукових семінарів, на яких дисертаційна робота пройшла апробацію, та короткий зміст роботи.

Перший розділ дисертації присвячено огляду літературних джерел за тематикою дисертаційної роботи та відповідних результатів, отриманих іншими дослідниками.

У другому розділі дисертаційної роботи розглядається питання про умови існування єдиного обмеженого розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку з кусково-сталим операторним коефіцієнтом

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{A}x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x'(t) = \mathrm{B}x(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

у якому A та B – фіксовані лінійні неперервні оператори, що діють у комплексному банаховому просторі X, а функція y належить банаховому простору $C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ усіх неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $f : \mathbb{R} \to \mathrm{X}$ з нормою $\|f\|_\infty := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|f\,(t)\|$ для довільної функції y із цього простору.

Під обмеженим розв'язком диференціального рівняння (1) розуміємо таку функцію $x \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$, що для кожного $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ існує похідна $x'(t)$ і виконується рівність (1).

Отримано необхідні і достатні умови на оператори A та B, за виконання яких існує єдиний обмежений розв'язок розглянутого рівняння. Наведено явний вигляд відповідного розв'язку та оцінено близькість обмежених на усій числовій осі розв'язків цього рівняння та диференціального рівняння зі сталим операторним коефіцієнтом

$$x'(t) = \mathrm{A}x(t) + y(t),\ t \in \mathbb{R},$$

що відповідають одній і тій самій функції y, при $t \to +\infty$.

Третій розділ роботи стосується дослідження достатніх умов існування єдиного обмеженого розв'язку нелінійного аналога диференціального рівняння, розглянутого у другому розділі, що має вигляд

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{A}x(t) + f(t, x(t), y(t)),\ t \geq 0, \\ x'(t) = \mathrm{B}x(t) + f(t, x(t), y(t)),\ t < 0. \end{cases}$$

Як результат, знайдено достатні умови на фіксовані лінійні оператори A та B, а також функцію $f : \mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$, при виконанні яких дане рівняння має єдиний обмежений розв'язок x для довільної функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$.

Крім того, як наслідок основного результату, отримано достатні умови існування єдиного обмеженого розв'язку для диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{A}x(t) + g(x(t)) + y(t),\ t \geq 0, \\ x'(t) = \mathrm{B}x(t) + g(x(t)) + y(t),\ t < 0, \end{cases}$$

де $g : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ – деяка функція, що задовольняє умову Ліпшиця, та

$$\begin{cases} x'(t) = (\mathrm{A} + T(t))x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x'(t) = (\mathrm{B} + T(t))x(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases}$$

де $T : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathrm{X})$ – неперервна і обмежена на $\mathbb{R}$ операторнозначна функція.

Четвертий розділ дисертації присвячено дослідженню необхідних і достатніх умов на оператори, при виконанні яких диференціальне рівняння другого порядку

$$\begin{cases} x''(t) = \mathrm{A}_1 x'(t) + \mathrm{A}_2 x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x''(t) = \mathrm{B}_1 x'(t) + \mathrm{B}_2 x(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases} \tag{2}$$

в якому A_1, A_2 та B_1, B_2 – фіксовані лінійні неперервні оператори, що діють у просторі X, а функція y належить банаховому простору $C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$, має єдиний обмежений розв'язок.

Обмеженим розв'язком диференціального рівняння (2) називаємо таку функцію $x \in C_b^{(1)}(\mathbb{R},\mathrm{X})$, що для кожного $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ існує друга похідна $x''(t)$ і виконується рівність (2). Тут $C_b^{(1)}(\mathbb{R},\mathrm{X})$ – банахів простір усіх функцій $f \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$, що мають неперервну і обмежену на $\mathbb{R}$ похідну f', з нормою $\|f\|_{1,\infty} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

Доведено, що якщо існує такий лінійний неперервний оператор W, що $\sigma(\mathrm{W}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, а також $\mathrm{A}_1\mathrm{W} + \mathrm{A}_2 = \mathrm{B}_1\mathrm{W} + \mathrm{B}_2$, то розглянуте диференціальне рівняння другого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами має єдиний обмежений розв'язок x у тому і тільки тому випадку, коли диференціальне рівняння

$$\begin{cases} \bar{x}'(t) = \mathrm{T_A}\bar{x}(t) + \bar{y}(t),\, t \geq 0, \\ \bar{x}'(t) = \mathrm{T_B}\bar{x}(t) + \bar{y}(t),\, t < 0, \end{cases}$$

де $\mathrm{T_A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A_1} & \mathrm{A_2} \\ \mathrm{I} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$, $\mathrm{T_B} = \begin{pmatrix} \mathrm{B_1} & \mathrm{B_2} \\ \mathrm{I} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$, яке розглядається у банаховому просторі X^2, має єдиний обмежений розв'язок $\bar{x}$ для кожної функції $\bar{y} \in C_b\big(\mathbb{R},\mathrm{X}^2\big)$.

Також досліджується випадок, коли перевірку отриманих умов можна звести до перевірки умов на розділені корені операторних рівнянь $\Lambda^2 - \mathrm{A_1}\Lambda - \mathrm{A_2} = \mathrm{O}$ та $\Lambda^2 - \mathrm{B_1}\Lambda - \mathrm{B_2} = \mathrm{O}$, відповідних до диференціального рівняння (2).

Дисертаційна робота має як теоретичне, так і практичне значення. Отримані результати можуть бути використані у подальших дослідженнях властивостей розв'язків диференціальних рівнянь зі змінними операторними коефіцієнтами, а також дозволяють спростити дослідження реальних процесів і явищ, що описуються такими рівняннями.

***Ключові слова*:** банахів простір, диференціальне рівняння, різницеве рівняння, кусково-сталий операторний коефіцієнт, експоненціальна дихотомія, лінійний неперервний оператор, обмежений розв'язок, єдиність розв'язку, близькість розв'язків.

Публікації, у яких оприлюднені основні наукові результати дисертації

1. *Городній М. Ф., Печериця О. А.* Обмежені розв'язки диференціального рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Нелінійні коливання. 2021. Т. 24, № 2. С. 147–157. URL: https://www.imath.kiev.ua/~nosc/web/show_article.php?article_id=1343&lang=ua;

English translation: *Horodnii, M. F., Pecherytsia, O. A.* Bounded Solutions of a Differential Equation with Piecewise Constant Operator Coefficients // J. Math. Sci. 2023. Vol. 270, iss. 6. P. 237–249. DOI: 10.1007/s10958-023-06343-y.

2. *Городній М. Ф., Печериця О. А.* Обмежені розв'язки диференціального рівняння другого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Нелінійні коливання. 2023. Т. 26, № 3. С. 342–349. DOI: 10.3842/nosc.v26i3.1436.
3. *Городній М. Ф., Печериця О. А.* Обмежені розв'язки одного нелінійного диференціального рівняння в банаховому просторі // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика». 2023. Т. 43, № 2. С. 22–28. DOI: 10.24144/2616-7700.2023.43(2).22-28.

Публікації, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. *Городній М. Ф., Печериця О. А.* Про обмежені розв'язки різницевого рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Матеріали XIX Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2021: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». Київ, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, квітень 2021. С. 11.
2. *Городній М. Ф., Печериця О. А.* Про обмежені на R розв'язки диференціальних рівнянь з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Матеріали XX Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2022: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». Київ, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 14 квітня 2022. С. 24–25.

3. *Pecherytsia, O.* On bounded solutions of a second-order differential equation with piecewise constant operator coefficients // Book of Abstracts. “11th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications” (IECMSA-2022). Istanbul, T́u, Yildiz Technical University, 29 серпня – 1 вересня 2022. P. 70.
4. *Городній М. Ф., Печериця О. А.* Про обмежені розв’язки диференціального рівняння другого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2023: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп’ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз. Методика викладання математики». Київ, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 14 квітня 2023. С. 13–14.

ABSTRACT

Pecherytsia, O. A. Bounded solutions of differential equations with piecewise constant operator coefficients. — Qualifying scientific work as a manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in the field of knowledge 11 "Mathematics and statistics" in the specialty 111 "Mathematics". — Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2024.

The dissertation is devoted to the study of questions related to the existence and unity of bounded on the entire real axis solutions of first-order linear differential equations with piecewise constant operator coefficients. It also explores some nonlinear analogs of such equations and addresses questions regarding the existence and unity of solutions on the entire real axis of second-order linear differential equations with piecewise-constant operator coefficients.

The work consists of two abstracts (in Ukrainian and English), an introduction, four chapters divided into sections, a conclusion, a reference list, and appendices that include a list of publications by the researcher on the dissertation topic and information about the validation of the results.

The introduction justifies the relevance of the topic, establishes the connection of the work with scientific programs, plans, and themes, defines the purpose and objectives, outlines the object, subject, and research methods. It highlights the scientific novelty and practical significance of the obtained results, characterizes the personal contribution of the researcher, provides a list of conferences and scientific seminars where the dissertation work underwent validation, and gives a brief overview of the work's content.

The first chapter of the dissertation is devoted to reviewing the literary sources related to the topic of the dissertation work and the corresponding results obtained by other researchers.

The second chapter of the dissertation explores the conditions for the existence of a unique bounded solution of a linear first-order differential equation with piecewise-constant operator coefficients

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{A}x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x'(t) = \mathrm{B}x(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases} \tag{I}$$

where A and B are fixed linear continuous operators acting in a complex Banach space X, and function y belongs to a Banach space $C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ of all continuous and bounded on $\mathbb{R}$ functions $f : \mathbb{R} \to \mathrm{X}$ with the norm $\|f\|_\infty := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|f\,(t)\|$ for any function y from this space.

By a bounded solution of the differential equation (I), we mean a function $x \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ for which, at each $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, the derivative $x'(t)$ exists, and the equality (I) holds.

Necessary and sufficient conditions on operators A and B for the existence of a unique bounded solution to the considered equation have been obtained. The explicit form of the corresponding solution is provided, and the closeness of bounded on the entire real axis solutions of this equation and a differential equation with constant operator coefficients

$$x'(t) = \mathrm{A}x(t) + y(t),\ t \in \mathbb{R},$$

corresponding to the same function y, when $t \to +\infty$, is estimated.

The third chapter of the work is dedicated to investigating sufficient conditions for the existence of a unique bounded solution of the nonlinear analogue of the differential equation considered in the second chapter, which has the form

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{A}x(t) + f(t, x(t), y(t)),\ t \geq 0, \\ x'(t) = \mathrm{B}x(t) + f(t, x(t), y(t)),\ t < 0. \end{cases}$$

As a result, sufficient conditions have been identified for the fixed linear operators A and B, and the function $f : \mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$, under which the equation has a unique bounded solution x for any function $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$.

In addition, as a consequence of the main result, sufficient conditions for the existence of a unique bounded solution of differential equations of the forms

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{A}x(t) + g(x(t)) + y(t),\ t \geq 0, \\ x'(t) = \mathrm{B}x(t) + g(x(t)) + y(t),\ t < 0, \end{cases}$$

where $g : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ is a certain function satisfying the Lipschitz condition, and

$$\begin{cases} x'(t) = (\mathrm{A} + T(t))x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x'(t) = (\mathrm{B} + T(t))x(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases}$$

where $T : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathrm{X})$ is a continuous and bounded operator-valued function on $\mathbb{R}$, have been obtained.

The fourth chapter of the dissertation is devoted to the investigation of necessary and sufficient conditions on operators, under which the second-order differential equation

$$\begin{cases} x''(t) = \mathrm{A}_1 x'(t) + \mathrm{A}_2 x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x''(t) = \mathrm{B}_1 x'(t) + \mathrm{B}_2 x(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases} \tag{II}$$

where A_1, A_2, and B_1, B_2 are fixed linear continuous operators acting in the space X, and the function y belongs to the Banach space $C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$, has a unique bounded solution.

A bounded solution of the differential equation (II) is defined as a function $x \in C_b^{(1)}(\mathbb{R},\mathrm{X})$ for which, at each $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, the second derivative $x''(t)$ exists and the equality (II) holds. Here $C_b^{(1)}(\mathbb{R},\mathrm{X})$ is the Banach space of all functions

$f \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ that have continuous and bounded derivatives f' on $\mathbb{R}$ with the norm $\|f\|_{1,\infty} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

It has been proven that if there exists a linear continuous operator W such that $\sigma(\mathrm{W}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, and $\mathrm{A}_1\mathrm{W} + \mathrm{A}_2 = \mathrm{B}_1\mathrm{W} + \mathrm{B}_2$, then the considered second-order differential equation with piecewise-constant operator coefficients has a unique bounded solution x if and only if the differential equation

$$\begin{cases} \bar{x}'(t) = \mathrm{T}_\mathrm{A}\bar{x}(t) + \bar{y}(t),\ t \geq 0, \\ \bar{x}'(t) = \mathrm{T}_\mathrm{B}\bar{x}(t) + \bar{y}(t),\ t < 0, \end{cases}$$

where $\mathrm{T}_\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 \\ \mathrm{I} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$, $\mathrm{T}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 \\ \mathrm{I} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$, which is considered in the Banach space X^2, has a unique bounded solution $\bar{x}$ for each function $\bar{y} \in C_b\big(\mathbb{R},\mathrm{X}^2\big)$.

The case is also investigated where the verification of the obtained conditions can be reduced to checking conditions on the separated roots of operator equations $\Lambda^2 – \mathrm{A}_1\Lambda – \mathrm{A}_2 = \mathrm{O}$ and $\Lambda^2 – \mathrm{B}_1\Lambda – \mathrm{B}_2 = \mathrm{O}$, corresponding to the differential equation (II).

The dissertation has both theoretical and practical significance. The obtained results can be applied in further research on the properties of solutions of differential equations with variable operator coefficients, and they also simplify the investigation of real processes and phenomena described by such equations.

***Keywords*:** Banach space, differential equation, difference equation, piecewise-constant operator coefficient, exponential dichotomy, linear continuous operator, bounded solution, uniqueness of solution, proximity of solutions.

Publications highlighting the main scientific results of the dissertation

1. *Gorodnii, M. F., Pecherytsia, O. A.* Bounded solutions of a differential equation with piecewise constant operator coefficients // Nonlinear Oscillations (Neliniini Kolyvannya). 2021. Vol. 24, No 2. P. 147–157. URL:

https://www.imath.kiev.ua/~nosc/web/show_article.php?article_id=1343&lang=en (in Ukrainian).

English translation: *Horodnii, M. F., Pecherytsia, O. A.* Bounded Solutions of a Differential Equation with Piecewise Constant Operator Coefficients // J. Math. Sci. 2023. Vol. 270, iss. 6. P. 237–249. DOI: 10.1007/s10958-023-06343-y.

2. *Gorodnii, M. F., Pecherytsia, O. A.* Bounded solutions of a second order differential equation with piecewise constant operator coefficients // Nonlinear Oscillations (Neliniini Kolyvannya). 2023. Vol. 26, No 3. P. 342–349. DOI: 10.3842/nosc.v26i3.1436 (in Ukrainian).
3. *Horodnii, M. F., Pecherytsia, O. A.* Bounded solutions to a nonlinear differential equation in a Banach space // Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics (Naukovyi visnyk Uzhhorodskoho universytetu. Seriia «Matematyka i informatyka»). 2023. Vol. 43, No 2. P. 22–28. DOI: 10.24144/2616-7700.2023.43(2).22-28 (in Ukrainian).

Publications confirming the validation of the dissertation materials

1. *Horodnii, M. F., Pecherytsia, O. A.* On bounded solutions of a difference equation with piecewise constant operator coefficients // Proceedings of the 19th International Scientific and Practical Conference "Shevchenko Spring — 2021: Mathematics, Statistics, Mechanics. Applied Mathematics, Computer Science, Software Engineering, System Analysis" (Shevchenkivska Vesna — 2021). Kyiv, Taras Shevchenko National University of Kyiv, April 2021. P. 11 (in Ukrainian).
2. *Horodnii, M. F., Pecherytsia, O. A.* On bounded on R solutions of differential equations with piecewise constant operator coefficients // Proceedings of the 20th International Scientific and Practical Conference "Shevchenko Spring — 2022: Mathematics, Statistics, Mechanics. Applied Mathematics, Computer Science, Software Engineering, System Analysis"

(Shevchenkivska Vesna — 2022). Kyiv, Taras Shevchenko National University of Kyiv, 14 April 2022. P. 24–25 (in Ukrainian).

3. *Pecherytsia, O.* On bounded solutions of a second-order differential equation with piecewise constant operator coefficients // Book of Abstracts. "11th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications" (IECMSA-2022). Istanbul, Türkiye, Yildiz Technical University, August 29 – September 1, 2022. P. 70.

4. *Horodnii, M. F., Pecherytsia, O. A.* On bounded solutions of a second-order differential equation with piecewise constant operator coefficients // Proceedings of the 21st International Scientific and Practical Conference "Shevchenko Spring — 2023: Mathematics, Statistics, Mechanics. Applied Mathematics, Computer Science, Software Engineering, System Analysis. Mathematics Teaching Methodology" (Shevchenkivska Vesna — 2023). Kyiv, Taras Shevchenko National University of Kyiv, 14 April 2023. P. 13–14 (in Ukrainian).

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Важливе місце у дослідженні диференціальних рівнянь, що описують еволюцію реальних механічних, радіотехнічних, біологічних, економічних та інших систем, займає питання існування та єдиності обмежених розв'язків цих рівнянь. Одними із основоположників подібних досліджень можна назвати Анрі Пуанкаре, Оскара Перрона та Олександра Ляпунова.

У кінці першої половини XX століття видатний український математик М. Г. Крейн узагальнив на випадок диференціальних рівнянь у банахових просторах низку результатів О. М. Ляпунова з теорії стійкості. Запропонований М. Г. Крейном функціонально-аналітичний підхід до диференціальних рівнянь отримав розвиток у роботах Х. Л. Массери, Х. Х. Шеффера, В. А. Коппеля, Ф. Хартмана та інших математиків. Це дало змогу дослідити питання про існування та єдиність обмежених на всій числовій осі розв'язків різних класів диференціальних рівнянь як з обмеженими, так і з необмеженими операторними коефіцієнтами, а також зв'язок цього питання з умовою експоненціальної дихотомії. Низку важливих результатів щодо існування і властивостей обмежених на всій числовій осі розв'язків диференціальних рівнянь у скінченновимірному просторі було одержано Я. Курцвейлем, А. М. Самойленком, В. Л. Куликом, Г. П. Пелюхом; у нескінченновимірному просторі – В. В. Жиковим, Є. М. Мухамадієвим, В. Ю. Слюсарчуком, А. Г. Баскаковим, Д. Хенрі, Р. Дж. Сакером, Дж. Р. Селлом, О. А. Бойчуком, І. Д. Чуєшовим, О. М. Станжицьким, А. Г. Руткасом, В. П. Журавльовим, О. О. Покутним, А. В. Чайковським та іншими дослідниками. Диференціальні рівняння другого порядку у банаховому просторі, а також їхній зв'язок із відповідними системами диференціальних рівнянь першого порядку розглядались, зокрема, у роботах І. В. Мельникової та О. І. Філінкова, Г. О. Фатторіні, Дж. А. Ґолдстейна, К. К. Тревіса та Ґ. Ф. Уебба, А. Г. Баскакова, М. К. Чернишова, а також у недавній роботі А. Г. Баскакова, Т. К. Кацаран та Т. І. Смаґіної.

Попри значну кількість важливих результатів, пов'язаних із цією тематикою, залишились відкритими актуальні питання про існування та єдиність обмежених на усій числовій осі розв'язків диференціальних рівнянь першого та другого порядків з кусково-сталими операторними коефіцієнтами. У даній дисертаційній роботі для таких рівнянь одержано необхідні та достатні умови для операторних коефіцієнтів, що забезпечують існування єдиного обмеженого розв'язку, а разом з цим – і виконання умови експоненціальної дихотомії на $\mathbb{R}$ для відповідних однорідних диференціальних рівнянь.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження виконане відповідно до індивідуального плану аспіранта кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка, затвердженого вченою радою механіко-математичного університету, і в рамках державної бюджетної дослідницької наукової теми 21БНН-06 «Виконання завдань перспективного плану розвитку наукового напряму "Математичні науки і природничі науки"» Київського національного університету імені Тараса Шевченка (номер державної реєстрації 0121U112941).

Мета і завдання дослідження. *Об'єктом дослідження* є диференціальні рівняння першого та другого порядків з кусково-сталими операторними коефіцієнтами.

Предмет дослідження – обмежені на усій числовій осі розв'язки диференціальних рівнянь з кусково-сталими операторними коефіцієнтами.

Мета дослідження – для диференціальних рівнянь з кусково-сталими операторними коефіцієнтами отримати необхідні та достатні умови на операторні коефіцієнти, що забезпечують існування та єдиність обмежених на усій числовій осі розв'язків таких рівнянь, визначити явний вигляд цих розв'язків та дослідити їхню поведінку на нескінченності.

Основні завдання дослідження складають наступний перелік:

1) отримати необхідні і достатні умови на операторні коефіцієнти для існування єдиного обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами;
2) отримати необхідні і достатні умови для існування єдиного обмеженого на $\mathbb{Z}$ розв'язку лінійного різницевого рівняння з кусково-сталими, неперервно оборотними операторними коефіцієнтами;
3) отримати зображення обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами;
4) оцінити близькість при $t \to \infty$ обмежених на усій числовій осі розв'язків лінійного диференціального рівняння першого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами та лінійного диференціального рівняння зі сталим операторним коефіцієнтом, що відповідають одній і тій самій неперервній і обмеженій на $\mathbb{R}$ функції;
5) отримати достатні умови існування єдиного обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку деяких нелінійних аналогів диференціального рівняння першого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами;
6) отримати необхідні і достатні умови на операторні коефіцієнти для існування єдиного обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку лінійного диференціального рівняння другого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами.

Методи дослідженя. У ході проведення дисертаційного дослідження застосовані методи теорії диференціальних та різницевих рівнянь, функціонального аналізу та теорії операторів.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі отримані в процесі дисертаційного дослідження результати є новими та математично обґрунтованими. Основні з них такі:

1) отримано критерій існування єдиного обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами;
2) отримано критерій існування єдиного обмеженого на $\mathbb{Z}$ розв'язку лінійного різницевого рівняння з кусково-сталими, неперервно оборотниими операторними коефіцієнтами;
3) вказано явний вигляд обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами;
4) досліджено питання про близькість при $t \to \infty$ обмежених на усій числовій осі розв'язків лінійного диференціального рівняння першого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами та лінійного диференціального рівняння зі сталим операторним коефіцієнтом, що відповідають одній і тій самій неперервній і обмеженій на $\mathbb{R}$ функції;
5) отримано достатні умови існування єдиного обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку деяких нелінійних аналогів диференціального рівняння першого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами;
6) отримано критерій існування єдиного обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку лінійного диференціального рівняння другого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами.

Теоретичне та практичне значення отриманих результатів. Дана дисертаційна робота має як теоретичне, так і практичне значення. Отримані у ході виконання дослідження результати можуть бути використані у подальших дослідженнях властивостей розв'язків диференціальних рівнянь зі змінними операторними коефіцієнтами, а також дозволяють спростити дослідження реальних процесів і явищ, що описуються такими рівняннями.

Особистий внесок здобувача. Основні результати роботи, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Визначення основного плану дослідження, постановка задач та загальне керівництво роботою належить науковому керівнику М. Ф. Городньому. За результатами дисертації здобувачем було опубліковано три роботи у фахових виданнях у співавторстві з науковим керівником М. Ф. Городнім [1—3].

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідалися та обговорювалися на наступних наукових конференціях та наукових семінарах.

1. XIX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна — 2021: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». 15 – 16 квітня 2021 року. Україна, м. Київ.
2. XX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна — 2022: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». 14 – 15 квітня 2022 року. Україна, м. Київ.
3. 11th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2022). August 29 — September 1, 2022. Istanbul, Türkiye.
4. XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2023: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз. Методика викладання математики». 14 квітня 2023 року. Україна, м. Київ.

5. Науковий семінар з диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Наукові керівники – професор, доктор фізико-математичних наук О. В. Капустян і професор, доктор фізико-математичних наук О. М. Станжицький. 1 лютого 2024 року. Україна, м. Київ.

Публікації. Основні результати за темою дисертації викладено у семи друкованих виданнях, 3 з яких – у статтях [1—3] та 4 – у вигляді тез доповідей у матеріалах наукових конференцій [4—7].

Статті [1] та [2] опубліковано у науковому фаховому виданні України категорії “А”, що індексується у наукометричній базі MathSciNet. Повна англомовна версія видання є частиною міжнародного видання-агрегатора, індексованого в наукометричній базі Scopus. Дане видання містить переклад статті [1] та на момент публікації перекладу входило до квартиля Q3 відповідно до класифікації Scimago Journal & Country Rank (SJR). Статтю [3] надруковано у науковому фаховому виданні України категорії “Б”.

Обсяг і структура дисертації. Дана дисертаційна робота складається з двох анотацій (українською та англійською мовами), вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновку, списку використаних джерел і додатків, що містять список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Повний обсяг дисертації складає 132 сторінки. Обсяг основної частини дисертації становить 102 сторінки. Список використаних джерел містить 71 найменування та викладений на 12 сторінках. Додатки займають 3 сторінки і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Зміст роботи. У ***вступі*** обґрунтовано актуальність теми, вказано зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами, встановлено мету і завдання, об’єкт, предмет та методи дослідження, наведено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, охарактеризовано особистий внесок здобувача, наведено список конференцій та наукових семінарів, на яких дисертаційна робота пройшла апробацію, та короткий зміст роботи.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячений огляду відомих результатів, що стосуються тематики дослідження. У тексті цього розділу розглядається перелік монографій та статей вітчизняних і зарубіжних дослідників якісної теорії диференціальних рівнянь у розрізі питань існування і єдиності обмежених розв'язків диференціальних рівнянь, їхньої стійкості і властивостей.

Зокрема, у цьому розділі розглянуто деякі опорні факти та означення з монографії Ю. Л. Далецького та М. Г. Крейна [8], необхідні для розуміння властивостей обмежених розв'язків диференціальних рівнянь, на які спирається дане дослідження.

Окремий пункт огляду літератури стосується зв'язку між обмеженими розв'язками диференціального та відповідного різницевого рівняння. Наводиться порівняння результатів, отриманих І. В. Гончар у статті [9] та В. Ю. Слюсарчуком у статті [10], із результатами даного дисертаційного дослідження.

Ще один пункт розділу присвячено обмеженим на всій числовій осі розв'язкам диференціальних рівнянь другого порядку та зв'язку диференціальних рівнянь другого порядку із відповідними системами диференціальних рівнянь першого порядку. Тут наведено результати, отримані А. Г. Баскаковим та М. К. Чернишовим у статті [11], а також А. Г. Баскаковим, Т. К. Кацаран та Т. І. Смаґіною у статті [12].

У ***другому розділі*** дисертаційної роботи розглядається питання про умови існування єдиного обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку з кусково-сталим операторним коефіцієнтом.

Нехай X – комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ та нульовим елементом $\bar{0}$; $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ – простір лінійних неперервних операторів, що діють із X в X; I, O – відповідно одиничний і нульовий оператори в X; $C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ – банахів простір усіх неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $f : \mathbb{R} \to \mathrm{X}$ з нормою $\|f\|_\infty := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$, $f \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$.

Зауваження. Далі слова «рівняння задовольняє умову обмеженості» означають, що диференціальне рівняння має єдиний обмежений розв'язок x для довільної функції y з відповідного банахового простору.

Нехай A та B – фіксовані оператори з простору $\mathcal{L}(\mathrm{X})$.

Розглядається питання умов на A і B що забезпечать існування єдиного обмеженого розв'язку x диференціального рівняння

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{A}x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x'(t) = \mathrm{B}x(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

для довільної функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$.

Означення 2.1. Обмеженим розв'язком диференціального рівняння (2.1) будемо називати таку функцію $x \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$, що для кожного $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ існує $x'(t)$ і виконується рівність (2.1).

Сформулюємо нижче ключові леми, що застосовуються для доведення основних результатів розділу.

Лема 2.1. *Диференціальне рівняння* (2.1) *задовольняє умову обмеженості тоді і тільки тоді, коли різницеве рівняння вигляду*

$$\begin{cases} u_{n+1} = e^{\mathrm{A}}u_n + v_n,\ n \geq 0, \\ u_{n+1} = e^{\mathrm{B}}u_n + v_n,\ n \leq -1 \end{cases} \tag{2.2}$$

також задовольняє умову обмеженості, тобто має єдиний обмежений розв'язок $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ *для кожної обмеженої (на* $\mathbb{Z}$*) послідовності* $\{v_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Нехай S – одиничне коло на комплексній площині з центром у початку відліку, тобто $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$; $i\,\mathbb{R}$ – уявна вісь, тобто $i\,\mathbb{R} = \{it \mid t \in \mathbb{R}\}$; $\sigma(\mathrm{A})$ – спектр оператора A.

Безпосередньо із теореми Данфорда про відображення спектра (див., наприклад, [8, с. с. 32]) випливає, що справджується наступна лема.

Лема 2.2. $\sigma\big(e^{\mathrm{A}}\big) \cap S = \varnothing$ *тоді і тільки тоді, коли* $\sigma(\mathrm{A}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$.

Нехай $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \dot{+} \mathrm{X}_2$, тобто простір X є прямою сумою своїх підпросторів X_1 та X_2, а P_1 і P_2 – проектори в X, що відповідають зображенню $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \dot{+} \mathrm{X}_2$.

Тоді виконується наступна лема.

Лема 2.3. *Нехай* $V \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *і підпростір* X_1 *інваріантний відносно оператора* V. *Тоді:*

1) $\forall n \geq 1: \ (P_2 V P_2)^n = P_2 V^n P_2$;

2) якщо оператор V *неперервно оборотний, то* $(P_2 V^{-1} P_2)(P_2 V P_2) = P_2$ *і* $(P_2 V P_2)(P_2 V^{-1} P_2) = P_2$, *тобто звуження оператора* $P_2 V P_2$ *на підпростір* X_2, *яке теж позначатимемо* $P_2 V P_2$, *є неперервно оборотним оператором з* $\mathcal{L}(\mathrm{X}_2)$;

3) якщо додатково $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \dot{+} \mathrm{Y}$ *і* $P_1(\mathrm{Y})$, $P(\mathrm{Y})$ *– проектори, що відповідають цьому зображенню, то* $P_2 V P_2 = P_2 V P(\mathrm{Y})$;

4) якщо V_1 *– звуження оператора* V *на* X_1, $\sigma(V_1) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$, *то* $\sigma(P_2 V P_2) \supset \left(\sigma(V) \cap \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \geq 1\}\right)$.

Нехай $T \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, $\sigma(T) \cap S = \varnothing$. Через $\sigma_-(T)$ позначимо частину спектра оператора T, що лежить всередині одиничного кола S, а через $\sigma_+(T)$ – частину спектра оператора T, що лежить зовні цього кола.

Відомо (див., наприклад, [8, с. с. 32—34]), що простір X розкладається в пряму суму інваріантних відносно T підпросторів $\mathrm{X} = \mathrm{X}_-(T) \dot{+} \mathrm{X}_+(T)$ таким чином, що звуження T_- та T_+ оператора T на $\mathrm{X}_-(T)$ та $\mathrm{X}_+(T)$ мають відповідно спектри $\sigma_-(T)$ та $\sigma_+(T)$.

Також використовується аналогічне розщеплення оператора відносно уявної осі.

Нехай $W \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, $\sigma(W) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$; $\widetilde{\sigma}_-(W)$ та $\widetilde{\sigma}_+(W)$ – частини спектра оператора W, що лежать відповідно у лівій та правій півплощинах відносно

$i\,\mathbb{R}$. Тоді $\mathrm{X} = \widetilde{\mathrm{X}}_-(W)\dot{+}\widetilde{\mathrm{X}}_+(W)$, причому звуження $\widetilde{W}_-$ та $\widetilde{W}_+$ оператора W на $\widetilde{\mathrm{X}}_-(W)$ та $\widetilde{\mathrm{X}}_+(W)$ мають відповідно спектри $\widetilde{\sigma}_-(W)$ та $\widetilde{\sigma}_+(W)$.

У цих позначеннях доведено, що коли $\sigma(\mathrm{A}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, $\sigma(\mathrm{B}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, то

$$\mathrm{X}_-(e^{\mathrm{A}}) = \left\{ u \in \mathrm{X} \;\middle|\; \sup_{n \geq 1} \left\| e^{\mathrm{A}n} u \right\| < \infty \right\} = \left\{ u \in \mathrm{X} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} \left\| e^{\mathrm{A}n} u \right\| < \infty \right\} =$$
$$= \left\{ u \in \mathrm{X} \;\middle|\; \sup_{t \geq 0} \left\| e^{\mathrm{A}t} u \right\| < \infty \right\} = \widetilde{\mathrm{X}}_-(\mathrm{A})$$

і, аналогічно, $\mathrm{X}_+(e^{\mathrm{B}}) = \widetilde{\mathrm{X}}_+(\mathrm{B})$.

Основними результатами другого розділу є наступні дві теореми.

Теорема 2.1. *Нехай* D, E *– неперервно оборотні оператори з* $\mathcal{L}(\mathrm{X})$. *Рівняння*

$$\begin{cases} u_{n+1} = \mathrm{D}u_n + v_n, \; n \geq 1, \\ u_{n+1} = \mathrm{E}u_n + v_n, \; n \leq 0, \end{cases} \tag{2.15}$$

задовольняє умову обмеженості тоді і тільки тоді, коли:

$i_1)$ $\sigma(\mathrm{D}) \cap S = \varnothing$, $\sigma(\mathrm{E}) \cap S = \varnothing$;

$i_2)$ $\mathrm{X} = \mathrm{X}_-(\mathrm{D})\dot{+}\mathrm{X}_+(\mathrm{E})$.

Згідно з твердженням теореми 2.1 умови $i_1)$ та $i_2)$ необхідні і достатні для того, щоб відповідне до (2.15) однорідне різницеве рівняння було експоненціально дихотомічним. В іншому вигляді такі умови отримані В. Ю. Слюсарчуком у статті [10].

З теореми 2.1 і допоміжних лем випливає наступна теорема.

Теорема 2.2. *Для диференціального рівняння* (2.1) *виконується умова обмеженості тоді і тільки тоді, коли справджуються умови:*

$a_1)$ $\sigma(\mathrm{A}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, $\sigma(\mathrm{B}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$;

$a_2)$ $\mathrm{X} = \widetilde{\mathrm{X}}_-(\mathrm{A})\dot{+}\widetilde{\mathrm{X}}_+(\mathrm{B})$.

Крім того, у процесі дисертаційного дослідження отримано зображення обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку диференціального рівняння (2.1).

Позначимо через $P_-(\mathrm{A})$, $P_+(\mathrm{A})$ проектори, що відповідають зображенню $\mathrm{X} = \widetilde{\mathrm{X}}_-(\mathrm{A})\dot{+}\widetilde{\mathrm{X}}_+(\mathrm{A})$; через $P_-(\mathrm{B})$, $P_+(\mathrm{B})$ – проектори, що відповідають зображенню $\mathrm{X} = \widetilde{\mathrm{X}}_-(\mathrm{B})\dot{+}\widetilde{\mathrm{X}}_+(\mathrm{B})$; а через P_-, P_+ – проектори, що відповідають зображенню $\mathrm{X} = \widetilde{\mathrm{X}}_-(\mathrm{A})\dot{+}\widetilde{\mathrm{X}}_+(\mathrm{B})$.

Сформулюємо відому теорему М. Г. Крейна (див. [8, розд. 2, § 4]) про обмежені на $\mathbb{R}$ розв'язки диференціального рівняння зі сталим операторним коефіцієнтом A, яка містить також явний вигляд обмеженого розв'язку.

Теорема 2.3 (див. [8]). *Диференціальне рівняння*

$$u'(t) = \mathrm{A}u(t) + v(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.22}$$

має для кожної функції $v \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ єдиний обмежений розв'язок u тоді і тільки тоді, коли $\sigma(\mathrm{A}) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$. Цей розв'язок зображується у вигляді

$$u(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_{\mathrm{A}}(t-s)v(s)ds,\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.23}$$

де

$$G_{\mathrm{A}}(t) = \begin{cases} -e^{\mathrm{A}t}P_+(\mathrm{A}),\ t < 0, \\ e^{\mathrm{A}t}P_-(\mathrm{A}),\ t \geq 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

Теорема 2.4 містить явний вигляд єдиного обмеженого розв'язку диференціального рівняння (2.1), що відповідає функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$.

Теорема 2.4. *Припустимо, що виконуються умови a_1), a_2) теореми 2.2. Тоді справджуються такі твердження:*

1) відповідний до функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ єдиний обмежений розв'язок диференціального рівняння (2.1) має наступний вигляд.

Якщо $t \geq 0$, то

$$\begin{gathered} x(t) = \int\limits_0^t e^{\mathrm{A}(t-s)}P_-(\mathrm{A})y(s)ds - \int\limits_t^{+\infty} e^{\mathrm{A}(t-s)}P_+(\mathrm{A})y(s)ds+ \\ +e^{\mathrm{A}t}P_- \int\limits_{-\infty}^0 e^{-\mathrm{B}s}P_-(\mathrm{B})y(s)ds + e^{\mathrm{A}t}P_- \int\limits_0^{+\infty} e^{-\mathrm{A}s}P_+(\mathrm{A})y(s)ds. \end{gathered} \tag{2.25}$$

Якщо $t < 0$, *то*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\mathrm{B}(t-s)} P_-(\mathrm{B}) y(s) ds - \int_{t}^{0} e^{\mathrm{B}(t-s)} P_+(\mathrm{B}) y(s) ds -$$
$$- e^{\mathrm{B}t} P_+ \int_{0}^{+\infty} e^{-\mathrm{A}s} P_+(\mathrm{A}) y(s) ds - e^{\mathrm{B}t} P_+ \int_{-\infty}^{0} e^{-\mathrm{B}s} P_-(\mathrm{B}) y(s) ds. \tag{2.26}$$

2) існує така стала $K > 0$, *що для кожної функції* $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ *для відповідного до* y *єдиного обмеженого розв'язку* x *рівняння* (2.1) *справджується наступна оцінка:*

$$\|x\|_\infty \le K \|y\|_\infty. \tag{2.27}$$

Також доведено наступну теорему про близькість розв'язків рівнянь (2.1) і (2.22) при $t \to \infty$.

Теорема 2.5. *Якщо виконуються умови* a_1), a_2) *теореми 2.2, то знайдуться такі залежні тільки від операторів* A *і* B *сталі* $C > 0$ *та* $\gamma > 0$, *що для довільної функції* $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ *для відповідних до неї обмежених розв'язків* $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *рівняння* (2.1) *і* $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *рівняння* (2.22) *справджується наступна оцінка:*

$$\forall t \ge 0 \ : \ \|x(t) - u(t)\| \le C e^{-\gamma t} \|y\|_\infty. \tag{2.29}$$

Зауваження 2.3. Відзначимо, що коли функція y додатково періодична, то відповідний до неї обмежений розв'язок рівняння (2.22) теж є періодичною функцією, а обмежений розв'язок рівняння (2.1), згідно з (2.29), близький до періодичного розв'язку рівняння (2.22) при $t \to \infty$, незважаючи на стрибок операторного коефіцієнта у рівнянні (2.1).

У ***третьому розділі*** дисертаційної роботи досліджуються умови існування єдиних обмежених на $\mathbb{R}$ розв'язків деяких нелінійних аналогів диференціального рівняння першого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта (2.1).

Використовуючи введені раніше позначення, розглянемо питання про існування єдиного обмеженого розв'язку нелінійного аналога диференціального рівняння (2.1) з кусково-сталими операторними коефіцієнтами, що має вигляд

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{A}x(t) + f(t, x(t), y(t)), \ t \geq 0, \\ x'(t) = \mathrm{B}x(t) + f(t, x(t), y(t)), \ t < 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

в якому $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ – задана функція, A та B – фіксовані оператори з $\mathcal{L}(\mathrm{X})$, а $f : \mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ – деяка функція.

Означення 3.1. Функція f – неперервна у точці $(t_0,u_0,v_0) \in \mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (t, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}, \ |t - t_0| + \|u - u_0\| + \|v - v_0\| < \delta \ : \\ \|f(t, u, v) - f(t_0, u_0, v_0)\| < \varepsilon.$$

Як звичайно, функцію f будемо називати неперервною на множині $\mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}$, якщо вона неперервна у кожній точці цієї множини.

Основні результати цього розділу полягають у наступних трьох теоремах.

Теорема 3.1. *Припустимо, що виконуються умови a_1), a_2) теореми 2.2 і функція $f : \mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ задовольняє такі умови:*

- j_1) *f неперервна на множині $\mathbb{R}\times\mathrm{X}\times\mathrm{X}$, тобто для будь-яких $(t_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ виконується означення 3.1;*
- j_2) $\exists C_1 > 0 \ \forall u_1, u_2, v \in \mathrm{X} \ \forall t \in \mathbb{R} : \|f(t, u_1, v) - f(t, u_2, v)\| \leq C_1\|u_1 - u_2\|$;
- j_3) $\exists C_2 > 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \ \forall v \in \mathrm{X} : \|f(t, \bar{0}, v)\| \leq C_2(1 + \|v\|)$;
- j_4) $KC_1 < 1$, *де K – стала із оцінки (2.27).*

Тоді нелінійне диференціальне рівняння (3.1) має для кожної функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ єдиний обмежений розв'язок x.

Наслідками цієї теореми є наступні два твердження.

Теорема 3.2. *Припустимо, що виконуються умови a_1), a_2) теореми 2.2 і функція $g : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $L > 0$ на X, тобто*

$$\forall u, v \in \mathrm{X} : \|g(u) - g(v)\| \leq L\|u - v\|, \tag{3.2}$$

а також виконується нерівність $KL < 1$.

Тоді диференціальне рівняння

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{A}x(t) + g(x(t)) + y(t),\ t \geq 0, \\ x'(t) = \mathrm{B}x(t) + g(x(t)) + y(t),\ t < 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

має для кожної функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ єдиний обмежений розв'язок x.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються умови a_1), a_2) теореми 2.2 і $T : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathrm{X})$ – така неперервна на $\mathbb{R}$ операторнозначна функція, що $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|T(t)\| = C_3 < +\infty$.*

Якщо $KC_3 < 1$, то диференціальне рівняння

$$\begin{cases} x'(t) = (\mathrm{A} + T(t))x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x'(t) = (\mathrm{B} + T(t))x(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

має для кожної функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ єдиний обмежений розв'язок x.

Зауваження 3.1. Відзначимо, що умови теореми 3.3 забезпечують виконання умови експоненціальної дихотомії для відповідного до (3.4) однорідного диференціального рівняння зі змінними операторними коефіцієнтами.

Четвертий розділ дисертації присвячено дослідженню умов існування єдиного обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку диференціального рівняння другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів.

Використовуватимемо позначення, введені раніше. Крім того, покладемо, що $C_b^{(1)}(\mathbb{R},\mathrm{X})$ – банахів простір усіх неперервно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій $f \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ з похідною $f' \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ і нормою $\|f\|_{1,\infty} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

У цьому розділі розглядається питання про умови існування для довільної функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ єдиного обмеженого розв'язку x рівняння

$$\begin{cases} x''(t) = \mathrm{A}_1 x'(t) + \mathrm{A}_2 x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x''(t) = \mathrm{B}_1 x'(t) + \mathrm{B}_2 x(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

де A_k, B_k, $k = 1{,}2$ – фіксовані оператори з $\mathcal{L}(\mathrm{X})$.

Означення 4.1. Обмеженим розв'язком рівняння (4.1) будемо називати таку функцію $x \in C_b^{(1)}(\mathbb{R},\mathrm{X})$, що для кожного $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ існує $x''(t)$ і виконується рівність (4.1).

Будемо розглядати $\mathrm{X}^2 = \left\{ \bar{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \middle| x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathrm{X} \right\}$ – комплексний банахів простір із визначеними покоординатно додаванням і множенням на скаляр та нормою $\|\bar{x}\|_* = \left\|x^{(1)}\right\| + \left\|x^{(2)}\right\|$, $\bar{x} \in \mathrm{X}^2$. Якщо E, F, G, H $\in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, то, як і для випадку числових матриць, $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \mathrm{G} & \mathrm{H} \end{pmatrix}$ задає оператор з $\mathcal{L}\big(\mathrm{X}^2\big)$ за правилом $\mathrm{T}\bar{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}x^{(1)} + \mathrm{F}x^{(2)} \\ \mathrm{G}x^{(1)} + \mathrm{H}x^{(2)} \end{pmatrix}$, $\bar{x} \in \mathrm{X}^2$.

Нехай $\mathrm{T_A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 \\ \mathrm{I} & \mathrm{O} \end{pmatrix}, \mathrm{T_B} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 \\ \mathrm{I} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$; через $\sigma\left(\mathrm{T_A}\right)$ і $\sigma\left(\mathrm{T_B}\right)$ позначимо спектри операторів $\mathrm{T_A}$ і $\mathrm{T_B}$ відповідно.

Аналогічно до статті А. Г. Баскакова, Т. К. Кацаран та Т. І. Смаґіної [12], будемо використовувати наступне означення.

Означення 4.2. Корені Λ_1, $\Lambda_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ операторного рівняння

$$\Lambda^2 - \mathrm{A}_1\Lambda - \mathrm{A}_2 = \mathrm{O} \tag{4.2}$$

називатимемо розділеними, якщо існує неперервний обернений оператор $\Psi_\mathrm{A} = (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}$ до оператора $(\Lambda_1 - \Lambda_2)$.

Теорема 4.1 (див. [12]). *Припустимо, що рівняння* (4.2) *має розділені корені* Λ_1, Λ_2. *Покладемо*

$$\mathrm{U_A} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \mathrm{I} & \mathrm{I} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{U_A^{-1}} = \begin{pmatrix} \Psi_\mathrm{A} & -\Psi_\mathrm{A}\Lambda_2 \\ -\Psi_\mathrm{A} & \Psi_\mathrm{A}\Lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Тоді $\mathrm{U_A^{-1}}$ *– неперервний обернений оператор до оператора* $\mathrm{U_A}$, *а також*

$$\mathrm{U_A^{-1}T_AU_A} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

$$e^{\mathrm{T_A}t} = \mathrm{U_A} \begin{pmatrix} e^{\Lambda_1 t} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & e^{\Lambda_2 t} \end{pmatrix} \mathrm{U_A^{-1}},\ t \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Зауваження 4.1. Відзначимо, що, згідно з наведеним у статті А. С. Маркуса та І. В. Мереуци [13] зауваженням 1.3, неперервна оборотність оператора $\mathrm{U_A}$ еквівалентна неперервній оборотності оператора $(\Lambda_1 - \Lambda_2)$.

Розглянемо тепер відповідне до (4.1) диференціальне рівняння першого порядку

$$\begin{cases} \bar{x}'(t) = \mathrm{T_A}\bar{x}(t) + \bar{y}(t),\ t \geq 0, \\ \bar{x}'(t) = \mathrm{T_B}\bar{x}(t) + \bar{y}(t),\ t < 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

у банаховому просторі X^2.

Внаслідок доведеної у розділі 2 теореми 2.2 виконується наступна теорема.

Теорема 4.2. *Для того, щоб диференціальне рівняння* (4.6) *задовольняло умову обмеженості, необхідно і достатньо виконання таких умов:*

$i_1)$ $\sigma(\mathrm{T_A}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, $\sigma(\mathrm{T_B}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$;

$i_2)$ $\mathrm{X}^2 = \mathrm{X}^2_-(\mathrm{T_A}) \dot{+} \mathrm{X}^2_+(\mathrm{T_B})$.

Основна теорема цього розділу доведена за умови, що виконується таке припущення.

Припущення 4.1. *Існує такий оператор* $\mathrm{W} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, *що* $\sigma(\mathrm{W}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, *а також* $\mathrm{A}_1\mathrm{W} + \mathrm{A}_2 = \mathrm{B}_1\mathrm{W} + \mathrm{B}_2$.

Припущення 4.1 виконується, зокрема, у випадку, коли рівняння (4.2) і

$$\Lambda^2 - \mathrm{B}_1\Lambda - \mathrm{B}_2 = \mathrm{O} \tag{4.9}$$

мають такий спільний корінь $\Lambda_0 \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, що $\sigma(\Lambda_0) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$. При $\mathrm{X} = \mathbb{C}$, згідно з припущенням 4.1, для функцій $f_1(z) = z^2 - a_1 z - a_2$ та $f_2(z) = z^2 - b_1 z - b_2$ повинно існувати таке число $z_0 \notin i\,\mathbb{R}$, що $f_1(z_0) = f_2(z_0)$.

При фіксованій функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ диференціальне рівняння (4.1) еквівалентне диференціальному рівнянню (4.6) з функцією $\bar{y} = \begin{pmatrix} y(t) \\ \bar{0} \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Тому важливою є наступна теорема.

Теорема 4.3. *Якщо виконується припущення 4.1, то рівняння* (4.1) *задовольняє умову обмеженості у тому і тільки в тому випадку, коли умову обмеженості задовольняє рівняння* (4.6).

Зауваження 4.2. Із доведення теореми 4.3 випливає, що коли рівняння (4.6) задовольняє умову обмеженості, то рівняння другого порядку (4.1) задовольняє умову обмеженості незалежно від виконання припущення 4.1.

Якщо ж умова обмеженості виконується для рівняння (4.1), то припущення 4.1 суттєво використовується для перевірки неперервності у точці $t = 0$ (тобто "склейки") при побудові обмежених розв'язків диференціального рівняння (4.6).

З теореми 4.3 випливає, що коли виконується припущення 4.1, то умова обмеженості для диференціального рівняння (4.1) виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються умови $i_1)$, $i_2)$ теореми 4.2.

У наступній теоремі розглядається випадок, коли перевірка умов $i_1)$, $i_2)$ зводиться до перевірки умов на розділені корені рівнянь (4.2) і (4.9).

Теорема 4.4. *Припустимо, що рівняння* (4.2) *і* (4.9) *мають розділені корені* Λ_1, Λ_2 *і* Φ_1, Φ_2 *відповідно, а також виконується припущення 4.1. Для того, щоб диференціальне рівняння* (4.1) *задовольняло умову обмеженості, необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови:*

j_1) $(\sigma(\Lambda_1) \cup \sigma(\Lambda_2)) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, $(\sigma(\Phi_1) \cup \sigma(\Phi_2)) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$;

j_2) $\mathrm{X}^2 = \mathrm{M}_-(\Lambda_1,\Lambda_2) \dot{+} \mathrm{M}_+(\Phi_1,\Phi_2)$,

де

$$\mathrm{M}_-(\Lambda_1,\Lambda_2) = \left\{ \mathrm{U_A} \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} \middle| \, v^{(k)} \in \mathrm{X}_-(\Lambda_k), k = 1,2 \right\},$$

$$\mathrm{M}_+(\Phi_1,\Phi_2) = \left\{ \mathrm{U_B} \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} \middle| \, v^{(k)} \in \mathrm{X}_+(\Phi_k), k = 1,2 \right\}.$$

У ***висновках до дисертації*** коротко сформульовано основні результати дисертаційного дослідження, перспективи його подальшого розвитку та застосування.

Подяки. Автор дисертаційної роботи висловлює щиру подяку своєму науковому керівникові – доктору фізико-математичних наук, професору Городньому Михайлу Федоровичу – за постановку задач, постійну підтримку, увагу, цінні зауваження та поради під час проведення дисертаційного дослідження.

Крім того, автор висловлює подяки усім захисникам і захисницям свободи і незалежності українського народу, працівникам і працівницям сектора охорони здоров'я, енергетичного і транспортного секторів України, волонтерам та решті причетних за можливість безпечно працювати над дисертаційним дослідженням впродовж тривалих буремних періодів пандемії COVID - 19 та російської військової агресії проти України.

Розділ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Дана дисертаційна робота присвячена питанням існування та єдиності обмежених розв'язків диференціальних рівнянь з кусково-сталими операторними коефіцієнтами. Такі питання відносять до якісної теорії диференціальних рівнянь, основоположниками якої є Анрі Пуанкаре, Оскар Перрон та Олександр Ляпунов. Достатньо вичерпний огляд основних етапів розвитку теорії диференціальних рівнянь до середини XX століття викладено у історичному нарисі А. П. Юшкевича (див. [14, розд. X]), де, зокрема, розглянуто й становлення теорій А. Пуанкаре та О. М. Ляпунова.

З питаннями існування та єдиності обмежених розв'язків тісно пов'язані питання стійкості розв'язків диференціальних рівнянь. Виходячи з ідей та результатів О. М. Ляпунова, М. Г. Крейн у статті [15], а потім у друкованому виданні [16] встановив, що багато фактів теорії стійкості розв'язків можна отримати, застосувавши теорію операторів у банахових просторах. Відмова від специфічної теорії операторів (матричного аналізу) у скінченновимірному просторі зробила велику кількість доведень і конструкцій більш прозорими і простими. Таким чином, загальний функціонально-аналітичний підхід до диференціальних рівнянь позитивно вплинув і на класичну теорію (див., наприклад, монографії Б. П. Демидовича [17], В. А. Коппеля [18], Ф. Хартмана [19]). Зауважимо, що дослідження лінійних диференціальних рівнянь має не лише самостійне значення, але й служить базою для вивчення нелінійних рівнянь за лінійним наближенням.

Результати, представлені у монографіях Х. Л. Массери та Х. Х. Шеффера [20], Ю. Л. Далецького та М. Г. Крейна [8], стосувались випадку обмежених операторів, що діють у банаховому просторі. У зв'язку із застосуванням до параболічних диференціальних рівнянь у частинних похідних гостро постало питання про дослідження якісних властивостей розв'язків відповідних рівнянь із необмеженими операторними коефіцієнтами. Розвитком цієї теорії зацікавились автори обох згаданих монографій, внаслідок чого ними та іншими дослідниками була започаткована і розвинута теорія напівгруп та її застосування до диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами (див., наприклад, монографії Е. Хіллє та Р. С. Філіпса [21], К. Йошіди [22], Т. Като [23], С. Г. Крейна [24], Дж. А. Ґолдстейна [25], огляди С. Г. Крейна та М. І. Хазана [26], В. В. Васильєва, С. Г. Крейна та С. І. Піскарьова [27], статті М. З. Соломяка [28], К. К. Тревіса та Ґ. Ф. Уебба [29] і наведені у них посилання). Розвинута теорія дозволила досліджувати питання існування та єдиності обмежених на всій числовій осі розв'язків диференціальних рівнянь незалежно від того, чи є відповідні операторні коефіцієнти обмеженими, чи ні.

Важливі результати стосовно існування і властивостей обмежених, періодичних і майже періодичних розв'язків диференціальних рівнянь з операторними коефіцієнтами викладено, зокрема, в монографіях Б. М. Левітана та В. В. Жикова [30], О. А. Панкова [31], Д. Хенрі [32], Ю. О. Митропольского, А. М. Самойленка та В. Л. Кулика [33], І. Д. Чуєшова [34], В. Ю. Слюсарчука [35], статтях Е. Мухамадієва [36; 37], А. М. Самойленка та Г. П. Пелюха [38], О. А. Бойчука [39], А. М. Самойленка, О. А. Бойчука та Ан. О. Бойчука [40], О. А. Бойчука, В. П. Журавльова та О. О. Покутного [41], А. Г. Баскакова [42; 43], В. Ю. Слюсарчука [44—46], Д. С. Бігуна, О. О. Покутного, І. Г. Ключник, М. І. Садового та О. М. Трифонової [47], А. В. Чайковського та О. А. Лагоди [48].

1.1 Обмежені розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку

Для лінійного диференціального рівняння першого порядку зі сталим операторним коефіцієнтом повну відповідь на питання про існування єдиного обмеженого на всій числовій осі розв'язку містить наступний результат М. Г. Крейна. Нехай X – комплексний банахів простір, A – лінійний обмежений оператор, що діє із X в X, а $\sigma(\mathrm{A})$ – спектр оператора A. Розглянемо диференціальне рівняння

$$x'(t) = \mathrm{A}x(t) + f(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

де $f : \mathbb{R} \to \mathrm{X}$ – неперервна і обмежена на $\mathbb{R}$ функція.

Теорема 1.1 (**див. [8, с. 119 – 120]**). *Для того, щоб будь-якій обмеженій на усій осі неперервній вектор-функції f відповідав один і тільки один обмежений на усій осі розв'язок рівняння* (1.1)*, необхідно і достатньо, щоб спектр* $\sigma(\mathrm{A})$ *не перетинався з уявною віссю.*

У випадку, коли замість диференціального рівняння (1.1) розглядається диференціальне рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом

$$x'(t) = \mathrm{A}(t)x(t) + f(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

умова існування єдиного обмеженого на всій числовій осі розв'язку для довільної неперервної і обмеженої на $\mathbb{R}$ функції f еквівалентна виконанню умови експоненціальної дихотомії на $\mathbb{R}$ для відповідного до (1.2) однорідного диференціального рівняння.

Питання про зв'язок між цими умовами у скінченновимірному просторі досліджували у своїх статтях О. Перрон [49] та А. Д. Майзель [50]. Для нескінченновимірного банахового простору умова експоненціальної дихотомії для рівнянь зі змінними операторними коефіцієнтами досліджувалась, зокрема, у монографіях Х. Л. Массери та Х. Х. Шеффера [20], Ю. Л. Далецького та М. Г. Крейна [8] у випадку обмежених, а у статтях В. В. Жикова [51], А. Г. Баскакова [43] і монографії Д. Хенрі [32] – у випадку необмежених операторних коефіцієнтів.

Про використання більш слабкої умови експоненціальної дихотомії на півосях і фредгольмовості відповідного оператора для розв'язування задач про обмежені на $\mathbb{R}$ розв'язки див. статті А. Г. Баскакова [43], О. А. Бойчука, В. П. Журавльова та О. О. Покутного [41] і наведені в них посилання.

Сформулюємо деякі важливі результати з монографії Ю. Л. Далецького та М. Г. Крейна [8], що пояснюють мету даного дисертаційного дослідження.

Відомо (див. [8, с. 140]), що якщо функція $x : [a, b] \to \mathrm{X}$ інтегровна за Бохнером, то майже для всіх значень $t \in [a, b]$ виконується співвідношення

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \|x(\tau) - x(t)\| \, d\tau = 0$$

і, зокрема, функція

$$y(t) = \int\limits_{a}^{t} x(\tau) d\tau \tag{1.3}$$

неперервна і майже скрізь диференційовна на $[a, b]$.

Якщо не обумовлено інакше, будемо називати функцію диференційовною, якщо її можна зобразити у вигляді інтеграла Бохнера (1.3).

Далі вважаємо, що функції $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, та $\mathrm{A}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, з диференціального рівняння (1.2) сильно вимірні, інтегровні за Бохнером на скінченних інтервалах з $\mathbb{R}$, а також операторнозначна функція $\mathrm{A}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, інтегрально обмежена, тобто існує така стала $M > 0$, що для усіх $t \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\int\limits_{t}^{t+1} \|\mathrm{A}(\tau)\| \, d\tau \leq M.$$

Означення 1.1 (див. [8, с. 141]). Розв'язком диференціального рівняння (1.2) називається неперервна на $\mathbb{R}$ функція x, яка є диференційовною в описаному вище сенсі та задовольняє рівняння (1.2) майже скрізь за мірою Лебега на $\mathbb{R}$.

Згідно з означенням 1.1, розв'язком рівняння (1.2) з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ є розв'язок інтегрального рівняння

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{A}(\tau)x(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau. \tag{1.4}$$

Зокрема, якщо функція $f(t)$ неперервна, а $\mathrm{A}(t)$ сильно неперервна (тобто $\mathrm{A}(t)x$ неперервна для усіх x), то розв'язок рівняння (1.4) неперервно диференційовний у кожній точці $t \in \mathbb{R}$ і співвідношення (1.2) виконується скрізь на $\mathbb{R}$.

Розглянемо тепер опереаторнозначну функцію $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, яка визначається за допомогою формули

$$U(t) = \mathrm{I} + \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{A}(t_1)dt_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{t_n} \ldots \int\limits_{t_0}^{t_2} \mathrm{A}(t_n)\mathrm{A}(t_{n-1}) \ldots \mathrm{A}(t_1)dt_1 \ldots dt_n.$$

Можна перевірити (див. [8, с. 145 – 146]), що ця функція неперервна майже скоізь на $\mathbb{R}$ і, крім того, вона є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \mathrm{A}(t)U, \\ U(t_0) = \mathrm{I}, \end{cases}$$

а також для кожного $t \in \mathbb{R}$ оператор $U(t)$ неперервно оборотний.

Означення 1.2 (див. [8, с. 147]). Оператор $U(t,\tau) = U(t)U^{-1}(\tau)$ називається еволюційним оператором диференціального рівняння (1.2).

Зазначимо (див. [8, с. 148]), що за допомогою еволюційного оператора розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння (1.2) з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ записується у вигляді

$$x(t) = U(t, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} U(t, \tau)f(\tau)d\tau,$$

а для відповідного до (1.2) однорідного диференціального рівняння

$$x'(t) = \mathrm{A}(t)x(t), \; t \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

з початковою умовою $x(\tau) = x_\tau$ – у вигляді

$$x(t) = U(t, \tau)x_\tau.$$

Означення 1.3 (**див. [8, с. 233 – 234]**). Кажуть, що для диференціального рівняння (1.5) виконується експоненціальна дихотомія на $\mathbb{R}$, якщо для деякого $t_0 \in \mathbb{R}$ простір X розкладається у пряму суму замкнених підпросторів

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_1(t_0)\dot{+}\mathrm{X}_2(t_0),$$

причому виконуються такі умови:

1) розв'язки $x_1(t) = U(t, t_0)x_1^0$ рівняння (1.5), що виходять в момент $t = t_0$ за межі підпростору $\mathrm{X}_1(t_0)$ ($x_1^0 \in \mathrm{X}_1(t_0)$), для усіх s, $t \in \mathbb{R}$, таких, що $s \leq t$, задовольняють оцінку

$$\|x_1(t)\| \leq N_1 e^{-\nu_1(t-s)}\|x_1(s)\|$$

із деяким показником $\nu_1 > 0$;

2) розв'язки $x_2(t) = U(t, t_0)x_2^0$ рівняння (1.5), що виходять в момент $t = t_0$ за межі підпростору $\mathrm{X}_2(t_0)$ ($x_2^0 \in \mathrm{X}_2(t_0)$), для усіх s, $t \in \mathbb{R}$, таких, що

$s \geq t$, задовольняють оцінку

$$\|x_2(t)\| \leq N_2 e^{-\nu_2(s-t)} \|x_2(s)\|$$

із деяким показником $\nu_2 > 0$.

Нехай лінійний многовид X_1 складається з усіх початкових значень x_0 розв'язків диференціального рівняння (1.5), обмежених на півосі $[0, +\infty)$, а лінійний многовид X_2 – з початкових значень x_0 розв'язків диференціального рівняння (1.5), обмежених на півосі $(-\infty, 0]$. Позначимо через $C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ множину усіх неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $f : \mathbb{R} \to \mathrm{X}$.

Теорема 1.2 (**див. [8, с. 248]**). *Нехай операторнозначна функція* $\mathrm{A}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *інтегрально обмежена. Для того, щоб диференціальне рівняння* (1.5) *було експоненціально дихотомічним на всій осі* $\mathbb{R}$, *необхідно і достатньо, щоб лінійні многовиди* X_1 *та* X_2 *були взаємно доповняльними підпросторами банахового простору* X (*тобто, щоб* X *зображувався у вигляді прямої суми* $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \dot{+} \mathrm{X}_2$) *і кожній функції* $f(t) \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ *відповідав хоча б один обмежений розв'язок неоднорідного диференціального рівняння* (1.2). *Цей розв'язок буде єдиним обмеженим розв'язком диференціального рівняння* (1.5) *на всій числовій осі.*

І в монографії Х. Массери та Х. Шеффера [20], і в монографії Ю. Л. Далецького та М. Г. Крейна [8] при доведенні того факту, що з умови існування єдиного обмеженого розв'язку випливає виконання умови експоненціальної дихотомії, насправді припускається, що X_1 і X_2 замкнені і взаємно доповняльні. Остаточний результат про еквівалентність цих умов доведено В. В. Жиковим у статті [51], причому – одразу для диференціального рівняння (1.5) із необмеженим операторним коефіцієнтом.

У загальному випадку перевірка умови експоненціальної дихотомії на $\mathbb{R}$ є нетривіальною задачею. У даній дисертаційній роботі для диференціального рівняння (1.5) з кусково-сталою операторнозначною функцією

$$\mathrm{A}(t) = \begin{cases} \mathrm{A},\ t \geq 0, \\ \mathrm{B},\ t < 0, \end{cases}$$

де A та B – фіксовані лінійні обмежені оператори, отримано явні необхідні і достатні умови на опреатори A та B, які забезпечують виконання умови існування єдиного обмеженого розв'язку. При цьому використовується «класичне» означення обмеженого розв'язку, а саме, обмеженим розв'язком диференціального рівняння (1.5), відповідним до функції $f \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$, називається така функція $x \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$, що для кожного $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ існує сильна похідна $x'(t)$ і виконується рівність (1.5).

1.2 Зв'язок між обмеженими розв'язками диференціального та відповідного різницевого рівняння

Одним з важливих підходів до вивчення питання про обмежені розв'язки диференціального рівняння (1.2) є перехід до вивчення обмежених на $\mathbb{Z}$ розв'язків відповідного йому різницевого рівняння. Такий перехід обґрунтовано, зокрема, навіть у випадку необмежених операторних коефіцієнтів $\mathrm{A}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, у роботах А. Г. Баскакова [52] і А. Г. Баскакова та А. І. Пастухова [53]. Зв'язок між існуванням обмежених розв'язків диференціальних рівнянь та відповідних їм різницевих рівнянь також досліджували у своїй статті [54] О. В. Карпенко та О. М. Станжицький.

У розділі 2 цієї дисертаційної роботи здійснюється перехід від диференціального рівняння

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{A}x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x'(t) = \mathrm{B}x(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

у якому $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$, а A та B – фіксовані лінійні неперервні оператори, що діють із X в X, до відповідного різницевого рівняння

$$\begin{cases} u_{n+1} = e^{\mathrm{A}}u_n + v_n,\ n \geq 0, \\ u_{n+1} = e^{\mathrm{B}}u_n + v_n,\ n \leq -1. \end{cases} \tag{1.7}$$

Доведено (див. лему 2.1 розділу 2), що диференціальне рівняння (1.6) має єдиний обмежений розв'язок x для кожної функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ тоді і тільки тоді, коли різницеве рівняння (1.7) має єдиний обмежений розв'язок $\{u_n,\ n \in \in \mathbb{Z}\}$ для довільної обмеженої послідовності $\{v_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ елементів банахового простору X. Тому важливу роль у дослідженні питання про обмежені на всій числовій осі розв'язки диференціального рівняння (1.6) відіграє наступний результат І. В. Гончар.

Нехай D та E – фіксовані лінійні обмежені оператори, що діють із X в X. Розглянемо різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = \mathrm{D}x_n + y_n,\ n \geq 1, \\ x_{n+1} = \mathrm{E}x_n + y_n,\ n \leq 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

у якому $\{y_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ – задана, а $\{x_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ – шукана послідовність елементів простору X.

Нехай спектри $\sigma(\mathrm{D})$ та $\sigma(\mathrm{E})$ операторів D та E не перетинають одиничне коло на комплексній площині з центром у нулі, тобто $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Позначимо через $\sigma_-(\mathrm{D})$ та $\sigma_-(\mathrm{E})$ частини спектрів операторів D та E, що лежать всередині цього кола, а через $\sigma_+(\mathrm{D})$ та $\sigma_+(\mathrm{E})$ частини спектрів операторів D та E, що лежать зовні нього. Відомо (див., наприклад, [55, с. 8]), що банахів простір X розкладається у пряму суму $\mathrm{X} = \mathrm{X}_-(\mathrm{D}) \dot{+} \mathrm{X}_+(\mathrm{D})$ інваріантних відносно оператора D підпросторів $\mathrm{X}_-(\mathrm{D})$ та $\mathrm{X}_+(\mathrm{D})$ таким чином, що звуження D_- та D_+ оператора D на підпростори $\mathrm{X}_-(\mathrm{D})$ та $\mathrm{X}_+(\mathrm{D})$ відповідно мають спектри $\sigma_-(\mathrm{D})$ та $\sigma_+(\mathrm{D})$. Те ж саме виконується і для оператора E.

У статті І. В. Гончар [9] доведено таку теорему.

Теорема 1.3 (**див.** [**9, теорема 1**]). *Нехай виконуються наступні умови:*

1) $\sigma(\mathrm{D}) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \varnothing$, $\sigma(\mathrm{E}) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \varnothing$*;*

2) $\mathrm{X} = \mathrm{X}_-(\mathrm{D}) \dot{+} \mathrm{X}_+(\mathrm{E})$.

Тоді для кожної обмеженої послідовності $\{y_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ *різницеве рівняння* (1.8) *має єдиний обмежений розв'язок* $\{x_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ *у просторі* X.

У дисертаційній роботі доведено (див. теорему 2.1 розділу 2), що у випадку, коли оператори D та E неперервно оборотні, умови 1) і 2) теореми 1.3 є не тільки достатніми, але й необхідними. Ці твердження відіграють центральну роль при дослідженні питання про обмежені розв'язки різницевого рівняння (1.7), а отже, і диференціального рівняння (1.6).

Варто також відзначити, що пізніше М. Ф. Городній у статті [56] довів необхідність умов 1) і 2) теореми 1.3 без додаткової умови щодо неперервної оборотності операторів D та E.

Використавши еквівалентність умови існування обмежених розв'язків і умови експоненціальної дихотомії, В. Ю. Слюсарчук у статті [10] довів необхідні і достатні умови для виконання умови обмеженості розв'язків лінійного різницевого рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами і отримав, як наслідок, наступне твердження щодо різницевого рівняння (1.8) для необов'язково неперервно оборотних операторів D та E.

Теорема 1.4 (див. [10]). *Різницеве рівняння* (1.8) *має для кожної обмеженої в* X *послідовності* $\{v_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ *єдиний обмежений розв'язок* $\{u_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ *тоді і тільки тоді, коли* X *зображується у вигляді прямих сум підпросторів*

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_0^- \dot{+} \mathrm{X}_0^+ = \mathrm{X}_1^- \dot{+} \mathrm{X}_1^+ \tag{1.9}$$

таким чином, що виконуються умови:

1) $\mathrm{E}(\mathrm{X}_0^-) \subset \mathrm{X}_0^- \cap \mathrm{X}_1^-$, $\mathrm{E}(\mathrm{X}_0^+) = \mathrm{X}_0^+ = \mathrm{X}_1^+$, *звуження* E_0^+ *оператора* $P_0^+ \mathrm{E} P_0^+$ *на* X_0^+ *є неперервно оборотним оператором, для спектрального радіуса якого справджується нерівність* $r\left((\mathrm{E}_0^+)^{-1}\right) < 1$, *а також для звуження* E_0^- *оператора* $P_0^- \mathrm{E} P_0^-$ *на* X_0^- *справджується нерівність* $r\left(\mathrm{E}_0^-\right) < 1$*;*

2) $\mathrm{D}(\mathrm{X}_1^-) \subset \mathrm{X}_1^-$, $\mathrm{D}(\mathrm{X}_1^+) = \mathrm{X}_1^+$, *звуження* D_1^+ *оператора* $P_1^+ \mathrm{D} P_1^+$ *на* X_1^+ *є неперервно оборотним оператором, для спектрального радіуса якого справджується нерівність* $r\left((\mathrm{D}_1^+)^{-1}\right) < 1$, *а також для звуження* D_1^- *оператора* $P_1^- \mathrm{D} P_1^-$ *на* X_1^- *справджується нерівність* $r\left(\mathrm{D}_1^-\right) < 1$.

Тут через P_0^-, P_0^+ *та* P_1^-, P_1^+ *позначені проектори у просторі* X, *що відповідають зображенням* $\mathrm{X} = \mathrm{X}_0^- \dot{+} \mathrm{X}_0^+$ *та* $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1^- \dot{+} \mathrm{X}_1^+$.

Зазначимо, що отримана в даній дисертаційній роботі теорема 2.1 більш зручна для застосувань, ніж теорема 1.4, оскільки в останній не вказано явно, як отримати зображення (1.9).

1.3 Обмежені розв'язки диференціальних рівнянь другого порядку

Диференціальні рівняння другого порядку в абстрактних просторах природно виникають при дослідженні прикладних задач у фізиці, біології, економіці. Наприклад, використання таких рівнянь для опису поведінки лінійних автономних механічних систем, а також дослідження властивостей розв'язків відповідних рівнянь викладено у статті М. Г. Крейна та Г. К. Ланґера [57], монографіях М. Г. Крейна та Г. К. Ланґера [58], Ю. Л. Далецького та М. Г. Крейна [8].

Питання існування та єдиності обмежених на всій числовій осі розв'язків диференціальних рівнянь другого та старших порядків розглядаються, зокрема, у статтях С. Я. Якубова та М. К. Балаєва [59], І. В. Алієва [60], І. М. Міґдашиєва [61], Н. Попеску [62], С. Л. Едельштейна [63], Чан Хиу Бонґа [64], А. Г. Баскакова та М. К. Чернишова [11], А. Я. Дороговцева [65], А. Г. Баскакова, Т. К. Кацаран та Т. І. Смаґіної [12].

Зв'язок диференціальних рівнянь другого порядку із відповідними системами диференціальних рівнянь першого порядку досліджували у своїх роботах Дж. А. Ґолдстейн [66], К. К. Тревіс та Ґ. Ф. Уебб [67], Г. О. Фатторіні [68], І. В. Мельникова та А. І. Філінков [69; 70], А. Г. Баскаков, Т. К. Кацаран та Т. І. Смаґіна [12].

Сформулюємо результати, близькі до тематики цієї дисертаційної роботи.

Через $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}, \mathrm{X})$ будемо позначати банахів простір усіх вимірних та істотно обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $f : \mathbb{R} \to \mathrm{X}$ з нормою $\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|_\mathrm{X}$; через $W^2_\infty(\mathbb{R}, \mathrm{X})$ – відповідний простір Соболєва другого порядку; а через $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ позначимо банахову алгебру обмежених лінійних операторів, що діють в X.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$x''(t) + Q(t)x(t) = y(t),\ t \in \mathbb{R},$$

у якому $Q : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathrm{X})$ – деяка операторнозначна функція.

Вивчається питання про існування єдиного розв'язку x цього диференціального рівняння у просторі $W^2_\infty(\mathbb{R}, \mathrm{X})$ для довільної функції $y \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}, \mathrm{X})$, тобто, з урахуванням теореми Банаха про обернений оператор, питання про неперервну оборотність оператора $L = \dfrac{d^2}{dt^2} + Q(t)$.

Якщо функція $Q(t) \equiv Q_0 \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ стала, то необхідною і достатньою умовою неперервної оборотності оператора L є умова

$$\sigma(Q_0) \cap \mathbb{R}_+ = \varnothing,$$

де $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. У такому випадку обернений оператор $L^{-1} : \mathcal{L}_\infty \to \mathcal{L}_\infty$ має вигляд

$$\left(L^{-1}x\right)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{Q_0}(t-s)x(s)ds,$$

де $G_{Q_0} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathrm{X})$ – функція Гріна, що визначається формулою

$$G_{Q_0}(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}A^{-1}e^{-At},\ t \geq 0, \\ -\dfrac{1}{2}A^{-1}e^{At},\ t < 0, \end{cases}$$

а оператор $A \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ є таким квадратним коренем з $-Q_0$, що його спектр $\sigma(A)$ лежить у півплощині $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

У загальному випадку, коли операторнозначна функція Q залежить від t, умова

$$\mathrm{X}(Q) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \mathrm{dist}\left(\sigma\left(Q(t)\right), \mathbb{R}_+\right) > 0 \qquad (1.10)$$

рівномірної відокремленості спектрів операторів $Q(t)$ від півосі $\mathbb{R}_+$ не гарантує існування оберненого оператора до L.

Розглянемо деякі припущення, необхідні для виконання теореми про оборотність оператора L.

Припущення 1.1. *Існують такі сталі M, $\gamma > 0$, що $\|G_{Q(t)}(u)\| \leq Me^{-\gamma|u|}$ для усіх u, $t \in \mathbb{R}$.*

Припущення 1.2. *Існує така стала $c(Q) \geq 0$, що $\|Q(t) - Q(\tau)\| \leq c(Q)|t - \tau|$ для довільних t, $\tau \in \mathbb{R}$.*

Теорема 1.5 (**див.** [11]). *Нехай виконуються умова (1.10) та припущення 1.1 і 1.2. Тоді якщо $2Mc(Q) < \gamma^2$, то оператор L оборотний.*

Зазначимо, що для кусково-сталої операторнозначної функції

$$Q(t) = \begin{cases} \mathrm{A},\ t \geq 0, \\ \mathrm{B},\ t < 0, \end{cases}$$

при $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ припущення 1.2 не виконується.

У статті [12] А. Г. Баскаков, Т. К. Кацаран та Т. І. Смаґіна досліджують питання існування обмежених на всій числовій осі розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$x''(t) + \mathrm{B}_1 x'(t) + \mathrm{B}_2 x(t) = g(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.11}$$

з обмеженими операторними коефіцієнтами B_1 та B_2 у комплексному банаховому просторі X, де $g \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$. Сформулюємо отриманий ними результат.

Розглянемо банахів простір $\mathrm{X}^2 = \left\{ \bar{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \middle| \, x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathrm{X} \right\}$ із нормою, що визначається за правилом $\left\| \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\|x^{(1)}\|^2 + \|x^{(2)}\|^2}$.

Далі, якщо оператори T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22} належать $\mathcal{L}(\mathrm{X})$, то, як і для випадку числових матриць, оператор $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \mathrm{T}_{11} & \mathrm{T}_{12} \\ \mathrm{T}_{21} & \mathrm{T}_{22} \end{pmatrix}$ із $\mathcal{L}\big(\mathrm{X}^2\big)$ визначається за правилом $\mathrm{T}\bar{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{T}_{11}x^{(1)} + \mathrm{T}_{12}x^{(2)} \\ \mathrm{T}_{21}x^{(1)} + \mathrm{T}_{22}x^{(2)} \end{pmatrix}$, $\bar{x} \in \mathrm{X}^2$.

Разом з диференціальним рівнянням (1.11) розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$\bar{y}'(t) + \mathrm{T_B}\bar{y}(t) = \bar{f}(t),\, t \in \mathbb{R}, \tag{1.12}$$

де операторний коефіцієнт $\mathrm{T_B} \in \mathcal{L}\big(\mathrm{X}^2\big)$ визначається матрицею $\begin{pmatrix} \mathrm{O} & -\mathrm{I} \\ \mathrm{B}_2 & \mathrm{B}_1 \end{pmatrix}$, а $\bar{f} = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix} \in C_b\big(\mathbb{R},\mathrm{X}^2\big)$. При цьому диференціальне рівняння другого порядку (1.11) еквівалентне диференціальному рівнянню першого порядку (1.12), якщо $\bar{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Для дослідження диференціальних рівнянь (1.11) та (1.12) автори застосовують підхід, за якого відповідне «алгебраїчне» операторне рівняння

$$\Lambda^2 + \mathrm{B}_1\Lambda + \mathrm{B}_2 = \mathrm{O} \tag{1.13}$$

має розділені корені Λ_1, $\Lambda_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, тобто такі, що оператор $(\Lambda_1 - \Lambda_2)$ неперервно оборотний.

Теорема 1.6 (**див. [12], Теорема 2**). *Якщо операторне рівняння* (1.13) *має два розділені корені* Λ_1, $\Lambda_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, *то оператор* $\mathrm{T_B} \in \mathcal{L}\big(\mathrm{X}^2\big)$ *подібний блочно-діагональному оператору* $\widetilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} -\Lambda_1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & -\Lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\big(\mathrm{X}^2\big)$. *При цьому виконуються співвідношення*

$$\mathrm{T_B} = U^{-1}\widetilde{\Lambda}U, \quad e^{-\mathrm{T_B}t} = U^{-1}\begin{pmatrix} e^{\Lambda_1 t} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & e^{\Lambda_2 t} \end{pmatrix} U, \tag{1.14}$$

де оператори U, $U^{-1} \in \mathcal{L}\big(\mathrm{X}^2\big)$ *визначаються відповідно матрицями вигляду*

$$U = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_1 & -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \end{pmatrix}$$

З подібності операторів $\mathrm{T_B}$ та $\widetilde{\Lambda}$, а також зі співвідношень (1.14) випливає наступна теорема.

Теорема 1.7 (див. [12], Теорема 3). *Нехай Λ_1 та Λ_2 – розділена пара коренів операторного рівняння (1.13). Тоді для того, щоб диференціальне рівняння (1.11) мало єдиний обмежений розв'язок x для кожної функції $g \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$, необхідно і достатньо, щоб*

$$(\sigma(\Lambda_1) \cup \sigma(\Lambda_2)) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing,$$

де $\sigma(\Lambda_1)$ та $\sigma(\Lambda_2)$ – спектри операторів Λ_1 та Λ_2 відповідно.

Через $C_b^{(1)}(\mathbb{R},\mathrm{X})$ позначатимемо банахів простір усіх неперервно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій $x \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ з похідною $x' \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ і нормою $\|x\|_{1,\infty} := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$, де $\|x\|_\infty := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$.

У розділі 4 даної дисертаційної роботи досліджується аналогічне до (1.11) диференціальне рівняння другого порядку, але з кусково-сталими операторними коефіцієнтами

$$\begin{cases} x''(t) = \mathrm{A}_1 x'(t) + \mathrm{A}_2 x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x''(t) = \mathrm{B}_1 x'(t) + \mathrm{B}_2 x(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases} \tag{1.15}$$

у класичному випадку, коли $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$. Тут A_1, A_2, B_1 та B_2 – фіксовані лінійні обмежені оператори.

Обмеженим розв'язком останнього рівняння будемо називати таку функцію $x \in C_b^{(1)}(\mathbb{R},\mathrm{X})$, що для кожного $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ існує $x''(t)$ і розглянута рівність виконується.

У даній дисертаційній роботі доведено аналогічну до теореми 1.7 теорему 4.3 про обмежені розв'язки диференціального рівняння (1.15), яка є одним з основних результатів розділу 4 дисертації.

Розділ 2. ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З КУСКОВО-СТАЛИМИ ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

2.1 Основні позначення і постановка задачі

У цьому розділі дисертаційної роботи і усюди далі через X будемо позначати комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ та нульовим елементом $\overline{0}$; через $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ будемо позначати простір лінійних неперервних операторів, що діють із X в X; через I, O будемо позначати відповідно одиничний і нульовий оператори в X; через $C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ будемо позначати банахів простір усіх неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $f : \mathbb{R} \to \mathrm{X}$ з нормою $\|f\|_\infty := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$, $f \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$.

У цьому розділі будемо розглядати диференціальне рівняння вигляду

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{A}x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x'(t) = \mathrm{B}x(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

у якому $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$, A, B – фіксовані оператори з простору $\mathcal{L}(\mathrm{X})$.

Означення 2.1. Обмеженим розв'язком диференціального рівняння (2.1) будемо називати таку функцію $x \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$, що для кожного $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ існує $x'(t)$ і виконується рівність (2.1).

Зауваження. Усюди у цій дисертаційній роботі похідна розглядатиметься у сильному сенсі, тобто вважатиметься, що функція $x \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ має похідну $x'(t_0)$ у точці t_0, якщо виконується рівність

$$\lim_{\Delta t\to 0} \left\| \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} - x'(t_0) \right\| = 0.$$

Основною метою цього розділу є отримання необхідних і достатніх умов на операторні коефіцієнти A та B, які забезпечують виконання такої умови.

Умова обмеженості. *Для довільної функції* $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ *диференціальне рівняння* (2.1) *має єдиний обмежений розв'язок* x *у просторі* $C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$.

2.2 Допоміжні леми

Для доведення основних результатів у подальшому використовуватимуться такі леми.

Лема 2.1. *Диференціальне рівняння* (2.1) *задовольняє умову обмеженості тоді і тільки тоді, коли різницеве рівняння вигляду*

$$\begin{cases} u_{n+1} = e^{\mathrm{A}} u_n + v_n,\ n \geq 0, \\ u_{n+1} = e^{\mathrm{B}} u_n + v_n,\ n \leq -1 \end{cases} \tag{2.2}$$

також задовольняє умову обмеженості, тобто має єдиний обмежений розв'язок $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ *для кожної обмеженої (на* $\mathbb{Z}$*) послідовності* $\{v_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Доведення. *Достатність.* Нехай різницеве рівняння (2.2) задовольняє умову обмеженості. Зафіксуємо функцію $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$. Розглянемо послідовність $\{v_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, що задається за наступним правилом:

$$v_n = \begin{cases} \int\limits_0^1 e^{\mathrm{A}(1-\tau)} y(n+\tau) d\tau,\ n \geq 0, \\ \int\limits_0^1 e^{\mathrm{B}(1-\tau)} y(n+\tau) d\tau,\ n \leq -1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Враховуючи те, що

$$\|v_n\| \leq \int\limits_0^1 \max\left\{e^{\|\mathrm{A}\|}, e^{\|\mathrm{B}\|}\right\} \cdot \|y(n+\tau)\| d\tau \leq \max\left\{e^{\|\mathrm{A}\|}, e^{\|\mathrm{B}\|}\right\} \cdot \|y\|_\infty$$

для кожного $n \in \mathbb{Z}$, послідовність $\{v_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ є обмеженою у просторі X. Нехай $\{u_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ – відповідний до цієї послідовності обмежений розв'язок різницевого рівняння (2.2). Визначимо функцію x за таким правилом:

$$x(t) = \begin{cases} e^{\mathrm{A}t}u_0 + \int\limits_0^t e^{\mathrm{A}(t-\tau)}y(\tau)d\tau,\ t \geq 0, \\ e^{\mathrm{B}t}u_0 + \int\limits_0^t e^{\mathrm{B}(t-\tau)}y(\tau)d\tau,\ t < 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Тоді $x(0) = u_0 = \lim\limits_{t\to 0} x(t)$, а також, з урахуванням того, що, як показано у монографії Ю. Л. Далецького та М. Г. Крейна [8, с. 103—105], розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{A}x(t) + y(t), t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

зображується у вигляді

$$x(t) = e^{\mathrm{A}(t-t_0)}x_0 + \int\limits_{t_0}^t e^{\mathrm{A}(t-\tau)}y(\tau)d\tau, t \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

при $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ існує $x'(t)$ і виконуються рівності (2.1).

Доведемо, що функція x обмежена на $\mathbb{R}$. Відзначимо, що внаслідок (2.2), (2.3), (2.4), (2.5)

$$x(1) = e^{\mathrm{A}}u_0 + \int\limits_0^1 e^{\mathrm{A}(1-\tau)}y(\tau)d\tau = e^{\mathrm{A}}u_0 + v_0 = u_1,$$

$$x(2) = e^{\mathrm{A}}x(1) + \int\limits_1^2 e^{\mathrm{A}(2-\tau)}y(\tau)d\tau = e^{\mathrm{A}}u_1 + v_1 = u_2,$$

і, за індукцією, отримаємо, що

$$\forall n \geq 0 : x(n) = u_n. \tag{2.6}$$

Також

$$x(-1) = e^{-\mathrm{B}}u_0 - e^{-\mathrm{B}}\int\limits_{-1}^{0} e^{\mathrm{B}(0-\tau)}y(\tau)d\tau = e^{-\mathrm{B}}u_0 - e^{-\mathrm{B}}v_{-1},$$

звідки $u_0 = e^{\mathrm{B}}x(-1) + v_{-1}$, а отже, з урахуванням співвідношень (2.2) і неперервної оборотності оператора e^{B},

$$x(-1) = u_{-1}.$$

Аналогічно із рівності

$$x(-2) = e^{-\mathrm{B}}x(-1) - e^{-\mathrm{B}}\int\limits_{-2}^{-1} e^{\mathrm{B}(-1-\tau)}y(\tau)d\tau$$

отримаємо $x(-2) = u_{-2}$, а потім, за індукцією,

$$\forall n \leq -1 : x(n) = u_n. \tag{2.7}$$

Із (2.6), (2.7) випливає, що послідовність $\{x(n), n \in \mathbb{Z}\}$ обмежена.

Також для довільних $n \geq 0$, $\tau \in [0{,}1]$

$$\|x(n+\tau)\| = \left\| e^{\mathrm{A}\tau}x(n) + \int\limits_{0}^{\tau} e^{\mathrm{A}(\tau-s)}y(n+s)ds \right\| \leq$$

$$\leq e^{\|\mathrm{A}\|}\|u_n\| + \int\limits_{0}^{1} e^{\|\mathrm{A}\|}\|y(n+s)\|ds \leq e^{\|\mathrm{A}\|}\left(\|y\|_\infty + \sup_{n\in\mathbb{Z}}\|u_n\|\right),$$

а отже, функція x обмежена на $[0, +\infty)$.

Аналогічно, для довільних $n \leq -1$, $\tau \in [0{,}1]$

$$\|x(n+\tau)\| \leq e^{\|\mathrm{B}\|}\left(\|y\|_\infty + \sup_{n\in\mathbb{Z}}\|u_n\|\right),$$

тобто функція x обмежена і на $(-\infty; 0]$.

Таким чином, ми побудували обмежений розв'язок x диференціального рівняння (2.1), відповідний до функції y. Доведемо єдиність цього розв'язку.

Якщо, від супротивного, цей розв'язок не єдиний, то відповідне до (2.1) однорідне диференціальне рівняння

$$x'(t) = \begin{cases} \mathrm{A}x(t),\ t \geq 0, \\ \mathrm{B}x(t),\ t < 0 \end{cases}$$

має деякий ненульовий обмежений розв'язок u. Але тоді цей розв'язок має вигляд

$$u(t) = \begin{cases} e^{\mathrm{A}t}u(0),\ t \geq 0, \\ e^{\mathrm{B}t}u(0),\ t < 0, \end{cases}$$

а отже, $u(0) \neq \bar{0}$, а також послідовність $\{u(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ є ненульовим обмеженим розв'язком відповідного до (2.2) однорідного різницевого рівняння

$$\begin{cases} u_{n+1} = e^{\mathrm{A}}u_n,\ n \geq 0, \\ u_{n+1} = e^{\mathrm{B}}u_n,\ n \leq -1. \end{cases}$$

Одержана суперечність і доводить єдиність розв'язку.

Необхідність. Нехай диференціальне рівняння (2.1) задовольняє умову обмеженості. Зафіксуємо обмежену в X послідовність $\{v_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Розглянемо функцію y, яка визначається за таким правилом:

$$\forall n \geq 0 \quad \forall \tau \in [0{,}1]:\ \ y(n+\tau) = e^{\mathrm{A}(\tau-1)}v_n\psi(\tau),$$
$$\forall n \leq -1\ \forall \tau \in [0{,}1]:\ \ y(n+\tau) = e^{\mathrm{B}(\tau-1)}v_n\psi(\tau),$$

де $\psi : [0{,}1] \to \mathbb{R}$ – деяка фіксована, неперервна на $[0{,}1]$ функція, така, що

$$\psi(0) = \psi(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 \psi(t)dt = 1.$$

Тоді $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$, а також виконуються рівності (2.3), а отже, для відповідного до y єдиного обмеженого розв'язку x рівняння (2.1) справджуються рівності (2.6), (2.7). Тому $\{x(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ є відповідним до $\{v_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ обмеженим розв'язком різницевого рівняння (2.2).

Доведемо, що цей розв'язок єдиний. Від супротивного, якщо цей обмежений розв'язок не єдиний, то відповідне до (2.2) однорідне різницеве рівняння має деякий ненульовий розв'язок $\{w_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Але тоді

$$w_n = \begin{cases} e^{\mathrm{A}n} w_0,\ n \geq 0, \\ e^{\mathrm{B}n} w_0,\ n \leq -1, \end{cases}$$

а отже, функція

$$w(t) = \begin{cases} e^{\mathrm{A}t} w_0,\ t \geq 0, \\ e^{\mathrm{B}t} w_0,\ t < 0, \end{cases}$$

є ненульовим обмеженим розв'язком відповідного до (2.1) однорідного диференціального рівняння.

Обмеженість функції $w(t)$ випливає з наступних міркувань.

Для довільних $n \geq 0$, $\tau \in [0,1]$ виконується наступний ланцюжок рівностей:

$$w(n+\tau) = e^{\mathrm{A}(n+\tau)} w_0 = e^{\mathrm{A}\tau} \cdot e^{\mathrm{A}n} w_0 = e^{\mathrm{A}\tau} w_n.$$

Тому для усіх $t \geq 0$

$$\|w_n(t)\| \leq e^{\|\mathrm{A}\|} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|w_n\|.$$

Аналогічно, для усіх $t < 0$

$$\|w_n(t)\| \leq e^{\|\mathrm{B}\|} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|w_n\|.$$

Це суперечить умові обмеженості.

Лему 2.1 доведено. $\square$

Позначимо через S одиничне коло на комплексній площині з центром у початку відліку, тобто $S = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$, а через $i\,\mathbb{R}$ – уявну вісь, тобто $i\,\mathbb{R} = \{it \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Через $\sigma(\mathrm{A})$ будемо позначати спектр оператора A. Безпосередньо із теореми Данфорда про відображення спектра (див., наприклад, монографію [8, с. 32]) випливає, що справджується наступна лема.

Лема 2.2. *$\sigma\left(e^{\mathrm{A}}\right) \cap S = \varnothing$ тоді і тільки тоді, коли $\sigma(\mathrm{A}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$.*

Нехай $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \dot{+} \mathrm{X}_2$, тобто простір X є прямою сумою своїх підпросторів X_1 та X_2, а P_1 і P_2 – проектори в X, що відповідають зображенню $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \dot{+} \mathrm{X}_2$.

Тоді виконується така лема.

Лема 2.3. *Нехай $V \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ і підпростір X_1 інваріантний відносно оператора V. Тоді:*

1) $\forall n \geq 1: \ (P_2 V P_2)^n = P_2 V^n P_2$;

2) якщо оператор V неперервно оборотний, то

$$(P_2 V^{-1} P_2)(P_2 V P_2) = P_2,$$
$$(P_2 V P_2)(P_2 V^{-1} P_2) = P_2,$$

тобто звуження оператора $P_2 V P_2$ на підпростір X_2, яке теж позначатимемо $P_2 V P_2$, є неперервно оборотним оператором з $\mathcal{L}(\mathrm{X}_2)$;

3) якщо додатково $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \dot{+} \mathrm{Y}$ і $P_1(\mathrm{Y})$, $P(\mathrm{Y})$ – проектори, що відповідають цьому зображенню, то $P_2 V P_2 = P_2 V P(\mathrm{Y})$;

4) якщо V_1 – звуження оператора V на X_1, $\sigma(V_1) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$, то

$$\sigma(P_2 V P_2) \supset \left(\sigma(V) \cap \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \geq 1\}\right).$$

Доведення. 1) Для $n = 1$ відповідне твердження перетворюється на тотожну рівність.

Припустимо, що твердження 1) виконується при $n = m$, $m \geq 1$, тобто $(P_2 V P_2)^m = P_2 V^m P_2$.

Доведемо, що відповідна рівність у такому випадку виконуватиметься і для $n = m+1$. Дійсно, для кожного $u \in \mathrm{X}$

$$
\begin{aligned}
P_2V^{m+1}P_2u - (P_2VP_2)^{m+1}u &= P_2V^mVP_2u - (P_2VP_2)^mP_2VP_2u = \\
&= P_2V^mVP_2u - P_2V^mP_2P_2VP_2u = P_2V^m\left(VP_2u - P_2^2(VP_2u)\right) = \\
&= P_2V^m\left(VP_2u - P_2(VP_2u)\right) = P_2V^m(P_1VP_2u) = \bar{0},
\end{aligned}
$$

тобто $(P_2VP_2)^{m+1} = P_2V^{m+1}P_2$.

Таким чином, за методом математичної індукції, доведено, що твердження 1) виконується для кожного $n \geq 1$.

2) З урахуванням рівності $P_2V^{-1}P_1 = \mathrm{O}$ для кожного $u \in \mathrm{X}$ матимемо

$$
\begin{aligned}
&P_2u - (P_2V^{-1}P_2)(P_2VP_2)u = \\
&= P_2^2u - (P_2V^{-1}P_2)(P_2VP_2)u = P_2V^{-1}VP_2u - (P_2V^{-1}P_2)(P_2VP_2)u = \\
&= P_2V^{-1}\left(VP_2u - P_2^2(VP_2u)\right) = P_2V^{-1}\left(VP_2u - P_2(VP_2u)\right) = \\
&= P_2V^{-1}\left(\mathrm{I} - P_2)(VP_2u)\right) = P_2V^{-1}P_1(VP_2u) = \bar{0},
\end{aligned}
$$

тобто

$$
(P_2V^{-1}P_2)(P_2VP_2) = P_2.
$$

Аналогічно, з урахуванням того, що $P_2VP_1 = \mathrm{O}$, одержимо для кожного $u \in \mathrm{X}$

$$
\begin{aligned}
&P_2u - (P_2VP_2)(P_2V^{-1}P_2)u = \\
&= P_2^2u - (P_2VP_2)(P_2V^{-1}P_2)u = P_2VV^{-1}P_2u - (P_2VP_2)(P_2V^{-1}P_2)u = \\
&= P_2V\left(V^{-1}P_2u - P_2^2(V^{-1}P_2u)\right) = P_2V\left(V^{-1}P_2u - P_2(V^{-1}P_2u)\right) = \\
&= P_2V\left(\mathrm{I} - P_2)(V^{-1}P_2u)\right) = P_2VP_1(V^{-1}P_2u) = \bar{0}.
\end{aligned}
$$

тобто

$$
(P_2VP_2)(P_2V^{-1}P_2) = P_2.
$$

3) Зафіксуємо $u \in \mathrm{X}$. Оскільки $P_1(\mathrm{Y})u \in \mathrm{X}_1$, то

$$P_2VP_2u = P_2VP_2\mathrm{I}u = P_2VP_2\left(P_1(\mathrm{Y}) + P(\mathrm{Y})\right)u =$$
$$= P_2VP_2P_1(\mathrm{Y})u + P_2VP_2P(\mathrm{Y})u = P_2VP_2P(\mathrm{Y})u.$$

Враховуючи одержану рівність, матимемо, що

$$P_2VP(\mathrm{Y})u - P_2VP_2u = P_2V\left(P(\mathrm{Y})u - P_2(P(\mathrm{Y})u)\right) =$$
$$= P_2V(\mathrm{I} - P_2)(P(\mathrm{Y})u) = P_2VP_1(P(\mathrm{Y})u) = \bar{0}.$$

тобто

$$P_2VP_2 = P_2VP(Y).$$

4) Доведемо спочатку, що коли λ – власне число оператора V, $|\lambda| \geq 1$ і v – власний вектор V, що відповідає λ, то λ також є власним числом оператора P_2VP_2, якому відповідає власний вектор P_2v.

Справді, при цьому виконується наступний ланцюжок рівностей:

$$\lambda P_1v + \lambda P_2v = \lambda v = Vv = P_1Vv + P_2Vv =$$
$$= P_1Vv + P_2V(P_1v + P_2v) = P_1Vv + P_2VP_2v.$$

Тому, за означенням прямої суми підпросторів, матимемо, що

$$P_1Vv = \lambda P_1v, \tag{2.8}$$
$$P_2VP_2(P_2v) = \lambda P_2v. \tag{2.9}$$

Доведемо, що вектор $P_2v \neq \bar{0}$. Якщо, від супротивного, $P_2v = \bar{0}$, то $v = P_1v \in \mathrm{X}_1$, а отже, внаслідок (2.8), λ є власним числом оператора V_1. Це суперечить включенню $\sigma(V_1) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Таким чином, з урахуванням (2.9), λ – власне число оператора P_2VP_2, якому відповідає власний вектор P_2v.

Для закінчення доведення твердження 4) залишилось перевірити, що коли $|\lambda| \geq 1$, $w \neq \bar{0}$, а також рівняння $(V - \lambda \mathrm{I})v = w$ не має розв'язків у просторі X, то $\lambda \in \sigma(P_2VP_2)$. Для цього зауважимо, що $(V - \lambda \mathrm{I})v = w$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі рівності:

$$(P_1V - \lambda P_1)v = P_1w, \tag{2.10}$$

$$(P_2V - \lambda P_2)v = P_2w. \tag{2.11}$$

Оскільки $(P_2V - \lambda P_2)P_1 = \mathrm{O}$, то (2.11) записується у такому еквівалентному вигляді:

$$(P_2VP_2 - \lambda P_2)P_2v = P_2w. \tag{2.12}$$

Нехай, від супротивного, (2.12) має розв'язок. Врахувавши, що рівняння $(V - \lambda \mathrm{I})v = w$ не має розв'язку, робимо висновок, що тоді (2.10) теж не має розв'язку. Але, з іншого боку, $\lambda \notin \sigma(V_1)$, а отже, рівняння $(V - \lambda \mathrm{I}_1)u = P_1w$, в якому I_1 – одиничний оператор в X_1, має єдиний розв'язок u в просторі X_1. Оскільки $u = P_1u$, то $v = u$ є розв'язком рівняння (2.10). Суперечність.

Оскільки (2.12) не має розв'язків, то $\lambda \in \sigma(P_2VP_2)$.

Лему 2.3 доведено. □

Нехай $T \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, $\sigma(T) \cap S = \varnothing$. Через $\sigma_-(T)$ позначимо частину спектра оператора T, що лежить всередині одиничного кола S, а через $\sigma_+(T)$ – частину спектра оператора T, що лежить зовні цього кола (одна з цих частин може бути порожньою). Відомо (див., наприклад, [8, с. 32—34]), що простір X розкладається в пряму суму інваріантних відносно T підпросторів $\mathrm{X} = \mathrm{X}_-(T) \dot{+} \mathrm{X}_+(T)$ таким чином, що звуження T_- та T_+ оператора T на $\mathrm{X}_-(T)$ та $\mathrm{X}_+(T)$ мають відповідно спектри $\sigma_-(T)$ та $\sigma_+(T)$.

Нехай, до того ж, оператор T непепрервно оборотний. Розглянемо наступні множини.

$$Q_-(T) = \left\{ u \in \mathrm{X} \,\middle|\, \sup_{n\geq 1} \|T^n u\| < \infty \right\},$$
$$Q_-^1(T) = \left\{ u \in \mathrm{X} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \|T^n u\| < \infty \right\},$$
$$Q_+(T) = \left\{ u \in \mathrm{X} \,\middle|\, \sup_{n\geq 1} \|T^{-n} u\| < \infty \right\},$$
$$Q_+^1(T) = \left\{ u \in \mathrm{X} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \|T^{-n} u\| < \infty \right\}.$$

Має місце наступна лема.

Лема 2.4. *Якщо T – такий неперервно оборотний оператор з $\mathcal{L}(\mathrm{X})$, що $\sigma(T)\cap$ $\cap S = \varnothing$, то $\mathrm{X}_-(T) = Q_-(T) = Q_-^1(T)$, $\mathrm{X}_+(T) = Q_+(T) = Q_+^1(T)$.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли множини $\sigma(T_-)$ та $\sigma(T_+)$ непорожні.

Оскільки $\sigma(T_-) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, то для спектрального радіуса $r(T_-)$ оператора T_- виконується ланцюжок відношень

$$r(T_-) = \max_{z\in\sigma_-(T)} |z| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T_-^n\|} < 1.$$

Тоді, за радикальною ознакою Коші збіжності числового ряду, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|T_-^n\| < \infty$. Тому для кожного $u \in \mathrm{X}_-(T)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n u\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|T_-^n u\| < \infty,$$

а отже,

$$\mathrm{X}_-(T) \subset Q_-^1(T) \subset Q_-(T). \tag{2.13}$$

Нехай тепер $u \in \mathrm{X}_+(T) \cap Q_-(T)$. Тоді $\sup\limits_{n\geq 1} \|T^n u\| < \infty$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$ матимемо, що

$$\|u\| = \left\|T_+^{-n}T_+^n u\right\| \le \left\|T_+^{-n}\right\| \cdot \|T_+^n u\| = \left\|T_+^{-n}\right\| \cdot \|T^n u\| \le \left\|T_+^{-n}\right\| \cdot \sup_{n\ge 1} \|T^n u\|.$$

Оскільки
$$r(T_+^{-1}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left\|T_+^{-n}\right\|} < 1,$$

то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\|T_+^{-n}u\right\| < \infty$ і тому $\left\|T_+^{-n}\right\| \to 0$, $n \to \infty$. Отже, $u = \bar{0}$.

Таким чином, $Q_-(T) \subset \mathrm{X}_-(T)$. В результаті маємо, що $\mathrm{X}_-(T) = Q_-(T)$ і, внаслідок цієї рівності та включень (2.13), $\mathrm{X}_-(T) = Q_-^1(T)$.

Нехай тепер одна із множин $\sigma(T_-)$, $\sigma(T_+)$ може бути порожньою.

Якщо $\sigma_+(T) = \varnothing$, то $Q_-(T) = \mathrm{X} = Q_-^1(T)$, оскільки у цьому випадку матимемо, що $\mathrm{X}_+(T) = \{\bar{0}\}$, $\mathrm{X}_-(T) = \mathrm{X}$ і, відповідно, $T = T_-$.

Якщо $\sigma_-(T) = \varnothing$, то $\sigma(T) = \sigma_+(T)$. Тоді $\mathrm{X}_-(T) = \{\bar{0}\}$, $\mathrm{X}_+(T) = \mathrm{X}$ і $T_+ = T$. Крім того, існує оператор T^{-1}, причому $r(T^{-1}) < 1$. Тому, якщо $u \in Q_-(T)$, то $\sup\limits_{n\ge 1} \|T^n u\| < \infty$, а отже,

$$\|u\| = \left\|T^{-n}T^n u\right\| \le \left\|T^{-n}\right\| \cdot \|T^n u\| \le \left\|T^{-n}\right\| \cdot \sup_{n\ge 1} \|T^n u\| \to 0,\ n \to \infty.$$

З останнього випливає, що $u = \bar{0}$, тобто $Q_(T) = \{\bar{0}\}$, і враховуючи включення $Q_-^1(T) \subset Q_-(T)$, одержимо, що $Q_-(T) = Q_-^1(T) = \{\bar{0}\}$.

Рівності $\mathrm{X}_+(T) = Q_+(T) = Q_+^1(T)$ перевіряються аналогічним чином.

Лему 2.4 доведено. $\square$

Нехай $W \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, $\sigma(W) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$. Через $\widetilde{\sigma}_-(W)$ позначимо частину спектра оператора W, що лежить у лівій півплощині відносно уявної осі $i\,\mathbb{R}$, через $\widetilde{\sigma}_+(W)$ – частину спектра оператора W, що лежить у правій півплощині (одна з цих частин може бути порожньою). Тоді простір X розкладається у пряму суму $\mathrm{X} = \widetilde{\mathrm{X}}_-(W) \dot{+} \widetilde{\mathrm{X}}_+(W)$ таким чином, що, як і раніше, звуження $\widetilde{W}_-$ та $\widetilde{W}_+$ оператора W на $\widetilde{\mathrm{X}}_-(W)$ та $\widetilde{\mathrm{X}}_+(W)$ мають відповідно спектри $\widetilde{\sigma}_-(W)$ та $\widetilde{\sigma}_+(W)$.

Розглянемо множини

$$\widetilde{Q}_-(W) = \left\{ u \in \mathrm{X} \;\middle|\; \sup_{t \geq 0} \left\| e^{Wt} u \right\| < \infty \right\},$$
$$\widetilde{Q}_+(W) = \left\{ u \in \mathrm{X} \;\middle|\; \sup_{t \geq 0} \left\| e^{-Wt} u \right\| < \infty \right\}.$$

Лема 2.5. *Якщо* $W \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, $\sigma(W) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, *то* $\widetilde{\mathrm{X}}_-(W) = \widetilde{Q}_-(W)$, $\widetilde{\mathrm{X}}_+(W) = \widetilde{Q}_+(W)$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли множини $\widetilde{\sigma}_-(W)$ та $\widetilde{\sigma}_+(W)$ непорожні.

З нерівності (4.5) для функції Гріна, наведеної у [8], випливає, що існують такі сталі $M > 0$, $\delta > 0$, що для довільних $t \geq 0$ виконується обмеження

$$\left\| e^{\widetilde{W}_- t} \right\| \leq M e^{-\delta t}. \tag{2.14}$$

Враховуючи включення $\sigma(\widetilde{W}_-) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z < 0\}$, маємо, що для кожного $u \in \widetilde{\mathrm{X}}_-(W)$

$$\sup_{t \geq 0} \left\| e^{Wt} u \right\| = \sup_{t \geq 0} \left\| e^{\widetilde{W}_- t} u \right\| < \infty,$$

а отже, $\widetilde{\mathrm{X}}_-(W) \subset \widetilde{Q}_-(W)$.

Нехай $u \in \widetilde{\mathrm{X}}_+(W) \cap \widetilde{Q}_-(W)$. Тоді $\sup\limits_{t \geq 0} \left\| e^{Wt} u \right\| < \infty$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$ матимемо, що

$$\|u\| = \left\| e^{-n\widetilde{W}_+} e^{n\widetilde{W}_+} u \right\| \leq \left\| e^{-n\widetilde{W}_+} \right\| \cdot \left\| e^{n\widetilde{W}_+} u \right\| \leq \left\| e^{-n\widetilde{W}_+} \right\| \cdot \sup_{t \geq 0} \left\| e^{Wt} u \right\|.$$

Оскільки $\sigma\left(e^{-\widetilde{W}_+}\right) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$, то $\left\| e^{-n\widetilde{W}_+} \right\| \to 0$, $n \to \infty$. Отже, $u = \bar{0}$.

Таким чином, $\widetilde{\mathrm{X}}_-(W) = \widetilde{Q}_-(W)$.

Нехай тепер одна із множин $\widetilde{\sigma}_-(W)$, $\widetilde{\sigma}_+(W)$ може бути порожньою.

Якщо $\widetilde{\sigma}_+(W) = \varnothing$, то $W = \widetilde{W}_-$, а також $\mathrm{X} = \widetilde{\mathrm{X}}_-(W)$. Внаслідок нерівності (2.14) отримаємо, що $\widetilde{Q}_-(W) = \mathrm{X}$ і тому $\widetilde{Q}_-(W) = \widetilde{\mathrm{X}}_-(W)$.

Нехай тепер $\widetilde{\sigma}_{-}(W)=\varnothing$. Тоді $\widetilde{\mathrm{X}}_{-}(W)=\{\bar{0}\}$, а також виконується рівність $W=\widetilde{W}_{+}$. Тому для будь-якої функції $u\in\widetilde{Q}_{-}(W)$, внаслідок аналогічної до (2.14) нерівності для оператора $-\widetilde{W}_{+}$ матимемо, що

$$\|u\|=\left\|e^{-Wt}e^{Wt}u\right\|\le\left\|e^{-Wt}\right\|\cdot\left\|e^{Wt}u\right\|=\left\|e^{-\widetilde{W}_{+}t}\right\|\cdot\sup_{s\ge0}\left\|e^{Ws}u\right\|\to0,\ t\to\infty.$$

Тому $\|u\|=0$, а отже, $\widetilde{Q}_{-}(W)=\{\bar{0}\}=\widetilde{\mathrm{X}}_{-}(W)$.

З огляду на те, що $\sigma(-W)=\{-z\,|z\in\sigma(W)\}$, одержимо рівності

$$\widetilde{\mathrm{X}}_{+}(W)=\widetilde{\mathrm{X}}_{-}(-W)=\widetilde{Q}_{-}(-W)=\widetilde{Q}_{+}(W).$$

Лему 2.5 доведено. $\square$

2.3 Основні результати

Наведені у пункті 2.2 цієї дисертаційної роботи леми дають змогу довести наступні твердження.

Теорема 2.1. *Нехай* D, E *– неперервно оборотні оператори з* $\mathcal{L}(\mathrm{X})$. *Різницеве рівняння*

$$\begin{cases} u_{n+1} = \mathrm{D}u_n + v_n, \; n \geq 1, \\ u_{n+1} = \mathrm{E}u_n + v_n, \; n \leq 0, \end{cases} \tag{2.15}$$

задовольняє умову обмеженості тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

i_1) $\sigma(\mathrm{D}) \cap S = \varnothing$, $\sigma(\mathrm{E}) \cap S = \varnothing$;

i_2) $\mathrm{X} = \mathrm{X}_-(\mathrm{D}) \dot{+} \mathrm{X}_+(\mathrm{E})$.

Доведення. *Достатність* випливає із теореми 1, доведеної І. В. Гончар у роботі [9].

Необхідність. Покладемо

$$\ell_1(\mathbb{Z},\mathrm{X}) = \left\{ \bar{u} = \{u_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathrm{X} \;\middle|\; \|\bar{u}\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|u_n\| < \infty \right\}.$$

Тоді $\ell_1(\mathbb{Z},\mathrm{X})$ – банахів простір з покоординатним додаванням та множенням на комплексне число і нормою $\|\cdot\|_1$.

Внаслідок теореми 2 зі статті [9] умова обмеженості для різницевого рівняння (2.15) еквівалентна умові

j) *різницеве рівняння має для кожної послідовності* $\widetilde{w} = \{w_n, n \in \mathbb{Z}\} \in \in \ell_1(\mathbb{Z},\mathrm{X})$ *єдиний розв'язок* $\widetilde{u} = \{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ *у просторі* $\ell_1(\mathbb{Z},\mathrm{X})$.

Покладемо, як і в лемі 2.4,

$$Q^1_-(\mathrm{D}) = \left\{ u \in \mathrm{X} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathrm{D}^n u\| < \infty \right\},$$

$$Q^1_+(\mathrm{E}) = \left\{ u \in \mathrm{X} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \mathrm{E}^{-n} u \right\| < \infty \right\}.$$

Відзначимо, що $Q^1_-(\mathrm{D})$, $Q^1_+(\mathrm{E})$ – лінійні многовиди, інваріантні відносно операторів D і E відповідно.

I) Доведемо, що коли виконується умова *j)*, то $Q^1_-(\mathrm{D})$ – підпростір X і для звуження D_Q оператора D на $Q^1_-(\mathrm{D})$ справджується включення

$$\sigma\left(\mathrm{D}_Q\right) \subset \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}.$$

Згідно з теоремою 1 зі статті О. В. Вятчанінова [71] для цього досить перевірити, що для кожної сумовної послідовності $\{\beta_n, n \geq 0\} \subset Q^1_-(\mathrm{D})$ (тобто такої, що $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|\beta_n\| < \infty$), послідовність $\{\alpha_n, n \geq 0\}$, яка визначається за формулою

$$\begin{cases} \alpha_n = \mathrm{D}\alpha_{n-1} + \beta_n,\ n \geq 1, \\ \alpha_0 = \beta_0, \end{cases} \tag{2.16}$$

теж є сумовною.

Якщо $\beta_0 \in Q^1_-(\mathrm{D})$, $\beta_n = \bar{0}, n \geq 1$, то побудована згідно з (2.16) послідовність $\{\alpha_n, n \geq 0\}$ є сумовною за означенням множини $Q^1_-(\mathrm{D})$.

Зафіксуємо $m \in \mathbb{N}$ і таку послідовність $\{\beta_n, n \geq 0\} \subset Q^1_-(\mathrm{D})$, що $\beta_n = \bar{0}$ для кожного $n \geq m+1$. Згідно з (2.16) їй відповідає послідовність $\{\alpha_n, n \geq 0\}$, яка є сумою $m+1$ сумовних послідовностей

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
\{ & \beta_0 & , & \mathrm{D}\beta_0 & , & \mathrm{D}^2\beta_0 & , & \ldots & , & \mathrm{D}^{m-1}\beta_0 & , & \mathrm{D}^m\beta_0 & , & \mathrm{D}^{m+1}\beta_0 & , & \ldots \}, \\
\{ & \bar{0} & , & \beta_1 & , & \mathrm{D}\beta_1 & , & \ldots & , & \mathrm{D}^{m-2}\beta_1 & , & \mathrm{D}^{m-1}\beta_1 & , & \mathrm{D}^m\beta_1 & , & \ldots \}, \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\{ & \bar{0} & , & \bar{0} & , & \bar{0} & , & \ldots & , & \bar{0} & , & \beta_m & , & \mathrm{D}\beta_m & , & \ldots \},
\end{array}$$

а отже, теж сумовна.

Відзначимо, що при цьому для кожного k в межах $0 \leq k \leq m$ єдиний сумовний розв'язок рівняння (2.15), що відповідає послідовності

$$v_k = \beta_k; \quad v_n = \bar{0},\, n \neq k,$$

має вигляд

$$\bar{\alpha}(k) = \{\, \dots\, , \bar{0}\,,\, \underbrace{\beta_k}_{k+1}\,, \mathrm{D}\beta_k\,, \mathrm{D}^2\beta_k\,,\, \dots \},\tag{2.17}$$

а отже, єдиний сумовний розв'язок (2.15), що відповідає послідовності

$$v_k = \beta_k,\, 0 \leq k \leq m; \quad v_k = \bar{0},\, k \notin \{0, 1, 2, \dots, m\}$$

є сумою $m+1$ послідовностей (2.17).

Розглянемо тепер оператор $\Lambda \in \mathcal{L}(\ell_1(\mathbb{Z},\mathrm{X}))$, який визначається за таким правилом:

$$\forall \bar{u} = \{u_n, n \in \mathbb{Z}\} \in \ell_1(\mathbb{Z},\mathrm{X}): \ \Lambda\bar{u} = \{u_{n+1} - T_n u_n, n \in \mathbb{Z}\},$$

де $T_n = \mathrm{D}, n \geq 1;\ T_n = \mathrm{E}, n \leq 0.$

Із умови *j)* та теореми Банаха про обернений оператор випливає, що оператор Λ неперервно оборотний. Зафіксуємо сумовну послідовність

$$\{\beta_n, n \geq 0\} \subset Q^1_-(\mathrm{D}).$$

Покладемо

$$\bar{\beta}(m) = \{\, \dots\, , \bar{0}\,,\, \underbrace{\beta_0}_{0}\,, \beta_1\, \dots\, , \beta_m\,, \bar{0}\,,\, \dots \},\, m \geq 0.$$

Послідовність $\{\bar{\beta}(m), m \geq 0\}$ збігається в $\ell_1(\mathbb{Z},\mathrm{X})$ до елемента

$$\bar{\beta} = \{\, \dots\, , \bar{0}\,,\, \underbrace{\beta_0}_{0}\,, \beta_1\, \dots\, , \beta_m\,, \beta_{m+1}\,,\, \dots \},$$

а також $\Lambda^{-1}\bar{\beta}(m) = \sum_{k=0}^{m} \bar{\alpha}(k)$ для кожного $m \geq 0$ і $\Lambda^{-1}\bar{\beta}(m) \to \Lambda^{-1}\bar{\beta}, m \to \infty$, в просторі $\ell_1(\mathbb{Z},\mathrm{X})$. Оскільки, з урахуванням (2.17), елемент $\Lambda^{-1}\bar{\beta}$ має координати

$$
\begin{aligned}
&\left(\Lambda^{-1}\bar{\beta}\right)_n = \bar{0},\ n \leq 0;\\
&\left(\Lambda^{-1}\bar{\beta}\right)_n = \mathrm{D}^{n-1}\beta_0 + \mathrm{D}^{n-2}\beta_1 + \ldots + \beta_{n-1},\ n \geq 1,
\end{aligned}
$$

то відповідна до $\{\beta_n, n \geq 0\}$ послідовність (2.16) є сумовною.

II) Зауважимо, що умова *j)* виконується тоді і тільки тоді, коли для кожної послідовності $\bar{q} = \{q_n, n \in \mathbb{Z}\} \in \ell_1(\mathbb{Z},\mathrm{X})$ різницеве рівняння

$$
\begin{cases}
p_{n+1} = \mathrm{E}^{-1}p_n + q_n,\ n \geq 1,\\
p_{n+1} = \mathrm{D}^{-1}p_n + q_n,\ n \leq 0,
\end{cases} \tag{2.18}
$$

має єдиний розв'язок $\bar{p} = \{p_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $\ell_1(\mathbb{Z},\mathrm{X})$.

Справді, різницеве рівняння (2.15) записується у такому еквівалентному вигляді:

$$
\begin{cases}
u_n = \mathrm{D}^{-1}u_{n+1} - \mathrm{D}^{-1}v_n,\ n \geq 1,\\
u_n = \mathrm{E}^{-1}u_{n+1} - \mathrm{E}^{-1}v_n,\ n \leq 0.
\end{cases}
$$

Тому досить зробити заміну $p_n = u_{-n+2}, n \in \mathbb{Z}$, і врахувати, що внаслідок неперервної оборотності операторів D, E

$$
\ell_1(\mathbb{Z},\mathrm{X}) = \{(\ldots,\ -\mathrm{D}^{-1}v_2\,,\ \underbrace{-\mathrm{D}^{-1}v_1}_{0}\,,\ -\mathrm{E}^{-1}v_0\,,\ -\mathrm{E}^{-1}v_{-1}\,,\ \ldots)
\\
\qquad |\,\{v_n, n \in \mathbb{Z}\} \in \ell_1(\mathbb{Z},\mathrm{X})\,\}.
$$

III) Із тверджень, доведених у пунктах I та II, випливає, що $Q_+^1(\mathrm{E})$ також підпростір X, а також для звуження E_Q оператора E на $Q_+^1(\mathrm{E})$ виконується включення $\sigma(\mathrm{E}_Q) \subset \{z \in \mathbb{C}\,|\,|z| > 1\}$, оскільки, аналогічно до оператора D_Q, для оператора E_Q^{-1} виконується включення

$$\sigma(\mathrm{E}_Q^{-1}) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

IV) Перевіримо, що коли справджується умова *j)*, то $Q_-^1(\mathrm{D}) \cap Q_+^1(\mathrm{E}) = \{\bar{0}\}$.

Якщо, від супротивного, $u \neq \bar{0}$, $u \in Q_-^1(\mathrm{D}) \cap Q_+^1(\mathrm{E})$, то відповідне до (2.15) однорідне різницеве рівняння має ненульовий сумовний розв'язок

$$(\, \ldots \,, \mathrm{E}^{-2}u \,, \mathrm{E}^{-1}u \,, \underbrace{\, u \,}_{1} \,, \mathrm{D}u \,, \mathrm{D}^2 u \,, \, \ldots \,).$$

Це суперечить умові *j)*.

V) Доведемо, що коли виконується умова *j)*, то $\mathrm{X} = Q_-^1(\mathrm{D}) \dot{+} Q_+^1(\mathrm{E})$.

Зафіксуємо $v \in \mathrm{X}$. Нехай $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – єдиний сумовний розв'язок різницевого рівняння (2.15), що відповідає послідовності $v_0 = v;\ v_n = \bar{0}, n \neq 0$. Тоді $u_0 \in Q_+^1(\mathrm{E})$, бо $u_{-k} = \mathrm{E}^{-k} u_0, k \geq 1$. Також $u_{n+1} = \mathrm{D}^n u_1, n \geq 1$, а отже, $\mathrm{E}u_0 + v = u_1 \in Q_-^1(\mathrm{D})$. Тому

$$v = u_1 + (-\mathrm{E}u_0), \tag{2.19}$$

де $u_1 \in Q_-^1(\mathrm{D})$, $(-\mathrm{E}u_0) \in Q_+^1(\mathrm{E})$.

Єдиність зображення (2.19) випливає з твердження пункту IV.

VI) Нехай P_-, P_+ – проектори, що відповідають зображенню $\mathrm{X} = Q_-^1(\mathrm{D}) \dot{+}$ $\dot{+} Q_+^1(\mathrm{E})$. Доведемо, що коли виконується умова обмеженості для різницевого рівняння (2.15), то $\sigma(P_+ \mathrm{D} P_+) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

Зафіксуємо $v \in Q_+^1(\mathrm{E}), m \in \mathbb{N}$. Скориставшись ланцюжком рівностей

$$v = \mathrm{D}^m \mathrm{D}^{-m} v = \mathrm{D}^m \mathrm{I} \mathrm{D}^{-m} v = \mathrm{D}^m \left(P_- \mathrm{D}^{-m} v + P_+ \mathrm{D}^{-m} v \right) =$$
$$= \mathrm{D}^m P_- \mathrm{D}^{-m} v + \mathrm{D}^m P_+ \mathrm{D}^{-m} v,$$

безпосередньою перевіркою можна переконатися, що обмеженій послідовності

$$\bar{v}(m) = (\,\dots\,,\bar{0}\,,\underbrace{\;v\;}_{m}\,,\bar{0}\,,\,\dots\,)$$

відповідає єдиний обмежений розв'язок $\bar{u}(m)$ рівняння (2.15), координати якого задаються формулами

$$\begin{aligned} &u_n(m) = -\mathrm{E}^{n-1}P_+\mathrm{D}^{-m}v,\ n \le 1;\\ &u_n(m) = -\mathrm{D}^{n-1}P_+\mathrm{D}^{-m}v,\ 2 \le n \le m;\\ &u_n(m) = \mathrm{D}^{n-1}P_-\mathrm{D}^{-m}v,\ n \ge m+1. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Зокрема, з урахуванням рівності $v = P_+v$, робимо висновок, що

$$u_1(m) = -P_+\mathrm{D}^{-m}P_+v.$$

Покладемо тепер

$$\ell_\infty(\mathbb{Z},\mathrm{X}) = \left\{\bar{u} = \{u_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathrm{X} \;\middle|\; \|\bar{u}\|_\sim = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|u_n\| < \infty \right\}.$$

Зазначимо, що $\ell_\infty(\mathbb{Z},\mathrm{X})$ – теж банахів простір з покоординатно визначеними лінійними операціями і нормою $\|\cdot\|_\sim$.

Розглянемо оператор $\Phi \in \mathcal{L}(\ell_\infty(\mathbb{Z},\mathrm{X}))$, що визначається за правилом

$$\forall \bar{u} = \{u_n, n \in \mathbb{Z}\} \in \ell_\infty(\mathbb{Z},\mathrm{X}) : \Phi\bar{u} = \{u_n - T_n u_n, n \in \mathbb{Z}\},$$

де $T_n = \mathrm{D}$, $n \ge 1$; $T_n = \mathrm{E}$, $n \le 0$.

Внаслідок умови обмеженості для рівняння (2.15) і теореми Банаха про обернений оператор Φ є неперервно оборотним оператором, а також виконується рівність $\bar{u}(m) = \Phi^{-1}\bar{v}(m)$. Отже,

$$\|u_1(m)\| = \left\|P_+\mathrm{D}^{-m}P_+v\right\| \le \|\bar{u}(m)\|_\sim \le \left\|\Phi^{-1}\right\| \cdot \|\bar{v}(m)\|_\sim = \left\|\Phi^{-1}\right\| \cdot \|v\|. \tag{2.21}$$

Оскільки співвідношення (2.21) виконуються для усіх $m \in \mathbb{N}$ і $v \in Q^1_+(\mathrm{E})$, то, за означенням норми оператора, послідовність $\{\|P_+\mathrm{D}^{-m}P_+\|\,, m \geq 1\}$ норм операторів $P_+\mathrm{D}^{-m}P_+ : Q^1_+(\mathrm{E}) \to Q^1_+(\mathrm{E}), m \geq 1$, обмежена сталою $\left\|\Phi^{-1}\right\|$.

Із (2.20) і лінійності різницевого рівняння (2.15) випливає, що при фіксованих $m \in \mathbb{N}$, $v \in Q^1_+(\mathrm{E})$ обмеженій послідовності

$$\bar{w}(m) = (\,\ldots\,, \bar{0}\,, \underbrace{P_+\mathrm{D}^{-m+1}P_+v}_{1}\,, \,\ldots\,, P_+\mathrm{D}^{-1}P_+v\,, \underbrace{v}_{m}\,, \bar{0}\,, \,\ldots\,)$$

відповідає єдиний обмежений розв'язок $\bar{u}(m)$, координата $u_1(m)$ якого з урахуванням твердження 1) леми 2.3 зображується у вигляді

$$u_1(m) = -P_+\mathrm{D}^{-m}P_+v - P_+\mathrm{D}^{-m+1}P_+(P_+\mathrm{D}^{-1}P_+v) - \ldots -$$
$$- P_+\mathrm{D}^{-1}P_+(P_+\mathrm{D}^{-m+1}P_+v) = -mP_+\mathrm{D}^{-m}P_+v.$$

Звідси, аналогічно до (2.21), одержимо ланцюжок нерівностей

$$\left\|mP_+\mathrm{D}^{-m}P_+v\right\| \leq \left\|\Phi^{-1}\right\| \cdot \|\bar{w}(m)\|_{\sim} \leq \left\|\Phi^{-1}\right\| \cdot \sup_{m\geq 1}\left\|P_+\mathrm{D}^{-1}P_+\right\| \cdot \|v\|,$$

а отже, за означенням норми оператора, матимемо, що

$$\exists\, C > 0\ \forall\, m \geq 1 : m\left\|P_+\mathrm{D}^{-m}P_+\right\| \leq C.$$

Тому, внаслідок твердження 1) леми 2.3, для кожного $m \geq 1$ справджується наступна оцінка:

$$\big(r(P_+\mathrm{D}^{-1}P_+)\big)^m = r(P_+\mathrm{D}^{-m}P_+) \leq \frac{C}{m}.$$

Звідси випливає, що $r\left(P_+\mathrm{D}^{-1}P_+\right) < 1$, а отже, $\sigma\left(P_+\mathrm{D}^{-1}P_+\right) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$. Таким чином, з урахуванням теореми Данфорда про відображення спектра і твердження 2) леми 2.3, одержимо включення

$$\sigma\left(P_{+}\mathrm{D}P_{+}\right) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > 1\}.$$

VII) Із тверджень пунктів I, VI і твердження 4) леми 2.3 випливає, що

$$\sigma(\mathrm{D}) \cap S = \varnothing.$$

VIII) Відзначимо, що внаслідок леми 2.4 виконується рівність

$$Q^{1}_{-}(\mathrm{D}) = \mathrm{X}_{-}(\mathrm{D}).$$

IX) Застосувавши твердження пунктів VII, VIII до різницевого рівняння (2.18), робимо висновок, що $\sigma(\mathrm{E}) \cap S = \varnothing$, $Q^{1}_{+}(\mathrm{E}) = \mathrm{X}_{+}(\mathrm{E})$ і, зрештою,

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_{-}(\mathrm{D}) \dot{+} \mathrm{X}_{+}(\mathrm{E}).$$

Теорему 2.1 доведено. □

Зауваження 2.1. Згідно з твердженням теореми 2.1 умови i_1) та i_2) необхідні і достатні для того, щоб відповідне до (2.15) однорідне різницеве рівняння було експоненціально дихотомічним. В іншому вигляді такі умови отримані В. Ю. Слюсарчуком у статті [10].

Теорема 2.2. *Для того, щоб для диференціального рівняння* (2.1) *виконувалась умова обмеженості, необхідно і достатньо, щоб справджувались такі умови:*

a_1) $\sigma(\mathrm{A}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, $\sigma(\mathrm{B}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$;

a_2) $\mathrm{X} = \widetilde{\mathrm{X}}_{-}(\mathrm{A}) \dot{+} \widetilde{\mathrm{X}}_{+}(\mathrm{B})$.

Доведення. Внаслідок леми 2.1 і теореми 2.1 достатньо встановити, що умови a_1), a_2) виконуються тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

$b_1)$ $\sigma(e^{\mathrm{A}}) \cap S = \varnothing$, $\sigma(e^{\mathrm{B}}) \cap S = \varnothing$;

$b_2)$ $\mathrm{X} = \mathrm{X}_-(e^{\mathrm{A}}) \dot{+} \mathrm{X}_+(e^{\mathrm{B}})$.

Із леми 2.2 випливає, що умови $a_1)$ і $b_1)$ рівносильні. Доведемо, що коли $\sigma(\mathrm{A}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, то $\widetilde{\mathrm{X}}_-(\mathrm{A}) = \mathrm{X}_-(e^{\mathrm{A}})$. З урахуванням леми 2.5 для цього досить перевірити, що $\mathrm{X}_-(e^{\mathrm{A}}) = \widetilde{Q}_-(\mathrm{A})$.

Внаслідок леми 2.4

$$\mathrm{X}_-(e^{\mathrm{A}}) = \left\{ u \in \mathrm{X} \;\middle|\; \sup_{n \geq 1} \left\| e^{n\mathrm{A}} u \right\| < \infty \right\}.$$

Також

$$e^{(n+\tau)\mathrm{A}} = e^{n\mathrm{A}} \cdot e^{\tau\mathrm{A}}$$

для довільних $n \in \mathbb{Z}, \tau \in [n,n+1]$, а отже

$$\mathrm{X}_-(e^{\mathrm{A}}) = \left\{ u \in \mathrm{X} \;\middle|\; \sup_{t \geq 0} \left\| e^{t\mathrm{A}} u \right\| < \infty \right\} = \widetilde{Q}_-(\mathrm{A}).$$

Аналогічно перевіряється, що коли $\sigma(\mathrm{B}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, то $\mathrm{X}_+(e^{\mathrm{B}}) = \widetilde{\mathrm{X}}_+(\mathrm{B})$.

Теорему 2.2 доведено. $\square$

Зауваження 2.2. Теорема 2.2 стверджує, що умови $a_1)$, $a_2)$ необхідні і достатні для того, щоб відповідне до (2.1) однорідне диференціальне рівняння було експоненціально дихотомічним на $\mathbb{R}$.

2.4 Зображення обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку диференціального рівняння (2.1) та його поведінка на нескінченності

Будемо позначати через $P_-(\mathrm{A})$ та $P_+(\mathrm{A})$ проектори, що відповідають зображенню $\mathrm{X} = \widetilde{\mathrm{X}}_-(\mathrm{A})\dot{+}\widetilde{\mathrm{X}}_+(\mathrm{A})$; через $P_-(\mathrm{B})$ та $P_+(\mathrm{B})$ – проектори, що відповідають зображенню $\mathrm{X} = \widetilde{\mathrm{X}}_-(\mathrm{B})\dot{+}\widetilde{\mathrm{X}}_+(\mathrm{B})$; а через P_- та P_+ – проектори, що відповідають зображенню $\mathrm{X} = \widetilde{\mathrm{X}}_-(\mathrm{A})\dot{+}\widetilde{\mathrm{X}}_+(\mathrm{B})$.

Відомо (див. [8, с. 119 – 120]), що справджується наступна теорема.

Теорема 2.3. *Диференціальне рівняння*

$$u'(t) = \mathrm{A}u(t) + v(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.22}$$

має для кожної функції $v \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ єдиний обмежений розв'язок u тоді і тільки тоді, коли $\sigma(\mathrm{A}) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$. Цей розв'язок зображується у вигляді

$$u(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_{\mathrm{A}}(t-s)v(s)ds,\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.23}$$

де

$$G_{\mathrm{A}}(t) = \begin{cases} -e^{\mathrm{A}t}P_+(\mathrm{A}),\ t < 0, \\ e^{\mathrm{A}t}P_-(\mathrm{A}),\ t \geq 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

Наступна теорема містить явний вигляд єдиного обмеженого розв'язку диференціального рівняння (2.1), відповідного до функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$.

Теорема 2.4. *Припустимо, що виконуються умови a_1), a_2) теореми 2.2. Тоді справджуються такі твердження:*

1) *відповідний до функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ єдиний обмежений розв'язок диференціального рівняння (2.1) має наступний вигляд.*

Якщо $t \geq 0$, *то*

$$
\begin{aligned}
x(t) = \int\limits_{0}^{t} e^{\mathrm{A}(t-s)} P_{-}(\mathrm{A}) y(s) ds - \int\limits_{t}^{+\infty} e^{\mathrm{A}(t-s)} P_{+}(\mathrm{A}) y(s) ds + \\
+ e^{\mathrm{A}t} P_{-} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\mathrm{B}s} P_{-}(\mathrm{B}) y(s) ds + e^{\mathrm{A}t} P_{-} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\mathrm{A}s} P_{+}(\mathrm{A}) y(s) ds.
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Якщо $t < 0$, *то*

$$
\begin{aligned}
x(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\mathrm{B}(t-s)} P_{-}(\mathrm{B}) y(s) ds - \int\limits_{t}^{0} e^{\mathrm{B}(t-s)} P_{+}(\mathrm{B}) y(s) ds - \\
- e^{\mathrm{B}t} P_{+} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\mathrm{A}s} P_{+}(\mathrm{A}) y(s) ds - e^{\mathrm{B}t} P_{+} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\mathrm{B}s} P_{-}(\mathrm{B}) y(s) ds.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

2) *існує така стала* $K > 0$, *що для кожної функції* $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ *для відповідного до* y *єдиного обмеженого розв'язку* x *рівняння* (2.1) *справджується наступна оцінка:*

$$
\|x\|_{\infty} \leq K \|y\|_{\infty}. \tag{2.27}
$$

Доведення. 1) Перевіримо безпосереднім диференціюванням, що для будь-якого $t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ існує $x'(t)$, а також функція x неперервна у точці $t_0 = 0$.

Якщо $t > 0$, то із зображення (2.25) випливає, що

$$
\begin{aligned}
x'(t) = \mathrm{A} \int\limits_{0}^{t} e^{\mathrm{A}(t-s)} P_{-}(\mathrm{A}) y(s) ds + P_{-}(\mathrm{A}) y(t) - \mathrm{A} \int\limits_{t}^{+\infty} e^{\mathrm{A}(t-s)} P_{+}(\mathrm{A}) y(s) ds + \\
+ P_{+}(\mathrm{A}) y(t) + \mathrm{A} e^{\mathrm{A}t} P_{-} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\mathrm{B}s} P_{-}(\mathrm{B}) y(s) ds + \mathrm{A} e^{\mathrm{A}t} P_{-} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\mathrm{A}s} P_{+}(\mathrm{A}) y(s) ds = \\
= \mathrm{A} x(t) + \left(P_{-}(\mathrm{A}) + P_{+}(\mathrm{A})\right) y(t) = \mathrm{A} x(t) + y(t).
\end{aligned}
$$

Аналогічно, при $t<0$ із зображення (2.26) отримаємо, що

$$x'(t) = \mathrm{B}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\mathrm{B}(t-s)}P_-(\mathrm{B})y(s)ds + P_-(\mathrm{B})y(t) - \mathrm{B}\int\limits_{t}^{0} e^{\mathrm{B}(t-s)}P_+(\mathrm{B})y(s)ds +$$

$$+ P_+(\mathrm{B})y(t) - \mathrm{B}e^{\mathrm{B}t}P_+\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\mathrm{A}s}P_+(\mathrm{A})y(s)ds - \mathrm{B}e^{\mathrm{B}t}P_+\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\mathrm{B}s}P_-(\mathrm{B})y(s)ds =$$

$$= \mathrm{B}x(t) + \left(P_-(\mathrm{B}) + P_+(\mathrm{B})\right)y(t) = \mathrm{B}x(t) + y(t).$$

Також, згідно з формулою (2.25), матимемо ланцюжок рівностей

$$x(0) = -\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\mathrm{A}s}P_+(\mathrm{A})y(s)ds +$$

$$+ P_-\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\mathrm{B}s}P_-(\mathrm{B})y(s)ds + P_-\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\mathrm{A}s}P_+(\mathrm{A})y(s)ds =$$

$$= -(\mathrm{I} - P_-)\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\mathrm{A}s}P_+(\mathrm{A})y(s)ds + P_-\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\mathrm{B}s}P_-(\mathrm{B})y(s)ds =$$

$$= -P_+\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\mathrm{A}s}P_+(\mathrm{A})y(s)ds + P_-\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\mathrm{B}s}P_-(\mathrm{B})y(s)ds.$$

З формули (2.26) випливає, що

$$\lim_{t\to 0-} x(t) = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\mathrm{B}s}P_-(\mathrm{B})y(s)ds -$$

$$- P_+\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\mathrm{A}s}P_+(\mathrm{A})y(s)ds - P_+\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\mathrm{B}s}P_-(\mathrm{B})y(s)ds =$$

$$= -P_+\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\mathrm{A}s}P_+(\mathrm{A})y(s)ds + P_-\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\mathrm{B}s}P_-(\mathrm{B})y(s)ds = x(0).$$

Отже, функція x неперервна у точці $t_0 = 0$.

2) Згідно з оцінкою (4.5) із [8, с. 119] існують такі додатні сталі M_{A}, M_{B}, γ_{A}, γ_{B}, що для кожного $t \in \mathbb{R}$

$$\|G_{\text{A}}(t)\| \le M_{\text{A}} e^{-\gamma_{\text{A}}|t|}, \quad \|G_{\text{B}}(t)\| \le M_{\text{B}} e^{-\gamma_{\text{B}}|t|}. \tag{2.28}$$

Тому, скориставшись зображенням (2.25) та операторними рівностями

$$P_- = P_-(\text{A})P_-, \quad P_+ = P_+(\text{B})P_+,$$

робимо висновок, що при $t \ge 0$

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \le & M_{\text{A}}\|y\|_\infty \int\limits_0^{+\infty} e^{-\gamma_{\text{A}}|t-s|}ds + \\ & + M_{\text{A}}\|y\|_\infty e^{-\gamma_{\text{A}}t}\|P_-\| \left(M_{\text{B}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\gamma_{\text{B}}|s|}ds + M_{\text{A}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\gamma_{\text{A}}|s|}ds \right) \le K_+\|y\|_\infty,\end{aligned}$$

де $K_+ = M_{\text{A}} \left(\dfrac{2}{\gamma_{\text{A}}} + \|P_-\| \left(\dfrac{M_{\text{B}}}{\gamma_{\text{B}}} + \dfrac{M_{\text{A}}}{\gamma_{\text{A}}} \right) \right)$.

Аналогічно із (2.26) випливає, що при $t < 0$

$$\|x(t)\| \le K_-\|y\|_\infty,$$

де $K_- = M_{\text{B}} \left(\dfrac{2}{\gamma_{\text{B}}} + \|P_+\| \left(\dfrac{M_{\text{B}}}{\gamma_{\text{B}}} + \dfrac{M_{\text{A}}}{\gamma_{\text{A}}} \right) \right)$.

Таким чином функція $x \in C_b(\mathbb{R}, \text{X})$ і нерівність (2.27) виконується зі сталою $K = \max\{K_+, K_-\}$.

Теорему 2.4 доведено. $\square$

Наступна теорема показує, наскільки близькі обмежені розв'язки диференціальних рівнянь (2.1) і (2.22) при $t \to \infty$.

Теорема 2.5. *Якщо виконуються умови* a_1), a_2) *теореми* 2.2, *то знайдуться такі залежні тільки від операторів* A, B *сталі* $C > 0$, $\gamma > 0$, *що для довільної функції* $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ *для відповідних до неї обмежених розв'язків* $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *рівняння* (2.1) *і* $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *рівняння* (2.22) *справджується наступна оцінка:*

$$\forall t \geq 0 \, : \, \|x(t) - u(t)\| \leq Ce^{-\gamma t}\|y\|_\infty. \tag{2.29}$$

Доведення. Зафіксуємо функцію $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$.

Внаслідок (2.23) і (2.24) для довільних $t \in \mathbb{R}$

$$u(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\mathrm{A}(t-s)}P_-(\mathrm{A})y(s)ds - \int\limits_{t}^{+\infty} e^{\mathrm{A}(t-s)}P_+(\mathrm{A})y(s)ds.$$

Тому, з урахуванням зображення (2.25), рівності $P_- = P_-(\mathrm{A})P_-$ і оцінок (2.28), для кожного $t \geq 0$

$$\|x(t) - u(t)\| = \left\| e^{\mathrm{A}t}P_-(\mathrm{A}) \left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\mathrm{A}s}P_-(\mathrm{A})y(s)ds + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \, P_- \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\mathrm{B}s}P_-(\mathrm{B})y(s)ds + \, P_- \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\mathrm{A}s}P_+(\mathrm{A})y(s)ds \right) \right\| \leq$$

$$\leq \|y\|_\infty M_\mathrm{A} e^{-\gamma_\mathrm{A} t} \left(M_\mathrm{B}\|P_-\| \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\gamma_\mathrm{B} t}dt + (1 + \|P_-\|)M_\mathrm{A} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\gamma_\mathrm{A} t}dt \right) =$$

$$= Ce^{-\gamma t}\|y\|_\infty,$$

де $\gamma = \gamma_\mathrm{A}, \quad C = M_\mathrm{A} \left(\dfrac{M_\mathrm{B}}{\gamma_\mathrm{B}}\|P_-\| + (1 + \|P_-\|)\, \dfrac{M_\mathrm{A}}{\gamma_\mathrm{A}} \right).$

Теорему 2.5 доведено. □

Зауваження 2.3. Відзначимо, що коли функція y додатково періодична, то відповідний до неї обмежений розв'язок рівняння (2.22) теж є періодичною функцією, і тому обмежений розв'язок рівняння (2.1), згідно з (2.29), близький до періодичного розв'язку рівняння (2.22) при $t \to \infty$, незважаючи на стрибок операторного коефіцієнта у рівнянні (2.1).

2.5 Приклади застосування теорем

Приклад 2.1. Нехай банахів простір X додатково m-вимірний. Тоді диференціальне рівняння (2.1) задовольняє умову обмеженості тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:

b_1) $\sigma(\mathrm{A}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, $\sigma(\mathrm{B}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$;

b_2) якщо матриця оператора A має жорданову нормальну форму в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_m$ і $e_1, e_2, \ldots, e_p$ – це набір усіх векторів базису, які відповідають жордановим клітинам із власними числами, що лежать у лівій півплощині комплексної площини, а матриця оператора B має жорданову нормальну форму в базисі $w_1, w_2, \ldots, w_m$, причому $w_1, w_2, \ldots, w_q$ – це набір усіх векторів базису, які відповідають жордановим клітинам із власними числами, що лежать у правій півплощині комплексної площини, то вектори $e_1, e_2, \ldots, e_p, w_1, w_2, \ldots, w_q$ утворюють базис у просторі X.

Справді, умова b_1) збігається з умовою a_1) теореми 2.2, а умова b_2) в m-вимірному просторі X еквівалентна умові a_2), оскільки у цьому випадку підпростори $\widetilde{\mathrm{X}}_-(\mathrm{A})$ та $\widetilde{\mathrm{X}}_+(\mathrm{B})$ збігаються відповідно із лінійними оболонками векторів $e_1, e_2, \ldots, e_p$ та $w_1, w_2, \ldots, w_q$.

Приклад 2.2. Нехай банахів простір X додатково нескінченновимірний. Якщо хоча б один з операторів A, B – компактний, то диференціальне рівняння (2.1) не задовольняє умову обмеженості.

Це випливає з того, що коли, наприклад, A – компактний оператор, то, за теоремою про спектр компактного оператора в нескінченновимірному просторі, $\sigma(\mathrm{A}) \ni 0$, а отже, умова a_1) теореми 2.2 не виконується.

Приклад 2.3. Нехай $\mathrm{X} = \ell_2$, A та B – діагональні оператори, тобто існують такі обмежені послідовності комплексних чисел $\{\alpha_k, k \geq 1\}$ та $\{\beta_k, k \geq 1\}$, що для кожного $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2$

$$\mathrm{A}x = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n \ldots),$$
$$\mathrm{B}x = (\beta_1 x_1, \beta_2 x_2, \ldots, \beta_n x_n \ldots).$$

Тоді диференціальне рівняння (2.1) задовольняє умову обмеженості тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

$c_1)$ $\inf\limits_{n\geq 1}|\mathrm{Re}\,\alpha_n| > 0$, $\inf\limits_{n\geq 1}|\mathrm{Re}\,\beta_n| > 0$;

$c_2)$ $\forall n \geq 1 : \mathrm{Re}\,\alpha_n \cdot \mathrm{Re}\,\beta_n > 0$.

Справді, відомо, що $\sigma(\mathrm{A}) = \overline{\{\alpha_k, k \geq 1\}}$, де $\overline{G}$ позначає замикання множини $G \subset \mathbb{C}$. Доведемо, що $\sigma(\mathrm{A}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$ у тому і тільки у тому випадку, коли $\inf\limits_{n\geq 1}|\mathrm{Re}\,\alpha_n| > 0$.

Якщо $\inf\limits_{n\geq 1}|\mathrm{Re}\,\alpha_n| = \mu > 0$, то $\{\alpha_k, k \geq 1\} \subset K := \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}\,z| \geq \mu\}$, причому множина K – замкнена, а отже $\sigma(\mathrm{A}) \subset K$, і тому $\sigma(\mathrm{A}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$.

Нехай $\inf\limits_{n\geq 1}|\mathrm{Re}\,\alpha_n| = 0$. Тоді існує така підпослідовність $\{\alpha_{k(j)}, j \geq 1\}$ послідовності $\{\alpha_k, k \geq 1\}$, що $\mathrm{Re}\,\alpha_{k(j)} \to 0$, $j \to \infty$. Ця підпослідовність – обмежена, а отже, вона містить збіжну до деякого елемента $\alpha \in \mathbb{C}$ підпослідовність $\{\alpha_{k(j(m))}, m \geq 1\}$. Але тоді $\alpha \in \sigma(\mathrm{A})$, $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$. Отже, у цьому випадку $\sigma(\mathrm{A}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$.

Таким чином, умова $c_1)$ еквівалентна умові $a_1)$ теореми 2.2.

Тепер зазначимо, що при виконанні умови $c_1)$

$$\mathrm{X}_-(\mathrm{A}) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2 \mid$$
$$x_j = 0 \text{ для кожного такого } j \geq 1, \text{ що } \mathrm{Re}\,\alpha_j > 0\},$$
$$\mathrm{X}_+(\mathrm{B}) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2 \mid$$
$$x_j = 0 \text{ для кожного такого } j \geq 1, \text{ що } \mathrm{Re}\,\beta_j < 0\}.$$

Тому $\ell_2 = \mathrm{X}_-(\mathrm{A}) \dot{+} \mathrm{X}_+(\mathrm{B})$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $n \geq 1$ числа $\mathrm{Re}\,\alpha_n$ та $\mathrm{Re}\,\beta_n$ мають однакові знаки, тобто $\mathrm{Re}\,\alpha_n \cdot \mathrm{Re}\,\beta_n > 0$, оскільки у цьому і тільки у цьому випадку всі елементи тільки одного з підпросторів $\mathrm{X}_{-}(\mathrm{A})$, $\mathrm{X}_{+}(\mathrm{B})$ мають нульову n-ту координату для кожного $n \geq 1$. Отже, умова $c_2)$ еквівалентна умові $a_2)$ теореми 2.2.

Приклад 2.4. Доведемо, що зліченна система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x_n'(t) = ax_n(t) + bx_{n-1}(t) + y_n(t),\ t \geq 0, \\ x_n'(t) = cx_n(t) + dx_{n-1}(t) + y_n(t),\ t < 0, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.30}$$

у якій a, b, c, d – фіксовані комплексні числа, має для кожної фіксованої послідовності функцій $\{y_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}\}$, такої, що функція

$$y(t) = (\ldots, y_{-1}(t), y_0(t), y_1(t), \ldots),\ t \in \mathbb{R},$$

належить $C_b(\mathbb{R}, \ell_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C}))$, єдиний розв'язок

$$x(t) = (\ldots, x_{-1}(t), x_0(t), x_1(t), \ldots),\ t \in \mathbb{R},$$

такий, що $x \in C_b(\mathbb{R}, \ell_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C}))$, а також для кожного $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ існує $x'(t)$ (за нормою в $\ell_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$) і виконуються рівності (2.30), тоді і тільки тоді, коли множини $\{a + bz \,|\, z \in S\}$ та $\{c + dz \,|\, z \in S\}$ не перетинаються з $i\,\mathbb{R}$ і обидві лежать у правій або лівій півплощині комплексної площини $\mathbb{C}$. Тут через S позначаємо одиничне коло $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.

Для доведення цього факту зазначимо, що у просторі $\ell_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ система (2.30) записується у такому еквівалентному вигляді:

$$\begin{cases} x_n'(t) = (a\mathrm{I} + bT)x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x_n'(t) = (c\mathrm{I} + dT)x(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases} \tag{2.31}$$

де I – одиничний оператор у $\ell_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})$, а оператор $T \in \mathcal{L}(\ell_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C}))$ визначається за правилом

$$T(\dots, x_{-1}, \underbrace{x_0}_{0}, x_1, \dots) = (\dots, x_{-2}, \underbrace{x_{-1}}_{0}, x_0, \dots),$$
$$x = (\dots, x_{-1}, \underbrace{x_0}_{0}, x_1, \dots) \in \ell_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C}).$$

Доведемо, що $\sigma(T) = S$. Зауважимо, що $\lambda = 0 \in \rho(T)$, бо оператор T має неперервний обернений оператор

$$T^{-1}(\dots, x_{-1}, \underbrace{x_0}_{0}, x_1, \dots) = (\dots, x_0, \underbrace{x_1}_{0}, x_2, \dots),$$
$$x = (\dots, x_{-1}, \underbrace{x_0}_{0}, x_1, \dots) \in \ell_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C}).$$

Зафіксуємо тепер комплексне число $\lambda \neq 0$. З теореми Банаха про обернений оператор випливає, що $\lambda \in \rho(T)$ тоді і тільки тоді, коли рівняння

$$(\lambda \mathrm{I} - T)x = \lambda y$$

має для кожного $y \in \ell_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ єдиний розв'язок x у просторі $\ell_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})$, тобто зліченна система лінійних рівнянь

$$\lambda x_n - x_{n-1} = \lambda y_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

або, що одне й те ж саме,

$$x_{n+1} = \frac{1}{\lambda} x_n + y_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.32}$$

задовольняє умову обмеженості в $\mathbb{C}$.

Скориставшись теоремою 1 із [55, с. 9], робимо висновок, що рівняння (2.32) задовольняє умову обмеженості в тому і тільки тому випадку, коли $\dfrac{1}{\lambda} \notin S$. Таким чином, $\sigma(T) = S$.

Для скорочення запису покладемо

$$\mathcal{A} = a\mathrm{I} + bT, \quad \mathcal{B} = c\mathrm{I} + dT.$$

Оскільки $\sigma(T) = S$, то $\sigma(\mathcal{A}) = \{a + bz \mid z \in S\}$, $\sigma(\mathcal{B}) = \{c + dz \mid z \in S\}$.

Тепер зауважимо, що при $b = 0$ $\sigma(\mathcal{A}) = \{a\}$, а при $b \neq 0$ $\sigma(\mathcal{A})$ збігається з колом $\{u \in \mathbb{C} \mid |u - a| = |b|\}$. Тому у випадку, коли $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, обов'язково $\sigma(\mathcal{A})$ лежить або в лівій півплощині $\mathbb{C}$, і тоді для $\mathrm{X} = \ell_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ матимемо, що $\widetilde{\mathrm{X}}_-(\mathcal{A}) = \mathrm{X}$, $\widetilde{\mathrm{X}}_+(\mathcal{A}) = \{\bar{0}\}$, або у правій півплощині $\mathbb{C}$, і тоді $\widetilde{\mathrm{X}}_-(\mathcal{A}) = \{\bar{0}\}$, $\widetilde{\mathrm{X}}_+(\mathcal{A}) = \mathrm{X}$. Для $\sigma(\mathcal{B})$ виконуються аналогічні рівності, а отже твердження прикладу 2.4 правильне.

2.6 Висновки до розділу 2

Розділ 2 цієї дисертаційної роботи присвячений дослідженню необхідних і достатніх умов на фіксовані лінійні обмежені оператори A та B, при виконанні яких диференціальне рівняння (2.1) з кусково-сталими операторними коефіцієнтами має єдиний обмежений розв'язок x у банаховому просторі усіх неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $f : \mathbb{R} \to \mathrm{X}$ з нормою $\|f\|_{\infty} := \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$ для довільної функції y із цього простору.

Крім того, даний розділ містить зображення обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку диференціального рівняння (2.1) з кусково-сталими операторними коефіцієнтами, а також оцінку близькості розв'язків цього рівняння та диференціального рівняння (2.22) зі сталим операторним коефіцієнтом, що відповідають одній і тій самій функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$, при $t \to +\infty$.

Основними результатами розділу є теореми 2.1 та 2.2, які були опубліковані у статті [1], а також теореми 2.4 та 2.5, опубліковані у статті [3]. Деякі результати цього розділу було висвітлено у тезах міжнародних конференцій «Шевченківська весна» [4] і [5].

Розділ 3. ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З КУСКОВО-СТАЛИМИ ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

3.1 Постановка задачі

У цій частині дисертаційної роботи, використовуючи позначення, введені у попередньому розділі, будемо досліджувати питання про існування єдиного обмеженого розв'язку (у сенсі означення 2.1) нелінійного аналога диференціального рівняння (2.1) з кусково-сталими операторними коефіцієнтами, що має вигляд

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{A}x(t) + f(t, x(t), y(t)),\ t \geq 0, \\ x'(t) = \mathrm{B}x(t) + f(t, x(t), y(t)),\ t < 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

в якому $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ – задана функція, A та B – фіксовані оператори з $\mathcal{L}(\mathrm{X})$, а $f : \mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ – деяка функція.

Далі використовуватиметься наступне означення неперервності функції f.

Означення 3.1. Функцію f будемо називати неперервною в точці $(t_0,u_0,v_0) \in$ $\in \mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (t, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X},\ |t - t_0| + \|u - u_0\| + \|v - v_0\| < \delta\ :$$
$$\|f(t, u, v) - f(t_0, u_0, v_0)\| < \varepsilon.$$

Як звичайно, функцію f будемо називати неперервною на множині $\mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}$, якщо вона неперервна у кожній точці цієї множини.

Наступна теорема є основним результатом цього розділу.

Теорема 3.1. *Припустимо, що виконуються умови a_1), a_2) теореми 2.2 і функція $f : \mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ задовольняє такі умови:*

$j_1)$ *f неперервна на множині $\mathbb{R}\times\mathrm{X}\times\mathrm{X}$, тобто для будь-яких $(t_0, u_0, v_0) \in \in \mathbb{R}\times\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ виконується означення 3.1;*

$j_2)$ $\exists C_1 > 0\ \forall u_1, u_2, v \in \mathrm{X}\ \forall t \in \mathbb{R} : \|f(t, u_1, v) - f(t, u_2, v)\| \le C_1\|u_1 - u_2\|$;

$j_3)$ $\exists C_2 > 0\ \forall t \in \mathbb{R}\ \forall v \in \mathrm{X} : \|f(t, \bar{0}, v)\| \le C_2(1 + \|v\|)$;

$j_4)$ *$KC_1 < 1$, де K – стала із оцінки (2.27).*

Тоді нелінійне диференціальне рівняння (3.1) має для кожної функції $y \in \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ єдиний обмежений розв'язок x.

Як наслідки теореми 3.1, доведемо такі твердження.

Теорема 3.2. *Припустимо, що виконуються умови $a_1)$, $a_2)$ теореми 2.2 і функція $g : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $L > 0$ на X, тобто*

$$\forall u, v \in \mathrm{X} : \|g(u) - g(v)\| \le L\|u - v\|, \tag{3.2}$$

а також виконується нерівність $KL < 1$.

Тоді диференціальне рівняння

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{A}x(t) + g(x(t)) + y(t),\ t \ge 0, \\ x'(t) = \mathrm{B}x(t) + g(x(t)) + y(t),\ t < 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

має для кожної функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ єдиний обмежений розв'язок x.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються умови $a_1)$, $a_2)$ теореми 2.2 і $T : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathrm{X})$ – така неперервна на $\mathbb{R}$ операторнозначна функція, що $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|T(t)\| = C_3 < +\infty$. Якщо $KC_3 < 1$, то диференціальне рівняння*

$$\begin{cases} x'(t) = (\mathrm{A} + T(t))x(t) + y(t),\ t \ge 0, \\ x'(t) = (\mathrm{B} + T(t))x(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

має для кожної функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ єдиний обмежений розв'язок x.

Зауваження 3.1. Відзначимо, що умови теореми 3.3 забезпечують виконання умови експоненціальної дихотомії для відповідного до (3.4) однорідного диференціального рівняння зі змінними операторними коефіцієнтами.

3.2 Доведення теорем 3.1 – 3.3

Доведення теореми 3.1. Покладемо $y_1(t) = f(t, \bar{0}, y(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Внаслідок умови $j_1)$ функція y_1 неперервна на $\mathbb{R}$. Також, скориставшись умовою $j_3)$ отримаємо для кожного $t \in \mathbb{R}$ обмеження

$$\|y_1(t)\| \leq C_2(1 + \|y_1\|_\infty).$$

Таким чином, $y_1 \in C_b(\mathbb{R}, \mathrm{X})$. За теоремою 2.2 рівняння (2.1) має єдиний обмежений розв'язок x_1, відповідний до функції y_1. Далі, при $n \geq 2$, функцію x_n визначимо, використовуючи побудовану раніше функцію x_{n-1}, як єдиний обмежений розв'язок рівняння (2.1), відповідний до функції $y_n(t) = f(t, x_{n-1}(t), y(t))$, $t \in$ $\in \mathbb{R}$. Відзначимо, що $y_n \in C_b(\mathbb{R}, \mathrm{X})$, оскільки, з урахуванням умов $j_1)$ та $j_2)$, функція y_n є неперервною на $\mathbb{R}$ і для кожного $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|y_n(t)\| \leq \|y_{n-1}(t)\| + \|y_n(t) - y_{n-1}(t)\| \leq \\ \leq \|y_{n-1}\|_\infty + \|f(t, x_{n-1}(t), y(t)) - f(t, x_{n-2}(t), y(t))\| \leq \\ \leq \|y_{n-1}\|_\infty + C_1\|x_{n-1} - x_{n-2}\|_\infty.\end{aligned}$$

Тут $x_0(t) = \bar{0}$, $t \in \mathbb{R}$.

Внаслідок оцінки (2.27) для кожного $n \geq 2$

$$\begin{aligned}\|x_n - x_{n-1}\|_\infty \leq K \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t, x_{n-1}(t), y(t)) - f(t, x_{n-2}(t), y(t))\| \leq \\ \leq KC_1\|x_{n-1} - x_{n-2}\|_\infty \leq (KC_1)^2\|x_{n-2} - x_{n-3}\|_\infty \leq \\ \leq \ldots \leq (KC_1)^{n-1}\|x_1 - x_0\|_\infty,\end{aligned}$$

а отже, з урахуванням умови $j_4)$, послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ є фундаментальною в банаховому просторі $C_b(\mathbb{R}, \mathrm{X})$.

Тому існує така функція $x \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$, що

$$\|x_n - x\|_\infty \to 0,\ n \to \infty.$$

Доведемо, що x – обмежений розв'язок диференціального рівняння (3.1). Скориставшись явним виглядом розв'язку відповідної задачі Коші, робимо висновок, що для довільного $n \geq 2$

$$x_n(t) = e^{\mathrm{A}t}x_n(0) + \int\limits_0^t e^{\mathrm{A}(t-s)}f(s, x_{n-1}(s), y(s))ds,\ t \geq 0.$$

Звідси, перейшовши до границі при $n \to \infty$, отримаємо

$$x(t) = e^{\mathrm{A}t}x(0) + \int\limits_0^t e^{\mathrm{A}(t-s)}f(s, x(s), y(s))ds,\ t \geq 0.$$

Тому для кожного $t > 0$ існує

$$x'(t) = \mathrm{A}x(t) + f(t, x(t), y(t)).$$

Аналогічно перевіряється, що при $t < 0$ теж існує $x'(t)$ і виконується рівність (3.1).

Доведемо єдиність цього розв'язку. Нехай $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – теж відповідний до y обмежений розв'язок рівняння (3.1). Тоді x і u – обмежені розв'язки лінійного диференціального рівняння (2.1), відповідні до функцій $y_x(t) = f(t, x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$, та $y_u(t) = f(t, u(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Тому, внаслідок оцінки (2.27) і умови j_2),

$$\|x - u\|_\infty \leq K\|y_x - y_u\|_\infty \leq KC_1\|x - u\|_\infty.$$

Оскільки $KC_1 < 1$, то $x = u$.

Теорему 3.1 доведено. $\square$

Доведення теореми 3.2. Відзначимо, що диференціальне рівняння (3.3) має вигляд (3.1) із функцією $f(t,u,v) = g(u) + v$, $(t,u,v) \in \mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}$. Перевіримо, що ця функція задовольняє умови $j_1) - j_4)$ теореми 3.1.

З умови Ліпшиця для довільних точок (t,u,v), (t_0,u_0,v_0) із $\mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ випливає, що

$$\|f(t,u,v) - f(t_0,u_0,v_0)\| \le \|g(u) - g(u_0)\| + \|v - v_0\| \le$$
$$\le L\|u - u_0\| + \|v - v_0\| \le \max\{L, 1\} \left(|t - t_0| + \|u - u_0\| + \|v - v_0\|\right),$$

а отже, функція f неперервна на $\mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}$, тобто виконується умова $j_1)$ теореми 3.1.

Для довільних u_1, u_2, $v \in \mathrm{X}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\|f(t,u_1,v) - f(t,u_2,v)\| = \|g(u_1) - g(u_2)\| \le L\|u_1 - u_2\|,$$

тобто умова $j_2)$ виконується зі сталою $C_1 = L$.

Врешті-решт, для всіх $t \in \mathbb{R}$, $v \in \mathrm{X}$

$$\|f(t,\bar{0},v)\| = \|g(\bar{0}) + v\| \le \max\left\{\|g(\bar{0})\|, 1\right\} \left(1 + \|v\|\right),$$

і тому виконується умова $j_3)$, а також $C_1K = LK < 1$, тобто умова $j_4)$ теж справджується.

Таким чином, до диференціального рівняння (3.3) можна застосувати теорему 3.1.

Теорему 3.2 доведено. $\square$

Доведення теореми 3.3. Достатньо перевірити виконання умов теореми 3.1 у випадку, коли $f(t,u,v) = T(t)u + v$, $(t,u,v) \in \mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}$.

Перевіримо умову j_1). Зафіксуємо точку $(t_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ і $\varepsilon > 0$. Зазначимо, що для довільної точки $(t, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}$

$$\|f(t,u,v) - f(t_0,u_0,v_0)\| = \|T(t)u - T(t)u_0 + T(t)u_0 - T(t_0)u_0 + v - v_0\| \leq$$
$$\leq C_3\|u - u_0\| + \|T(t) - T(t_0)\| \cdot \|u_0\| + \|v - v_0\|.$$

Внаслідок неперервності операторної функції $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, існує таке число $\delta_1 > 0$, що для усіх $t \in \mathbb{R}$, $|t - t_0| < \delta_1$, виконується нерівність

$$\|T(t) - T(t_0)\| \cdot \|u_0\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тому, обравши $\delta = \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{3(C_3+1)}, \delta_1\right\}$, дістанемо, що для усіх $(t,u,v) \in \mathbb{R} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}$, $|t - t_0| + \|u - u_0\| + \|v - v_0\| < \delta$, виконується нерівність

$$\|f(t,u,v) - f(t_0,u_0,v_0)\| < \varepsilon,$$

тобто функція f неперервна у точці (t_0, u_0, v_0).

Також для всіх u_1, u_2, $v \in \mathrm{X}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\|f(t,u_1,v) - f(t,u_2,v)\| = \|T(t)u_1 - T(t)u_2\| \leq C_3\|u_1 - u_2\|,$$

а отже, умова j_2) виконується зі сталою $C_1 = C_3$.

Врешті-решт, для всіх $t \in \mathbb{R}$, $v \in \mathrm{X}$

$$\|f(t,\bar{0},v)\| = \|T(t)\bar{0} + v\| = \|v\|,$$

і тому виконується умова j_3), а також $C_1K = C_3K < 1$, тобто справджується і умова j_4).

Теорему 3.3 доведено. $\square$

3.3 Приклади застосування теорем

Приклад 3.1. Нехай α та β – такі дійсні числа, що виконуються нерівності $0 < \alpha < \beta$ та $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} < 1$. Доведемо, що диференціальне рівняння

$$\begin{cases} x'(t) = \left(\alpha + te^{-t}\sin\dfrac{1}{t}\right)x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x'(t) = \left(\beta + e^{\frac{1}{t}}\cos\dfrac{1}{t}\right)x(t) + y(t),\ t < 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

має для кожної функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$ єдиний обмежений розв'язок.

Застосуємо теорему 3.3 у банаховому просторі $\mathrm{X} = \mathbb{C}$ з нормою $\|u\| = |u|$, $u \in \mathbb{C}$. Відповідне до (3.5) диференціальне рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами записується у вигляді

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x'(t) = \beta x(t) + y(t),\ t < 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Тому у цьому випадку оператори $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ визначаються формулами $\mathrm{A}u = \alpha u$, $u \in \mathbb{C}$; $\mathrm{B}u = \beta u$, $u \in \mathbb{C}$. Отже, $\sigma(\mathrm{A}) = \{\alpha\}$, $\sigma(\mathrm{B}) = \{\beta\}$, $P_-(\mathrm{A}) = P_-(\mathrm{B}) = \mathrm{O}$, $P_+(\mathrm{A}) = P_+(\mathrm{B}) = \mathrm{I}$, $\mathrm{A} = \mathrm{A}_+$, $\mathrm{B} = \mathrm{B}_+$, $\mathrm{X}_-(\mathrm{A}) = \mathrm{X}_-(\mathrm{B}) = \{0\}$, $\mathrm{X}_+(\mathrm{A}) = \mathrm{X}_+(\mathrm{B}) = \mathbb{C}$. Таким чином, виконуються умови теореми 2.2, а отже, з урахуванням формул (2.25) та (2.26) для довільної функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$ рівняння (3.6) має єдиний обмежений розв'язок x, який зображується у вигляді

$$x(t) = -\int_t^{+\infty} e^{\alpha(t-s)}y(s)ds,\ t \geq 0;$$

$$x(t) = -\int_t^{0} e^{\beta(t-s)}y(s)ds - e^{\beta t}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s}y(s)ds,\ t < 0.$$

Звідси випливає, що для кожного $t \geq 0$

$$|x(t)| \leq \|y\|_\infty \int\limits_t^{+\infty} e^{\alpha(t-s)} ds = \frac{1}{\alpha}\|y\|_\infty,$$

а для кожного $t < 0$

$$|x(t)| \leq \|y\|_\infty \left(\int\limits_t^0 e^{\beta(t-s)} ds + \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha s} ds \right) \leq \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \|y\|_\infty.$$

Тому виконується обмеження

$$\|x\|_\infty \leq \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \|y\|_\infty. \tag{3.7}$$

Тепер зазначимо, що рівняння (3.5) записується у вигляді

$$\begin{cases} x'(t) = (\alpha + T(t))\, x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x'(t) = (\beta + T(t))\, x(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases}$$

де функція $T : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ записується таким чином:

$$T(t) = \begin{cases} te^{-t} \sin \dfrac{1}{t},\ t > 0, \\ 0,\ t = 0, \\ e^{\frac{1}{t}} \cos \dfrac{1}{t},\ t < 0. \end{cases}$$

Оскільки $\lim\limits_{t \to 0+} T(t) = \lim\limits_{t \to 0-} T(t) = 0$, то фунція T неперервна на $\mathbb{R}$. Також

$$\forall t > 0 : |T(t)| \leq te^{-t} \leq \frac{1}{e},$$

$$\forall t < 0 : |T(t)| \leq e^{\frac{1}{t}} \leq 1.$$

Тому $T \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\sup\limits_{t\in\mathbb{C}} |T(t)| \leq 1$.

Оскільки $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} < 1$, то, з урахуванням оцінки (3.7), для диференціального рівняння (3.5) виконуються усі умови теореми 3.3, а отже, рівняння (3.5) має для кожної функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$ єдиний обмежений розв'язок x.

Приклад 3.2. Нехай α та β – такі дійсні числа, що виконуються нерівності $0 < \alpha < \beta$ та $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} < 1$. Доведемо, що нелінійне диференціальне рівняння

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) + f(t, x(t), y(t)),\ t \geq 0, \\ x'(t) = \beta x(t) + f(t, x(t), y(t)),\ t < 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

у якому функція $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ визначається за правилом

$$f(t, u, v) = v \cdot \sin\left(\frac{t + |u|}{1 + |v|}\right),\ (t, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C},$$

має для кожної функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$ єдиний обмежений розв'язок x.

Для доведення цього твердження застосуємо у банаховому просторі $\mathrm{X} = \mathbb{C}$ теорему 3.1. Оскільки функція $\sin z$, $z \in \mathbb{C}$, неперервна на $\mathbb{C}$, то, з урахуванням теорем про дії з неперервними функціями і про неперервність складеної функції, робимо висновок, що функція f неперервна на $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Для довільних u_1, u_2, $v \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ внаслідок нерівності

$$|\sin \alpha - \sin \beta| \leq |\alpha - \beta|,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R},$$

дістанемо

$$|f(t, u_1, v) - f(t, u_2, v)| \leq |v| \cdot \left|\frac{|u_1| - |u_2|}{1 + |v|}\right| \leq \frac{|v|}{1 + |v|} \cdot |u_1 - u_2| \leq |u_1 - u_2|,$$

тобто умова $j_2)$ виконується зі сталою $C_1 = 1$.

Також для усіх $v \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t,0,v)| = |v| \cdot \left|\sin\left(\frac{t}{1+|v|}\right)\right| \le |v|.$$

Рівнянню (3.8) відповідає лінійне диференціальне рівняння з кусково-сталими коефіцієнтами (3.6), причому внаслідок оцінки (3.7) матимемо, що

$$C_1 K = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1.$$

Таким чином, для диференціального рівняння (3.8) виконуються всі умови теореми 3.1, і тому воно має єдиний обмежений розв'язок x для кожної функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

3.4 Висновки до розділу 3

Розділ 3 цієї дисертаційної роботи присвячений дослідженню достатніх умов на фіксовані лінійні обмежені оператори A і B та функцію $f:\mathbb{R}\times\mathrm{X}\times\mathrm{X}\to\mathrm{X}$, при виконанні яких диференціальне рівняння (3.1), що є нелінійним аналогом рівняння (2.1), розглянутого у попередньому розділі, має єдиний обмежений розв'язок x для довільної функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$.

Основним результатом розділу є теорема 3.1. Результати цього розділу було опубліковано у статті [3] та висвітлено в тезах міжнародної конференції «Шевченківська весна» [5].

Розділ 4. ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З КУСКОВО-СТАЛИМИ ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

4.1 Постановка задачі

У цій частині дисертаційної роботи використовуватимемо позначення, введені у попередніх розділах. Крім того, позначимо через $C_b^{(1)}(\mathbb{R},\mathrm{X})$ банахів простір усіх неперервно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій $x \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ з похідною $x' \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ і нормою $\|x\|_{1,\infty} := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\begin{cases} x''(t) = \mathrm{A}_1 x'(t) + \mathrm{A}_2 x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x''(t) = \mathrm{B}_1 x'(t) + \mathrm{B}_2 x(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

в якому $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$, A_k, B_k, $k = 1{,}2$ – фіксовані оператори з $\mathcal{L}(\mathrm{X})$.

Означення 4.1. Обмеженим розв'язком рівняння (4.1) будемо називати таку функцію $x \in C_b^{(1)}(\mathbb{R},\mathrm{X})$, що для кожного $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ існує $x''(t)$ і виконується рівність (4.1).

Мета цього розділу, як і розділу 2, – отримати умови на операторні коефіцієнти A_k, B_k, $k = 1{,}2$, які забезпечують виконання такої умови.

Умова обмеженості. *Для довільної функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ диференціальне рівняння (4.1) має единий обмежений розв'язок x.*

4.2 Позначення і допоміжні твердження

Будемо розглядати комплексний банахів простір

$$\mathrm{X}^2 = \left\{ \bar{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \middle| \, x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathrm{X} \right\}$$

із визначеними покоординатно додаванням і множенням на скаляр та нормою $\|\bar{x}\|_* = \left\|x^{(1)}\right\| + \left\|x^{(2)}\right\|$, $\bar{x} \in \mathrm{X}^2$. Якщо E, F, G, H $\in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, то, як і для випадку числових матриць, $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \mathrm{G} & \mathrm{H} \end{pmatrix}$ задає оператор з $\mathcal{L}\left(\mathrm{X}^2\right)$ за правилом

$$\mathrm{T}\bar{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}x^{(1)} + \mathrm{F}x^{(2)} \\ \mathrm{G}x^{(1)} + \mathrm{H}x^{(2)} \end{pmatrix}, \ \bar{x} \in \mathrm{X}^2.$$

Нехай $\mathrm{T_A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 \\ \mathrm{I} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$, $\mathrm{T_B} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 \\ \mathrm{I} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$; через $\sigma\left(\mathrm{T_A}\right)$ та $\sigma\left(\mathrm{T_B}\right)$ позначатимемо спектри операторів $\mathrm{T_A}$ та $\mathrm{T_B}$ відповідно.

Аналогічно до статті А. Г. Баскакова, Т. К. Кацаран та Т. І. Смаґіної [12], будемо використовувати наступне означення.

Означення 4.2. Корені Λ_1, $\Lambda_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ операторного рівняння

$$\Lambda^2 - \mathrm{A}_1\Lambda - \mathrm{A}_2 = \mathrm{O} \tag{4.2}$$

називатимемо розділеними, якщо існує неперервний обернений оператор $\Psi_\mathrm{A} = (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}$ до оператора $(\Lambda_1 - \Lambda_2)$.

У статті [12] А. Г. Баскакова, Т. К. Кацаран та Т. І. Смаґіної доведено таку теорему.

Теорема 4.1. *Припустимо, що рівняння* (4.2) *має розділені корені* Λ_1, Λ_2. *Покладемо*

$$\mathrm{U_A} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \mathrm{I} & \mathrm{I} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{U_A^{-1}} = \begin{pmatrix} \Psi_\mathrm{A} & -\Psi_\mathrm{A}\Lambda_2 \\ -\Psi_\mathrm{A} & \Psi_\mathrm{A}\Lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Тоді $\mathrm{U_A^{-1}}$ *– неперервний обернений оператор до оператора* $\mathrm{U_A}$*, а також*

$$\mathrm{U_A^{-1}T_AU_A} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

$$e^{\mathrm{T_A}t} = \mathrm{U_A} \begin{pmatrix} e^{\Lambda_1 t} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & e^{\Lambda_2 t} \end{pmatrix} \mathrm{U_A^{-1}},\ t \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Зауваження 4.1. Відзначимо, що, згідно з наведеним у статті А. С. Маркуса та І. В. Мереуци [13] зауваженням 1.3, неперервна оборотність оператора $\mathrm{U_A}$ еквівалентна неперервній оборотності оператора $(\Lambda_1 - \Lambda_2)$.

Нехай оператор $\mathrm{V} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, а його спектр $\sigma(\mathrm{V})$ не перетинає уявну вісь, тобто $\sigma(\mathrm{V}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$. Будемо позначати через $\sigma_-(\mathrm{V})$ і $\sigma_+(\mathrm{V})$ частини спектра $\sigma(\mathrm{V})$ оператора V, що лежать відповідно у лівій та правій півплощині комплексної площини (одна з цих множин може бути порожньою); через $P_-(\mathrm{V})$ та $P_+(\mathrm{V})$ – проектори Рісса, що відповідають множинам $\sigma_-(\mathrm{V})$ та $\sigma_+(\mathrm{V})$. Тоді відомо (див., наприклад, [8, розд. 2, § 4]), що простір X зображується у вигляді прямої суми $\mathrm{X} = \mathrm{X}_-(\mathrm{V}) \dot{+} \mathrm{X}_+(\mathrm{V})$ інваріантних відносно оператора V підпросторів $\mathrm{X}_-(\mathrm{V}) = P_-(\mathrm{V})\mathrm{X}$ та $\mathrm{X}_+(\mathrm{V}) = P_+(\mathrm{V})\mathrm{X}$, а також, відповідно до теореми 2.3, диференціальне рівняння $u'(t) = \mathrm{V}u(t) + v(t)$, $t \in \mathbb{R}$, має для кожної функції $v \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ єдиний розв'язок u в просторі $C_b^{(1)}(\mathbb{R},\mathrm{X})$ тоді і тільки тоді, коли $\sigma(\mathrm{V}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$. Цей розв'язок зображується у вигляді згортки

$$u(t) = (G_\mathrm{V} * v)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_\mathrm{V}(t-s)v(s)ds,\ t \in \mathbb{R}, \tag{4.5}$$

а опереаторнозначна функція Гріна $G_\mathrm{V}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, визначається за формулою (2.24).

Розглянемо тепер відповідне до (4.1) диференціальне рівняння першого порядку

$$\begin{cases} \bar{x}'(t) = \mathrm{T_A}\bar{x}(t) + \bar{y}(t),\ t \geq 0, \\ \bar{x}'(t) = \mathrm{T_B}\bar{x}(t) + \bar{y}(t),\ t < 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

у банаховому просторі X^2.

Згідно з теоремою 2.2 справджується таке твердження.

Теорема 4.2. *Для того, щоб диференціальне рівняння* (4.6) *задовольняло умову обмеженості, необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови:*

i_1) $\sigma(\mathrm{T_A}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, $\sigma(\mathrm{T_B}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$;

i_2) $\mathrm{X}^2 = \mathrm{X}^2_-(\mathrm{T_A}) \dot{+} \mathrm{X}^2_+(\mathrm{T_B})$.

Нехай P_-, P_+ – проектори у просторі X^2, що відповідають зображенню $\mathrm{X}^2 = \mathrm{X}^2_-(\mathrm{T_A}) \dot{+} \mathrm{X}^2_+(\mathrm{T_B})$. З теореми 2.4 випливає, що при виконанні умов i_1) та i_2) теореми 4.2 відповідний до функції $\bar{y} \in C_b\big(\mathbb{R},\mathrm{X}^2\big)$ обмежений розв'язок $\bar{x}$ рівняння (4.6) визначається таким чином:
якщо $t \geq 0$, то

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) = \int\limits_0^t e^{\mathrm{T_A}(t-s)} P_-(\mathrm{T_A})\bar{y}(s)ds - \int\limits_t^{+\infty} e^{\mathrm{T_A}(t-s)} P_+(\mathrm{T_A})\bar{y}(s)ds + \\ + e^{\mathrm{T_A}t} P_- \int\limits_{-\infty}^0 e^{-\mathrm{T_B}s} P_-(\mathrm{T_B})\bar{y}(s)ds + e^{\mathrm{T_A}t} P_- \int\limits_0^{+\infty} e^{-\mathrm{T_A}s} P_+(\mathrm{T_A})\bar{y}(s)ds; \end{aligned} \tag{4.7}$$

якщо $t < 0$, то

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) = \int\limits_{-\infty}^t e^{\mathrm{T_B}(t-s)} P_-(\mathrm{T_B})\bar{y}(s)ds - \int\limits_t^0 e^{\mathrm{T_B}(t-s)} P_+(\mathrm{T_B})\bar{y}(s)ds - \\ - e^{\mathrm{T_B}t} P_+ \int\limits_0^{+\infty} e^{-\mathrm{T_A}s} P_+(\mathrm{T_A})\bar{y}(s)ds - e^{\mathrm{T_B}t} P_+ \int\limits_{-\infty}^0 e^{-\mathrm{T_B}s} P_-(\mathrm{T_B})\bar{y}(s)ds. \end{aligned} \tag{4.8}$$

У подальшому також потрібна така лема.

Лема 4.1. *Нехай функція* $\varphi : [a,b] \to \mathrm{X}$ *неперервна на* $[a,b]$ *і для кожного* $s \in (a,b)$ *існує* $\varphi'(s)$*. Тоді*

$$\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \le (b-a) \sup_{s \in (a,\,b)} \|\varphi'(s)\|.$$

Доведення. Внаслідок теореми Гана-Банаха існує такий функціонал $h \in \mathrm{X}^*$, що $\|h\| = 1$, $h(\varphi(b) - \varphi(a)) = \|\varphi(b) - \varphi(a)\|$. Покладемо $\alpha(t) = \operatorname{Re} h(\varphi(t))$, $t \in [a,b]$. Оскільки $\|\varphi(b) - \varphi(a)\|$ – дійсне число, то, з урахуванням теореми Лагранжа про скінченні прирости, існує таке $\xi \in (a,b)$, що

$$\|\varphi(b) - \varphi(a)\| = h(\varphi(b) - \varphi(a)) = \alpha(b) - \alpha(a) = \alpha'(\xi)(b-a) \le (b-a)|h(\varphi'(\xi))|.$$

Звідси, враховуючи, що $\|h\| = 1$, отримаємо

$$\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \le (b-a)\|\varphi'(\xi)\| \le (b-a) \sup_{s \in (a,\,b)} \|\varphi'(s)\|.$$

Лему 4.1 доведено. $\square$

4.3 Основні результати

Основну теорему цього розділу будемо доводити за умови, що виконується таке припущення.

Припущення 4.1. *Існує такий оператор* $\mathrm{W} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$*, що* $\sigma(\mathrm{W}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$*, а також* $\mathrm{A}_1\mathrm{W} + \mathrm{A}_2 = \mathrm{B}_1\mathrm{W} + \mathrm{B}_2$*.*

Відзначимо, що припущення 4.1 виконується, зокрема, у випадку, коли рівняння

$$\Lambda^2 - \mathrm{B}_1\Lambda - \mathrm{B}_2 = \mathrm{O} \tag{4.9}$$

і (4.2) мають такий спільний корінь $\Lambda_0 \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, що $\sigma(\Lambda_0) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$. При $\mathrm{X} = \mathbb{C}$, згідно з припущенням 4.1, для функцій $f_1(z) = z^2 - a_1 z - a_2$ та $f_2(z) = z^2 - b_1 z - b_2$ повинно існувати таке число $z_0 \notin i\,\mathbb{R}$, що $f_1(z_0) = f_2(z_0)$.

Наступна теорема містить відповідь на природне питання про одночасне виконання умови обмеженості для диференціальних рівнянь (4.1) і (4.6).

Теорема 4.3. *Якщо виконується припущення 4.1, то рівняння (4.1) задовольняє умову обмеженості у тому і тільки в тому випадку, коли умову обмеженості задовольняє рівняння (4.6).*

Доведення. *Достатність.* Нехай умова обмеженості виконується для рівняння (4.6). Зафіксуємо функцію $y \in C_b(\mathbb{R}, \mathrm{X})$. Внаслідок (4.6) для відповідного до функції $\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \bar{0} \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, єдиного обмеженого розв'язку $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, виконуються рівності

$$x_1'(t) = \mathrm{A}_1 x_1(t) + \mathrm{A}_2 x_2(t) + y(t),\ t > 0,$$

$$x_1'(t) = \mathrm{B}_1 x_1(t) + \mathrm{B}_2 x_2(t) + y(t),\ t < 0,$$

$$x_2'(t) = x_1(t),\ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Тому для кожного $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ існують $x_2''(t) = x_1'(t)$ і функція $x(t) = x_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, задовольняє рівність (4.1).

Перевіримо, що $x_2 \in C_b^{(1)}(\mathbb{R},\mathrm{X})$. Застосувавши при фіксованому $t > 0$ лему 4.1 до функції $\varphi_*(s) = x_2(s) - x_2(0) - s\,x_1(0)$, $s \in [0,t]$, з урахуванням рівності $\varphi_*(0) = 0$, отримаємо

$$\|\varphi_*(t) - \varphi_*(0)\| = \|x_2(t) - x_2(0) - t\,x_1(0)\| \leq$$
$$\leq (t-0) \sup_{s\in(0,\,t)} \|x_2'(s) - x_1(0)\| = t \sup_{s\in(0,\,t)} \|x_2'(s) - x_1(0)\| \leq$$
$$\leq t \max_{s\in[0,\,t]} \|x_1(s) - x_1(0)\|. \quad (4.10)$$

Тут ми скористались рівністю

$$\varphi_*'(s) = x_2'(s) - x_1(0) = x_1(s) - x_1(0).$$

Із означення обмеженого розв'язку рівняння (4.6) випливає, що функції x_1, $x_2 \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$. Тому, поділивши праву і ліву частини умови (4.10) на t і перейшовши до границі при $t \to 0+$, отримаємо рівність $x_2'(0+) = x_1(0)$. Застосувавши аналогічні міркування до функції $\varphi_*(s) = x_2(s) - x_2(0) - s\,x_1(0)$, яка розглядається на відрізку $[-t, 0]$, отримаємо $x_2'(0-) = x_1(0)$, а отже, існує $x_2'(0) = x_1(0)$. Таким чином, $x_2'(t) = x_1(t)$ для кожного $t \in \mathbb{R}$. Звідси випливає, що функція $x(t) = x_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, є обмеженим розв'язком диференціального рівняння (4.1).

Якщо, від супротивного, отриманий обмежений розв'язок $x(t) = x_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, рівняння (4.1), що відповідає функції y, не єдиний, то відповідне до (4.1) однорідне диференціальне рівняння

$$\begin{cases} x''(t) = \mathrm{A}_1 x'(t) + \mathrm{A}_2 x(t), t \geq 0, \\ x''(t) = \mathrm{B}_1 x'(t) + \mathrm{B}_2 x(t), t < 0, \end{cases}$$

має деякий ненульовий обмежений розв'язок $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Але тоді при $t > 0$ матимемо, що

$$
\mathrm{T_A}\begin{pmatrix} u'(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 \\ \mathrm{I} & \mathrm{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \\
= \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 u'(t) + \mathrm{A}_2 u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u''(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(t) \\ u(t) \end{pmatrix}'.
$$

Аналогічно, при $t < 0$

$$
\mathrm{T_B}\begin{pmatrix} u'(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(t) \\ u(t) \end{pmatrix}'.
$$

Крім того, функція $\begin{pmatrix} u'(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, неперервна у точці $t_0 = 0$. Тому функція $\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, буде ненульовим обмеженим розв'язком відповідного до (4.6) однорідного диференціального рівняння. Суперечність.

Необхідність. Нехай тепер умова обмеженості виконується для диференціального рівняння (4.1). Позначимо через Y набір усіх таких функцій $f : \mathbb{R} \to \mathrm{X}$, що $f \in C_b^{(1)}(\mathbb{R},\mathrm{X})$, для кожного $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ існує $f''(t)$ і $f''(t)$ продовжується до функції з $C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$. Тоді Y – лінійний простір з поточковим додаванням і множенням на комплексне число. Визначимо лінійний оператор $\mathrm{L} : \mathrm{D_Y} \to C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ за правилом

$$
(\mathrm{L}x)(t) = \begin{cases} x''(t) - \mathrm{B}_1 x'(t) - \mathrm{A}_2 x(t), \ t \geq 0, \\ x''(t) - \mathrm{B}_1 x'(t) - \mathrm{B}_2 x(t), \ t < 0, \end{cases} \tag{4.11}
$$

де $\mathrm{D_Y}$ – набір усіх таких функцій $x \in \mathrm{Y}$, що $\mathrm{L}x \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$. При цьому диференціальне рівняння (4.1) записується у вигляді $\mathrm{L}x = y$, внаслідок умови обмеженості для (4.1) L є бієкцією між $\mathrm{D_Y}$ та $C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ і відповідний до функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ єдиний обмежений розв'язок рівняння (4.1) зображується у вигляді $x = \mathrm{L}^{-1}y$. Також визначимо відображення $\mathrm{D} : C_b^{(1)}(\mathbb{R},\mathrm{X}) \to C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$, $\mathrm{D}_{\mathrm{Y}}^2 : \mathrm{Y} \to C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ за правилами

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}x = x',\ x \in C_b^{(1)}(\mathbb{R},\mathrm{X})\,; \\ &\mathrm{D}_{\mathrm{Y}}^2 x = x'',\ x \in \mathrm{D}_{\mathrm{Y}}. \end{aligned}$$

Відзначимо, що кожен оператор $\mathrm{Q} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ визначає оператор, який теж позначатимемо Q, у введених функціональних просторах, діючи на відповідні функції поточково.

Зафіксуємо функцію $\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, що належить простору $C_b\big(\mathbb{R},\mathrm{X}^2\big)$. Доведемо, що диференціальне рівняння (4.6) має відповідний до $\bar{y}$ обмежений розв'язок.

Перевіримо, що функції $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \bar{0} \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, відповідає обмежений розв'язок диференціального рівняння (4.6) з координатами, що задаються наступним чином:

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathrm{D}\mathrm{L}^{-1}y_1, \\ x_2 &= \mathrm{L}^{-1}y_1. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Справді, для кожного $t > 0$ функція $x_2(t) = \mathrm{L}^{-1}y_1(t)$ є розв'язком диференціального рівняння

$$x''(t) = \mathrm{A}_1 x'(t) + \mathrm{A}_2 x(t) + y_1(t),$$

а отже,

$$\mathrm{T}_{\mathrm{A}} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{D}\mathrm{L}^{-1}y_1(t) \\ \mathrm{L}^{-1}y_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \bar{0} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1\mathrm{D}\mathrm{L}^{-1}y_1(t) + \mathrm{A}_2\mathrm{L}^{-1}y_1(t) + y_1(t) \\ \mathrm{D}\mathrm{L}^{-1}y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{D}^2\mathrm{L}^{-1}y_1(t) \\ \mathrm{D}\mathrm{L}^{-1}y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}'.$$

Аналогічно, при $t < 0$ виконуватиметься рівність

$$\mathrm{T_B}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}'.$$

Врешті-решт, функція $x_2(t) = \mathrm{L}^{-1}y_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, належить простору $C_b^{(1)}(\mathbb{R},\mathrm{X})$ за означенням обмеженого розв'язку, і тому функції $x_2 = \mathrm{L}^{-1}y_1$ та $x_1 = \mathrm{D}x_2$ є неперервними у точці $t_0 = 0$.

Внаслідок теореми 2.3, припущення 4.1 і теореми Банаха про обернений оператор існує неперервний обернений оператор $\mathcal{R} = (\mathrm{D} - \mathrm{W})^{-1}$ до лінійного неперервного оператора $(\mathrm{D} - \mathrm{W}) : C_b^{(1)}(\mathbb{R},\mathrm{X}) \to C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$. Доведемо, що диференціальне рівняння (4.6) має обмежений розв'язок, відповідний до функції $\begin{pmatrix} \bar{0} \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, з координатами

$$\begin{aligned} x_1 &= (\mathrm{W}\mathcal{R} - \mathrm{D}\mathrm{L}^{-1}\Gamma\mathcal{R} - \mathrm{D}\mathrm{L}^{-1}\mathrm{W})y_2, \\ x_2 &= (\mathcal{R} - \mathrm{L}^{-1}\Gamma\mathcal{R} - \mathrm{L}^{-1}\mathrm{W})y_2, \end{aligned} \tag{4.13}$$

де, з урахуванням припущення 4.1,

$$\Gamma = \mathrm{W}^2 - \mathrm{A}_1\mathrm{W} - \mathrm{A}_2 = \mathrm{W}^2 - \mathrm{B}_1\mathrm{W} - \mathrm{B}_2.$$

Справді,

$$x_2' - x_1 = (\mathrm{D} - \mathrm{W})\mathcal{R}y_2 = y_2;$$

при $t > 0$, з урахуванням комутовності операторів D і W та рівностей

$$(\mathrm{D}_\mathrm{Y}^2 - \mathrm{A}_1\mathrm{D} - \mathrm{A}_2)\mathrm{L}^{-1}u(t) = u(t),\ t > 0,$$

які виконуються для кожної функції $u \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$, матимемо

$$\begin{aligned} x_1'(t) - \mathrm{A}_1x_1(t) - \mathrm{A}_2x_2(t) &= (\mathrm{D}\mathrm{W}\mathcal{R} - \mathrm{A}_1\mathrm{W}\mathcal{R} - \mathrm{A}_2\mathcal{R})y_2(t) - \\ &- (\mathrm{D}_\mathrm{Y}^2 - \mathrm{A}_1\mathrm{D} - \mathrm{A}_2)\mathrm{L}^{-1}\Gamma\mathcal{R}y_2(t) - (\mathrm{D}_\mathrm{Y}^2 - \mathrm{A}_1\mathrm{D} - \mathrm{A}_2)\mathrm{L}^{-1}\mathrm{W}y_2(t) = \\ &= \mathrm{D}\mathrm{W}\mathcal{R}y_2(t) - (\mathrm{A}_1\mathrm{W} + \mathrm{A}_2\mathrm{W} + \Gamma)\mathcal{R}y_2(t) - \mathrm{W}y_2(t) = \\ &= \mathrm{W}(\mathrm{D} - \mathrm{W})\mathcal{R}y_2(t) - \mathrm{W}y_2(t) = \bar{0}; \end{aligned} \tag{4.14}$$

при $t < 0$, міркуючи аналогічно до (4.14), отримаємо, що

$$x_1' - \mathrm{B}_1 x_1(t) - \mathrm{B}_2 x_2(t) = \bar{0}.$$

Таким чином, рівність (4.6) виконується для кожного $t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Нарешті, безпосередньо з вигляду координат (4.13) випливає, що $x_1, x_2 \in C_b(\mathbb{R}, \mathrm{X})$.

Внаслідок лінійності диференціального рівняння (4.6) його обмеженим розв'язком, відповідним до функції $\bar{y}$, є сума розв'язків, заданих формулами (4.12) та (4.13).

Якщо, від супротивного, цей обмежений розв'язок не єдиний, то відповідне до (4.6) однорідне диференціальне рівняння має ненульовий обмежений розв'язок $\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 \\ \mathrm{I} & \mathrm{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \ t > 0, \tag{4.15}$$

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 \\ \mathrm{I} & \mathrm{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \ t < 0, \tag{4.16}$$

а отже, для усіх $t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ маємо, що $u_2'(t) = u_1(t)$. Оскільки функція $u_1 \in \in C_b(\mathbb{R}, \mathrm{X})$, то, за теоремою Лагранжа про скінченні прирости для банаховозначної функції, також існує $u_2'(0) = u_1(0)$, і тому функція $u_2 \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}, \mathrm{X})$. Врешті-решт, зі співвідношень (4.15) та (4.16) випливає, що

$$\begin{cases} u_2''(t) = \mathrm{A}_1 u_2'(t) + \mathrm{A}_2 u_2(t), \ t > 0, \\ u_2''(t) = \mathrm{B}_1 u_2'(t) + \mathrm{B}_2 u_2(t), \ t < 0. \end{cases}$$

Таким чином, u_2 є ненульовим обмеженим розв'язком відповідного до (4.1) однорідного диференціального рівняння. Суперечність.

Теорему 4.3 доведено. □

Зауваження 4.2. Із доведення теореми 4.3 випливає, що коли рівняння (4.6) задовольняє умову обмеженості, то рівняння другого порядку (4.1) задовольняє умову обмеженості незалежно від виконання припущення 4.1.

З теореми 4.3 випливає, що коли виконується припущення 4.1, то умова обмеженості для диференціального рівняння (4.1) виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються умови $i_1)$, $i_2)$ теореми 4.2. У наступній теоремі розглядається випадок, коли перевірка умов $i_1)$, $i_2)$ зводиться до перевірки умов на розділені корені рівнянь (4.2) і (4.9).

Теорема 4.4. *Припустимо, що рівняння* (4.2) *і* (4.9) *мають розділені корені* Λ_1, Λ_2 *і* Φ_1, Φ_2 *відповідно, а також виконується припущення 4.1. Для того, щоб диференціальне рівняння* (4.1) *задовольняло умову обмеженості, необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови:*

$j_1)$ $(\sigma(\Lambda_1)\cup\sigma(\Lambda_2))\cap i\,\mathbb{R}=\varnothing$, $(\sigma(\Phi_1)\cup\sigma(\Phi_2))\cap i\,\mathbb{R}=\varnothing$;

$j_2)$ $\mathrm{X}^2=\mathrm{M}_-(\Lambda_1,\Lambda_2)\dot{+}\mathrm{M}_+(\Phi_1,\Phi_2)$,

де

$$\mathrm{M}_-(\Lambda_1,\Lambda_2)=\left\{\mathrm{U_A}\begin{pmatrix}v^{(1)}\\ v^{(2)}\end{pmatrix}\,\middle|\,v^{(k)}\in\mathrm{X}_-(\Lambda_k),k=1,2\right\},$$

$$\mathrm{M}_+(\Phi_1,\Phi_2)=\left\{\mathrm{U_B}\begin{pmatrix}v^{(1)}\\ v^{(2)}\end{pmatrix}\,\middle|\,v^{(k)}\in\mathrm{X}_+(\Phi_k),k=1,2\right\}.$$

Доведення. Скориставшись рівністю (4.3) робимо висновок, що при виконанні умов теореми 4.4 умова $j_1)$ еквівалентна умові $i_1)$ теореми 4.2.

Внаслідок леми 2.5 і рівності (4.4) теореми 4.1 отримаємо ланцюжок рівностей

$$\mathrm{X}^2_-(\mathrm{T_A})=\left\{\bar{u}\in\mathrm{X}^2\,\middle|\,\sup_{t\geq0}\left\|e^{\mathrm{T_A}t}\bar{u}\right\|_*<\infty\right\}=$$
$$=\left\{\bar{u}\in\mathrm{X}^2\,\middle|\,\sup_{t\geq0}\left\|\mathrm{U_A}\begin{pmatrix}e^{\Lambda_1t}&\mathrm{O}\\ \mathrm{O}&e^{\Lambda_2t}\end{pmatrix}\mathrm{U_A^{-1}}\bar{u}\right\|_*<\infty\right\}.$$

Скориставшись тим, що $\mathrm{U_A}$ – лінійний, обмежений і неперервно оборотний оператор, зокрема тим, що $\mathrm{U_A}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$, матимемо, що

$$\mathrm{X}^2_-(\mathrm{T_A}) = \left\{ \bar{u} \in \mathrm{X}^2 \,\middle|\, \sup_{t\ge 0} \left\| \begin{pmatrix} e^{\Lambda_1 t} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & e^{\Lambda_2 t} \end{pmatrix} \mathrm{U_A^{-1}} \bar{u} \right\|_* < \infty \right\} =$$
$$= \left\{ \mathrm{U_A} \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} \,\middle|\, \sup_{t\ge 0} \left\| e^{\Lambda_k t} v^{(k)} \right\| < \infty, k = 1{,}2 \right\} = \mathrm{M}_-(\Lambda_1{,}\Lambda_2).$$

Аналогічно перевіряється, що $\mathrm{X}^2_+(\mathrm{T_B}) = \mathrm{M}_+(\Phi_1{,}\Phi_2)$. Отже, умова $j_2)$ еквівалентна умові $i_2)$ теореми 4.2.

Теорему 4.4 доведено. $\square$

4.4 Приклади застосування теорем

Приклад 4.1. Нехай $X = \mathbb{C}^2$, $\|u\| = |u^{(1)}| + |u^{(2)}|$, $u = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. За допомогою теореми 4.4 доведемо, що диференціальне рівняння (4.1), в якому

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix},$$

задовольняє умову обмеженості.

Безпосередньо перевіряється, що в цьому випадку операторні рівняння (4.2) і (4.9) мають відповідно розділені корені

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix},$$

Оскільки $\Lambda_1 = \Phi_1$, $\sigma(\Lambda_1) = \{1\}$, $\sigma(\Lambda_2) = \{-2, 2\}$, $\sigma(\Phi_2) = \{-3, 3\}$, то виконується припущення 4.1 і умова $j_1)$ теореми 4.4. Також $X_-(\Lambda_1) = \{\bar{0}\}$, $X_-(\Lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{C} \right\}$, а отже,

$$M_-(\Lambda_1,\Lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{C} \right\}.$$

Враховуючи, що $\Phi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Phi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, робимо висновок, що $X_+(\Phi_1) = \mathbb{C}^2$, $X_+(\Phi_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix} \,\middle|\, \delta \in \mathbb{C} \right\}$. Тому

$$\mathrm{M}_+(\Phi_1,\Phi_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 0 \\ \delta \end{pmatrix} \middle| \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \right\} =$$

$$= \left\{ \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \right\}.$$

Вектори $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ утворюють базис у $\mathbb{C}^4$, а отже,

$$\mathbb{C}^4 = \mathrm{M}_-(\Lambda_1,\Lambda_2) \dot{+} \mathrm{M}_+(\Phi_1,\Phi_2),$$

тобто умова $j_2)$ теореми 4.4 теж виконується.

Відзначимо, що для того, щоб знайти відповідний до заданої функції $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, з простору $C_b\big(\mathbb{R},\mathbb{C}^2\big)$ єдиний обмежений розв'язок диференціального рівняння, що розглядається в прикладі, потрібно скористатися формулами (4.7), (4.8) і виписати відповідний до $\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, єдиний обмежений розв'язок відповідного рівняння (4.6). З доведення теореми 4.3 випливає, що його третя і четверта координати визначатимуть шуканий розв'язок.

Наступний приклад показує, що припущення 4.1 не є необхідним для того, щоб рівняння (4.1) задовольняло умову обмеженості.

Приклад 4.2. Покладемо $\mathrm{X} = \mathbb{C}$ і розглянемо диференціальне рівняння

$$\begin{cases} x''(t) = 4x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x''(t) = 3x'(t) + 4x(t) + y(t),\ t < 0. \end{cases} \tag{4.17}$$

Перевіримо, що виконуються наступні умови:

1) для диференціального рівняння (4.17) не виконується припущення 4.1;

2) диференціальне рівняння (4.17) задовольняє умову обмеженості.

Оскільки $\mathrm{X} = \mathbb{C}$, то припущення 4.1 для диференціального рівняння (4.17) формулюється в такому еквівалентному вигляді: *існує таке комплексне число* $z \in \mathbb{C} \backslash i\,\mathbb{R}$, *що* $4 = 3z + 4$. Але остання рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $z = 0$, і тому для рівняння (4.17) припущення 4.1 не виконується.

Внаслідок зауваження 4.2, для виконання умови обмеженості для диференціального рівняння (4.17) досить перевірити, що умова обмеженості виконується у просторі $\mathrm{X}^2 = \mathbb{C}^2$ для рівняння (4.2) з операторними коефіцієнтами

$$\mathrm{T}_\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можна переконатися, що

$$\sigma(\mathrm{T}_\mathrm{A}) = \{-2, 2\}, \quad \sigma(\mathrm{T}_\mathrm{B}) = \{-1, 4\}. \tag{4.18}$$

Оскільки

$$(\mathrm{T}_\mathrm{A} + 2\mathrm{I}) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}_\mathrm{B} - 4\mathrm{I}) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то, позначивши через Л.О.(M) лінійну оболонку множини $M \in \mathbb{C}^2$, отримаємо, що

$$X_-^2(T_A) = \text{Л.О.}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad X_+^2(T_B) = \text{Л.О.}\left\{\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right\},$$

а отже,

$$X_-^2(T_A)\dot{+}X_+^2(T_B) = \text{Л.О.}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right\} = X^2, \tag{4.19}$$

бо $\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -6 \neq 0$, і тому вектори $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ лінійно незалежні в $\mathbb{C}^2$.

Внаслідок (4.18), (4.19) для відповідного до (4.17) рівняння (4.2) виконуються умови теореми 4.2, а отже, це диференціальне рівняння задовольняє умову обмеженості.

4.5 Висновки до розділу 4

Розділ 4 цієї дисертаційної роботи присвячений дослідженню необхідних і достатніх умов на фіксовані лінійні оператори A_1, A_2 та B_1, B_2, при виконанні яких диференціальне рівняння (4.1) з кусково-сталими операторними коефіцієнтами має єдиний обмежений розв'язок x для довільної функції $y \in C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$.

Основними результатами розділу є теореми 4.3 та 4.4, які були опубліковані у статті [2]. Деякі результати цього розділу було висвітлено у тезах міжнародних конференцій «International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications» [6] та «Шевченківська весна» [7].

ВИСНОВКИ ДО ДИСЕРТАЦІЇ

Дана дисертаційна робота присвячена дослідженню питань про існування та властивості єдиного обмеженого на всій числовій осі розв'язку лінійних диференціальних рівнянь першого та другого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами та єдиного обмеженого на всій числовій осі розв'язку деяких нелінійних аналогів таких рівнянь першого порядку.

Основні результати цієї дисертаційної роботи полягають у наступному.

1) отримано критерій існування єдиного обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами;
2) отримано критерій існування єдиного обмеженого на $\mathbb{Z}$ розв'язку лінійного різницевого рівняння з кусково-сталими, неперервно оборотниими операторними коефіцієнтами;
3) вказано явний вигляд обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами;
4) досліджено питання про близькість при $t \to \infty$ обмежених на усій числовій осі розв'язків лінійного диференціального рівняння першого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами та лінійного диференціального рівняння зі сталим операторним коефіцієнтом, що відповідають одній і тій самій неперервній і обмеженій на $\mathbb{R}$ функції;
5) отримано достатні умови існування єдиного обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку деяких нелінійних аналогів диференціального рівняння першого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами;
6) отримано критерій існування єдиного обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку лінійного диференціального рівняння другого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами.

Отримані результати можуть бути використані у подальших дослідженнях властивостей розв'язків диференціальних рівнянь зі змінними операторними коефіцієнтами, а також дозволяють спростити дослідження реальних процесів і явищ, що описуються такими рівняннями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Городній М. Ф.*, *Печериця О. А.* Обмежені розв'язки диференціального рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Нелінійні коливання. 2021. т. 24, № 2. с. 147—157. URL: https://www.imath.kiev.ua/%7Enosc/web/show_article.php?article_id=1343&lang=ua ; **English translation:** *Horodnii, M. F., Pecherytsia, O. A.* Bounded Solutions of a Differential Equation with Piecewise Constant Operator Coefficients // J. Math. Sci. 2023. Vol. 270, iss. 6. P. 237–249. DOI: 10.1007/s10958-023-06343-y.

2. *Городній М. Ф.*, *Печериця О. А.* Обмежені розв'язки диференціального рівняння другого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Нелінійні коливання. 2023. т. 26, № 3. с. 342—349. DOI: 10.3842/nosc.v26i3.1436.

3. *Городній М. Ф.*, *Печериця О. А.* Обмежені розв'язки одного нелінійного диференціального рівняння в банаховому просторі // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика». 2023. т. 43, № 2. с. 22—28. DOI: 10.24144/2616-7700.2023.43(2).22-28.

4. *Городній М. Ф.*, *Печериця О. А.* Про обмежені розв'язки різницевого рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Матеріали XIX Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2021: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Київ, 2021. с. 11.

5. *Городній М. Ф.*, *Печериця О. А.* Про обмежені на R розв'язки диференціальних рівнянь з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Матеріали XX Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2022: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика,

комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Київ, 2022. с. 24—25.

6. *Pecherytsia, O.* On bounded solutions of a second-order differential equation with piecewise constant operator coefficients // Book of Abstracts. "11th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications". Yildiz Technical University. Istanbul, 2022. P. 70.

7. *Городній М. Ф., Печериця О. А.* Про обмежені розв'язки диференціального рівняння другого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2023: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз. Методика викладання математики». Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Київ, 2023. с. 13—14.

8. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М. : Наука, 1970. 534 с. **English translation:** *Daleckiĭ, Ju. L., Kreĭn, M. G.* Stability of solutions of differential equations in Banach space. American Math. Soc., Providence, R.I., 1974. 386 p. (Translations of Mathematical Monographs ; 43).

9. *Гончар І. В.* Про обмежені і сумовні розв'язки різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. 2016. 2. с. 25—28.

10. *Слюсарчук В. Ю.* Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Укр. матем. журн. 2020. т. 72, № 6. с. 822—841. DOI: 10.37863/umzh.v72i6.1052. **English translation:** *Slyusarchuk, V. Y.* Exponentially Dichotomous Difference Equations with Piecewise Constant Operator Coefficients // Ukr. Math. J. 2020. Vol. 72, iss. 6. P. 953–977. DOI: 10.1007/s11253-020-01835-5.

11. *Баскаков А. Г., Чернышов М. К.* Некоторые условия обратимости дифференциальных операторов второго порядка // Укр. матем. журн. 1995. т. 47, № 3. с. 411—413. **English translation:** *Baskakov, A. G., Chernyshov, M. K.* On the invertibility of differential operators of the second order // Ukr. Math. J. 1995. Vol. 47, iss. 3. P. 477–480. DOI: 10.1007/BF01056311.

12. *Баскаков А. Г., Кацаран Т. К., Смагина Т. И.* Линейные дифференциальные уравнения второго порядка в банаховом пространстве и расщепление операторов // Изв. вузов. Математика. 2017. № 10. с. 38—49. **English translation:** *Baskakov, A. G., Katsaran, T. K., Smagina, T. I.* Second-order linear differential equations in a Banach space and splitting operators // Russian Math. 2017. Vol. 61. P. 32–43. DOI: 10.3103/S1066369X1710005X.

13. *Маркус А. С., Мереуца И. В.* О полном наборе корней операторного уравнения, соответствующего полиномиальному пучку // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. т. 37, № 5. с. 1108—1131. **English translation:** *Markus, A. S., Mereutsa, I. V.* On the complete n-tuple of roots of the operator equation cirresponding to a polynomial operator bundle // Math. USSR-Izv. 1973. Vol. 7, iss. 5. P. 1105–1128. DOI: 10.1070/IM1973v007n05ABEH001996.

14. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М. : Гос. изд-во техн.-теоретич. литер., 1953. 468 с.

15. *Крейн М. Г.* О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости // УМН. 1948. т. 3, 3 (25). с. 166—169.

16. *Крейн М. Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. К. : Ин-т математики АН УССР, 1964. 186 с.

17. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М. : Наука, 1967. 472 с.

18. *Coppel, W. A.* Dichotomies in stability theory. Berlin – Heidelberg – New York : Springer–Verlag, 1978. VI+102 p. (Lecture Notes in Mathematics ; 629). DOI: 10.1007/BFb0067780.

19. *Hartman, P.* Ordinary differential equations. New York – London – Sydney : John Wiley and Sons, Inc., 1964. XIV+612 p.

20. *Massera, J. L.*, *Schäffer, J. J.* Linear Differential Equations and Function Spaces. University of Michigan : Academic Press, 1966. 404 p. (Pure and applied mathematics ; 21).

21. *Hille, E.*, *Phillips, R. S.* Functional Analysis and Semi-groups. Providence, R.I. : American Math. Soc., 1957. XII+808 p. (Colloquium publications ; 31).

22. *Yosida, K.* Functional Analysis. Berlin – Heidelberg : Springer-Verlag, 1965. XI+458 p. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften ; 123). DOI: 10.1007/978-3-662-25762-3.

23. *Katō, T.* Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin – Heidelberg : Springer-Verlag, 1966. XIX+592 p. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften ; 132). DOI: 10.1007/978-3-662-12678-3.

24. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М. : Наука, 1967. 464 с. (Современные проблемы математики). **English translation:** *Krein, S. G.* Linear Differential Equations in Banach Space. American Math. Soc., Providence, R.I., 1972. 390 p. (Translations of Mathematical Monographs ; 29).

25. *Goldstein, J. A.* Semigroups of Linear Operators and Applications. New York : Oxford University Press, 1985. 245 p. (Oxford mathematical monographs).

26. *Крейн С. Г., Хазан М. И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Итоги науки и техники. Сер. матем. анализ. ВИНИТИ, 1983. № 21. с. 130—264. **English translation:** *Krein, S. G., Khazan, M. I.* Differential equations in a Banach space // J Math Sci. 1985. Vol. 30. P. 2154–2239. DOI: 10.1007/BF02105398.

27. *Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. матем. анализ. ВИНИТИ, 1990. № 28. с. 87—202. **English translation:** *Vasil'ev, V. V., Krein, S. G., Piskarev, S. I.* Semigroups of operators, cosine operator functions, and linear differential equations // J Math Sci. 1991. Vol. 54. P. 1042–1129. DOI: 10.1007/BF01138948.

28. *Соломяк М. З.* Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха // Докл. АН СССР. 1958. т. 22, № 5. с. 766—769.

29. *Travis, C. C., Webb, G. F.* Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1978. Vol. 32, no. 1/2. P. 75–96. DOI: 10.1007/BF01902205.

30. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. 204 с. **English translation:** *Levitan, B. M., Zhikov, V. V.* Almost periodic functions and differential equations. Cambridge – New York : Cambridge Univ. Press, 1982. XI+211 p.

31. *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. К. : Наук. думка, 1985. 184 с. **English translation:** *Pankov, A. A.* Bounded and Almost Periodic Solutions of Nonlinear Operator Differential Equations. Springer Dordrecht, 1990. X+221 p. DOI: 10.1007/978-94-011-9682-6.

32. *Henry, D.* Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Berlin – Heidelberg – New York : Springer–Verlag, 1981. VI+350 p. (Lecture Notes in Mathematics ; 840). DOI: 10.1007/BFb0089647.

33. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. К. : Наук. думка, 1990. 272 с.

34. *Чуешов И. Д.* Введение в теорию бесконечномерных диссипативных систем. Х. : Акта, 1999. 435 с. **English translation:** *Chueshov, I. D.* Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems. ACTA, Kharkiv, 2002. 420 p.

35. *Слюсарчук В. Ю.* Диференціальні рівняння в банаховому просторі. Рівне : Вид-во Національного університету водного господарства та природокористування, 2006. 314 с.

36. *Мухамадиев Э.* Об обратимости дифференциальных операторов в пространстве непрерывных и ограниченных на оси функций // Докл. АН СССР. 1971. т. 196, № 1. с. 47—49. **English translation:** *Mukhamadiev, Eh.* On invertibility of differential operators in the space of continuous functions bounded on the real axis // Sov. Math., Dokl. 1971. Vol. 12. P. 49–52.

37. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Матем. заметки. 1972. т. 11, № 3. с. 269—271. **English translation:** *Mukhamadiev, É.* On the inversion of functional operators in a space of functions bounded on the axes // Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1972. Vol. 11. P. 169–172. DOI: 10.1007/BF01098519.

38. *Самойленко В. Г., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей действительной оси решения систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений и их свойства // Укр. матем. журн. 1994. т. 46, № 6. с. 737—

747. **English translation:** *Samoilenko, V. G., Pelyukh, G. P.* Solutions of systems of nonlinear functional-differential equations bounded in the entire real axis and their properties // Ukr. Math. J. 1994. Vol. 46. P. 799–811. DOI: 10.1007/BF02658181.

39. *Бойчук О. А.* Розв'язки слабко нелінійних диференціальних рівнянь, обмежені на всій осі // Нелінійні коливання. 1999. т. 2, № 1. с. 3—10.

40. *Самойленко А. М., Бойчук А. А., Бойчук Ан. А.* Ограниченные на всей оси решения линейных слабовозмущенных систем // Укр. матем. журн. 2002. т. 54, № 11. с. 1517—1530. **English translation:** *Samoilenko, A. M., Boichuk, A. A., Boichuk, An. A.* Solutions of Weakly-Perturbed Linear Systems Bounded on the Entire Axis // Ukr. Math. J. 2002. Vol. 54. P. 1842–1858. DOI: 10.1023/A:1024096409088.

41. *Бойчук О. А., Журавльов В. П., Покутний О. О.* Обмежені розв'язки еволюційних рівнянь // Укр. матем. журн. 2018. т. 70, № 1. с. 7—28. **English translation:** *Boichuk, O. A., Zhuravl'ov, V. P., Pokutnyi, O. O.* Bounded Solutions of Evolutionary Equations // Ukr. Math. J. 2018. Vol. 70, iss. 1. P. 5–29. DOI: 10.1007/s11253-018-1485-0.

42. *Баскаков А. Г.* Спектральные свойства дифференциального оператора $\dfrac{d}{dt} - A_0$ с неограниченным оператором A_0 // Дифференц. уравнения. 1991. т. 27, № 12. с. 2162—2164.

43. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. 2013. т. 68, 1 (409). с. 77—128. **English translation:** *Baskakov, A. G.* Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations // Russian Math. Surveys. 2013. Vol. 68, iss. 1. P. 69–116. DOI: 10.1070/RM2013v068n01ABEH004822.

44. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування і єдиності обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. матем. журн. 2009. т. 61, № 2. с. 268—279. **English translation:** *Slyusarchuk, V. Y.* Conditions for the existence and uniqueness of bounded solutions of nonlinear differential equations // Ukr. Math. J. 2009. Vol. 61, iss. 2. P. 320–335. DOI: 10.1007/s11253-009-0204-2.

45. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. матем. журн. 2013. т. 65, № 2. с. 307—312. **English translation:** *Slyusarchuk, V. Y.* Conditions for the existence of almost periodic solutions of nonlinear differential equations in Banach spaces // Ukr. Math. J. 2013. Vol. 65. P. 341–347. DOI: 10.1007/s11253-013-0781-y.

46. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. 2019. т. 22, № 4. с. 532—547. **English translation:** *Slyusarchuk, V. Y.* Almost Periodic Solutions of Differential Equations // J. Math. Sci. 2021. Vol. 254, iss. 2. P. 287–304. DOI: 10.1007/s10958-021-05305-6.

47. *Бігун Д. С., Покутний О. О., Ключник І. Г. та ін.* Обмежені розв'язки еволюційних рівнянь. I // Нелінійні коливання. 2020. т. 23, № 3. с. 291—320. **English translation:** *Bihun, D. S., Pokutnyi, O. O., Kliuchnyk, I. G. et al.* Bounded Solutions of Evolutionary Equations. I // J. Math. Sci. 2022. Vol. 261, iss. 2. P. 195–227. DOI: 10.1007/s10958-022-05747-6.

48. *Чайковський А., Лагода О.* Про експоненціальну дихотомію для абстрактних диференціальних рівнянь із запізненням аргументу // Укр. матем. журн. 2023. т. 75, № 8. с. 1139—1148. DOI: 10.3842/umzh.v75i8.7576. **English translation:** *Chaikovs'kyi, A., Lagoda O.* On Exponential Dichotomy for Abstract Differential Equations with Delayed Argument // Ukr. Math. J. 2024. Vol. 75, iss. 8. P. 1302–1312. DOI: 10.1007/s11253-023-02263-x.

49. *Perron, O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichnungen // Math. Z. 1930. Jg. 32, Nr. 5. S. 703–728.

50. *Майзель А. Д.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений // Тр. Уральск. политехн. ин-та. Сер. матем. 1954. № 1. с. 20—50.

51. *Жиков В. В.* Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. т. 40, № 6. с. 1380—1408. **English translation:** *Zhikov, V. V.* Some admissibility and dichotomy questions. The averaging principle. Math. USSR-Izv., 1976. **10** (6). P. 1307–1332. DOI: 10.1070/IM1976v010n06ABEH001836.

52. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прилож. 1996. т. 30, № 3. с. 3—11. **English translation:** *Baskakov, A. G.* Semigroups of difference operators in spectral analysis of linear differential operators // Funct Anal Its Appl. 1996. Vol. 30, iss. 3. P. 149–157. DOI: 10.1007/BF02509501.

53. *Баскаков А. Г.*, *Пастухов А. И.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. матем. журн. 2001. т. 42, № 6. с. 1231—1243. **English translation:** *Baskakov, A. G., Pastukhov, A. I.* Spectral Analysis of a Weighted Shift Operator with Unbounded Operator Coefficients // Siberian Mathematical Journal. 2001. Vol. 42. P. 1026–1035. DOI: 10.1023/A:1012832208161.

54. *Karpenko, O.*, *Stanzhytskyi, O.* The relation between the existence of bounded solutions of differential equations and the corresponding difference equations // Journal of Difference Equations and Applications. 2013. Vol. 19, no. 12. P. 1967–1982. DOI: 10.1080/10236198.2013.794795.

55. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. К. : Вища школа, 1992. 319 с.

56. *Городній М. Ф.* Обмежені та сумовні розв'язки одного різницевого рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Укр. матем. журн. 2022. т. 74, № 7. с. 930—938. DOI: 10.37863/umzh.v74i7.7087. **English translation:** *Horodnii, M. F.* Bounded and Summable Solutions of a Difference Equation with Piecewise-Constant Operator Coefficients // Ukr. Math. J. 2022. Vol. 74, iss. 7. P. 1063–1072. DOI: 10.1007/s11253-022-02120-3.

57. *Крейн М. Г.*, *Лангер Г. К.* К теории квадратичных пучков самосопряженных операторов // Докл. АН СССР. 1964. т. 154, № 6. с. 1258—1261. **English translation:** *Krejn, M. G., Langer, G. K.* A contribution to the theory of quadratic pencils of self-adjoint operators // Sov. Math., Dokl. 1964. Vol. 5. P. 266–269.

58. *Крейн М. Г.*, *Лангер Г. К.* О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуума // Труды Международного симпозиума в Тбилиси «Приложение теории функций в механике сплошной среды», 2. М. : Наука, 1965.

59. *Якубов С. Я.*, *Балаев М. К.* Корректная разрешимость дифференциально-операторных уравнений на всей оси // Докл. АН СССР. 1976. т. 229, № 3. с. 562—565. **English translation:** *Yakubov, S. Ya., Balaev, M. K.* Correct solvability of differential operator equations on the entire axis // Sov. Math., Dokl. 1977. Vol. 17 (1976). P. 1078–1082.

60. *Алиев И. В.* Корректная разрешимость задачи Штурма-Лиувилля с операторным коэффициентом на всей оси // Докл. АН АзССР. 1978. т. 34, № 12. с. 9—14.

61. *Мигдашиев И. М.* Корректность разностных схем для дифференциально-операторных уравнений эллиптического типа // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1980. № 1. с. 115—123.

62. *Popescu, N.* Equations differentielles de deuxieme ordre et operateurs hermitien-equivalents dans les espaces de Banach // "Proc. 4-th Conf. Oper. Theory, Timișoara, 1979". Timișoara, 1980. P. 270-275.

63. *Эдельштейн С. Л.* Операторные аналоги оценок типа ВКБ и разрешимость краевых задач // Матем. заметки. 1992. т. 51, № 4. с. 124—131. **English translation:** *Édel'shtein, S. L.* Operator analogs of VKB-type estimates and the solvability of boundary-value problems // Math. Notes. 1992. Vol. 51, iss. 4. P. 411–416. DOI: 10.1007/BF01250557.

64. *Чан Хыу Бонг.* О некоторых условиях обратимости C-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Докл. РАН. 1993. т. 329, № 3. с. 278—280. **English translation:** *Chan Khyu Bong.* Some conditions for the invertibility of C-continuous functional-differential operators // Russian Acad. Sci. Dokl. Math. 1993. Vol. 47, No. 2. P. 239–242.

65. *Dorogovtsev A. Ya.* Bounded solutions of abstract equations // Novi Sad J. Math. 2000. Vol. 30, no. 1. P. 59–67.

66. *Goldstein, J. A.* On a connection between first and second order differential equations in banach spaces // J. Math. Anal. Appl. 1970. Vol. 30, no. 2. P. 246–251. DOI: 10.1016/0022-247X(70)90158-7.

67. *Travis, C. C., Webb, G. F.* Second order differential equations in Banach space // Proceedings of an International Symposium on Nonlinear Equations in Abstract Spaces, Held at the University of Texas at Arlington, Arlington, Texas, June 8-–10, 1977. 1978. P. 331–361. DOI: 10.1016/B978-0-12-434160-9.50025-4.

68. *Fattorini, H. O.* Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces. Amsterdam : North-Holland, 1985. 314 p. (North Holland Mathematics Studies ; 108).

69. *Мельникова И. В.*, *Филинков А. И.* Классификация и корректность задачи Коши для уравнений второго порядка в банаховом пространстве // Докл. АН СССР. 1984. т. 276, № 5. с. 1066—1071. **English translation:** *Mel'nikova, I. V., Filinkov, A. I.* Classification and well-posedness of the Cauchy problem for second-order equations in a Banach space // Sov. Math., Dokl. 1984. Vol. 29. P. 646–651.

70. *Мельникова И. В.*, *Филинков А. И.* Связь корректности задачи Коши для уравнения и системы в банаховом пространстве // Докл. АН СССР. 1988. т. 300, № 2. с. 280—284. **English translation:** *Mel'nikova, I. V., Filinkov, A. I.* The connection between well-posedness of the Cauchy problem for an equation and for a system in a Banach space // Sov. Math., Dokl. 1988. Vol. 37. P. 647–651.

71. *Вятчанінов О. В.* Сумовні зі степенем p рекурентні послідовності в банаховому просторі // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. 2010. 2. с. 40—44.

Додаток А

СПИСОК ПРАЦЬ, ОПУБЛІКОВАНИХ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. *Городній М. Ф., Печериця О. А.* Обмежені розв'язки диференціального рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Нелінійні коливання. 2021. т. 24, No 2. с. 147–157. URL: https://www.imath.kiev.ua/~nosc/web/show_article.php?article_id=1343&lang=ua;

   English translation: *Horodnii, M. F., Pecherytsia, O. A.* Bounded Solutions of a Differential Equation with Piecewise Constant Operator Coefficients // J. Math. Sci. 2023. Vol. 270, iss. 6. P. 237–249. DOI: 10.1007/s10958-023-06343-y.
2. *Городній М. Ф., Печериця О. А.* Обмежені розв'язки диференціального рівняння другого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Нелінійні коливання. 2023. т. 26, No 3. с. 342–349. DOI: 10.3842/nosc.v26i3.1436.
3. *Городній М. Ф., Печериця О. А.* Обмежені розв'язки одного нелінійного диференціального рівняння в банаховому просторі // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика». 2023. т. 43, No 2. с. 22–28. DOI: 10.24144/2616-7700.2023.43(2).22-28.

Наукові праці, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. *Городній М. Ф., Печериця О. А.* Про обмежені розв'язки різницевого рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Матеріали XIX Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2021: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний

аналіз». Київ, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2021. с. 11.

2. *Городній М. Ф., Печериця О. А.* Про обмежені на R розв'язки диференціальних рівнянь з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Матеріали XX Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2022: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». Київ, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2022. с. 24–25.
3. *Pecherytsia, O.* On bounded solutions of a second-order differential equation with piecewise constant operator coefficients // Book of Abstracts. "11th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications". Istanbul, Yildiz Technical University, 2022. P. 70.
4. *Городній М. Ф., Печериця О. А.* Про обмежені розв'язки диференціального рівняння другого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2023: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз. Методика викладання математики». Київ, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2023. с. 13–14.

Додаток Б

ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ НАУКОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Наукові та науково-практичні конференції

1. XIX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна — 2021: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». 15 – 16 квітня 2021 року. Україна, м. Київ.
2. XX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна — 2022: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». 14 – 15 квітня 2022 року. Україна, м. Київ.
3. 11th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2022). August 29 — September 1, 2022. Istanbul, Türkiye.
4. XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2023: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз. Методика викладання математики». 14 квітня 2023 року. Україна, м. Київ.

Наукові семінари

1. Науковий семінар з диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Наукові керівники – професор, доктор фізико-математичних наук О. В. Капустян і професор, доктор фізико-математичних наук О. М. Станжицький. 1 лютого 2024 року. Україна, м. Київ.